PRECÁLCULO

FUNCIONES Y GRÁFICAS

$f(x) = (3x + 4)^{...}$

Raymond A. Barnett
Michael R. Ziegler
Karl E. Byleen



cuarta edición

PREFACIO

Precálculo: Funciones y gráficas es uno de los tres libros de precálculo en la serie del autor. En esta edición se incluyeron varias mejoras gracias a la generosa respuesta de un gran número de usuarios de la edición anterior, así como a los resultados del trabajo de investigación de los instructores, al trabajo de los departamentos de matemáticas, de los organizadores de cursos y de los catálogos de las escuelas. También es fundamental para el mejoramiento y efectividad del libro, su uso en el salón de clase y su retroalimentación, ambas condiciones de las que esta cuarta edición de *Precálculo: Funciones y gráficas* se ha beneficiado ampliamente.

Énfasis y estilo

El texto está escrito para ser comprendido por los estudiantes. Se puso gran cuidado en que su contenido fuera matemáticamente correcto y accesible a los estudiantes. Se puso mayor énfasis en las habilidades computacionales, ideas y en la resolución de problemas que en la teoría matemática. Se omitieron la mayoría de las derivaciones y pruebas excepto en los casos en que su inclusión clarifica de manera importante la comprensión de un concepto en particular. A menudo los conceptos generales y resultados se presentan hasta después de haber analizado los casos particulares.

Ejemplos y problemas seleccionados

Se incluyeron más de 375 ejemplos totalmente resueltos para introducir conceptos y para demostrar las diversas técnicas en la solución de problemas. Después de cada ejemplo se incluyen problemas similares seleccionados para que el estudiante los resuelva mientras lee el material. Esto involucra de manera activa al estudiante en el proceso de aprendizaje. Al final de cada sección se incluyen las respuestas de los problemas seleccionados para que se encuentren fácilmente.

Exploración, análisis y grupo de actividades

Cada sección contiene cuadros de exploración y análisis, colocados en lugares adecuados, con el fin de animar a los estudiantes a pensar acerca de la relación o proceso antes de que se dé el resultado o para investigar otras consecuencias de un desarrollo en el texto, así como el de motivarlos a verbalizar los conceptos matemáticos, resultados y procesos, como se hace con los problemas seleccionados y en problemas particulares en casi cada conjunto de ejercicios. El material de exploración y análisis también se puede usar tanto en clase como en actividades de grupo extraescolares. Además, antes del repaso incluido al final de cada capítulo, se insertó un capítulo especial de actividades en grupo que involucran diferentes conceptos analizados en el mismo. Todas estas actividades especiales se resaltan para enfatizar su importancia.

Conjuntos de ejercicios

El libro contiene más de 5 600 problemas. Cada conjunto de ejercicios está diseñado de manera que un estudiante promedio o por debajo de él experimente el éxito y de que represente un reto para un estudiante muy capaz. La mayoría de los conjuntos de ejerci-

cios están divididos en los niveles A (de rutina, fácil mecanización), B (mecanización más difícil), C (mecanización difícil y algo de teoría) y aplicaciones. Los problemas de aplicación más difíciles están marcados con dos estrellas (**), los de aplicación moderadamente difícil con una (*), y los de aplicación más fácil no están marcados. Note, por favor, que a veces se le pide al estudiante realizar los ejercicios a mano y después comprobar sus resultados con la ayuda de un dispositivo de graficación, aunque el uso de éste es opcional.

Aplicaciones

Uno de los principales objetivos de este libro es proporcionar a los estudiantes una experiencia importante en el modelamiento y resolución de problemas del mundo real. Se incluyen suficientes aplicaciones para convencer aun al más escéptico de que las matemáticas son realmente útiles. Se incluye también un índice de aplicaciones para ayudar a la localización de algunas en particular. La mayoría de las aplicaciones son versiones simplificadas de problemas del mundo real, tomados de revistas y libros profesionales, por lo que no es necesario ser especialista para resolver cualquiera de las aplicaciones.

Como muchos estudiantes se preparan para el estudio de cálculo con este libro, los ejemplos y ejercicios que son especialmente adecuados para esta materia se marcan con $\int$.

Tecnología

El término genérico "dispositivo de graficación" se usa para referirse a cualesquiera de las diferentes calculadoras gráficas o paquetes de software para computadora de los que podría disponer el estudiante que usa este libro. Aun cuando el uso de un dispositivo de graficación es opcional, es común que muchos estudiantes y maestros quieran usar alguno, así que para ayudarlos desde el capítulo 3 hasta el final del libro, se incluyeron actividades opcionales en las que se puede usar algún dispositivo de graficación. Se incluyen además breves análisis, ejemplos o partes de ejemplos resueltos con un dispositivo de graficación, y también problemas para que el estudiante los resuelva. Todo el material que ofrece la opción de usar un dispositivo de graficación esta claramente identificado con el símbolo y se puede omitir sin que se pierda la continuidad, si así se desea.

Gráficas e ilustraciones

Todas las gráficas e ilustraciones incluidas en esta edición son nuevas. El total de las gráficas se realizaron por computadora para asegurar su exactitud matemática. Las pantallas del dispositivo de graficación que se muestran en el texto son las salidas reales de una calculadora gráfica.

Ayudas importantes a los estudiantes

Para indicar las **anotaciones** de ejemplos y su desarrollo se usan leyendas a color, esto con la finalidad de ayudar a los estudiantes a superar las etapas críticas. Los cuadros con líneas discontinuas (**cuadros para pensar**) se usan para encerrar los pasos que a menudo se realizan mentalmente. Los **cuadros con pantalla** (sombreados) se utilizan para resaltar definiciones importantes, teoremas, resultados y procesos paso a paso. Los **cuadros de atención** aparecen en las partes del texto en las que es frecuente que los estudiantes se equivoquen (véase la sección 1-7). **El uso funcional de cuatro colores** mejora la claridad de muchas ilustraciones, gráficas y desarrollos, y guía a los estudiantes a través de ciertos pasos críticos. **Las letras negritas** se usan para introdu-

cir nuevos términos y resaltar comentarios importantes. **Las secciones de repaso del capítulo**, incluyen un repaso de todos los términos importantes y símbolos, así como un extenso ejercicio de repaso. **Los ejercicios de repaso acumulativos** que se encuentran después de cada segundo o tercer capítulo proporcionan práctica adicional a los estudiantes. **Las respuestas a los ejercicios de repaso**, insertados en secciones adecuadas, se incluyen al final del libro. **Las respuestas a todos los demás problemas impares** también se encuentran al final del libro. **Los resúmenes de fórmulas y símbolos** (colocados en las secciones en que se introdujeron) se encuentran en las solapas interiores del libro para una adecuada referencia.

Cambios principales de la tercera edición

Como antes se mencionó, las actividades de exploración y análisis se distribuyeron de manera uniforme en todo el libro. Esos nuevos elementos incluyen preguntas de exploración y análisis en el texto y en los conjuntos de ejercicios, así como en las actividades de grupo del capítulo. El material en el que el uso de los dispositivos de graficación es opcional está también distribuido uniformemente.

En el capítulo 1, las ecuaciones lineales y sus aplicaciones se abordan en una sección, y se agregó una nueva en la que se estudian los sistemas de ecuaciones lineales y sus aplicaciones.

En el capítulo 2, se combinaron las secciones de ayudas para graficación de funciones y operaciones con funciones, esto con el fin de exponer estos temas en forma más concisa. Además se trasladó la sección sobre funciones racionales al capítulo 3.

Se organizó y revisó ampliamente el material del capítulo 3, esto debido en gran parte al efecto que los dispositivos de graficación han tenido en algunos de esos temas. La sección 3-2 trata ahora con los métodos para encontrar las raíces exactas, incluyendo todas las raíces racionales, y en la sección 3-3 se realiza un acercamiento a las raíces reales.

En el capítulo 6, se resumieron en una sección los métodos para resolver ecuaciones trigonométricas; de nuevo se refleja algo del impacto que la tecnología ha tenido en la resolución de ecuaciones. En el capítulo 7, se resumió también en una sola sección el tratamiento de coordenadas polares y gráficas polares.

Como en esta edición se aborda en el capítulo 1 la resolución de dos ecuaciones lineales con dos variables, la primera sección del capítulo 8 ahora se concentra en los métodos gráficos y métodos para matrices, y en el capítulo 9 se dedica una sección a la suma y multiplicación de matrices.

Las técnicas de conteo se cambiaron al capítulo 10 y se eliminó el material restante de probabilidad.

Material de apoyo

Un conjunto amplio de materiales de apoyo, tanto para el estudiante como para el maestro, está disponible para usarse con este texto.

Libro del maestro: Este auxiliar contiene todo el material del texto de la edición para el estudiante, además las respuestas a todos los ejercicios del libro de texto. (La edición para el estudiante contiene las respuestas a los ejercicios seleccionados.)

Manual de soluciones para el estudiante: Este suplemento, escrito por Fred Safier del City College de San Francisco, está disponible a la venta al estudiante, e incluye soluciones detalladas de todos los problemas impares y de la mayoría de los ejercicios de repaso.

Manual de soluciones para el maestro: Este manual, escrito por John R. Martin del Tarrant County Junior College, proporciona soluciones a los problemas pares y respuestas a todos los problemas del texto.

Manual de recursos del maestro: Este suplemento proporciona transparencias maestras y exámenes muestra, preparados por Mark Serebransky del Camded County College, para cada capítulo del texto.

Banco de reactivos impresos y en disquetes: Se dispone de un banco de reactivo para computadora, preparado por la compañía ESA con la colaboración de Thomas Roe de la South Dakota State University, dicho banco proporciona una variedad de formatos que le permiten al maestro crear pruebas usando tanto preguntas de examen generadas mediante algoritmos como mediante el banco de reactivos estático. Este sistema de exámenes le permite al maestro escoger preguntas, ya sea manual o aleatoriamente por secciones, tipos de preguntas, nivel de dificultad y otros criterios. Este software de exámenes está disponible para computadoras personales y Macintosh. Una versión del banco de reactivos, impresa en pasta suave, preparada por Mark Stevenson del Oakland Community College, proporciona la mayoría de las preguntas que se encuentran en la versión para computadora.

Series de video por Barnett/Ziegler/Byleen: Curso en video, nuevo y creado para esta edición, proporciona a los estudiantes refuerzos para la comprensión de los temas presentados en el libro, ubicados de manera específica en el texto y que poseen una efectiva combinación de los métodos de aprendizaje, incluyendo la instrucción personal, gráficas en el estado del arte y aplicaciones del mundo real.

Diagrama interactivo en CD-ROM: Este paquete de software está disponible a la venta para el estudiante. Este CD contiene 45 diagramas interactivos que se diseñaron para usarse con este libro. Cada diagrama interactivo (DI) es una versión separada de Java Aplett que contiene una ilustración que el usuario puede manipular para ir más allá de la comprensión conceptual del tema presentado. En cada sección del texto para el que se ha creado un DI, se ha colocado un icono en el margen.

Tutorial con multimedia: Este suplemento de multimedia es un tutorial autorregulado, relacionado de manera específica con el texto y refuerza los temas mediante infinidad de oportunidades para repasar conceptos y practicar la solución de problemas.

Además de los materiales de apoyo mencionados, se está desarrollando otro tipo de tecnología y apoyos auxiliares en red, que darán soporte a las necesidades de la tecnología siempre cambiante en álgebra universitaria y precálculo. Para mayor información acerca de éstos o cualquiera de los suplementos, por favor contacte a su representante de ventas local de McGraw-Hill.

Exactitud

Debido a la cuidadosa revisión y prueba de la obra por diferentes maestros de matemáticas (realizada en forma independiente), los autores y editores creemos que está sustancialmente libre de errores. Sin embargo, si encontrara alguno, le agradeceríamos que enviara sus observaciones a: Michael R. Ziegler, 509 West Dean Court, Fox Point, WI 53217; o, por email, a *michaelziegler@execpc.com.*

Reconocimientos

Además de los autores, muchas personas participaron en la publicación exitosa del libro. Nos gustaría agradecer personalmente a:

Revisores del manuscrito: Yungchen Chen, S. W. Missouri State University; Allan Cochran, University of Arkansas; Wayne Ehler, Anne Arundel Community College; Abdulla Elusta, Broward Community College; Betsy Farber, Bucks County Community College; Jeffrey Graham, Western Carolina University; Selwyn Hollis, Armstrong Atlantic State University; Randal Hoppens, Blinn College; Linda Horner, Broward Community College-N. Campus; Beverly Reed, Kent State University; Mike Rosenthal,

Florida International University; Robert Woodside, East Carolina State University; Mary Wright, Southern Illinois University. Revisores del contenido: Diane Abbott, Bowling Green State University; Jeff Brown, University of North Carolina en Wilmington; Kimberly Brown, Tarrant County Junior College; Roxanne Byrne, University of Colorado en Denver; Harold Carda, South Dakota School of Mines and Technology; Elizabeth Chu, Sussex County Community College; Karin Deck, University of North Carolina en Wilmington; Michelle Diehl, University of Nuevo Mexico; Mary Ehlers, Seattle University; Laura Fernelius, University of Wisconsin en Oshkosh; Larry Friesen, Butler County Community College; Doris Fuller, Virginia State University; Dan Gardner, Elgin Community College; Sheryl Griffith, Iowa Central Community College; Vernon Gwaltney, John Tyler Community College; Brian Jackson, Connor's State College; Nancy Johnson, Manatee Community College; Klaus Kaiser, University of Houston; Warren Koepp, Texas A&M at Commerce; Sonja Kung, University of Wisconsin at Seven's Point; Mark Lesperance, Kansas State University; Carol Lucas, University of Kansas; Richard Mason, Indian Hills Community College; Michael Montano, Riverside Community College; Patricia Moreland, Cowley County Community College; Arumudan Muhundan, Manatee Community College; Milt Myers, Delaware County Community College; Richard Nadel, Florida International University; Vicki Partin, Lexington Community College; Gloria Phoenix, North Carolina Agricultural & Technical State University; Donna Russo, Quincy College; Jean Sanders, University of Wisconsin en Platteville; Ellen Scheiber, Drexel University; Patricia Schmidt, University of Pittsburgh en Greensburg; Samkar Sethuraman, Augusta State University; James Shockley, Virginia Polytechnic Institute; Lora Stewart, Cosumnes River College; Joseph Sukta, Moraine Valley Community College; Hussain Talibi, Tuskegee University; Stuart Thomas, University of Oregon; James Ward, Pensacola Junior College; Lyndon Weberg, University of Wisconsin; Chad Wheatley, Delaware Technical & Community College; Edward White, Frostburg State University; Clifton Whyburn, University of Houston; Tom Williams, Rowan-Cabarrus Community College.

También quisiéramos agradecer a:

Gholamhoessein Hamedani y Caroline Woods por proporcionar una cuidadosa y completa comprobación de todos los cálculos matemáticos en el libro, y en el manual de soluciones y respuestas para el estudiante (un laborioso y muy importante trabajo).

Todos los autores de los suplementos por desarrollar los manuales de ayuda que son tan importantes para el éxito de un texto.

Jeanne Wallace por la producción exacta y eficiente de la mayor parte de los manuales que apoyan el texto.

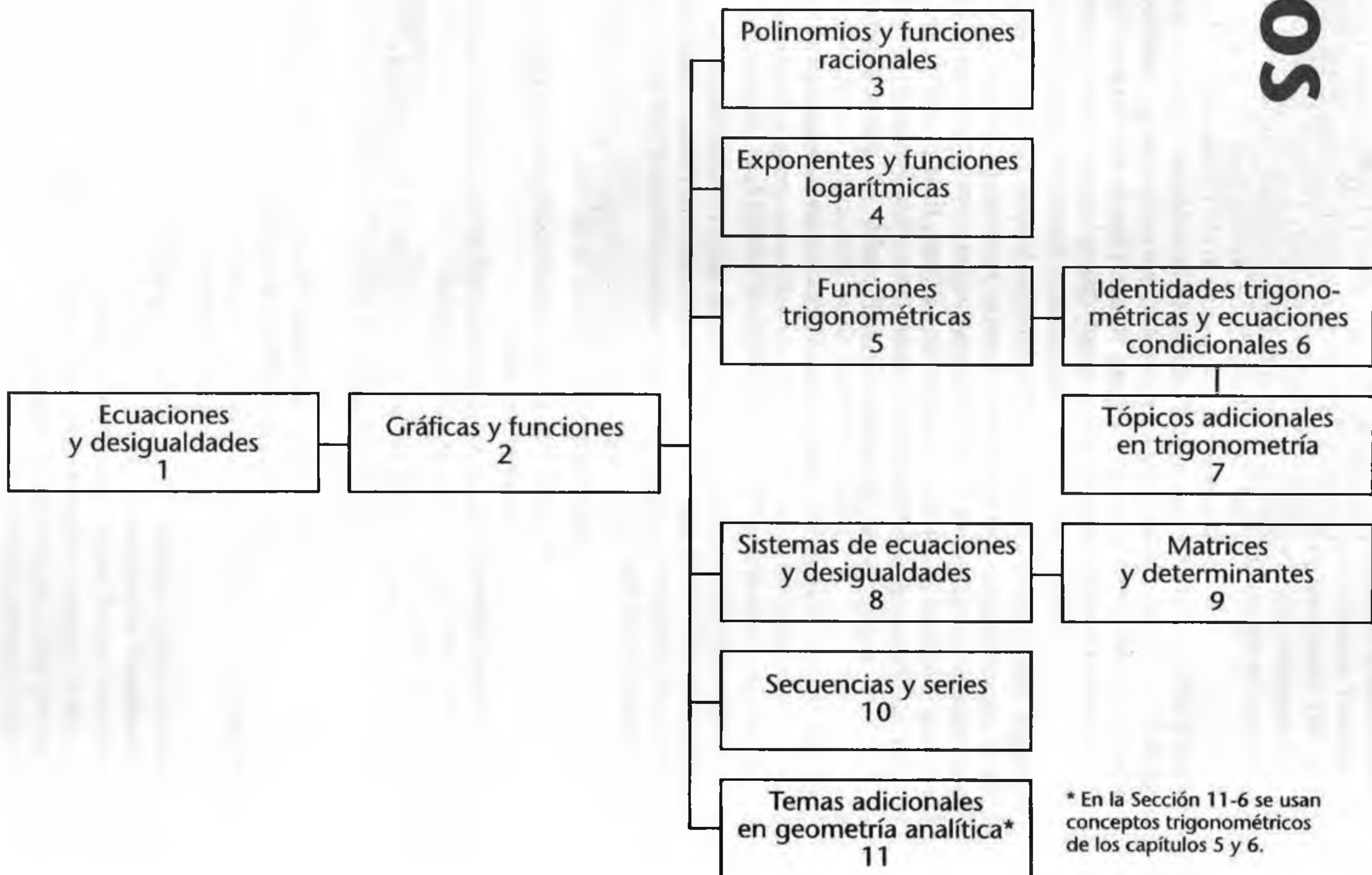
George Morris y su equipo de ilustradores científicos, por sus efectivas ilustraciones y exactitud en las gráficas.

Maggie Rogers, Robert Preskill, Paul Murphy, Nina Kreiden y todas las demás personas de McGraw-Hill que contribuyeron con su esfuerzo para la producción de este libro.

El realizar esta nueva edición con la ayuda de todas estas personas tan competentes ha sido la más satisfactoria experiencia.

R. A. Barnett
M. R. Ziegler
K. E. Byleen

ORGANIZACIÓN Y DEPENDENCIA DE LOS CAPÍTULOS



AL ESTUDIANTE

Para ayudarle a obtener lo mejor de este libro, y de su esfuerzo, se sugiere lo siguiente.

Estudie el texto siguiendo el proceso de cinco pasos que en seguida se enumera. Para cada sección:

1. Lea un desarrollo matemático.
2. Trabaje mediante los ejemplos ilustrativos.
3. Trabaje el problema seleccionado.

} Repita el ciclo 1-2-3 hasta que haya terminado la sección.

4. Revise las ideas principales de la sección.
5. Realice los ejercicios asignados al final de cada sección.

Todo lo anterior se debe hacer con una calculadora, suficientes hojas de papel, lápices y un recipiente para la basura a la mano. De hecho, no se debería leer un libro de matemáticas sin lápiz y papel a la mano; las matemáticas no son un deporte para verse. Así como no se puede aprender a nadar observando nadar a otra persona, tampoco se puede aprender matemáticas sólo con estudiar los ejemplos resueltos (se deben resolver problemas, y montones de ellos).

Si tiene calculadora gráfica o acceso a una computadora con software matemático, como Maple o Mathematica, debe poner especial atención a los comentarios, cuadros de exploración y análisis y ejercicios marcados con el icono . Éste es material opcional que se ha incluido para ayudarle a aprender de manera efectiva el uso de la tecnología como parte del proceso en la solución de problemas. Si no tiene acceso a estos dispositivos, omita este material, ya que podría implicar cálculos que no se pueden realizar a mano.

Si se le dificulta con el curso, entonces, además de realizar las tareas regulares, invierta más tiempo en los ejemplos y problemas seleccionados y haga más ejercicios tipo A, aunque no se le hayan asignado. Si, por el contrario, le parece demasiado fácil, entonces realice más ejercicios tipo C y problemas de aplicación, aun cuando no se le hayan asignado.

Raymond A. Barnett
Michael R. Ziegler
Karl E. Byleen

CAPÍTULO 1

ECUACIONES Y DESIGUALDADES



$f(x) = |3x + 4| + 1$

Uno de los usos importantes del álgebra es la solución de ecuaciones y desigualdades. En este capítulo se abordarán los métodos para resolver ecuaciones y desigualdades lineales y no lineales. Además, se considerarán diferentes aplicaciones que se pueden resolver con éstos. En el capítulo 3 se analizarán otros métodos para resolver ecuaciones polinomiales.

SECCIÓN 1-1 Ecuaciones lineales y aplicaciones



- Ecuaciones
- Solución de ecuaciones lineales
- Una estrategia para resolver problemas con literales
- Problemas numéricos y geométricos
- Problemas de razón y tiempo
- Problemas con mezclas
- Algunas observaciones finales respecto de las ecuaciones lineales

Ecuaciones

Una **ecuación algebraica** es un enunciado matemático que relaciona dos expresiones algebraicas que involucran al menos una variable. Algunos ejemplos de ecuaciones con la variable x son

$$3x - 2 = 7 \qquad \frac{1}{1 + x} = \frac{x}{x - 2}$$

$$2x^2 - 3x + 5 = 0 \qquad \sqrt{x + 4} = x - 1$$

El **conjunto de reemplazo**, o **dominio**, de una variable se define como el conjunto de números que permiten reemplazar a la variable.

Suposición

Sobre los dominios de las variables

A menos que se establezca lo contrario, se supone que el dominio de una variable es el conjunto de aquellos números reales para el cual las expresiones algebraicas que implican la variable son números reales.

Por ejemplo, el dominio de la variable x en la expresión

$$2x - 4$$

es R, el conjunto de todos los números reales, como $2x - 4$ representa un número real para todos los reemplazos de x por números reales. El dominio de x en la ecuación

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{x - 3}$$

es el conjunto de todos los números reales excepto 0 y 3. Estos valores se excluyen, ya que el miembro izquierdo no está definido para $x = 0$ y el miembro derecho no está definido para $x = 3$.

Los miembros de la izquierda y derecha representan números reales para todos los otros reemplazos de x por números reales.

El **conjunto solución** de una ecuación se define como el conjunto de los elementos en el dominio de las variables que hacen que la ecuación sea verdadera. Cada elemento del conjunto solución se denomina **solución**, o **raíz** de la ecuación. **Resolver una ecuación** es encontrar el conjunto solución de la ecuación.

Una ecuación se llama **identidad** si la ecuación es verdadera para todos los elementos del dominio de la variable o **ecuación condicional** si es verdadera sólo para ciertos valores del dominio y falsa para otros. Por ejemplo,

$$2x - 4 = 2(x - 2) \qquad \text{y} \qquad \frac{5}{x^2 - 3x} = \frac{5}{x(x - 3)}$$

son identidades, ya que ambas ecuaciones son verdaderas para todos los elementos de los respectivos dominios de sus variables. Por otro lado, las ecuaciones

$$3x - 2 = 5 \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{x - 1} = \frac{1}{x}$$

son ecuaciones condicionales, puesto que, por ejemplo, ninguna de las ecuaciones es verdadera para el dominio con valor 2.

Saber el significado del conjunto solución de una ecuación es una cosa; encontrarlo es otra. Para este fin se introduce la idea de ecuaciones equivalentes. Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** si ambas tienen el mismo conjunto solución para un conjunto de reemplazo dado. Un método básico para resolver ecuaciones es realizar las operaciones sobre las ecuaciones que produzcan ecuaciones equivalentes más simples, y continuar el proceso hasta llegar a un punto en que la solución sea obvia.

La aplicación de alguna de las propiedades de igualdad que se explican en el Teorema 1, producirán ecuaciones equivalentes.

Teorema 1

Propiedades de igualdad

Para cualesquiera de los números reales a, b y c:

1. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$. — **Propiedad de suma**
2. Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$. — **Propiedad de resta**
3. Si $a = b$, entonces $ca = cb$, $c \neq 0$. — **Propiedad de multiplicación**
4. Si $a = b$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$. — **Propiedad de división**
5. Si $a = b$, entonces cualquiera de las dos puede reemplazar a la otra en cualquier enunciado sin cambiar la veracidad o falsedad de éste. — **Propiedad de sustitución**

• Solución de ecuaciones lineales

Ahora la atención se enfocará en los métodos para resolver *ecuaciones de primer grado o lineales* con una variable.

DEFINICIÓN 1 **Ecuación lineal con una variable**

Cualquier ecuación que se puede escribir en la forma

$$ax + b = 0 \qquad a \neq 0 \qquad \textbf{Forma estándar}$$

se denomina **ecuación lineal** o **de primer grado** con una variable, donde a y b son constantes reales y x es una variable.

$5x - 1 = 2(x + 3)$ es una ecuación lineal, porque se puede escribir en la forma estándar $3x - 7 = 0$.

EJEMPLO 1 **Solución de una ecuación lineal**

Resuelva $5x - 9 = 3x + 7$ y compruebe el resultado.

Solución Se usan las propiedades de igualdad para transformar la ecuación dada en una ecuación equivalente cuya solución sea obvia.

$5x - 9 = 3x + 7$	Ecuación original.
$5x - 9 + 9 = 3x + 7 + 9$	Sume 9 en ambos lados.
$5x = 3x + 16$	Combine términos semejantes.
$5x - 3x = 3x + 16 - 3x$	Reste $3x$ de ambos lados.
$2x = 16$	Combine términos semejantes.
$\frac{2x}{2} = \frac{16}{2}$	Divida ambos lados entre 2.
$x = 8$	Simplifique.

El conjunto solución para esta última ecuación es obvia:

Conjunto solución: $\{8\}$

Y como la ecuación $x = 8$ es equivalente a todas las ecuaciones anteriores a la solución, $\{8\}$ también es el conjunto solución de todas esas ecuaciones, incluyendo la ecuación original. [*Nota:* Si una ecuación sólo tiene un elemento en su conjunto solución, por lo general se usa la última ecuación (en este caso, $x = 8$) en lugar de usar la notación del conjunto para representar la solución.]

Comprobación

$5x - 9 = 3x + 7$	Ecuación original.
$5(8) - 9 \stackrel{?}{=} 3(8) + 7$	Sustituya $x = 8$.
$40 - 9 \stackrel{?}{=} 24 + 7$	Simplifique cada lado.
$31 = 31$	Un enunciado verdadero.

Problema seleccionado 1* Resuelva y compruebe: $7x - 10 = 4x + 5$

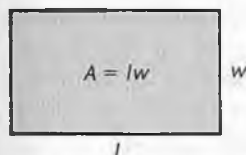


FIGURA 1 Área de un rectángulo.

Con frecuencia se encuentran ecuaciones que implican más de una variable. Por ejemplo, si l y w son la longitud y ancho de un rectángulo, respectivamente, su área se determinará por (véase la figura 1).

$$A = lw$$

Dependiendo del caso, se podría despejar esta ecuación por l o w. Para resolver por w, simplemente se considera que A y l son constantes y w es la variable. Entonces, la ecuación $A = lw$ se convierte en una ecuación lineal en la que w se puede despejar con facilidad al dividir ambos lados entre l:

$$w = \frac{A}{l} \qquad l \neq 0$$

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación con más de una variable

Encuentre P en términos de las otras variables: $A = P + Prt$

Solución

$$A = P + Prt \qquad \text{Considere a } A, r \text{ y } t \text{ como constantes.}$$

$$A = P(1 + rt) \qquad \text{Factorice para aislar } P.$$

$$\frac{A}{1 + rt} = P \qquad \text{Divida ambos lados entre } 1 + rt.$$

$$P = \frac{A}{1 + rt} \qquad \text{Restricción } 1 + rt \neq 0$$

Problema seleccionado 2 Encuentre F en términos de C: $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

Una estrategia para resolver problemas con literales

Gran parte de los problemas prácticos se pueden resolver mediante métodos algebraicos (son muchos), de hecho, no hay un método que funcione para todos. Sin embargo, se puede formular una estrategia que le ayudará a organizar su enfoque.

Estrategia para resolver problemas con literales

1. Lea el problema cuidadosamente (varias veces, si es necesario) hasta que entienda el problema; es decir, hasta saber qué se quiere encontrar y con qué datos se cuenta.

* Las respuestas a los problemas seleccionados en una sección dada se encuentran cerca del final de la sección, antes del conjunto de ejercicios.

2. Represente una de las cantidades desconocidas con una variable, por ejemplo x, e intente representar todas las otras cantidades desconocidas en términos de x. Éste es un paso importante y se debe realizar con cuidado.
3. Si lo considera pertinente, dibuje figuras o diagramas e identifique las partes conocidas y las incógnitas.
4. Busque las fórmulas que relacionan las cantidades conocidas con las incógnitas.
5. Forme una ecuación que relacione las incógnitas con las cantidades desconocidas.
6. Resuelva la ecuación y escriba las respuestas de todas las preguntas planteadas en el problema.
7. Compruebe e interprete todas las soluciones en términos del problema original (no sólo la ecuación encontrada en el paso 5), ya que se pudo haber cometido un error al establecer la ecuación en el paso 5.

El resto de los ejemplos de esta sección contiene soluciones de problemas diversos con literales, que ilustran tanto el proceso de establecimiento de problemas con literales como las técnicas que se usan para resolver las ecuaciones resultantes. Se sugiere que cubra la solución e intente resolver el problema, únicamente en caso de dificultad (que no pueda avanzar) descúbrala sólo lo suficiente para poder continuar. Después de terminar con éxito un ejemplo, intente resolver los problemas seleccionados. Continúe así hasta el final de la sección, entonces estará listo para intentar resolver una gran variedad de problemas con aplicaciones.

• Problemas numéricos y geométricos

Con los primeros ejemplos se introdujo el proceso de establecimiento y resolución de problemas con literales en un contexto matemático simple, los siguientes serán de naturaleza más sustancial.

EJEMPLO 3 **Establecimiento y resolución de un problema con literales**

Encuentre 4 enteros pares consecutivos de manera tal que la suma de los 3 primeros exceda al cuarto por 8.

Solución Sea x el primer entero par, entonces

$$x \qquad x+2 \qquad x+4 \qquad \text{y} \qquad x+6$$

represente 4 enteros pares consecutivos, comenzando con el entero par x. (Recuerde que los enteros pares aumentan de 2 en 2.) La frase "la suma de los 3 primeros excede al cuarto por 8" se traduce en una ecuación:

$$\text{Suma de los 3 primeros} = \text{cuarto} + \text{excedente}$$

$$\begin{aligned} x + (x+2) + (x+4) &= (x+6) + 8 \\ 3x + 6 &= x + 14 \\ 2x &= 8 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Los 4 enteros consecutivos son 4, 6, 8 y 10.

Comprobación

$4 + 6 + 8 = 18$	Suma de los tres primeros
-8	Excedente
10	Cuarto

Problema seleccionado 3 Encuentre 3 enteros impares consecutivos de tal manera que 3 veces su suma sea 5 más que 8 veces el entero de enmedio.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 De acuerdo con la propiedad 1 del Teorema 1, multiplique ambos lados de una ecuación por un número diferente de 0 que siempre produzca una ecuación equivalente. ¿Por qué número deberá multiplicar ambos lados de la ecuación siguiente para eliminar todas las fracciones?

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$$

Si no hubiera escogido 12, que es el mcd (mínimo común denominador) de todas las fracciones en esta ecuación, todavía podría resolver la ecuación resultante, pero con más esfuerzo. (Para un análisis de los mcd y cómo determinarlos, véase la sección A-4.)

EJEMPLO 4 **Uso de un diagrama para la solución de un problema con literales**

Si un lado del triángulo mide un tercio del perímetro, el segundo 7 metros y el tercero un quinto del perímetro, ¿cuánto mide el perímetro del triángulo?

Solución Sea p = perímetro. Dibuje un triángulo y marque los lados, como se muestra en la figura 2. Entonces

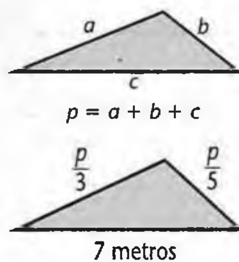


FIGURA 2

$$p = a + b + c$$

$$p = \frac{p}{3} + \frac{p}{5} + 7$$

$$15 \cdot p = 15\left(\frac{p}{3} + \frac{p}{5} + 7\right)$$

Multiplique ambos lados por 15, que es el mcd. Éste y el siguiente paso por lo general se realizan mentalmente.

$$15p = 15 \cdot \frac{p}{3} + 15 \cdot \frac{p}{5} + 15 \cdot 7$$

$$15p = 5p + 3p + 105$$

$$7p = 105$$

$$p = 15$$

El perímetro mide 15 metros.

* Cuando el libro se refiera a **cuadros para pensar** se estará hablando de los formatos con líneas discontinuas. éstos se usarán para representar los pasos que por lo general se realizan mentalmente.

Comprobación

$$\frac{p}{3} = \frac{15}{3} = 5 \quad \text{Lado 1}$$

$$\frac{p}{5} = \frac{15}{5} = 3 \quad \text{Lado 2}$$

$$7 \quad \text{Lado 3}$$

$$15 \text{ metros} \quad \text{Perímetro}$$

Problema seleccionado 4 Si un lado de un triángulo mide un cuarto del perímetro, el segundo 7 centímetros y el tercero dos quintos del perímetro, ¿cuánto mide el perímetro?

PRECAUCIÓN

Un error muy común que se puede cometer aquí es confundir *expresiones algebraicas* que implican fracciones, con ecuaciones algebraicas que también implican fracciones).

Considere estos dos problemas:

(A) Resuelva: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ (B) Sume: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 10$

Los problemas se parecen mucho, pero son de hecho muy diferentes. Para resolver la ecuación en (A) se multiplica ambos lados por 6 (el mcd) para eliminar las fracciones. Esto funciona muy bien para ecuaciones, pero los estudiantes quieren usar el mismo procedimiento para problemas como el (B). Sólo que (B) no es una ecuación, por lo tanto la propiedad de multiplicación para igualdades no es aplicable en este caso. ¡Si se multiplica a (B) por 6, lo que se obtiene es una expresión 6 veces más grande que la original! Compare lo siguiente:

(A) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$ (B) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 10$

$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} = 6 \cdot 10 \qquad = \frac{3 \cdot x}{3 \cdot 2} + \frac{2 \cdot x}{2 \cdot 3} + \frac{6 \cdot 10}{6 \cdot 1}$$

$$3x + 2x = 60 \qquad = \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} + \frac{60}{6}$$

$$5x = 60$$

$$x = 12 \qquad = \frac{5x + 60}{6}$$

• Problemas de razón y tiempo

Hay muchos tipos de problemas de razón y tiempo y de distancia, razón y tiempo. En general, si Q es la cantidad de algo que se produce (kilómetros, palabras, partes, etcétera) en T unidades de tiempo (horas, años, minutos, segundos, etcétera), entonces, las fórmulas que aparecen en el cuadro son importantes.

Fórmulas de cantidad, razón y tiempo

$$R = \frac{Q}{T} \qquad \text{Razón} = \frac{\text{Cantidad}}{\text{Tiempo}}$$

$$Q = RT \qquad \text{Cantidad} = (\text{Razón})(\text{Tiempo})$$

$$T = \frac{Q}{R} \qquad \text{Tiempo} = \frac{\text{Cantidad}}{\text{Razón}}$$

Si Q es la distancia D, entonces

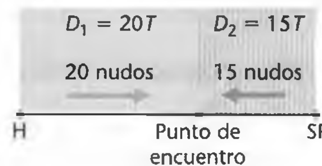
$$R = \frac{D}{T} \qquad D = RT \qquad T = \frac{D}{R}$$

[*Nota*: R es una razón promedio o uniforme.]

EJEMPLO 5 Un problema de distancia, rapidez y tiempo

La distancia de una ruta en barco entre San Francisco y Honolulú es de 2 100 millas náuticas. Si un barco sale de San Francisco al mismo tiempo que otro sale de Honolulú, y si el primero viaja a 15 nudos* y el otro a 20, ¿cuánto tiempo les tomará a los barcos encontrarse? ¿A qué distancia de Honolulú y de San Francisco estarán en ese tiempo?

Solución Sea T = número de horas que pasarán antes de que se encuentren. Dibuje un diagrama y marque las partes conocidas e incógnitas. Ambos barcos tendrán que viajar la misma cantidad de tiempo para encontrarse.



$$\begin{pmatrix}\text{Distancia que recorre}\\ \text{el barco 1 desde}\\ \text{Honolulú hasta el}\\ \text{punto de encuentro}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Distancia que recorre}\\ \text{el barco 2 desde}\\ \text{San Francisco hasta el}\\ \text{punto de encuentro}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Distancia total}\\ \text{desde Honolulú hasta}\\ \text{San Francisco}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_1 + D_2 &= 2\,100 \\ 20T + 15T &= 2\,100 \\ 35T &= 2\,100 \\ T &= 60 \end{aligned}$$

Por lo tanto, pasarán 60 horas o 2.5 días para que se encuentren.

* 15 nudos significa 15 millas náuticas por hora. Una milla náutica mide 6 076.1 pies.

$$\text{Distancia desde Honolulú} = 20 \cdot 60 = 1\,200 \text{ millas náuticas.}$$

$$\text{Distancia desde San Francisco} = 15 \cdot 60 = 900 \text{ millas náuticas.}$$

Comprobación

$$1\,200 + 900 = 2\,100 \text{ millas náuticas.}$$

Problema seleccionado 5 Un equipo viejo puede imprimir, prensar y rotular 38 sobres postales por minuto. Un modelo más reciente realiza el mismo proceso pero a razón de 82 por minuto. ¿Cuánto tiempo les tomará a ambos equipos preparar 6 000 sobres? [*Nota*: La forma matemática es la misma que en el ejemplo 5.]

Algunas ecuaciones que implican variables en un denominador se pueden transformar en ecuaciones lineales. Se podría proceder esencialmente en la misma forma que en el ejemplo anterior; sin embargo, se debe excluir cualquier valor de la variable que produzca un denominador 0. Excluyendo esos valores, se podría multiplicar por el mcd aunque contenga una variable, y, de acuerdo con el teorema 1, la nueva ecuación será equivalente a la anterior.

EJEMPLO 6 Un problema de distancia, rapidez y tiempo

Un bote para excursiones tarda 1.5 veces más en recorrer 360 millas en el viaje de ida que en el de regreso. Si el bote viaja a 15 millas por hora en aguas tranquilas, ¿cuál es la rapidez de la corriente?

Solución Sea

$$x = \text{Rapidez de la corriente (en millas por hora)}$$

$$15 - x = \text{Rapidez del bote en contra de la corriente}$$

$$15 + x = \text{Rapidez del bote a favor de la corriente}$$

$$\text{Tiempo en contra de la corriente} = (1.5)(\text{Tiempo a favor de la corriente})$$

$$\frac{\text{Distancia recorrida en contra de la corriente}}{\text{Rapidez en contra de la corriente}} = (1.5)\frac{\text{Distancia recorrida a favor de la corriente}}{\text{Rapidez a favor de la corriente}}$$ Recuerde: $T = \frac{D}{R}$

$$\frac{360}{15 - x} = (1.5)\frac{360}{15 + x}$$ $x \neq 15, x \neq -15$

$$\frac{360}{15 - x} = \frac{540}{15 + x}$$

$$360(15 + x) = 540(15 - x)$$ Multiplique ambos lados por $(15 - x)(15 + x)$

$$5\,400 + 360x = 8\,100 - 540x$$

$$900x = 2\,700$$

$$x = 3$$

Por lo tanto, la rapidez de la corriente es de 3 millas por hora. Se deja la comprobación al lector.

Problema seleccionado 6 A un avión tipo jet le toma 1.2 veces más tiempo volar la distancia de París a Nueva York (3 600 millas), que el que le toma de regreso. Si la velocidad de crucero de un avión es de 550 millas por hora en aire tranquilo, ¿cuál es la rapidez promedio con la que sopla el viento en dirección de París a Nueva York?

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Considere la solución siguiente:

$$\frac{x}{x-2} + 2 = \frac{2x-2}{x-2}$$

$$x + 2x - 4 = 2x - 2$$

$$x = 2$$

¿Es $x = 2$ una raíz de la ecuación original? Si no es así, explique por qué. Analice la importancia de excluir valores que produzcan un denominador 0 cuando se resuelven ecuaciones.

EJEMPLO 7 **Un problema de cantidad, rapidez y tiempo**

Una compañía de publicidad tiene una computadora vieja que para preparar todo el correo tarda 6 horas. Con la ayuda de un nuevo modelo se termina el trabajo en 2 horas. ¿Cuánto tiempo le tomará al nuevo modelo hacer solo el trabajo?

Solución Sea x = tiempo (en horas) que emplea el nuevo modelo en hacer solo todo el trabajo.

$$\begin{pmatrix}\text{Parte del trabajo terminado}\\ \text{en un tiempo dado}\end{pmatrix} = (\text{Rapidez})(\text{Tiempo})$$

$$\text{Rapidez del modelo viejo} = \frac{1}{6}\ \text{Trabajo por hora}$$

$$\text{Rapidez del nuevo modelo} = \frac{1}{x}\ \text{Trabajo por hora}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Parte del trabajo}\\ \text{terminada por el modelo}\\ \text{viejo en 2 horas}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Parte del trabajo}\\ \text{terminada con el modelo}\\ \text{nuevo en 2 horas}\end{pmatrix} = 1\ \text{Trabajo terminado}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Rapidez del}\\ \text{modelo viejo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Tiempo del}\\ \text{modelo viejo}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Rapidez del}\\ \text{modelo nuevo}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Tiempo del}\\ \text{modelo nuevo}\end{pmatrix} = 1 \quad \text{Recuerde: } Q = RT$$

$$\frac{1}{6}(2) + \frac{1}{x}(2) = 1 \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{x} = 1$$
$$x + 6 = 3x$$
$$-2x = -6$$
$$x = 3$$

Por consiguiente, la computadora nueva podrá hacer sola el trabajo en 3 horas.

Comprobación

Parte del trabajo terminado por el modelo viejo en 2 horas $= 2(\frac{1}{6}) = \frac{1}{3}$

Parte del trabajo terminado por el modelo nuevo en 2 horas $= 2(\frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$

Parte del trabajo terminado por ambos modelos en 2 horas $= 1$

Problema seleccionado 7 Se usan dos bombas para llenar un tanque de almacenamiento de agua en una villa. Una bomba puede llenar el tanque en 9 horas y la otra en 6. ¿Cuánto tiempo les tomaría llenarlo si trabajaran juntas?

• Problemas con mezclas

Una variedad de aplicaciones se puede clasificar como problemas con mezclas, los cuales, aunque provengan de diferentes áreas, su tratamiento matemático en esencia es igual.

EJEMPLO 8 Un problema con mezclas

¿Cuántos litros de una mezcla que contiene 80% de alcohol se tendrían que agregar a 5 litros de una solución al 20% para obtener una solución al 30%?

Solución Sea x = cantidad usada de solución al 80%.



$$\begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{alcohol en la}\\ \text{primera solución}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{alcohol en la}\\ \text{segunda solución}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Cantidad de}\\ \text{alcohol en la}\\ \text{mezcla}\end{pmatrix}$$

$$0.8x \quad + \quad 0.2(5) \quad = \quad 0.3(x + 5)$$

$$0.8x + 1 = 0.3x + 1.5$$
$$0.5x = 0.5$$
$$x = 1$$

Se agrega un litro de la solución al 80%.

Comprobación

	Litros de solución	Litros de alcohol	Porcentaje de alcohol
Primera solución	1	0.8(1) = 0.8	80
Segunda solución	5	0.2(5) = 1	20
Mezcla	6	1.8	1.8/6 = 0.3, o 30%

Problema seleccionado 8

En un almacén de productos químicos se tiene una solución ácida al 90% y otra al 40%. ¿Cuántos centilitros de la solución al 90% se deben agregar a 50 centilitros de una solución al 40% para obtener una solución al 50%?

• Algunas observaciones finales respecto de las ecuaciones lineales

Se puede demostrar que cualquier ecuación que se escriba en la forma

$$ax + b = 0 \qquad a \neq 0 \tag{1}$$

sin restricciones sobre x, tiene exactamente una solución, que se puede encontrar como sigue:

$$ax + b = 0$$
$$ax = -b \quad \text{Propiedad de resta de la igualdad}$$
$$x = \frac{-b}{a} \quad \text{Propiedad de división de la igualdad}$$

El requerimiento $a \neq 0$ en la ecuación (1) es una restricción importante, ya que sin ella se podrían escribir ecuaciones con miembros de primer grado que no tengan solución o tengan un número infinito de soluciones. Por ejemplo,

$$2x - 3 = 2x + 5$$

no tiene solución, y

$$3x - 4 = 5 + 3(x - 3)$$

tiene un número infinito de soluciones. Intente resolver cada ecuación para ver qué sucede.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $x = 5$ **2.** $F = \frac{9}{5}C + 32$ **3.** 3, 5, 7 **4.** 20 centímetros
5. 50 minutos **6.** 50 millas por hora **7.** 3.6 horas **8.** 12.5 centilitros

EJERCICIO 1-1

A

En los problemas del 1 al 16, resuelva cada ecuación.

1. $3(x + 2) = 5(x - 6)$
2. $5x + 10(x - 2) = 40$
3. $5 + 4(t - 2) = 2(t + 7) + 1$
4. $5x - (7x - 4) - 2 = 5 - (3x + 2)$
5. $3 - \dfrac{2x - 3}{3} = \dfrac{5 - x}{2}$
6. $\dfrac{x - 2}{3} + 1 = \dfrac{x}{7}$
7. $5 - \dfrac{2x - 1}{4} = \dfrac{x + 2}{3}$
8. $\dfrac{x + 3}{4} - \dfrac{x - 4}{2} = \dfrac{3}{8}$
9. $0.1(x - 7) + 0.05x = 0.8$
10. $0.4(x + 5) - 0.3x = 17$
11. $0.3x - 0.04(x + 1) = 2.04$
12. $0.02x - 0.5(x - 2) = 5.32$
13. $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{4}{9} - \dfrac{2}{3m}$
14. $\dfrac{2}{3x} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{3}$
15. $\dfrac{5x}{x + 5} = 2 - \dfrac{25}{x + 5}$
16. $\dfrac{3}{2x - 1} + 4 = \dfrac{6x}{2x - 1}$

B

En los problemas del 17 al 24, resuelva cada ecuación.

17. $\dfrac{2x}{10} - \dfrac{3 - x}{14} = \dfrac{2 + x}{5} - \dfrac{1}{2}$
18. $\dfrac{3x}{24} - \dfrac{2 - x}{10} = \dfrac{5 + x}{40} - \dfrac{1}{15}$
19. $\dfrac{1}{3} - \dfrac{s - 2}{2s + 4} = \dfrac{s + 2}{3s + 6}$
20. $\dfrac{n - 5}{6n - 6} = \dfrac{1}{9} - \dfrac{n - 3}{4n - 4}$
21. $\dfrac{3x}{2 - x} + \dfrac{6}{x - 2} = 3$
22. $5 - \dfrac{2x}{3 - x} = \dfrac{6}{x - 3}$
23. $\dfrac{5t - 22}{t^2 - 6t + 9} - \dfrac{11}{t^2 - 3t} - \dfrac{5}{t} = 0$
24. $\dfrac{5}{x - 3} = \dfrac{33 - x}{x^2 - 6x + 9}$

En los problemas del 25 al 28, use una calculadora para resolver cada ecuación con hasta 3 digitos significativos.

25. $3.142x - 0.4835(x - 4) = 6.795$
26. $0.0512x + 0.125(x - 2) = 0.725x$
27. $\dfrac{2.32x}{x - 2} - \dfrac{3.76}{x} = 2.32$
28. $\dfrac{6.08}{x} + 4.49 = \dfrac{4.49x}{x + 3}$

En los problemas del 29 al 36, despeje la variable indicada en términos de las otras variables.

29. $a_n = a_1 + (n - 1)d$ para d (progresiones aritméticas)
30. $F = \frac{9}{5}C + 32$ para C (escala de temperaturas)
31. $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2}$ para f (fórmula de lentes simples)
32. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ para R_1 (circuito eléctrico)
33. $A = 2ab + 2ac + 2bc$ para a (área superficial de un rectángulo sólido)
34. $A = 2ab + 2ac + 2bc$ para c
35. $y = \dfrac{2x - 3}{3x + 5}$ para x
36. $x = \dfrac{3y + 2}{y - 3}$ para y

Imagine que un estudiante a quien asesora le dio las "soluciones" de los problemas 37 y 38. Responda si la solución es correcta o errónea. Si considera que es errónea, explique en qué consiste el error y proporcione la solución correcta.

37. $\dfrac{x}{x - 3} + 4 = \dfrac{2x - 3}{x - 3}$

$x + 4x - 12 = 2x - 3$

$x = 3$

38. $\dfrac{x^2 + 1}{x - 1} = \dfrac{x^2 + 4x - 3}{x - 1}$

$x^2 + 1 = x^2 + 4x - 3$

$x = 1$

C

En los problemas del 39 al 41, despeje x.

39. $\dfrac{x - \dfrac{1}{x}}{1 + \dfrac{1}{x}} = 3$
40. $\dfrac{x - \dfrac{1}{x}}{x + 1 - \dfrac{2}{x}} = 1$
41. $\dfrac{x + 1 - \dfrac{2}{x}}{1 - \dfrac{1}{x}} = x + 2$

42. Despeje y en términos de x: $\frac{y}{1-y} = \left(\frac{x}{1-x}\right)^3$

43. Despeje x en términos de y: $y = \frac{a}{1 + \frac{b}{x+c}}$

44. Sean m y n números reales con m mayor que n. Entonces ahí existe un número real positivo p tal que $m = n + p$. Encuentre el error en el argumento siguiente:

$$m = n + p$$
$$(m - n)m = (m - n)(n + p)$$
$$m^2 - mn = mn + mp - n^2 - np$$
$$m^2 - mn - mp = mn - n^2 - np$$
$$m(m - n - p) = n(m - n - p)$$
$$m = n$$

APLICACIONES 

*Estos problemas están agrupados de acuerdo con el tema con que se relacionan. Los problemas más difíciles están marcados con dos estrellas **, los moderadamente difíciles con una estrella *, y los más fáciles no están marcados.*

Números

45. Encuentre un número tal que 10 menos que dos tercios del número sea un cuarto del número.

46. Encuentre un número tal que 6 más que la mitad del número sea dos tercios del número.

47. Encuentre 4 enteros pares consecutivos de manera que la suma de los 3 primeros sea 2 veces mayor que el doble del cuarto.

48. Encuentre 3 enteros pares consecutivos tales que el primero más el doble del segundo sea el doble del tercero.

Geometría

49. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 54 metros, si su longitud es 3 metros menor que el doble de su ancho.

50. Un rectángulo de 24 metros de longitud tiene la misma área que un cuadrado que tiene 12 metros de lado. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

51. Encuentre el perímetro de un triángulo si uno de sus lados mide 16 pies, otro dos séptimos del perímetro y el tercero un tercio del perímetro.

52. Encuentre el perímetro de un triángulo si uno de sus lados mide 11 centímetros, otro es un quinto del perímetro, y el tercero un cuarto del perímetro.

Negocios y economía

53. El precio de una cámara después de descontarle el 20% es de $72. ¿Cuánto costaba antes del descuento?

54. Una tienda que vende estéreos etiqueta cada artículo con un precio 60% más caro de lo que cuestan al mayoreo. ¿Cuánto cuesta un reproductor de casetes cuyo precio al mayoreo es de $144?

55. A un empleado de una tienda de computación se le paga un salario base de $2 150 al mes, más un 8% de comisión si vende más de $7 000 durante ese periodo. ¿Cuánto debe vender para ganar $3 170 al mes?

56. A un segundo empleado de la tienda de computación del problema 55 se le paga un salario base de $1 175 al mes más un 5% de comisión sobre las ventas del mes.

(A) ¿Cuánto debe vender este empleado en un mes para ganar $3 170?

(B) Determine el nivel de ventas en el que ambos empleados recibirían el mismo ingreso mensual. Si los empleados pudicran elegir alguna de estas formas de pago, ¿Qué le aconsejaría al empleado considerar antes de decidir?

Ciencias de la Tierra

*57. En 1984, los soviéticos fueron los primeros en el mundo que perforaron el pozo con más profundidad en la corteza terrestre (con más de 12 kilómetros de profundidad). Al perforar descubrieron que después de los 3 kilómetros la temperatura T aumentaba 2.5°C por cada 100 metros de profundidad que aumentaban.

(A) Si la temperatura a los 3 kilómetros es de 30°C y x es la profundidad del pozo en kilómetros, plantee una ecuación usando x de manera que indique la temperatura T en el pozo a más de 3 kilómetros de profundidad.

(B) ¿Cuál sería la temperatura a 15 kilómetros? (La temperatura límite que soportaba su equipo de perforación era de alrededor de 300°C.)

(C) ¿A qué profundidad (en kilómetros) encontrarían una temperatura de 280°C?

*58. Como el aire no es tan denso a grandes altitudes, los aviones requieren una alta velocidad en tierra para alcanzar la velocidad de sustentación. Una regla empírica es que sea 3% mayor que la velocidad en el suelo por cada 1 000 pies a partir de la elevación, suponga que no hay viento y que la temperatura del aire permanece constante. (Calcule las respuestas numéricas hasta tres dígitos significativos.)

(A) Sea

Vs = Velocidad de despegue a nivel del mar para un avión particular (en millas por hora).

A = Altitud superior al nivel del mar (en miles de pies).

V = Velocidad de despegue a una altitud A para el mismo avión (en millas por hora).

Escriba una fórmula que relacione estas tres cantidades.

(B) ¿Cuál sería la velocidad de despegue necesaria en el aeropuerto de Lake Tahoe (6 400 pies), si la velocidad de despegue en el aeropuerto de San Francisco (a nivel del mar) es de 120 millas por hora?

(C) Si en una pista de aterrizaje en las montañas de Colorado que están a una altura de 8 500 pies es necesaria una velocidad de despegue de 125 millas por hora, ¿cuál deberá ser la velocidad de despegue en Los Angeles (al nivel del mar)?

(D) Si la velocidad de despegue a nivel del mar es de 135 millas por hora y la velocidad de despegue en un lugar montañoso es de 155 millas por hora, ¿cuál es la altitud del segundo lugar en miles de pies?

** **59.** Un temblor emite una onda primaria y una onda secundaria. Cerca de la superficie terrestre la onda primaria viaja alrededor de 5 millas por segundo, y la onda secundaria alrededor de 3 millas por segundo. A partir del tiempo que tarda en llegar cada una de las dos ondas a una estación sísmica, es posible calcular la distancia al temblor. Suponga que una estación mide una diferencia de tiempo de 12 segundos entre la llegada de las dos ondas. ¿A qué distancia de la estación está el epicentro del temblor? (El epicentro se puede localizar al obtener la distancia de barrido en tres o más estaciones.)

** **60.** Un barco que usa dispositivos medidores de sonido arriba y abajo del agua, registra en la superficie una explosión 39 segundos antes que el dispositivo bajo el agua. Si el sonido viaja en el aire a alrededor de 1 100 pies por segundo y en el agua a cerca de 5 000 pies por segundo, ¿a qué distancia ocurrió la explosión?

Ciencias de la vida

61. Una naturalista de un departamento de pesca calculó el número total de truchas en cierto lago mediante la popular técnica de captura, marcaje y recaptura. En total pescó, marcó y liberó 200 truchas. Una semana después durante la cual se pudieron mezclar, volvió a pescar 200 truchas entre las que encontró ocho marcadas. Suponiendo que el porcentaje de truchas marcadas con relación al número total de la segunda muestra es el mismo que el de todos los peces marcados en la primera muestra con relación al total de la población de truchas, estime el número total de peces en el lago.

62. Repita el problema 61 con una primera muestra (marcada) de 300 y una segunda muestra de 180 con sólo seis truchas marcadas.

Química

* **63.** ¿Cuántos galones de agua destilada se deben mezclar con 50 galones de una solución con alcohol al 30% para obtener una solución al 25%?

* **64.** ¿Cuántos galones de ácido clorhídrico se deben agregar a 12 galones de una solución al 30% para obtener una solución al 40%?

* **65.** Un químico mezcla agua destilada con una solución al 90% de ácido sulfúrico para producir una solución al 50%. Si se usan 5 litros de agua destilada, ¿cuánta solución al 50% se produce?

* **66.** Un distribuidor tiene 120 000 galones de combustible con un contenido de 0.9% de sulfuro, porcentaje que excede al 8% permitido por los estándares de control de contaminación. ¿Cuántos galones de combustible que contengan 0.3% de sulfuro se deben agregar a los 120 000 galones para obtener un combustible que cumpla con los estándares mencionados?

Rapidez y tiempo

* **67.** Una vieja computadora permite elaborar la nómina semanal en 5 horas. Una computadora más reciente permite hacer la misma nómina en 3 horas. Se comienza a hacer la nómina en la computadora vieja y después de una hora se conecta en línea con la nueva para que trabajen juntas hasta terminar el trabajo. ¿En cuánto tiempo terminarán el trabajo ambas computadoras? (Suponga que cada una opera de manera independiente.)

* **68.** Una bomba puede llenar un tanque para almacenar gasolina en 8 horas. Trabajando simultáneamente con una segunda bomba se puede llenar el tanque en 3 horas. ¿Cuánto tiempo le tomaría a la segunda bomba llenar el tanque si operara sola?

** **69.** La velocidad de crucero de un avión es de 150 millas por hora (respecto al suelo). Usted renta el avión para un viaje de 3 horas y le indica al piloto que vuele hacia el norte tan lejos como pueda y regrese al aeropuerto cuando se termine el tiempo.

(A) ¿Qué distancia podría volar el piloto hacia el norte si el viento sopla a 30 millas por hora desde esa dirección?

(B) ¿Hasta qué distancia hacia el norte podría volar si no hubiera viento?

* **70.** Suponga que está en una villa cerca de un río y renta una lancha por 5 horas que comienzan a las 7 A.M. Le comentan que el bote viajará a 8 millas por hora corriente arriba y a 12 millas por hora en el regreso, así que decide que le gustaría alejarse río arriba tanto como para poder regresar al mediodía. ¿A qué hora tendría que regresar, y a qué distancia de la villa estará a esa hora?

Música

* **71.** En música, un acorde mayor se compone de notas cuyas frecuencias están en la relación 4:5:6. Si la primera nota de un acorde tiene una frecuencia de 264 hertz (tecla media C en el piano), encuentre las frecuencias de las otras dos notas. [*Sugerencia:* Establezca dos proporciones usando 4:5 y 4:6.]

* **72.** Un acorde menor se compone de notas cuyas frecuencias están en la relación 10:12:15. Si la primera nota de un acorde menor es A, con una frecuencia de 220 hertz, ¿cuáles son las frecuencias de las otras dos notas?

Psicología

73. En un experimento sobre motivación, el profesor Brown entrenó a un grupo de ratas para que corrieran por un pasaje angosto en una jaula con el fin de recibir comida en una caja objetivo. En seguida, le puso a cada rata un arnés y lo conectó a un alambre unido a un medidor. Después colocó a las ratas a diferentes distancias de la comida y midió el jalón (en gramos) de la rata hacia el alimento. Encontró que la relación entre motivación (jalón) y la posición estaba dada aproximadamente por la ecuación.

$$p = -\tfrac{1}{5}d + 70 \qquad 30 \leq d \leq 170$$

donde el jalón p se midió en gramos y la distancia d en centímetros. Cuando el jalón registrado fue de 40 gramos, ¿a qué distancia de la caja objetivo llegó la rata?

74. El profesor Brown repitió el experimento descrito en el problema 73, sólo que ahora reemplazó la comida en la caja objetivo con un leve choque eléctrico. Con los mismos aparatos pudo medir la resistencia a evitar el choque respecto de la distancia del objeto que lo produce. Encontró que la resistencia a evitarlo a (medida en gramos) se relaciona con la distancia d a la que la rata estaba del objeto que produce el choque (medido en centímetros) aproximadamente por la ecuación.

$$a = -\tfrac{4}{3}d + 230 \qquad 30 \leq d \leq 170$$

Si la misma rata fuera entrenada como se describió en éste y en el problema 73, ¿a qué distancia (con un decimal) de la caja objetivo serán iguales las resistencias para acercarse y para evitarlo? (¿Qué cree que haría la rata en este punto?)

Acertijo

75. Una torre de perforación en el Golfo de México se coloca de manera que un quinto de su altura está en arena, 20 pies están en el agua y 2 tercios en el aire. ¿Cuál es la altura total de la torre?

76. Durante un viaje de campamento en los bosques del norte de Canadá, una pareja recorrió un tercio del camino en bote, 10 millas a pie y un sexto del camino a caballo. ¿Qué tan largo fue el viaje?

** 77. Exactamente después de las 12 del día, ¿a qué hora volverán a juntarse las manecillas de un reloj?

SECCIÓN 1-2 Sistemas de ecuaciones lineales y aplicaciones

- Sistemas de ecuaciones
- Sustitución
- Aplicaciones

Sistemas de ecuaciones

En la sección anterior, se resolvieron problemas con literales introduciendo una sola variable para representar una de las incógnitas, y después se intentó representar a todas las incógnitas en términos de esta variable. En ciertos problemas con literales, es más conveniente introducir diversas variables, encontrar las ecuaciones que relacionan esas variables, y después resolver el sistema de ecuaciones resultante. Por ejemplo, si un tablero de 12 pies se corta en dos partes de manera que una de ellas sea 2 pies más grande que la otra, se tiene entonces

x = Longitud de la pieza más grande
y = Longitud de la pieza más corta

se observa que x y y deben satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$x + y = 12$$
$$x - y = 2$$

Se tiene ahora un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables. Así, se puede resolver este problema al encontrar todos los pares de números x y y que satisfagan ambas ecuaciones.

En general, se tiene interés en resolver sistemas lineales del tipo:

$$\begin{aligned} ax + by &= h \\ cx + dy &= k \end{aligned}$$

Sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables

donde x y y son variables y a, b, c, d, h y k son constantes reales. Un par de números $x = x_0$ y $y = y_0$ es una **solución** de este sistema si cada ecuación se satisface por el par. El conjunto de todos esos pares de números se denomina **conjunto solución** para el sistema. **Resolver** un sistema es encontrar su conjunto solución. En esta sección, se restringirá nuestro análisis a técnicas de solución simples para sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. En el capítulo 8 se analizarán sistemas más grandes y métodos de solución más sofisticados.

Sustitución

Para resolver un sistema por **sustitución**, primero se escoge una de las dos ecuaciones de un sistema y se despeja una variable en términos de la otra. (Si es posible, elija una que no contenga fracciones.) Después sustituya el resultado en la otra ecuación y resuelva la ecuación lineal resultante con una variable. Por último, se sustituye de nuevo este resultado en la expresión obtenida en el primer paso para encontrar la segunda variable. Se ilustrará este proceso al regresar al problema del tablero enunciado al inicio de la sección.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema por sustitución

Resuelva el problema del tablero al resolver el sistema.

$$x + y = 12$$
$$x - y = 2$$

Solución Despeje de cualquier ecuación una de las variables y sustitúyala en la otra ecuación Se elige despejar y de la primera ecuación en términos de x:

$$x + y = 12 \quad \text{Resuelva la primera ecuación para } y \text{ en términos de } x.$$
$$y = 12 - x \quad \text{Sustituya en la segunda ecuación}$$

$$x - y = 2$$
$$x - (12 - x) = 2$$
$$x - 12 + x = 2$$
$$2x = 14$$
$$x = 7$$

Ahora, se remplaza x con 7 en la ecuación $y = 12 - x$:

$$y = 12 - x$$
$$y = 12 - 7$$
$$y = 5$$

De esta forma, el tablero más largo mide 7 pies y el más corto 5.

Comprobación

$$x + y = 12 \qquad x - y = 2$$
$$7 + 5 \stackrel{?}{=} 12 \qquad 7 - 5 \stackrel{?}{=} 2$$
$$12 = 12 \qquad 2 = 2$$

Problema seleccionado 1 Resuelva por sustitución y compruebe:

$$x - y = 3$$
$$x + 2y = -3$$

EJEMPLO 2 **Resuelva un sistema por sustitución**

Resuelva por sustitución y compruebe:

$$2x - 3y = 7$$
$$3x - y = 7$$

Solución Para evitar fracciones, elija despejar y en la segunda ecuación:

$$3x - y = 7 \quad \text{Resuelva a } y \text{ en términos de } x.$$
$$-y = -3x + 7$$
$$y = 3x - 7 \quad \text{Sustituya en la primera ecuación.}$$
$$2x - 3y = 7 \quad \text{Primera ecuación}$$
$$2x - 3(3x - 7) = 7 \quad \text{Resuelva para } x.$$
$$2x - 9x + 21 = 7$$
$$-7x = -14$$
$$x = 2 \quad \text{Sustituya } x = 2 \text{ en } y = 3x - 7.$$
$$y = 3x - 7$$
$$y = 3(2) - 7$$
$$y = -1$$

Así, la solución es $x = 2$ y $y = -1$.

Comprobación

$$2x - 3y = 7 \qquad 3x - y = 7$$
$$2(2) - 3(-1) \stackrel{?}{=} 7 \qquad 3(2) - (-1) \stackrel{?}{=} 7$$
$$7 = 7 \qquad 7 = 7$$

Problema seleccionado 2 Resuelva por sustitución y compruebe:

$$3x - 4y = 18$$
$$2x + y = 1$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Use sustitución para resolver cada uno de los sistemas siguientes. Analice la naturaleza de los conjuntos solución que obtenga.

$$\begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 2x + 6y &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 3y &= 4 \\ 2x + 6y &= 8 \end{aligned}$$

Aplicaciones

Los ejemplos siguientes ilustran las ventajas de usar sistemas de ecuaciones y el método de sustitución para resolver problemas con literales.

EJEMPLO 3 **Dieta**

Una persona quiere incluir en su dieta diaria leche y jugo de naranja, para aumentar la cantidad de calcio y vitamina A. Una onza de leche contiene 38 miligramos de calcio y 56 microgramos* de vitamina A. Una onza de jugo de naranja contiene 5 miligramos de calcio y 60 microgramos de vitamina A. ¿Cuántas onzas de leche y jugo de naranja deberá tomar al día para obtener exactamente 550 miligramos de calcio y 1 200 microgramos de vitamina A?

Solución Primero se definen las variables importantes:

x = Número de onzas de leche

y = Número de onzas de jugo de naranja

En seguida se resume, en una tabla, la información con que se cuenta. Es conveniente organizar la información en las tablas de manera que las cantidades representadas por las variables se encuentren en las columnas (en vez de en renglones), como se muestra.

	Leche	**Jugo de naranja**	**Necesidades totales**
Calcio	38	5	550
Vitamina A	56	60	1 200

Ahora, se usa la información de la tabla para formar ecuaciones que implican a x y y:

$$\begin{matrix} \begin{pmatrix}\text{Calcio en } x \\ \text{onzas de leche}\end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix}\text{Calcio en } y \text{ onzas} \\ \text{de jugo de naranja}\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}\text{Calcio total} \\ \text{necesario (mg)}\end{pmatrix} \\ 38x & + & 5y & = & 550 \\ \begin{pmatrix}\text{Vitamina A en } x \\ \text{onzas de leche}\end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix}\text{Vitamina A en } y \text{ onzas} \\ \text{de jugo de naranja}\end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix}\text{Vitamina A total} \\ \text{necesaria } (\mu\text{g})\end{pmatrix} \\ 56x & + & 60y & = & 1\,200 \end{matrix}$$

*Un microgramo (mg) es un millonésimo (10^{26}) de gramo.

$$5y = 550 - 38x \quad \text{Resuelva la primera ecuación para } y.$$
$$y = 110 - 7.6x$$
$$56x + 60(110 - 7.6x) = 1\ 200 \quad \text{Sustituya } y \text{ en la segunda ecuación.}$$
$$56x + 6\ 600 - 456x = 1\ 200$$
$$-400x = -5\ 400$$
$$x = 13.5 \quad \text{Sustituya en (1).}$$
$$y = 110 - 7.6(13.5)$$
$$y = 7.4$$

Tomando 13.5 onzas de leche y 7.4 onzas de jugo de naranja al día se obtienen las cantidades necesarias de calcio y de vitamina A.

Comprobación

$$38x + 5y = 550 \qquad 56x + 60y = 1\ 000$$
$$38(13.5) + 5(7.4) \stackrel{?}{=} 500 \qquad 56(13.5) + 60(7.4) \stackrel{?}{=} 1\ 200$$
$$500 = 500 \qquad 1\ 200 = 1\ 200$$

Problema seleccionado 3

Una persona quiere usar queso cottage y yogurt para aumentar la cantidad de proteína y calcio en su dieta diaria. Una onza de queso cottage contiene 3 gramos de proteína y 12 miligramos de calcio. Una onza de yogurt contiene un gramo de proteína y 44 miligramos de calcio. ¿Cuántas onzas de queso cottage y yogurt debería comer al día para obtener exactamente 57 gramos de proteína y 840 miligramos de calcio?

EJEMPLO 4 **Velocidad del viento**

Un avión recorre las 2 400 millas de Washington, D. C., a San Francisco en 7.5 horas y hace el viaje de regreso en 6 horas. Suponga que el avión viaja a una velocidad constante y que el viento fluye con una rapidez constante de oeste a este, encuentre la velocidad del avión y la rapidez del viento.

Solución

Sea que x represente la velocidad del avión y que y representa la rapidez con la cual sopla el viento (ambas en millas por hora). La velocidad terrestre del avión se determina al combinar estas dos velocidades; es decir,

$x - y$ = velocidad de despegue volando de este a oeste (viento de frente)

$x + y$ = velocidad de despegue volando de oeste a este (viento de cola)

Aplicando la conocida fórmula $D = RT$ para cada parte del viaje se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2\ 400 = 7.5(x - y) \quad \text{De Washington a San Francisco}$$
$$2\ 400 = 6(x + y) \quad \text{De San Francisco a Washington}$$

Después de simplificar, se tiene

$$x - y = 320$$
$$x + y = 400$$

Usando sustituciones para resolver:

$$x = y + 320$$ Resuelva la primera ecuación para x.

$$y + 320 + y = 400$$ Sustituya y en la segunda ecuación.

$$2y = 80$$

$$y = 40 \text{ mph}$$ Sustituya en (1).

$$x = 40 + 320$$

$$x = 360 \text{ mph}$$ Velocidad del avión

Comprobación

$$2\,400 = 7.5(x - y) \qquad 2\,400 = 6(x + y)$$
$$2\,400 \stackrel{?}{=} 7.5(360 - 40) \qquad 2\,400 \stackrel{?}{=} 6(360 + 40)$$
$$2\,400 \stackrel{\checkmark}{=} 2\,400 \qquad 2\,400 \stackrel{\checkmark}{=} 2\,400$$

Problema seleccionado 4 A un bote le toma 8 horas recorrer 80 millas corriente arriba y 5 horas el regreso a su punto de partida. Encuentre la velocidad del bote en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.

EJEMPLO 5

Oferta y demanda

La cantidad de un producto que la gente está comprando voluntariamente durante algún periodo depende de su precio. Por lo general, a mayor precio la demanda es menor; a menor precio, la demanda es mayor. De manera similar, la cantidad de un producto que un proveedor está vendiendo voluntariamente durante algún periodo también depende del precio. Por lo general un proveedor estará abasteciendo más de un producto a precios altos y menos de un producto a precio bajos. El modelo más simple de proveedor y demanda es un modelo lineal.

Suponga que se está interesado en el análisis de la venta diaria de cerezas en una ciudad en particular. Usando técnicas especiales de análisis (análisis de regresión) y recolección de datos, un analista obtiene las siguientes ecuaciones de precio-demanda y de precio-abastecimiento:

$$p = -0.3q + 5$$ Ecuación de demanda (consumidor)

$$p = 0.06q + 0.68$$ Ecuación de abastecimiento (proveedor)

donde q representa la cantidad en miles de libras y p representa el precio en dólares. Por ejemplo, se puede observar que los consumidores compran 11 miles de libras ($q = 11$) cuando el precio es $p = -0.3(11) + 5 = \$1.70$ por libra. Por otra parte, los proveedores estarán abasteciendo voluntariamente 17 mil libras de cerezas a \$1.70 por libra (resuelva $1.7 = 0.06q + 0.68$ para q). Es decir, a \$1.70 por libra de cerezas que los proveedores están abasteciendo voluntariamente, los consumidores están comprando voluntaria-

mente mayor número de cerezas de las que se ofertan. El abastecimiento excede a la demanda a ese precio, y por lo tanto, el precio bajará. ¿A qué precio por día se estabilizarán las cerezas? Es decir, ¿cuál deberá ser el precio para que el abastecimiento sea igual a la demanda? Este precio, si existe, se llama **precio de equilibrio**; y la cantidad vendida a este precio se llama **cantidad de equilibrio**. ¿Qué hacer para encontrar estas cantidades? Se resuelve el sistema lineal

$$p = -0.3q + 5 \qquad \text{Ecuación de demanda}$$
$$p = 0.06q + 0.68 \qquad \text{Ecuación de establecimiento}$$

usando sustitución (sustituyendo $p = -0.3q + 5$ en la segunda ecuación).

$$-0.3q + 5 = 0.06q + 0.68$$
$$-0.36q = -4.32$$
$$q = 12 \text{ mil libras} \qquad \text{(cantidad de equilibrio)}$$

Ahora sustituyendo $q = 12$ en cualquiera de las ecuaciones originales del sistema y despejando p (se eligió la segunda ecuación):

$$p = 0.06(12) + 0.68$$
$$p = \$1.40 \text{ por libra} \qquad \text{(precio de equilibrio)}$$

Problema seleccionado 5

Las ecuaciones para el precio-demanda y para el precio-oferta en el caso de las fresas en una cierta ciudad son:

$$p = -0.2q + 4 \qquad \text{Ecuación de demanda}$$
$$p = 0.04q + 1.84 \qquad \text{Ecuación de abastecimiento}$$

donde q representa la cantidad en miles de libras y p representa el precio en dólares.

Encuentre la cantidad de equilibrio y el precio de equilibrio.

EJEMPLO 6

Costos e ingresos

Un editor está planeando producir un nuevo libro de texto. Los **costos fijos** (revisión, edición, tipografía, etcétera) son \$320 000, y los **costos variables** (impresión, comisiones por ventas, etcétera) son \$31.25 por libro. El precio al mayoreo (es decir, la cantidad que recibirá el editor) será de \$43.75 por libro. ¿Cuántos libros debe vender el editor para alcanzar el **punto de equilibrio**; es decir, cuándo los costos serán iguales a los ingresos?

Solución

Si x representa el número de libros impresos y vendidos, entonces las ecuaciones de costos e ingresos para el editor estarán dadas por

$$y = 320\,000 + 31.25x \qquad \text{Ecuación de costos}$$
$$y = 43.75x \qquad \text{Ecuación de ingresos}$$

El editor alcanza el punto de equilibrio cuando los costos son iguales a los ingresos. Se puede encontrar cuándo ocurre esto al resolver este sistema. De la segunda ecuación se despeja y y se sustituye en la primera ecuación, para obtener

$$43.75x = 320\,000 + 31.25x$$
$$12.5x = 320\,000$$
$$x = 25\,600$$

Así, el editor alcanza el punto de equilibrio cuando se imprimen y venden 25 600 libros.

Problema seleccionado 6

Una compañía de software está planeando comercializar un nuevo procesador de texto. Los costos fijos (diseño, programación, etcétera) son \$720 000, y los costos variables (duplicado de discos, producción del manual, etcétera) son \$25.40 por copia. El precio de mayoreo del procesador de texto será de \$44.60 por copia. ¿Cuántas copias del procesador de texto deben hacerse y venderse para que la compañía llegue a su punto de equilibrio?

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $x = 1, y = -2$ 2. $x = 2, y = -3$
3. 13.9 onzas de queso cottage, 15.3 onzas de yogurt
4. Bote: 13 mph; corriente: 3 mph
5. Cantidad de equilibrio = 9 mil libras; Precio de equilibrio = \$2.20 por libra
6. 37 500 copias

EJERCICIO 1-2

A

Resuelva los problemas del 1 al 6 por sustitución.

1. $y = 2x + 3$, $y = 3x - 5$
2. $y = x + 4$, $y = 5x - 8$
3. $x - y = 4$, $x + 3y = 12$
4. $2x - y = 3$, $x + 2y = 14$
5. $3x - y = 7$, $2x + 3y = 1$
6. $2x + y = 6$, $x - y = -3$

B

Resuelva los problemas del 7 al 16 por sustitución.

7. $4x + 3y = 26$, $3x - 11y = -7$
8. $9x - 3y = 24$, $11x + 2y = 1$
9. $7m + 12n = -1$, $5m - 3n = 7$
10. $3p + 8q = 4$, $15p + 10q = -10$
11. $y = 0.08x$, $y = 100 + 0.04x$
12. $y = 0.07x$, $y = 80 + 0.05x$
13. $0.2u - 0.5v = 0.07$, $0.8u - 0.3v = 0.79$
14. $0.3s - 0.6t = 0.18$, $0.5s - 0.2t = 0.54$
15. $\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}y = 2$, $\frac{7}{3}x - \frac{5}{4}y = -5$
16. $\frac{7}{2}x - \frac{5}{6}y = 10$, $\frac{2}{5}x + \frac{4}{3}y = 6$
17. Suponga que al estar resolviendo un sistema por sustitución encuentra una contradicción, como $0 = 1$. ¿Cómo podría describir este tipo de soluciones para un sistema? Ilustre sus ideas con el siguiente sistema

$$x - 2y = -3$$
$$-2x + 4y = 7$$

18. En el proceso de solución de un sistema por sustitución, suponga que encuentra una identidad, como $0 = 0$. ¿Cómo

podría describir la solución de tal sistema? Ilustre sus ideas con el siguiente sistema

$$x - 2y = -3$$
$$-2x + 4y = 6$$

C

En los problemas 19 y 20, resuelva cada sistema para p y q en términos de x y y. Explique cómo podría comprobar su solución y efectúe la prueba.

19. $x = 2 + p - 2q$
$y = 3 - p + 3q$

20. $x = -1 + 2p - q$
$y = 4 - p + q$

Los problemas 21 y 22 se refieren al sistema

$$ax + by = h$$
$$cx + dy = k$$

donde x y y son variables y a, b, c, d, h y k son constantes reales.

21. Resuelva el sistema para x y y en términos de las constantes a, b, c, d, h y k. Establezca claramente cualquier suposición que tome acerca de las constantes durante el proceso de solución.

22. Analice la naturaleza de las soluciones a los sistemas que no satisfagan las suposiciones que haya hecho para el problema 21.

APLICACIONES



23. **Velocidad del viento.** A un avión privado le toma 8.75 horas volar las 2 100 millas de Atlanta a Los Angeles y 5 horas el vuelo de regreso. Suponiendo que el viento sopla a una rapidez constante de Los Angeles a Atlanta, encuentre la velocidad aerodinámica del avión y la rapidez del viento.

24. **Velocidad del viento.** Un avión tiene suficiente combustible para 20 horas de vuelo a una velocidad aerodinámica de 150 millas por hora. ¿Qué distancia puede volar contra un viento de 30 millas por hora y todavía tener suficiente combustible para regresar a su punto de partida? (Esta distancia se conoce como *punto de no regreso*.)

25. **Rapidez y tiempo.** Una tripulación de ocho personas puede remar a 20 kilómetros por hora en aguas tranquilas. La tripulación rema corriente arriba y después regresa a su punto de partida en 15 minutos. Si el río está fluyendo a 2 km/h, ¿qué distancia remó la tripulación corriente arriba?

26. **Rapidez y tiempo.** A un bote le toma 2 horas recorrer 20 millas río abajo y 3 horas regresar a su punto de partida corriente arriba. ¿Cuál es la rapidez de la corriente en el río?

27. **Química.** Un químico tiene dos soluciones de ácido clorhídrico almacenado: una solución al 50% y otra al 80%. ¿Qué cantidad de cada solución se debe usar para obtener 100 mililitros de una solución al 68%?

28. **Negocios.** Un joyero tiene dos barras de una aleación de oro en almacén, una es de 12 quilates y la otra de 18 (24 quilates de oro es oro puro, 12 quilates es 12/24 puro, 18 quilates de oro es 18/24 puro, etcétera). ¿Cuántos gramos de cada aleación se deben mezclar para obtener 10 gramos de oro de 14 quilates?

29. **Análisis de equilibrio.** A una compañía de grabación pequeña le cuesta \$17 680 producir un álbum. Éste es un costo fijo que incluye la grabación, el diseño del álbum, etcétera. Los costos variables, incluyendo la producción, comercialización y regalías son de \$4.60 por álbum. Si el álbum se vende en las tiendas de discos a \$8 cada uno, ¿cuántos debe vender la compañía para llegar al punto de equilibrio?

30. **Análisis de equilibrio.** Un fabricante de videocasetes determinó que la ecuación de costos semanales es $C = 3\,000 + 10x$, donde x es el número de videocasetes producido y vendido cada semana. Si los videocasetes se venden a los distribuidores a \$15 cada uno, ¿cuántos debe vender el fabricante cada semana para alcanzar el punto de equilibrio? (Refiérase al problema 29.)

31. **Finanzas.** Suponga que tiene \$12 000 para invertir. Si una parte se invierte al 10% y el resto al 15%, ¿cuánto se debe invertir en cada tasa para obtener un 12% sobre el total de la cantidad invertida?

32. **Finanzas.** Un inversionista tiene \$20 000 para invertir. Si invierte una parte al 8% y el resto al 12%, ¿cuánto se debe invertir en cada tasa de interés para obtener un 11% sobre el total de la cantidad invertida?

33. **Producción.** Un proveedor de la industria electrónica fabrica los teclados y pantallas para calculadoras gráficas en plantas en México y Taiwán. En la tabla se indican las cantidades producidas por hora en cada planta. ¿Cuántas horas debe operar cada planta para cumplir exactamente con un pedido de 4 000 teclados y pantallas?

Planta	Teclados	Pantallas
México	40	32
Taiwán	20	32

34. **Producción.** Una compañía produce salchichas italianas y salchichones en sus plantas en Green Bay y Sheboygan. En la tabla se indica cuánto se produce por hora en cada planta. ¿Cuántas horas debe trabajar cada planta para cumplir exactamente con un pedido de 62 250 salchichas italianas y 76 500 salchichones?

Planta	Salchichas italianas	Salchichones
Green Bay	800	800
Sheboygan	500	1 000

35. Nutrición. Un experimento consiste en dar una dieta estricta a algunos animales. Cada animal va a recibir, entre otros alimentos, 20 gramos de proteína y 6 gramos de grasa. El laboratorista puede comprar dos mezclas de alimentos que tienen la siguiente composición: La mezcla A tiene 10% de proteína y 6% de grasa; la mezcla B tiene 20% de proteína y 2% de grasa. ¿Cuántos gramos de cada mezcla se deben usar para obtener la dieta adecuada para un solo animal?

36. Nutrición. Un agricultor puede usar dos tipos de fertilizante en un plantío de naranjas, la marca A y la marca B. Cada saco de la marca A contiene 8 libras de nitrógeno y 4 de ácido fosfórico. Cada saco de la marca B contiene 7 libras de nitrógeno y 7 de ácido fosfórico. Las pruebas indican que el naranjo necesita 720 libras de nitrógeno y 500 de ácido fosfórico. ¿Cuántos sacos de cada marca tiene que usar para obtener las cantidades necesarias de nitrógeno y de ácido fosfórico?

*** 37. Oferta y demanda.** A $0.60 por bushel, la oferta diaria para el trigo es de 450 bushels y la demanda diaria es de 645 bushels. Cuando el precio se incrementa a $0.90 por bushel, las ofertas diarias aumentan a 750 bushels y la demanda diaria disminuye a 495. Suponga que las ecuaciones para la oferta y demanda son lineales.

(A) Encuentre la ecuación de la oferta. [*Sugerencia:* Formule la ecuación de la oferta en la forma $p = aq + b$ y resuelva para a y b.]
(B) Encuentre la ecuación para la demanda.
(C) Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio.

*** 38. Oferta y demanda.** A $1.40 por bushel, la oferta de frijol de soya es de 1 075 bushels y la demanda diaria es de 580 bushels. Cuando el precio cae a $1.20 por bushel, la oferta diaria disminuye a 575 bushels y la demanda diaria aumenta a 980 bushels. Suponga que las ecuaciones para la oferta y la demanda son lineales.

(A) Encuentre la ecuación para la oferta. [Véase la sugerencia del problema 37.]
(B) Encuentre la ecuación de la demanda.
(C) Encuentre el precio y cantidad de equilibrio.

*** 39. Física.** Se deja caer un objeto desde lo alto de un edificio alto y cae verticalmente con aceleración constante. Si s es la distancia sobre el suelo (en pies), a la que está el objeto t segundos después de que se soltó, entonces s y t están relacionados por una ecuación de la forma

$$s = a + bt^2$$

donde a y b son constantes. Suponga que el objeto está a 180 pies sobre el suelo un segundo después de que se suelta y a 132 pies del suelo 2 segundos después.

(A) Encuentre las constantes a y b.
(B) ¿Qué altura tiene el edificio?
(C) ¿Cuánto tiempo cae el objeto?

*** 40. Física.** Repita el problema 39 si el objeto está a 240 pies de distancia del suelo después de un segundo y a 192 pies después de 2 segundos.

*** 41. Ciencias de la Tierra.** Un terremoto emite una onda primaria y una onda secundaria. Cerca de la superficie de la Tierra la onda primaria viaja a 5 millas por segundo y la secundaria a 3 millas por segundo. A partir del tiempo que tarden en llegar las dos ondas a cierta estación receptora, es posible calcular la distancia del movimiento. (El epicentro se puede localizar al obtener la distancia de barrido en tres o más estaciones.) Suponga que una estación mide que entre la llegada de una onda y la otra pasan 16 segundos. ¿Cuánto tiempo recorrió cada onda, y a qué distancia de la estación ocurrió el temblor?

*** 42. Ciencias de la Tierra.** Un barco usa dispositivos medidores de sonido arriba y abajo del agua, el dispositivo de la superficie registró una explosión 6 segundos antes que el de debajo del agua. El sonido viaja en el aire a 1 100 pies por segundo y en el agua de mar a 5 000 pies por segundo.

(A) ¿Cuánto tiempo le tomó a cada onda sonora alcanzar al barco?
(B) ¿A qué distancia del barco ocurrió la explosión?

SECCIÓN 1-3 Desigualdades lineales

- Relaciones para desigualdades e intervalos de notación
- Solución de desigualdades lineales
- Aplicaciones

Ahora se volverá al problema de cómo resolver desigualdades lineales con una variable, tales como

$$3(x - 5) \geq 5(x + 7) - 10 \qquad \text{y} \qquad -4 \leq 3 - 2x < 7$$

Relaciones para desigualdades e intervalos de notación

Las formas matemáticas anteriores implican la **desigualdad**, o **relación de orden**; es decir, relaciones "menor que" y "mayor que". Así como se usan = para reemplazar las palabras "es igual a", se usan los **símbolos de desigualdad** $<$ y $>$ para representar "es menor que" y "es mayor que", respectivamente.

Tal vez salte a la vista que

$$2 < 4 \qquad 5 > 0 \qquad 25\,000 > 1$$

son verdaderas, pero podría no ser tan evidente que

$$-4 < -2 \qquad 0 > -5 \qquad -25\,000 < -1$$

Para establecer una relación de desigualdad precisa, de manera que pueda interpretarse con respecto de todos los números reales, se necesita una definición precisa del concepto.

DEFINICIÓN 1 $a < b$ y $b > a$

Para los números reales a y b, se dice que ***a* es menor que *b*** o ***b* es mayor que *a*** y se escribe

$$a < b \qquad \text{o} \qquad b > a$$

si existe un número real positivo p tal que $a + p = b$ (o de manera equivalente, $b - a = p$).

Ciertamente se espera que si un número positivo se suma a cualquier número real, la suma sea mayor que la original. Esto es en esencia lo que la definición establece.

Cuando se escribe

$$a \leq b$$

significa que $a < b$ o $a = b$ y se dice que ***a* es menor que o igual a *b***. Cuando se escribe

$$a \geq b$$

significa que $a > b$ o $a = b$ y se dice que ***a* es mayor que o igual a *b***.

Los símbolos de desigualdad $<$ y $>$ tienen una interpretación geométrica muy clara sobre la recta numérica real. Sí $a < b$, entonces a está a la izquierda de b; si $c > d$, entonces c está a la derecha de d (véase la figura 1).

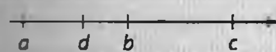


FIGURA 1 $a < b, c > d$.

Es un hecho interesante y útil que para dos números reales a y b, sean $a < b$ o $a > b$ o $a = b$. Esto se conoce como **propiedad de tricotomía** de los números reales.

La doble desigualdad $a < x \leq b$ significa que $x > a$ y $x \leq b$; es decir, x está entre a y b, incluyendo b pero excluyendo a. Al conjunto de todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $a < x \leq b$ se le conoce como **intervalo** y se representa por $(a, b]$. De esta manera,

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}^*$$

* En general, $\{x|P(x)\}$ representa el conjunto de todas las x para las cuales el enunciado $P(x)$ es verdadero. Para expresar este conjunto verbalmente, la barra vertical se lee como "tal que".

El número a se conoce como **punto extremo izquierdo** del intervalo, y el símbolo "(" indica que a no se incluye en el intervalo. El número b se conoce como **punto extremo derecho** del intervalo, y el símbolo "]" indica que b se incluye en el intervalo. En la tabla 1 se indican otros tipos de intervalos para los números reales.

TABLA 1 Notación de intervalos

Notación de intervalo	Notación de desigualdad	Gráfica de línea	Tipo
$[a, b]$	$a \leq x \leq b$		Cerrado
$[a, b)$	$a \leq x < b$		Semiabierto
$(a, b]$	$a < x \leq b$		Semiabierto
(a, b)	$a < x < b$		Abierto
$[b, \infty)$	$x \geq b$		Cerrado
(b, ∞)	$x > b$		Abierto
$(-\infty, a]$	$x \leq a$		Cerrado
$(-\infty, a)$	$x < a$		Abierto

Observe que el símbolo "∞", que se lee "infinito", usado en la tabla 1 no es un número. Cuando se escribe $[b, \infty)$, se refiere simplemente al intervalo que comienza en b y continúa indefinidamente a la derecha. Nunca se escribiría $[b, \infty]$ o $b \leq x \leq \infty$, ya que ∞ no se puede usar como punto extremo de un intervalo. El intervalo $(-\infty, \infty)$ representa el conjunto de los números reales R, ya que su gráfica es toda la recta numérica real.

PRECAUCIÓN Es importante notar que

$$5 > x \leq -3 \qquad \text{es equivalente a } [-3, 5) \text{ y no a } (5, -3]$$

En notación de intervalo, el número más pequeño se escribe siempre a la izquierda. Así, podría ser útil reescribir la desigualdad como $-3 \leq x < 5$ antes de reescribirlo en notación intervalo.

EJEMPLO 1 Intervalos de graficación y desigualdades

Escriba cada una de las siguientes en notación de desigualdad y grafíquelas sobre la recta numérica real:

(A) $[-2, 3)$ (B) $(-4, 2)$ (C) $[-2, \infty)$ (D) $(-\infty, 3)$

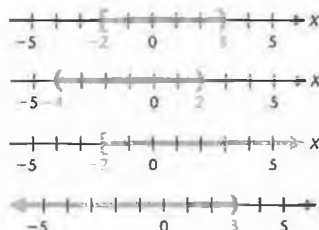
Soluciones

(A) $-2 \le x < 3$

(B) $-4 < x < 2$

(C) $x \le -2$

(D) $x < 3$



Problema seleccionado 1

Escriba cada una de las siguientes desigualdades en notación de intervalo y grafíquelas sobre la recta numérica real:

(A) $-3 < x \le 3$ (B) $2 \ge x \ge -1$ (C) $x > 1$ (D) $x \le 2$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 El ejemplo 1C muestra la gráfica de la desigualdad $x \ge -2$. ¿Cuál es la gráfica de $x < -2$? ¿Cuál es el intervalo correspondiente? Describa las relaciones entre estos conjuntos.

Como los intervalos son conjuntos de números reales, las operaciones de *unión* e *intersección* son a menudo útiles cuando se trabaja con intervalos. La **unión** de los conjuntos A y B, que se denotan por $A \cup B$, es el conjunto formado por la combinación de todos los elementos de A y de todos los elementos de B. La **intersección** de los conjuntos A y B se denota por $A \cap B$, que es el conjunto de elementos de A que está también en B. Simbólicamente:

DEFINICIÓN 2

Unión e intersección

Unión: $A \cup B = \{x \mid x \text{ está en } A \text{ o } x \text{ está en } B\}$

$\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Intersección: $A \cap B = \{x \mid x \text{ está en } A \text{ y } x \text{ está en } B\}$

$\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$

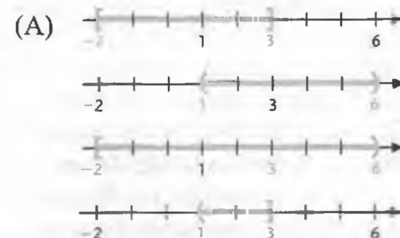
EJEMPLO 2

Graficación de uniones e intersecciones de intervalos

Si $A = [-2, 3]$, $B = (1, 6)$, y $C = (4, \infty)$, grafique los conjuntos indicados y escríbalos como un solo intervalo, si es posible:

(A) $A \cup B$ y $A \cap B$ (B) $A \cup C$ y $A \cap C$

Solución (A)



$A = [-2, 3]$

$B = (1, 6)$

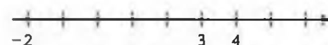
$A \cup B = [-2, 6)$

$A \cap B = (1, 3]$

(B)  $A = [-2, 3]$

 $C = (4, \infty)$

 $A \cup C = [-2, 3] \cup (4, \infty)$

 $A \cap C = \varnothing$

Problema seleccionado 2 Si $D = [-4, 1)$, $E = (-1, 3]$ y $F = [2, \infty)$, grafique los conjuntos indicados y escríbalos como un solo intervalo, si es posible:

(A) $D \cup E$ (B) $D \cap E$ (C) $E \cup F$ (D) $E \cap F$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Reemplace ? con < o > en cada uno de los siguientes.

(A) $-1 \,?\, 3$ y $2(-1) \,?\, 2(3)$

(B) $-1 \,?\, 3$ y $-2(-1) \,?\, -2(3)$

(C) $12 \,?\, -8$ y $\dfrac{12}{12} \,?\, \dfrac{-8}{4}$

(D) $12 \,?\, -8$ y $\dfrac{12}{-4} \,?\, \dfrac{-8}{-4}$

Con base en estos ejemplos, describa verbalmente el efecto de multiplicar ambos lados de una desigualdad por un número.

Solución de desigualdades lineales

Ahora se volverá al problema de resolver desigualdades lineales con una variable, tales como

$$2(2x + 3) < 6(x - 2) + 10 \qquad \text{y} \qquad -3 < 2x + 3 \leq 9$$

El **conjunto solución** para una desigualdad es el conjunto de todos los valores de la variable que hacen de la desigualdad un enunciado verdadero. Cada elemento del conjunto **solución** se conoce como solución de la desigualdad. **Resolver una desigualdad** es encontrar su conjunto solución. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución para un conjunto de reemplazo dado. Como con las ecuaciones, se realizan las operaciones sobre las desigualdades que produzcan desigualdades equivalentes más simples, y se continúa el proceso hasta llegar a una desigualdad cuya solución sea obvia. Las propiedades de las desigualdades dadas en el teorema 1 se pueden usar para producir desigualdades equivalentes.

Teorema 1 **Propiedades de las desigualdades**

Para cualquiera de los números reales a, b y c:

1. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$. — **Propiedad de transitividad**
2. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$. — **Propiedad de la suma**
   $-2 < 4$ $-2 + 3 < 4 + 3$
3. Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$. — **Propiedad de la resta**
   $-2 < 4$ $-2 - 3 < 4 - 3$
4. Si $a < b$ y c es positivo, entonces $ca < cb$.
   $-2 < 4$ $3(-2) < 3(4)$
5. Si $a < b$ y c es negativo, entonces $ca > cb$.
   $-2 < 4$ $(-3)(-2) > (-3)(4)$

   (4 y 5) **Propiedad de la multiplicación (Observe la diferencia entre 4 y 5.)**
6. Si $a < b$ y c es positivo, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.
   $-2 < 4$ $\frac{-2}{2} < \frac{4}{2}$
7. Si $a < b$ y c es negativo, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
   $-2 < 4$ $\frac{-2}{-2} < \frac{4}{-2}$

   (6 y 7) **Propiedad de la división (Observe la diferencia entre 6 y 7.)**

Propiedades similares se cumplen si cada signo de la desigualdad se invierte, o si $<$ se reemplaza con $\leq$ y $>$ se reemplaza con $\leq$. De esta manera, encontramos que se pueden ejecutar esencialmente las mismas operaciones para las desigualdades, que las que se realizaron para las ecuaciones. Cuando se trabaje con desigualdades, sin embargo, se debe tener particular cuidado con el uso de las propiedades de multiplicación y división.

El orden de la desigualdad se invierte si se multiplica o divide ambos lados de un enunciado de desigualdad por un número negativo.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3 Las propiedades de igualdad se pueden resumir fácilmente: Se puede sumar, restar, multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por un número real diferente de cero para producir una ecuación equivalente. Escriba un resumen similar para las propiedades de las desigualdades.

Ahora veamos cómo se usan las propiedades de las desigualdades para resolver desigualdades lineales. Algunos ejemplos ilustrarán el proceso.

EJEMPLO 3 **Solución de una desigualdad lineal**

Resuelva y grafique: $2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$

Solución

$$2(2x + 3) - 10 < 6(x - 2)$$

$$4x + 6 - 10 < 6x - 12$$ Simplifique los lados izquierdo y derecho

$$4x - 4 < 6x - 12$$

$$4x - 4 + 4 < 6x - 12 + 4$$ Propiedad de la suma

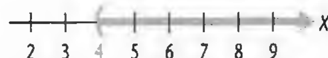
$$4x < 6x - 8$$

$$4x - 6x < 6x - 8 - 6x$$ Propiedad de la resta

$$-2x < -8$$

$$\frac{-2x}{-2} > \frac{-8}{-2}$$ Propiedad de la división: observe el orden inverso de la desigualdad debido a que −2 es negativo

$x > 4$ o $(4, \infty)$ Conjunto solución



Gráfica del conjunto solución

Problema seleccionado 3 Resuelva y grafique: $3(x - 1) \geq 5(x + 2) - 5$

EJEMPLO 4 Solución de una desigualdad lineal que implica fracciones.

Resuelva y grafique: $\frac{2x - 3}{4} + 6 \geq 2 + \frac{4x}{3}$

Solución

$$\frac{2x - 3}{4} + 6 \geq 2 + \frac{4x}{3}$$

$$12 \cdot \frac{2x - 3}{4} + 12 \cdot 6 \geq 12 \cdot 2 + 12 \cdot \frac{4x}{3}$$ Multiplique ambos lados por 12, el mod.

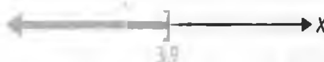
$$3(2x - 3) + 72 \geq 24 + 4(4x)$$

$$6x - 9 + 72 \geq 24 + 16x$$

$$6x + 63 \geq 24 + 16x$$

$$-10x \geq -39$$

$x \leq 3.9$ o $(-\infty, 3.9]$ El orden se invirtió debido a que ambos lados están divididos entre −10, un número negativo.



Problema seleccionado 4 Resuelva y grafique: $\frac{4x - 3}{3} + 8 < 6 + \frac{3x}{2}$

EJEMPLO 5 **Solución de una doble desigualdad**

Resuelva y grafique: $-3 \leq 4 - 7x < 18$

Solución Se procede como antes, excepto que se intenta despejar x en la parte de enmedio con un coeficiente de 1.

$$-3 \leq 4 - 7x < 18$$

$$-3 - 4 \leq 4 - 7x - 4 < 18 - 4$$ Reste 4 en cada miembro.

$$-7 \leq -7x < 14$$

$$\frac{-7}{-7} \geq \frac{-7x}{-7} > \frac{14}{-7}$$ Divida cada miembro entre −7 e invierta cada desigualdad.



$1 \geq x > -2$ o $-2 < x \leq 1$ o $(-2, 1]$

Problema seleccionado 5 Resuelva y grafique: $-3 < 7 - 2x \leq 7$

• Aplicaciones

EJEMPLO 6 **Química**

En un experimento químico, una solución de ácido clorhídrico se va a mantener entre 30°C y 35°C; es decir, $30 \leq C \leq 35$. ¿Cuál es el rango de temperatura en grados Fahrenheit si la fórmula de conversión Celsius/Fahrenheit es $C = \frac{5}{9}(F - 32)$?

Solución

$$30 \leq C \leq 35$$

$$30 \leq \frac{5}{9}(F - 32) \leq 35$$ Reemplace C con $\frac{5}{9}(F - 32)$.

$$\frac{9}{5} \cdot 30 \leq \frac{9}{5} \cdot \frac{5}{9}(F - 32) \leq \frac{9}{5} \cdot 35$$ Multiplique cada miembro por $\frac{9}{5}$.

$$54 \leq F - 32 \leq 63$$

$$54 + 32 \leq F - 32 + 32 \leq 63 + 32$$ Sume 32 a cada miembro.

$$86 \leq F \leq 95$$

El rango de la temperatura es de 86°F a 95°F en total.

Problema seleccionado 6 Un rollo fotográfico se va a mantener entre 68°F y 77°F: es decir, 68∝F < 77. ¿Cuál es el rango de temperatura en grados Celsius si la fórmula de conversión Celsius/Fahrenheit es $F = \frac{9}{5}C + 32$?

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $(-3, 3]$

(B) $[-1, 2]$

(C) $(1, \infty)$

(D) $(-\infty, 2)$

2. (A) $D \cup E = [-4, 3]$

(B) $D \cap E = (-1, 1)$

(C) $E \cup F = (-1, \infty)$

(D) $E \cap F = [2, 3]$

3. $x \leq -4$ o $(-\infty, -4]$

4. $x > 6$ o $(6, \infty)$

5. $5 > x \geq 0$ o $0 \leq x < 5$ o $(0, 5)$

6. $20 \leq C \leq 25$, el rango de temperatura es de 20∝C a 25∝C

EJERCICIO 1-3

A

Escriba los problemas del 1 al 6 en notación de desigualdad y grafíquelos sobre la recta numérica real.

1. $[-8, 7]$ **2.** $(-4, 8)$ **3.** $[-6, 6)$

4. $(-3, 3]$ **5.** $[-6, \infty)$ **6.** $(-\infty, 7)$

Escriba los problemas del 7 al 12 en notación de intervalos y grafíquelos sobre la recta numérica real.

7. $-2 < x \leq 6$ **8.** $-5 \leq x \leq 5$ **9.** $-7 < x < 8$

10. $-4 \leq x < 5$ **11.** $x \leq -2$ **12.** $x > 3$

Escriba los problemas del 13 al 16 en notación de intervalo y desigualdad.

13.

14.

15.

16.

Resuelva y grafique los problemas del 17 al 30.

17. $7x - 8 < 4x + 7$ **18.** $4x + 8 \geq x - 1$

19. $3 - x \ge 5(3 - x)$

20. $2(x - 3) + 5 < 5 - x$

21. $\frac{N}{-2} > 4$

22. $\frac{M}{-3} \le -2$

23. $-5t < -10$

24. $-7n \ge 21$

25. $3 - m < 4(m - 3)$

26. $2(1 - u) \ge 5u$

27. $-2 - \frac{B}{4} \le \frac{1 + B}{3}$

28. $\frac{y - 3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

29. $-4 < 5t + 6 \le 21$

30. $2 \le 3m - 7 < 14$

B

En los problemas del 31 al 42, grafique el conjunto indicado y escríbalo como un solo intervalo, si es posible.

31. $(-5, 5) \cup [4, 7]$

32. $(-5, 5) \cap [4, 7]$

33. $[-1, 4) \cap (2, 6]$

34. $[-1, 4) \cup (2, 6]$

35. $(-\infty, 1) \cup (-2, \infty)$

36. $(-\infty, 1) \cap (2, \infty)$

37. $(-\infty, -1) \cup [3, 7)$

38. $(1, 6] \cup [9, \infty)$

39. $[2, 3] \cup (1, 5)$

40. $[2, 3] \cap (1, 5)$

41. $(-\infty, 4) \cup (-1, 6]$

42. $(-3, 2) \cup [0, \infty)$

Resuelva y grafique los problemas del 43 al 54.

43. $\frac{q}{7} - 3 > \frac{q - 4}{3} + 1$

44. $\frac{p}{3} - \frac{p - 2}{2} \le \frac{p}{4} - 4$

45. $\frac{2x}{5} - \frac{1}{2}(x - 3) \le \frac{2x}{3} - \frac{3}{10}(x + 2)$

46. $\frac{2}{3}(x + 7) - \frac{x}{4} > \frac{1}{2}(3 - x) + \frac{x}{6}$

47. $-4 \le \frac{9}{5}x + 32 \le 68$

48. $-1 \le \frac{2}{3}A + 5 \le 11$

49. $-12 < \frac{3}{4}(2 - x) \le 24$

50. $24 \le \frac{2}{3}(x - 5) < 36$

51. $16 < 7 - 3x \le 31$

52. $-1 \le 9 - 2x < 5$

53. $-6 < -\frac{2}{5}(1 - x) \le 4$

54. $15 \le 7 - \frac{2}{5}x \le 21$

Use una calculadora para resolver cada una de las desigualdades en los problemas del 55 al 58. Escriba sus respuestas mediante notación de desigualdad.

55. $5.23(x - 0.172) \le 6.02x - 0.427$

56. $72.3x - 4.07 > 9.02(11.7x - 8.22)$

57. $-0.703 < 0.122 - 2.28x < 0.703$

58. $-4.26 < 3.88 - 6.07x < 5.66$

∫ * *Los problemas 59-64 están relacionados con el cálculo. ¿Para que número(s) real(es) x cada expresión representa a un número real?*

* Con el símbolo ∫ se distinguen los problemas que están relacionados con el cálculo.

59. $\sqrt{1 - x}$

60. $\sqrt{x + 5}$

61. $\sqrt{3x + 5}$

62. $\sqrt{7 - 2x}$

63. $\frac{1}{\sqrt[4]{2x + 3}}$

64. $\frac{1}{\sqrt[4]{5 - 6x}}$

65. ¿Qué se puede comentar respecto de los signos de los números a y b en cada caso?

(A) $ab > 0$ (B) $ab < 0$

(C) $\frac{a}{b} > 0$ (D) $\frac{a}{b} < 0$

66. ¿Qué se puede comentar acerca de los signos de los números a, b y c en cada caso?

(A) $abc > 0$ (B) $\frac{ab}{c} < 0$

(C) $\frac{a}{bc} > 0$ (D) $\frac{a^2}{bc} < 0$

67. Reemplace en cada pregunta el signo de interrogación con $<$ o $>$, de la manera apropiada:

(A) Si $a - b = 1$, entonces a ? b.
(B) Si $u - v = -2$, entonces u ? v.

68. ¿Para cuál p y q es $p + q < p - q$?

C

69. Si tanto a como b son números negativos y b/a es mayor que 1, entonces, ¿$a - b$ es positivo o negativo?

70. Si a y b son números positivos y b/a es mayor que 1, entonces, ¿$a - b$ es positivo o negativo?

71. Indique (V) si es verdadero o (F) si es falso:

(A) Si $p > q$ y $m > 0$, entonces $mp < mq$.
(B) Si $p < q$ y $m < 0$, entonces $mp > mq$.
(C) Si $p > 0$ y $q < 0$, entonces $p + q > q$.

72. Suponga que $m > n > 0$; entonces

$$mn > n^2$$
$$mn - m^2 > n^2 - m^2$$
$$m(n - m) > (n + m)(n - m)$$
$$m > n + m$$
$$0 > n$$

Pero si se supuso que $n > 0$. Encuentre el error.

Pruebe cada propiedad de desigualdad en los problemas del 73 al 76, dado que a, b y c son números reales arbitrarios.

73. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

74. Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$.

75. (A) Si $a < b$ y c es positivo, entonces $ca < cb$.
(B) Si $a < b$ y c es negativo, entonces $ca > cb$.

76. (A) Si $a < b$ y c es positivo, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

(B) Si $a < b$ y c es negativo, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

APLICACIONES

Escriba todas las respuestas usando notación de desigualdad.

77. Ciencias de la Tierra. En 1984, al perforar el pozo más profundo del mundo, los soviéticos encontraron que la temperatura a x kilómetros de profundidad de la Tierra estaba dada por

$$T = 30 + 25(x - 3) \qquad 3 \leq x \leq 15$$

donde T es la temperatura en grados Celsius. ¿A qué profundidad la temperatura estará entre 200 y 300°C en total?

78. Ciencias de la Tierra. El aire seco tiende a avanzar hacia arriba y a expandirse, y al ir avanzando se enfría a una razón constante de 5.5°F por cada 1 000 pies que asciende hasta alcanzar una altitud de 40 000 pies. Si la temperatura en el suelo es de 70°F, entonces la temperatura T a una altura h estará dada aproximadamente por $T = 70 - 0.0055h$. ¿Para qué rango de altitud la temperatura estará entre 26°F y −40°F, en total?

79. Negocios y economía. Una compañía electrónica está planeando comercializar una nueva calculadora gráfica. Los costos fijos son de $650 000 y los variables de $47 por calculadora. El precio de la calculadora al mayoreo será de $63. Es evidente que para que la compañía obtenga utilidades los ingresos deben ser superiores a los costos.

(A) ¿Cuántas calculadoras se deben vender para que la compañía obtenga utilidades?
(B) ¿Cuántas calculadoras tendría que vender para llegar al punto de equilibrio?
(C) Analice la relación entre los resultados de los incisos A y B.

80. Negocios y economía. Un fabricante de videojuegos planea comercializar un videojuego en versión de 64 bits. Los costos fijos son de $550 000 y los variables de $120 por artículo producido. El precio de la máquina al mayoreo será de $140.

(A) ¿Cuántas máquinas de juego se deben vender para que la compañía tenga ganancias?
(B) ¿Cuántos videojuegos debe vender la compañía para llegar al punto de equilibrio?
(C) Analice las relaciones entre los resultados de los incisos A y B.

81. Negocios y economía. La compañía electrónica del problema 79 encuentra que si aumentan los precios de las partes aumentan los costos variables a $50.5 por calculadora.

(A) Analice las posibles estrategias que la compañía podría usar para tratar de solucionar este aumento de costos.
(B) Si la compañía continúa vendiendo la calculadora a $63, ¿cuántas tiene que vender ahora para obtener utilidades?
(C) Si la compañía quiere comenzar obteniendo utilidades con el mismo nivel de producción que tenía antes del aumento de costos, ¿en cuánto tendría que incrementar el precio de venta al mayoreo?

82. Negocios y economía. El fabricante de videojuegos del problema 80 enfrenta inesperados problemas de programación que aumentan los costos fijos a $660 000.

(A) Analice las posibles estrategias que la compañía podría usar para tratar de solucionar este aumento de costos.
(B) Si la compañía continúa vendiendo el videojuego a $140, ¿cuántos tiene que vender para obtener utilidades?
(C) Si la compañía quiere comenzar obteniendo utilidades con el mismo nivel de producción anterior al aumento de costos, ¿en cuánto debe incrementar el precio de venta al mayoreo?

83. Energía. Si en una casa, la demanda de potencia en un circuito eléctrico de 110 volts varía entre 220 y 2 750 watts, ¿cuál es el rango de corriente que fluye a través del circuito? ($W = EI$, donde W = potencia en watts, E = voltaje en volts, I = corriente en amperios).

84. Psicología. El IQ de una persona está dado por la fórmula

$$\text{IQ} = \frac{\text{EM}}{\text{EC}}\,100$$

donde EM es la edad mental y EC es la edad cronológica. Si

$$80 \leq \text{IQ} \leq 140$$

para un grupo de niños de 12 años de edad, encuentre el rango de su edad mental.

***85. Finanzas.** Si una persona entre los 65 y 69 años de edad continúa trabajando después de comenzar a recibir los beneficios por seguridad social, los beneficios se reducirán cuando los ingresos excedan un límite establecido. En 1989, los beneficios se redujeron en $1 por cada $2 que se ganaron después de $8 880. Encuentre el rango en las reducciones de los beneficios para las personas que ganan entre $13 000 y $16 000.

***86. Finanzas.** Refiérase al problema 85. En 1990, la ley se cambió de manera que los beneficios se redujeran en $1 por cada $3 que se ganaran después de $8 880. Encuentre el rango en las reducciones de beneficios para personas que ganan entre $13 000 y $16 000.

SECCIÓN 1-4 Valor absoluto en ecuaciones y desigualdades



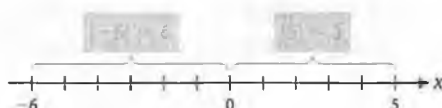
- Valor absoluto y distancia
- Valor absoluto en ecuaciones y desigualdades
- Valores absolutos y radicales

En esta sección se analiza la resolución de ecuaciones con valor absoluto y desigualdades.

• Valor absoluto y distancia

Comenzamos con una definición geométrica del valor absoluto. Si a es la coordenada de un punto sobre la recta numérica real, entonces la distancia desde el origen a a se representa por $|a|$ y se conoce como **valor absoluto** de a. Así, $|5| = 5$, como el punto con coordenada 5 está a 5 unidades del origen, y $|-6| = 6$, ya que el punto con coordenada -6 está a 6 unidades del origen (véase la figura 1).

FIGURA 1 Valor absoluto.



Simbólicamente, y de manera más formal, se define el valor absoluto como sigue:

DEFINICIÓN 1

Valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$|4| = 4$

$|-3| = -(-3) = 3$

[*Nota*: $-x$ es positivo si x es negativo.]

Ambas definiciones, la geométrica y la no geométrica, del valor absoluto son útiles, como se verá en seguida. Recuerde:

El valor absoluto de un número nunca es negativo.

EJEMPLO 1

Valor absoluto de un número real

(A) $|\pi - 3| = \pi - 3$ Puesto que $\pi \approx 3.14$, $\pi - 3$ es positivo

(B) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ Puesto que $3 - \pi$ es negativo

Problema seleccionado 1

Escriba sin el signo de valor absoluto:

(A) $|8|$ (B) $|\sqrt[3]{9} - 2|$ (C) $|-\sqrt{2}|$ (D) $|2 - \sqrt[3]{9}|$

8 $-\sqrt[3]{9}-2$ $2-\sqrt[3]{9}$ $-\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{9}-2$

Siguiendo el mismo razonamiento empleado en el ejemplo 1, se puede probar el teorema siguiente (véase el problema 79 en el ejercicio 1-4).

Teorema 1

Para todos los números reales a y b,

$$|b - a| = |a - b|$$

Se usa este resultado al definir la distancia entre dos puntos sobre la recta numérica real.

DEFINICIÓN 2

Distancia entre los puntos *A* y *B*

Sean A y B dos puntos sobre una recta numérica real con coordenadas a y b, respectivamente. La **distancia entre *A* y *B*** está dada por

$$d(A, B) = |b - a|$$

Esta distancia también se conoce como **longitud del segmento de la recta** que une a A con B.

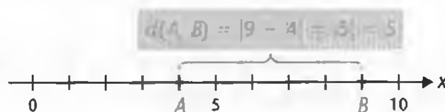
EJEMPLO 2 Distancia entre puntos sobre una recta numérica

Encuentre la distancia entre los puntos A y B con coordenadas a y b, respectivamente, como se indica

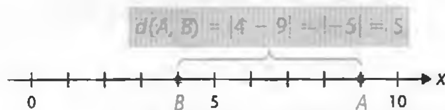
(A) $a = 4, b = 9$ (B) $a = 9, b = 4$ (C) $a = 0, b = 6$

Soluciones

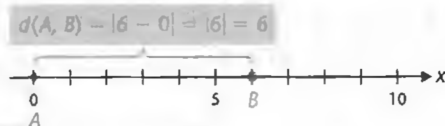
(A)



(B)



(C)



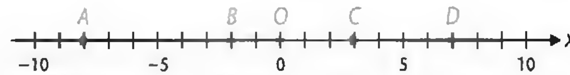
Sería claro, puesto que $|b - a| = |a - b|$, es decir,

$$d(A, B) = d(B, A)$$

Por lo tanto, al calcular la distancia entre dos puntos sobre la recta numérica real, no importa cómo se marquen los dos puntos (el punto A puede estar a la izquierda o a la derecha del punto B). Observe también que si A está en el origen O, entonces

$$d(O, B) = |b - 0| = |b|$$

Problema seleccionado 2 Use la siguiente recta numérica para encontrar las distancias indicadas.



(A) $d(C, D)$ (B) $d(D, C)$ (C) $d(A, B)$
(D) $d(A, C)$ (E) $d(O, A)$ (F) $d(D, A)$

• Valor absoluto en ecuaciones y desigualdades

La relación entre álgebra y geometría es una herramienta importante cuando se trabaja con ecuaciones y desigualdades que implican valor absoluto. Por ejemplo, el enunciado algebraico

$$|x - 1| = 2$$

se puede interpretar geométricamente como una declaración de que la distancia de x a 1 es 2.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Escriba las interpretaciones geométricas de los siguientes postulados algebraicos:

(A) $|x - 1| < 2$ (B) $0 < |x - 1| < 2$ (C) $|x - 1| > 2$

EJEMPLO 3 **Solución de problemas con valor absoluto de manera geométrica**

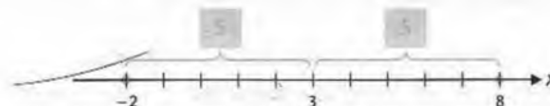
Interprete geométricamente, resuelva y grafique. Escriba las soluciones tanto en notación de desigualdad como de intervalo, donde sea adecuado.

(A) $|x - 3| = 5$ (B) $|x - 3| < 5$
(C) $0 < |x - 3| < 5$ (D) $|x - 3| > 5$

Soluciones (A) Geométricamente, $|x - 3|$ representa la distancia entre x y 3. Así, en $|x - 3| = 5$, x es un número cuya distancia desde 3 es 5. Es decir,

$$x = 3 \pm 5 = -2 \quad \text{o} \quad 8$$

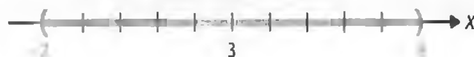
El conjunto solución es $\{-2, 8\}$. Ésta no es la notación de intervalo.



(B) Geométricamente, en $|x - 3| < 5$, x es un número cuya distancia desde 3 es menor que 5; es decir,

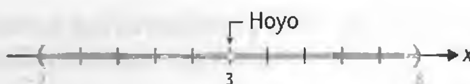
$$-2 < x < 8$$

El conjunto solución es $(-2, 8)$. Ésta *es* la notación de intervalo



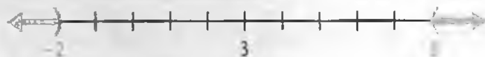
(C) La forma $0 < |x - 3| < 5$ se encuentra con frecuencia en cálculo y en matemáticas más avanzadas. Geométricamente, x es un número cuya distancia desde 3 es menor que 5, pero x no puede ser igual a 3. De esta manera

$$-2 < x < 8 \qquad x \neq 3 \qquad \text{o} \qquad (-2, 3) \cup (3, 8)$$



(D) Geométricamente en $|x - 3| > 5$, x es un número cuya distancia desde 3 es mayor que 5; es decir,

$$x < -2 \qquad \text{o} \qquad x > 8 \qquad \text{o} \qquad (-\infty, -2) \cup (8, \infty)$$



PRECAUCIÓN No confunda soluciones del tipo

$$-2 < x \qquad \text{y} \qquad x < 8$$

que también se pueden escribir como

$$-2 < x < 8 \qquad \text{o} \qquad (-2, 8)$$

con soluciones como

$$x < -2 \qquad \text{o} \qquad x > 8$$

que no pueden ser escritas como una doble desigualdad o como un solo intervalo.

En la tabla 1 se resumen los resultados.

TABLA 1 **Interpretación geométrica del valor absoluto en ecuaciones y desigualdades**

Forma ($d > 0$)	Interpretación geométrica	Solución	Gráfica
$\lvert x - c\rvert = d$	La distancia entre x y c es igual *a d*.	$\lvert c - d, c + d\rvert$	d d; $c - d$ c $c + d$; x
$\lvert x - c\rvert < d$	La distancia entre x y c es menor que d.	$\lvert c - d, c + d\rvert$	$c - d$ c $c + d$; x
$0 < \lvert x - c\rvert < d$	La distancia entre x y c es menor que d, pero $x \neq c$	$(c - d, c) \cup (c, c + d)$	$c - d$ c $c + d$; x
$\lvert x - c\rvert > d$	La distancia entre x y c es mayor que d.	$(-\infty, c - d) \cup (c + d, \infty)$	$c - d$ c $c + d$; x

Problema seleccionado 3 Interprete geométricamente, resuelva y grafique. Escriba las soluciones en notación de desigualdad y de intervalo, donde sea adecuado.

(A) $|x + 2| = 6$ (B) $|x + 2| < 6$

(C) $0 < |x + 2| < 6$ (D) $|x + 2| > 6$

[*Sugerencia*: $|x + 2| = |x - (-2)|$.]

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Describa el conjunto de los números que satisfagan cada una de las siguientes:

(A) $2 > x > 1$ (B) $2 > x < 1$

(C) $2 < x > 1$ (D) $2 < x < 1$

Explique por qué nunca es necesario usar dobles desigualdades con símbolos de desigualdad apuntando en direcciones diferentes. La notación matemática estándar necesita que todos los símbolos de desigualdad en una expresión apunten en la misma dirección.

Razonando geométricamente como antes (advirtiendo que $|x| = |x - 0|$) se llega al teorema 2.

Teorema 2

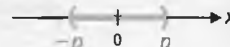
Propiedades de ecuaciones y desigualdades que implican |x|

Para $p > 0$:

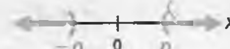
1. $x| = p$ es equivalente a $x = p$ o $x = -p$.



2. $|x| < p$ es equivalente a $-p < x < p$.



3. $|x| > p$ es equivalente a $x < -p$ o $x > p$.



Si se reemplaza x en el teorema 2 por $ax + b$, se obtiene el teorema 3, que es más general.

Teorema 3

Propiedades de ecuaciones y desigualdades que implican |ax + b|

Para $p > 0$:

1. $|ax + b| = p$ es equivalente a $ax + b = p$ o $ax + b = -p$.
2. $|ax + b| < p$ es equivalente a $-p < ax + b < p$.
3. $|ax + b| > p$ es equivalente a $ax + b = -p$ o $ax + b > p$.

EJEMPLO 4

Solución de problemas con valor absoluto

Resuelva y escriba las soluciones en notación tanto de desigualdad como de intervalo, en donde sea pertinente.

(A) $|3x + 5| = 4$ (B) $|x| < 5$ (C) $|2x - 1| < 3$ (D) $|7 - 3x| \leq 2$

Soluciones

(A) $|3x + 5| = 4$

$$3x + 5 = \pm 4$$

$$3x = -5 \pm 4$$

$$x = \frac{-5 \pm 4}{3}$$

$$x = -3, -\tfrac{1}{3}$$

o $\{-3, -\tfrac{1}{3}\}$

(B) $|x| < 5$

$$-5 < x < 5$$

o $(-5, 5)$

(C) $|2x - 1| < 3$

$$-3 < 2x - 1 < 3$$
$$-2 < 2x < 4$$
$$-1 < x < 2$$
o $(-1, 2)$

(D) $|7 - 3x| \leq 2$

$$-2 \leq 7 - 3x \leq 2$$
$$-9 \leq -3x \leq -5$$
$$3 \geq x \geq \tfrac{5}{3}$$
$$\tfrac{5}{3} \leq x \leq 3$$
o $[\tfrac{5}{3}, 3]$

Problema seleccionado 4 Resuelva y escriba soluciones en notación de desigualdad y de intervalo, donde sea apropiado.

(A) $|2x - 1| = 8$ (B) $|x| \leq 7$ (C) $|3x + 3| \leq 9$ (D) $|5 - 2x| < 9$

EJEMPLO 5

Solución de desigualdades con valor absoluto

Resuelva y escriba las soluciones en notación de desigualdad y de intervalo.

(A) $|x| > 3$ (B) $|2x - 1| \geq 3$ (C) $|7 - 3x| > 2$

Soluciones

(A) $|x| > 3$

$x < -3$ o $x > 3$ Notación de desigualdad

$(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$ Notación de intervalo

(B) $|2x - 1| \geq 3$

$2x - 1 \leq -3$ o $2x - 1 \geq 3$

$2x \leq -2$ o $2x \geq 4$

$x \leq -1$ o $x \geq 2$ Notación de desigualdad

$(-\infty, -1] \cup [2, \infty)$ Notación de intervalo

(C) $|7 - 3x| > 2$

$7 - 3x < -2$ o $7 - 3x > 2$

$-3x < -9$ o $-3x > -5$

$x > 3$ o $x < \tfrac{5}{3}$ Notación de desigualdad

$(-\infty, \tfrac{5}{3}) \cup (3, \infty)$ Notación de intervalo

---

Problema seleccionado 5 Resuelva y escriba soluciones de desigualdad y de intervalo.

(A) $|x| \geq 5$ (B) $|4x - 3| > 5$ (C) $|6 - 5x| > 16$

EJEMPLO 6

Un problema de valor absoluto con dos casos

Resuelva: $|x + 4| = 3x - 8$

Solución El teorema 3 no se aplica directamente, puesto que no se sabe si $3x - 8$ es positivo. Sin embargo, se puede usar la definición de valor absoluto y dos casos: $x + 4 \geq 0$ y $x + 4 < 0$.

Caso 1. $x + 4 \geq 0$ (es decir, $x \geq -4$)
Para este caso, los valores positivos de x están en el conjunto $\{x|x \geq -4\}$.

$$|x + 4| = 3x - 8$$

$$x + 4 = 3x - 8 \quad |a| = a \text{ para } a \geq 0$$

$$-2x = -12$$

$$x = 6 \quad \text{Una solución, ya que 6 está dentro de los posibles valores de } x$$

La comprobación se deja al lector.

Caso 2. $x + 4 < 0$ (es decir, $x < -4$)
En este caso, los valores posibles de x están en el conjunto $\{x|x < -4\}$.

$$|x + 4| = 3x - 8$$

$$-(x + 4) = 3x - 8 \quad |a| = -a \text{ para } a < 0$$

$$-x - 4 = 3x - 8$$

$$-4x = -4$$

$$x = 1 \quad \text{No es una solución, ya que 1 no está dentro de los posibles valores de } x$$

Combinando ambos casos, se observa que la única solución es $x = 6$.

Comprobación Como una comprobación final, se sustituye $x = 6$ y $x = 1$ en la ecuación original.

$$|x + 4| = 3x - 8 \qquad |x + 4| = 3x - 8$$

$$|6 + 4| \stackrel{?}{=} 3(6) - 8 \qquad |1 + 4| = 3(1) - 8$$

$$10 \stackrel{\checkmark}{=} 10 \qquad 5 \neq -5$$

Problema seleccionado 6 Resuelva: $|3x - 4| = x + 5$

Valores absolutos y radicales

En la sección A-7, se mostró que si x es positiva o 0, entonces

$$\sqrt{x^2} = x$$

Sin embargo, si x es negativa, se debe escribir

$$\sqrt{x^2} = -x \qquad \sqrt{(-2)^2} = -(-2) = 2$$

Así, para cualquier número real x,

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Que es exactamente como se definió a $|x|$ al inicio de esta sección (véase la definición 1). Así, para cualquier número real x,

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) 8 (B) $\sqrt[3]{9} - 2$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt[3]{9} - 2$

2. (A) 4 (B) 4 (C) 6 (D) 11 (E) 8 (F) 15

3. (A) x es un número cuya distancia desde -2 es 6.

$x = -8, 4$ o $\{-8, 4\}$

(B) x es un número cuya distancia desde -2 es menor que 6.

$-8 < x < 4$ o $(-8, 4)$

(C) x es un número cuya distancia desde -2 es menor que 6, pero x no puede ser igual a -2.

$-8 < x < 4, x \neq -2$ o $(-8, -2) \cup (-2, 4)$

(D) x es un número cuya distancia desde -2 es mayor que 6.

$x < -8$ o $x > 4$, o $(-\infty, -8) \cup (4, \infty)$

4. (A) $x = -\frac{7}{2}, \frac{9}{2}$ o $\{-\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$ (B) $-7 \leq x \leq 7$ o $[-7, 7]$ (C) $-4 \leq x \leq 2$ o $[-4, 2]$
(D) $-2 < x < 7$ o $(-2, 7)$

5. (A) $x \leq -5$ o $x \geq 5$, o $(-\infty, -5] \cup [5, \infty)$ (B) $x < -\frac{1}{2}$ o $x > 2$, o $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (2, \infty)$
(C) $x < -2$ o $x > \frac{22}{5}$, o $(-\infty, -2) \cup (\frac{22}{5}, \infty)$

6. $x = -\frac{1}{4}, \frac{9}{2}$ o $\{-\frac{1}{4}, \frac{9}{2}\}$

EJERCICIO 1-4

A

En los problemas del 1 al 8, simplifique y escriba sin los signos de valor absoluto. No reemplace a los radicales con aproximaciones decimales.

1. $|\sqrt{5}|$ **2.** $|-\frac{3}{4}|$

3. $|(-6) - (-2)|$ **4.** $|(-2) - (-6)|$

5. $|5 - \sqrt{5}|$ **6.** $|\sqrt{7} - 2|$

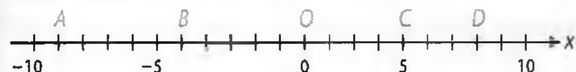
7. $|\sqrt{5} - 5|$ **8.** $|2 - \sqrt{7}|$

En los problemas del 9 al 12, encuentre la distancia entre los puntos A y B con coordenadas a y b respectivamente, como se dan.

9. $a = -7,\ b = 5$ **10.** $a = 3,\ b = 12$

11. $a = 5,\ b = -7$ **12.** $a = -9,\ b = -17$

En los problemas del 13 al 18, use la recta numérica de abajo para encontrar las distancias indicadas:



13. $d(B, O)$ **14.** $d(A, B)$ **15.** $d(O, B)$

16. $d(B, A)$ **17.** $d(B, C)$ **18.** $d(D, C)$

Escriba cada uno de los enunciados de los problemas del 19 al 28 como una ecuación de valor absoluto o de desigualdad.

19. x está a 4 unidades de 3.

20. y está a 3 unidades de 1.

21. m está a 5 unidades de -2.

22. n está a 7 unidades de -5.

23. x es menor que 5 unidades de 3.

24. z es menor que 8 unidades de -2.

25. p no es más grande que 6 unidades de -2.

26. c no es más grande que 7 unidades de -3.

27. q no es más grande que 2 unidades de 1.

28. d no es más grande que 4 unidades de 5.

B

En los problemas del 29 al 44, resuelva, interprete geométricamente y grafique. Cuando sea aplicable, escriba las respuestas usando notación de desigualdad y notación de intervalos.

29. $|x| \leq 7$
30. $|t| \leq 5$
31. $|x| \geq 7$
32. $|x| \geq 5$
33. $|y - 5| = 3$
34. $|t - 3| = 4$
35. $|y - 5| < 3$
36. $|t - 3| < 4$
37. $|y - 5| > 3$
38. $|t - 3| > 4$
39. $|u + 8| = 3$
40. $|x + 1| = 5$
41. $|u + 8| \leq 3$
42. $|x + 1| \leq 5$
43. $|u + 8| \geq 3$
44. $|x + 1| \geq 5$

En los problemas del 45 al 62, resuelva cada ecuación o desigualdad. Cuando sea aplicable escriba la respuesta en notación de desigualdad y notación de intervalos.

45. $|5x - 3| \leq 12$
46. $|2x - 3| \leq 5$
47. $|2y - 8| > 2$
48. $|3u + 4| > 3$
49. $|5t - 7| = 11$
50. $|6m + 9| = 13$
51. $|9 - 7u| < 14$
52. $|7 - 9M| < 15$
53. $|1 - \frac{2}{3}x| \geq 5$
54. $|\frac{3}{4}x + 3| \geq 9$
55. $|\frac{9}{5}C + 32| < 31$
56. $|\frac{5}{9}(F - 32)| < 40$
57. $\sqrt{x^2} < 2$
58. $\sqrt{m^2} > 3$
59. $\sqrt{(1 - 3t)^2} \leq 2$
60. $\sqrt{(3 - 2x)^2} < 5$
61. $\sqrt{(2t - 3)^2} > 3$
62. $\sqrt{(3m + 5)^2} \geq 4$

C

Los problemas del 63 al 66 se relacionan con cálculo. Resuelva y grafique. Escriba cada solución usando notación de intervalos.

63. $0 < |x - 3| < 0.1$
64. $0 < |x - 5| < 0.01$
65. $0 < |x - c| < d$
66. $0 < |x - 4| < d$

En los problemas del 67 al 76, ¿para cuáles valores de x tienen validez?

67. $|x - 5| = x - 5$
68. $|x + 7| = x + 7$
69. $|x + 8| = -(x + 8)$
70. $|x - 11| = -(x - 11)$
71. $|4x + 3| = 4x + 3$
72. $|5x - 9| = (5x - 9)$
73. $|5x - 2| = -(5x - 2)$
74. $|3x + 7| = -(3x + 7)$
75. $|3 - x| + 3 = |2 - 3x|$
76. $|x - 1| + |x + 3| = 6$

77. ¿Cuáles son los valores posibles de $\frac{x}{|x|}$?

78. ¿Cuáles son los valores posibles de $\frac{|x - 1|}{x - 1}$?

79. Pruebe que $|b - a| = |a - b|$ para todos los números a y b.

80. Demuestre que $|x|^2 = x^2$ para todos los números reales x.

81. Pruebe que el promedio de dos números está entre los dos números; es decir, si $m < n$, entonces

$$m < \frac{m + n}{2} < n$$

82. Pruebe que para $m < n$,

$$d\left(m, \frac{m + n}{2}\right) = d\left(\frac{m + n}{2}, n\right)$$

83. Pruebe que $|-m| = |m|$.

84. Pruebe que $|-m| = |n|$ si y sólo si $m = n$ o $m = -n$.

85. Pruebe que para $n \neq 0$,

$$\left|\frac{m}{n}\right| = \frac{|m|}{|n|}$$

86. Pruebe que $|mn| = |m||n|$.

87. Pruebe que $-|m| \leq m \leq |m|$

88. Pruebe la **desigualdad del triángulo:**

$$|m + n| \leq |m| + |n|$$

Sugerencia: Use el problema 87 para mostrar que

$$-|m| - |n| \leq m + n \leq |m| + |n|$$

89. Si a y b son números reales, pruebe que el máximo de a y b está dado por.

$$\text{máx}(a, b) = \tfrac{1}{2}[a + b + |a - b|]$$

90. Pruebe que el mínimo de a y b está dado por

$$\text{mín}(a, b) = \tfrac{1}{2}[a + b - |a - b|]$$

APLICACIONES

91. Estadística. Desigualdades de la forma

$$\left|\frac{x - m}{s}\right| < n$$

ocurren frecuentemente en estadística. Si $m = 45.4$, $s = 3.2$ y $n = 1$, encuentre x.

92. Estadística. Repita el problema 91 para $m = 28.6$, $s = 6.5$ y $n = 2$.

* 93. **Negocios.** La producción diaria P en una planta ensambladora de automóviles está dentro de 20 unidades de 500 unidades. Exprese la producción diaria como una desigualdad de valores absolutos.

* 94. **Química.** En un proceso químico, la temperatura T se conserva entre los 10∞C y los 200∞C. Exprese esta restricción como una desigualdad de valores absolutos.

95. **Aproximación.** El área A de una región es aproximadamente igual a 12.436. El error en esta aproximación es menor que 0.001. Describa los valores posibles de esta área con una desigualdad de valores absolutos y en notación de intervalos.

96. **Aproximación.** El volumen V de un sólido es aproximadamente igual a 6.94. El error en esta aproximación es menor que 0.02. Describa los valores posibles de este volumen en forma de desigualdad de valores absolutos y en notación de intervalos.

* 97. **Dígitos significativos.** Si $N = 2.37$ representa una medida que se puede suponer con una precisión de 2.37 ± 0.005. Exprese la precisión deseada usando desigualdades de valores absolutos.

* 98. **Dígitos significativos.** Si $N = 3.65 \times 10^{-3}$ es un número de una medición, se puede suponer una precisión de $3.65 \times 10^{-3} \pm 5 \times 10^{-6}$. Exprese la precisión supuesta usando desigualdades de valores absolutos.

SECCIÓN 1-5 Números complejos

- Comentarios de introducción
- El sistema de números complejos
- Números complejos y radicales

Comentarios de introducción

Los pitagóricos (500-275 a.C.) encontraron que la ecuación simple

$$x^2 = 2 \qquad (1)$$

no tenía soluciones numéricas racionales. Si esta ecuación (1) tuviera alguna solución, se tendría que inventar una nueva clase de números, los números irracionales. Los números irracionales $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son ambas soluciones de la ecuación (1). Los números irracionales no se establecieron firmemente en las matemáticas hasta el siglo XIX. Los números racionales e irracionales forman al sistema de los números reales.

¿Es necesario considerar otra clase de números? La respuesta es sí, si se quiere que la ecuación simple

$$x^2 = -1$$

tenga una solución. Si x es cualquier número real, entonces $x^2 \geq 0$. Es decir, $x^2 = -1$ no puede tener ninguna solución numérica real. Así, una vez más se debió inventar un nuevo tipo de números, un número cuyo cuadrado pudiera ser negativo. Estos nuevos números se llaman *números complejos*, y evolucionaron durante mucho tiempo; pero, igual que los números reales, sólo hasta el siglo XIX se establecieron firmemente en las matemáticas.

El sistema de números complejos

Se comenzará con la exposición de los números complejos definiendo un número complejo y varios tipos de números complejos. Después se definirá la concepción de igualdad, suma y multiplicación en este sistema, y a partir de estas definiciones se explicarán las propiedades especiales importantes y las reglas de operación siguientes para suma, multiplicación y división.

TABLA 1 Breve historia de los números complejos

Fecha aproximada	Persona	Evento
50	Herón de Alejandría	Fue el primero en encontrar la raíz cuadrada de un número negativo
850	Mahavira de India	Decía que un negativo no tenía raíz cuadrada, ya que no era cuadrado
1545	Cardano de Italia	Las soluciones de las ecuaciones cúbicas implican raíces cuadradas de números negativos
1637	Descartes de Francia	Introdujo los términos *real* e *imaginario*
1748	Euler de Suiza	Usó i para $\sqrt{-1}$
1832	Gauss de Alemania	Introdujo el término *número complejo*

DEFINICIÓN 1 **Número complejo**

Un **número complejo** es un número de la forma

$$a + bi \qquad \textbf{Forma estándar}$$

donde a y b son números reales e i se llama **unidad imaginaria.**

La unidad imaginaria i introducida en la definición 1 no es un número real. Éste es un símbolo especial usado en la representación de los elementos en este nuevo sistema de números complejos.

Algunos ejemplos de números complejos son

$$3 - 2i \qquad \tfrac{1}{2} + 5i \qquad 2 - \tfrac{1}{3}i$$
$$0 + 3i \qquad 5 + 0i \qquad 0 + 0i$$

Las clases particulares de números complejos reciben los siguientes nombres especiales:

DEFINICIÓN 2 **Nombres de clases particulares de números complejos.**

Unidad imaginaria:	i	
Número complejo:	$a + bi$	a y b son números reales
Número imaginario:	$a + bi$	$b \neq 0$
Número imaginario puro:	$0 + bi = bi$	$b \neq 0$
Número real:	$a + 0i = a$	
Cero:	$0 + 0i = 0$	
Conjugado de $a + bi$:	$a - bi$	

EJEMPLO 1 **Tipos especiales de números complejos:**

De la lista de números complejos que se da a continuación:

$$3 - 2i \qquad \tfrac{1}{2} + 5i \qquad 2 - \tfrac{1}{3}i$$

$$0 + 3i = 3i \qquad 5 + 0i = 5 \qquad 0 + 0i = 0$$

(A) Enumere a todos los números imaginarios, números imaginarios puros, números reales y cero.
(B) Escriba el conjugado de cada uno.

Soluciones

Números imaginarios: $3 - 2i, \frac{1}{2} + 5i, 2 - \frac{1}{3}i, 3i$
Números imaginarios puros: $0 + 3i = 3i$
Números reales: $5 + 0i = 5, 0 + 0i = 0$
Cero: $0 + 0i = 0$

(B) $3 + 2i \qquad \frac{1}{2} - 5i \qquad 2 + \frac{1}{3}i$
$0 - 3i = -3i \qquad 5 - 0i = 5 \qquad 0 - 0i = 0$

Problema seleccionado 1 De la siguiente lista de números complejos:

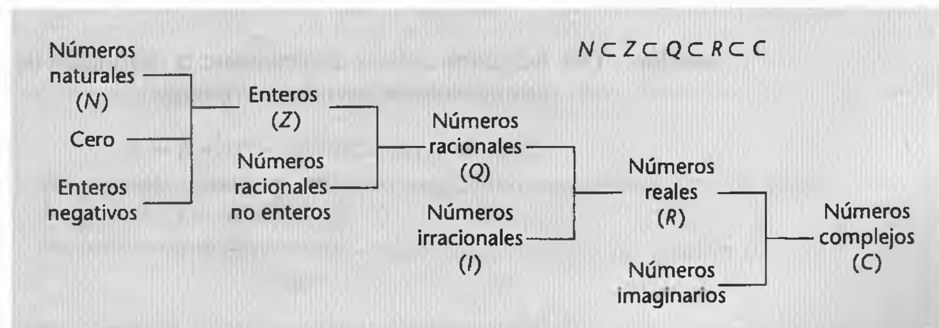
$$6 + 7i \qquad \sqrt{2} - \tfrac{1}{3}i \qquad 0 - i = -i$$

$$0 + \tfrac{2}{3}i = \tfrac{2}{3}i \qquad -\sqrt{3} + 0i = -\sqrt{3} \qquad 0 - 0i = 0$$

(A) Enumere a todos los números imaginarios, números imaginarios puros, números reales y cero.
(B) Escriba el conjugado de cada uno.

En la definición 2, observe que se identifica un número complejo de la forma $a + 0i$ con el número real a, un número complejo de la forma $0 + bi$, $b \neq 0$, con el **número imaginario puro** bi, y el número complejo $0 + 0i$ con el número real 0. De esta manera, un número real es también un número complejo, al igual que un número racional es también un número real. Cualquier número complejo que no es un número real se llama **número imaginario**. Si se combina el conjunto de todos los números reales con el conjunto de todos los números imaginarios, se obtiene ***C*, el conjunto de los números complejos**. La relación entre el sistema de números complejos y otros sistemas de números que se han estudiado se muestra en la figura 1.

FIGURA 1



Para usar los números complejos, se debe saber cómo se suman, restan, multiplican y dividen. Se empezará por definir la igualdad, suma y multiplicación.

DEFINICIÓN 3 **Igualdad y operaciones básicas**

1. **Igualdad:** $a + bi = c + di$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$
2. **Suma:** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
3. **Multiplicación:** $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

En la sección A-1 se enumeran las propiedades básicas de un sistema de números reales. Usando la definición 3, se puede demostrar que el sistema de números complejos tiene las mismas propiedades. Es decir:

1. La suma y multiplicación de números complejos son operaciones conmutativas y asociativas.
2. Existe un idéntico aditivo y un idéntico multiplicativo en los números complejos.
3. Cada número complejo tiene un inverso aditivo o negativo.
4. Cada número complejo distinto de cero tiene un inverso multiplicativo o recíproco.
5. La multiplicación es distributiva sobre la suma.

Como consecuencia de estas propiedades, se pueden manipular los símbolos de los números complejos de la forma $a + bi$ de igual manera que se manipulan los binomios de la forma $a + bx$, en tanto que se recuerde que i es un símbolo especial para la unidad imaginaria, no para un número real. De esta manera, no es necesario memorizar las definiciones de suma y multiplicación de números complejos. En seguida se analizarán estas operaciones y algunas de sus propiedades. En el ejercicio 2-5 se considerarán otras propiedades.

EJEMPLO 2 **Suma de números complejos**

Realice cada una de las operaciones y exprese la respuesta en la forma estándar:

(A) $(2 - 3i) + (6 + 2i)$ (B) $(-5 + 4i) + (0 + 0i)$

Solución (A) Se podría aplicar directamente la definición de suma, pero es más fácil usar las propiedades de los números complejos.

$(2 - 3i) + (6 + 2i) = 2 - 3i + 6 + 2i$ Elimine paréntesis

$= (2 + 6) + (-3 + 2)i$ Combine términos semejantes

$= 8 - i$

(B) $(-5 + 4i) + (0 + 0i) = -5 + 4i + 0 + 0i$
$= -5 + 4i$

Problema seleccionado 2 Realice la operación y exprese la respuesta en la forma estándar:

(A) $(3 + 2i) + (6 - 4i)$ (B) $(0 + 0i) + (7 - 5i)$

El ejemplo 2B y el problema seleccionado 2B ilustran el siguiente resultado general: Para cualquier número complejo $a + bi$,

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (0 + 0i) + (a + bi) = a + bi$$

Así, $0 + 0i$ es la **identidad aditiva** o **cero** de los números complejos. Se ha anticipado este resultado en la definición 1 cuando se ha identificado al número complejo $0 + 0i$ con el número real 0.

Se podrían definir los negativos y resta en términos de los inversos aditivos de un número complejo, como ya se ha hecho para los números reales, pero algunas veces es más fácil usar las propiedades de los números complejos.

EJEMPLO 3 **Negativo y resta**

Realice cada una de las siguientes operaciones y exprese la respuesta en la forma estándar:

(A) $-(4 - 5i)$ (B) $(7 - 3i) - (6 + 2i)$ (C) $(-2 + 7i) + (2 - 7i)$

Solución (A) $-(4 - 5i) = (-1)(4 - 5i) = -4 + 5i$

(B) $(7 - 3i) - (6 + 2i) = 7 - 3i - 6 - 2i$
$= 1 - 5i$

(C) $(-2 + 7i) + (2 - 7i) = -2 + 7i + 2 - 7i = 0$

Problema seleccionado 3 Realice cada operación y exprese la respuesta en la forma estándar:

(A) $-(-3 + 2i)$ (B) $(3 - 5i) - (1 - 3i)$ (C) $(-4 + 9i) + (4 - 9i)$

En general, el **inverso aditivo** o **negativo** de $a + bi$ es $-a - bi$, ya que

$$(a + bi) + (-a - bi) = (-a - bi) + (a + bi) = 0$$

(véase el ejemplo 3C y el problema seleccionado 3C).

Ahora se abordará la multiplicación. Primero, se recurre a la definición de multiplicación para averiguar qué pasa con la unidad compleja i cuando se eleva al cuadrado:

$$
\begin{aligned}
i^2 &= (\overset{a}{0} + \overset{b}{1}i)(\overset{c}{0} + \overset{d}{1}i) \\
&= (\overset{a}{0} \cdot \overset{c}{0} - \overset{b}{1} \cdot \overset{d}{1}) + (\overset{a}{0} \cdot \overset{d}{1} + \overset{b}{1} \cdot \overset{c}{0})i \\
&= -1 + 0i \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Así, se ha probado que

$$i^2 = -1$$

Ahora se tiene un número cuyo cuadrado es negativo y es una solución a $x^2 = -1$. Puesto que $i^2 = -1$, se define a $\sqrt{-1}$ como la unidad imaginaria i. Así,

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{y} \qquad -i = -\sqrt{-1}$$

Igual que en los casos de la suma y la resta, la multiplicación de números complejos se puede efectuar usando las propiedades de los números complejos mejor que con la definición de multiplicación. *Para hacerlo se reemplazará i^2 por -1 cada vez que aparezca.*

EJEMPLO 4 Multiplicación de números complejos

Realice cada operación y exprese la respuesta en forma estándar:

(A) $(2 - 3i)(6 + 2i)$ (B) $1(3 - 5i)$ (C) $i(1 + i)$ (D) $(3 + 4i)(3 - 4i)$

Solución

(A)
$$
\begin{aligned}
(2 - 3i)(6 + 2i) &= 2(6 + 2i) - 3i(6 + 2i) \\
&= 12 + 4i - 18i - 6i^2 \\
&= 12 - 14i - 6(-1) \quad \text{Reemplace } i^2 \text{ por } -1. \\
&= 18 - 14i
\end{aligned}
$$

(B) $1(3 - 5i) = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 5i = 3 - 5i$

(C) $i(1 + i) = i + i^2 = i - 1 = -1 + i$

(D)
$$
\begin{aligned}
(3 + 4i)(3 - 4i) &= 9 - 12i + 12i - 16i^2 \\
&= 9 + 16 = 25
\end{aligned}
$$

Problema seleccionado 4 Realice cada operación y exprese la respuesta en la forma estándar:

(A) $(5 + 2i)(4 - 3i)$ (B) $3(-2 + 6i)$ (C) $i(2 - 3i)$ (D) $(2 + 3i)(2 - 3i)$

Para cualquier número complejo $a + bi$,

$$1(a + bi) = (a + bi)1 = a + bi$$

(véase el ejemplo 4B). Así, 1 es el **idéntico multiplicativo** para los números complejos, igual que lo fue para los números reales.

Antes se estableció que cualquier número complejo tiene un inverso multiplicativo o recíproco. Se denotará esto como una fracción, de igual manera se hace con los números reales. De esta manera,

$$\frac{1}{a + bi} \quad \text{es el **recíproco** de} \quad a + bi \qquad a + bi \neq 0$$

La siguiente propiedad importante de los conjugados de un número complejo se usa para expresar recíprocos y cocientes en forma estándar.

Teorema 1 **Producto de un número complejo por su conjugado**

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \quad \text{Un número real}$$

EJEMPLO 5 **Recíprocos y cocientes**

Realice cada operación y exprese la respuesta en su forma estándar:

(A) $\dfrac{1}{2 + 3i}$ (B) $\dfrac{7 - 3i}{1 + i}$

Solución (A) Multiplique el numerador y el denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{1}{2 + 3i} = \frac{1}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i} = \frac{2 - 3i}{4 - 9i^2} = \frac{2 - 3i}{4 + 9}$$

$$= \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$$

Esta respuesta se puede comprobar por multiplicación:

Comprobación

$$(2 + 3i)\left(\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i\right) = \frac{4}{13} - \frac{6}{13}i + \frac{6}{13}i - \frac{9}{13}i^2$$

$$= \frac{4}{13} + \frac{9}{13} = 1$$

$$\text{(B)}\ \frac{7-3i}{1+i} = \frac{7-3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{7-7i-3i+3i^2}{1-i^2}$$

$$= \frac{4-10i}{2} = 2-5i$$

Comprobación $(1+i)(2-5i) = 2-5i+2i-5i^2 = 7-3i$

Problema seleccionado 5 Realice cada operación y exprese la respuesta en su forma estándar:

(A) $\frac{1}{4+2i}$ (B) $\frac{6+7i}{2-i}$

EJEMPLO 6 **Operaciones combinadas**

Realice cada una de las operaciones indicadas y exprese su respuesta en la forma estándar:

(A) $(3-2i)^2 - 6(3-2i) + 13$ (B) $\frac{2-3i}{2i}$

Soluciones (A) $(3-2i)^2 - 6(3-2i) + 13 = 9 - 12i + 4i^2 - 18 + 12i + 13$

$$= 9 - 12i - 4 - 18 + 12i + 13$$

$$= 0$$

(B) Si un número complejo se divide entre un número imaginario puro, se puede hacer que el denominador sea real multiplicando al numerador y al denominador por i.

$$\frac{2-3i}{2i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{2i-3i^2}{2i^2} = \frac{2i+3}{-2} = -\frac{3}{2} - i$$

Problema seleccionado 6 Realice cada una de las operaciones indicadas y exprese la respuesta en la forma estándar:

(A) $(3+2i)^2 - 6(3+2i) + 13$ (B) $\frac{4-i}{3i}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Las potencias de números naturales de i tienen formas particularmente simples:

i	$i^5 = i^4 \cdot i = (1)i = i$
$i^2 = -1$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1(-1) = -1$
$i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1(-i) = -i$
$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$	$i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1 \cdot 1 = 1$

En general, ¿qué valores son posibles para i^n, siendo n un número natural? Explique cómo se puede encontrar fácilmente i^n para cualquier número natural n. Después evalúe cada una de las siguientes expresiones:

(A) i^{17} (B) i^{24} (C) i^{38} (D) i^{47}

Números complejos y radicales

Recuerde que se dice que a es la raíz cuadrada de b si $a^2 = b$. Si x es un número real positivo, entonces x tiene dos raíces cuadradas, la raíz principal, denotada por $\sqrt{x}$, y por su negativo $-\sqrt{x}$ (véase la sección A-7). Si x es un número real negativo, entonces x también tiene dos raíces cuadradas, pero ahora estas raíces son números imaginarios.

DEFINICIÓN 4 **Raíz cuadrada principal de un número negativo real**

La **raíz cuadrada principal de un número negativo real**, se denota por $\sqrt{-a}$ donde a es positiva, y está definida por

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a} \qquad \sqrt{-3} = i\sqrt{3} \qquad \sqrt{-9} = i\sqrt{9} = 3i$$

La otra raíz cuadrada de $-a$, $a > 0$, es $-\sqrt{-a} = -i\sqrt{a}$.

Observe en la definición 4 que si se escribe $i\sqrt{a}$ y $i\sqrt{3}$ en lugar de las formas estándares $\sqrt{a}i$ y $\sqrt{3}i$. Se infiere que con esta convención la i podría aparecer accidentalmente dentro de un signo radical ($\sqrt{a}i \neq \sqrt{ai}$, pero $\sqrt{a}i = i\sqrt{a}$). La definición 4 se sustenta en el hecho de que

$$(i\sqrt{a})^2 = i^2a = -a$$

EJEMPLO 7 **Números complejos y radicales**

Escriba en la forma estándar:

(A) $\sqrt{-4}$ (B) $4 + \sqrt{-5}$ (C) $\dfrac{-3 - \sqrt{-5}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{-9}}$

Soluciones

(A) $\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$ (B) $4 + \sqrt{-5} = 4 + i\sqrt{5}$

(C) $\dfrac{-3 - \sqrt{-5}}{2} = \dfrac{-3 - i\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}i$

(D) $\dfrac{1}{1 - \sqrt{-9}} = \dfrac{1}{1 - 3i} = \dfrac{1 \cdot (1 + 3i)}{(1 - 3i) \cdot (1 + 3i)}$

$$= \frac{1 + 3i}{1 - 9i^2} = \frac{1 + 3i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$$

Problema seleccionado 7 Escriba en la forma estándar:

(A) $\sqrt{-16}$ (B) $5 + \sqrt{-7}$ (C) $\dfrac{-5 - \sqrt{-2}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{3 - \sqrt{-4}}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 A partir del teorema 1 de la sección A-7, se sabe que si a y b son números reales positivos

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad (1)$$

Es decir, se pueden evaluar expresiones de la forma $\sqrt{9}\sqrt{4}$ de dos maneras:

$$\sqrt{9}\sqrt{4} = \sqrt{(9)(4)} = \sqrt{36} = 6 \quad \text{y} \quad \sqrt{9}\sqrt{4} = (3)(2) = 6$$

Evalúe cada una de estas expresiones de las dos maneras. ¿Es (1) una propiedad válida para usar en todos los casos?

(A) $\sqrt{9}\sqrt{-4}$ (B) $\sqrt{-9}\sqrt{4}$ (C) $\sqrt{-9}\sqrt{-4}$

PRECAUCIÓN

Observe que en el ejemplo 7D, se escribió $1 - \sqrt{-9} = 1 - 3i$ antes de proceder con la simplificación. Es necesario ir despacio porque algunas de las propiedades que son verdaderas para los números reales, no lo son para los números complejos. En particular, para los números reales positivos a y b,

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab} \quad \text{pero} \quad \sqrt{-a}\sqrt{-b} \neq \sqrt{(-a)(-b)}$$

(Véase exploración y análisis 2.)

La resistencia inicial al uso de estos nuevos números se debió a lo que sugieren las palabras con que se denominan: *complejo* e *imaginario*. A pesar de esto, los números complejos tienen un uso muy amplio en matemáticas puras y aplicadas. Los números complejos son muy usados, por ejemplo, en ingeniería eléctrica, física, química, estadística e ingeniería aeronáutica. Un primer uso de éstos será la conexión con las soluciones de ecuaciones de segundo grado en la siguiente sección.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) Números imaginarios: $6 + 7i$, $\sqrt{2} - \frac{1}{3}i$, $0 - i = -i$, $0 + \frac{2}{3}i = \frac{2}{3}i$
   Números imaginarios puros: $0 - i = -i$, $0 + \frac{2}{3}i = \frac{2}{3}i$
   Números reales: $-\sqrt{3} + 0i = -\sqrt{3}$, $0 - 0i = 0$
   Cero: $0 - 0i = 0$
   (B) $6 - 7i$, $\sqrt{2} + \frac{1}{3}i$, $0 + i = i$, $0 - \frac{2}{3}i = -\frac{2}{3}i$, $-\sqrt{3} - 0i = -\sqrt{3}$, $0 + 0i = 0$
2. (A) $9 - 2i$ (B) $7 - 5i$
3. (A) $3 - 2i$ (B) $2 - 2i$ (C) 0
4. (A) $26 - 7i$ (B) $-6 + 18i$ (C) $3 + 2i$ (D) 13
5. (A) $\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i$ (B) $1 + 4i$
6. (A) 0 (B) $-\frac{1}{3} - \frac{4}{3}i$
7. (A) $4i$ (B) $5 + i\sqrt{7}$ (C) $-\frac{5}{2} - (\sqrt{2}/2)i$ (D) $\frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$

EJERCICIO 1-5

A

En los problemas del 1 al 26, realice las operaciones indicadas y escriba cada respuesta en forma estándar.

1. $(2 + 4i) + (5 + i)$
2. $(3 + i) + (4 + 2i)$
3. $(-2 + 6i) + (7 - 3i)$
4. $(6 - 2i) + (8 - 3i)$
5. $(6 + 7i) - (4 + 3i)$
6. $(9 + 8i) - (5 + 6i)$
7. $(3 - 5i) - (-2 - 4i)$
8. $(8 - 4i) - (11 - 2i)$
9. $(4 - 5i) + 2i$
10. $6 + (3 - 4i)$
11. $(4i)(6i)$
12. $(3i)(8i)$
13. $-3i(2 - 4i)$
14. $-2i(5 - 3i)$
15. $(3 + 3i)(2 - 3i)$
16. $(-2 - 3i)(3 - 5i)$
17. $(2 - 3i)(7 - 6i)$
18. $(3 + 2i)(2 - i)$
19. $(7 + 4i)(7 - 4i)$
20. $(5 + 3i)(5 - 3i)$
21. $\dfrac{1}{2 + i}$
22. $\dfrac{1}{3 - i}$
23. $\dfrac{3 + i}{2 - 3i}$
24. $\dfrac{2 - i}{3 + 2i}$
25. $\dfrac{13 + i}{2 - i}$
26. $\dfrac{15 - 3i}{2 - 3i}$

B

En los problemas del 27 al 36, convierta números imaginarios a la forma estándar, realice las operaciones indicadas y exprese las respuestas en forma estándar.

27. $(2 - \sqrt{-4}) + (5 - \sqrt{-9})$
28. $(3 - \sqrt{-4}) + (-8 + \sqrt{-25})$
29. $(9 - \sqrt{-9}) - (12 - \sqrt{-25})$
30. $(-2 - \sqrt{-36}) - (4 + \sqrt{-49})$
31. $(3 - \sqrt{-4})(-2 + \sqrt{-49})$
32. $(2 - \sqrt{-1})(5 + \sqrt{-9})$
33. $\dfrac{5 - \sqrt{-4}}{7}$
34. $\dfrac{6 - \sqrt{-64}}{2}$
35. $\dfrac{1}{2 - \sqrt{-9}}$
36. $\dfrac{1}{3 - \sqrt{-16}}$

Escriba los problemas del 37 al 42 en forma estándar.

37. $\dfrac{2}{5i}$
38. $\dfrac{1}{3i}$
39. $\dfrac{1 + 3i}{2i}$
40. $\dfrac{2 - i}{3i}$
41. $(2 - 3i)^2 - 2(2 - 3i) + 9$
42. $(2 - i)^2 + 3(2 - i) - 5$
43. Evalúe $x^2 - 2x + 2$ para $x = 1 - i$
44. Evalúe $x^2 - 2x + 2$ para $x = 1 + i$
45. Simplifique: i^{18}, i^{32} y i^{67}
46. Simplifique: i^{21}, i^{43} y i^{52}
47. ¿Para qué valores reales de x y y la ecuación siguiente será un postulado verdadero?

$$(2x - 1) + (3y + 2)i = 5 - 4i$$

48. ¿Para qué valores reales de x y y la ecuación siguiente será un postulado verdadero?

$$3x + (y - 2)i = (5 - 2x) + (3y - 8)i$$

En los problemas del 49 al 52, ¿para qué valores reales de x cada expresión representa un número imaginario?

49. $\sqrt{3 - x}$
50. $\sqrt{5 + x}$
51. $\sqrt{2 - 3x}$
52. $\sqrt{3 + 2x}$

Use una calculadora para resolver los problemas del 53 al 56. Escríbalos en la forma estándar a + bi, donde a y b se calculan con dos cifras significativas.*

53. $(3.17 - 4.08i)(7.14 + 2.76i)$
54. $(6.12 + 4.92i)(1.82 - 5.05i)$
55. $\dfrac{8.14 + 2.63i}{3.04 + 6.27i}$
56. $\dfrac{7.66 + 3.33i}{4.72 - 2.68i}$

C

En los problemas del 57 al 62, realice las operaciones indicadas y escriba cada respuesta en la forma estándar.

57. $(a + bi) + (c + di)$
58. $(a + bi) - (c + di)$
59. $(a + bi)(a - bi)$
60. $(u - vi)(u + vi)$
61. $(a + bi)(c + di)$
62. $\dfrac{a + bi}{c + di}$
63. Muestre que $i^{4k} = 1$, k un número natural
64. Muestre que $i^{4k+1} = i$, k un número natural

* En este libro encontrará ejercicios opcionales que requieren de una calculadora gráfica. Si usted dispone de ésta seguramente la usará. Por otra parte, cualquier calculadora científica es suficiente para los problemas de este capítulo.

Indique las razones en las pruebas para los teoremas propuestos en los problemas 65 y 66.

65. *Teorema:* Los números complejos son conmutativos con la suma.

Prueba: Sea $a + bi$ y $c + di$ dos números complejos arbitrarios; entonces:

Postulado

1. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
2. $\qquad = (c + a) + (d + b)i$
3. $\qquad = (c + di) + (a + bi)$

Razón

1.
2.
3.

66. *Teorema:* Los números complejos son conmutativos en la multiplicación.

Prueba: Sea $a + bi$ y $c + di$ dos números complejos arbitrarios; entonces:

Postulado

1. $(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$
2. $\qquad = (ca - db) + (da + cb)i$
3. $\qquad = (c + di)(a + bi)$

Razón

1.
2.
3.

Las literales z y w a menudo se usan como variables complejas, donde $z = x + yi$, $w = u + vi$, y x, y, u, v son números reales. Los conjugados de z y w, denotados por $\bar{z}$ y $\bar{w}$, respectivamente, están dados por $\bar{z} = x - yi$ y $\bar{w} = u - vi$. En los problemas del 67al 74, exprese cada propiedad de los conjugados de manera verbal y después compruebe la propiedad.

67. $z\bar{z}$ es un número real.

68. $z + \bar{z}$ es un número real.

69. $\bar{z} = z$ si y sólo si z es real.

70. $\bar{\bar{z}} = z$

71. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$

72. $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$

73. $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

74. $\overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$

SECCIÓN 1-6 Ecuaciones cuadráticas y aplicaciones



- Solución por factorización
- Solución por raíz cuadrada
- Solución al completar el cuadrado
- Solución por la fórmula cuadrática
- Aplicaciones

La siguiente clase de ecuaciones que se analizarán son las ecuaciones con polinomios de segundo grado con una variable, llamadas *ecuaciones cuadráticas*.

DEFINICIÓN 1 **Ecuación cuadrática**

Una **ecuación cuadrática** con una variable es cualquier ecuación que se pueda escribir en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0 \qquad \textbf{Forma estándar}$$

donde x es una variable y a, b y c son constantes.

Ahora que se ha analizado el sistema de los números complejos, se usará este tipo de números cuando se resuelvan ecuaciones. Recuerde que a la solución de una ecuación también se le llama **raíz** de la ecuación. Una solución numérica real de una ecuación se denomina **raíz real**, y una solución numérica imaginaria se llama **raíz imaginaria**. En esta sección se desarrollarán los métodos para encontrar todas las raíces reales e imaginarias de una ecuación cuadrática.

• Solución por factorización

Si $ax^2 + bx + c$ se puede escribir como el producto de dos factores de primer grado, entonces la ecuación cuadrática puede resolverse rápida y fácilmente. El método de solución por factorización se fundamenta en la propiedad cero de los números complejos, la cual es una generalización de la propiedad cero de los números reales que se repasa en la sección A-1.

Propiedad cero

Si m y n son números complejos, entonces

$$m \cdot n = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad m = 0 \text{ o } n = 0 \text{ (o ambos)}$$

EJEMPLO 1 Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización

Resuelva por factorización:

(A) $6x^2 - 19x - 7 = 0$ (B) $x^2 - 6x + 5 = -4$ (C) $2x^2 = 3x$

Soluciones

(A) $6x^2 - 19x - 7 = 0$

$(2x - 7)(3x + 1) = 0$ Factorice el lado izquierdo.

$2x - 7 = 0$ o $3x + 1 = 0$

$x = \frac{7}{2}$ $x = -\frac{1}{3}$

El conjunto solución es $\{-\frac{1}{3}, \frac{7}{2}\}$.

(B) $x^2 - 6x + 5 = -4$

$x^2 - 6x + 9 = 0$ Escriba en la forma estándar.

$(x - 3)^2 = 0$ Factorice el lado izquierdo.

$x = 3$

El conjunto solución es $\{3\}$. La ecuación tiene una raíz, 3. Pero como se obtuvo de dos factores, a 3 se le llama **raíz doble**.

(C) $2x^2 = 3x$

$2x^2 - 3x = 0$

$x(2x - 3) = 0$

$x = 0$ o $2x - 3 = 0$

$x = \frac{3}{2}$

Conjunto solución: $\{0, \frac{3}{2}\}$

Problema seleccionado 1

Resuelva por factorización:

(A) $3x^2 + 7x - 20 = 0$ (B) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ (C) $4x^2 = 5x$

PRECAUCIÓN

1. Un lado de una ecuación debe ser 0 antes de que se aplique la propiedad cero. Así

$$x^2 - 6x + 5 = -4$$
$$(x - 1)(x - 5) = -4$$

esto no implica que $x - 1 = -4$ o $x - 5 = -4$. Véase el ejemplo 1B para la solución correcta de esta ecuación.

2. Las ecuaciones

$$2x^2 = 3x \qquad \text{y} \qquad 2x = 3$$

no son equivalentes. La primera tiene el conjunto solución $\{0, \frac{3}{2}\}$, mientras que la segunda tiene el conjunto solución $\{\frac{3}{2}\}$. La raíz $x = 0$ se pierde cuando cada miembro de la primera ecuación se divide entre la variable x. Véase el ejemplo 1C para la solución correcta de esta ecuación.

No divida ambos miembros de una ecuación por una expresión que contenga la variable que está resolviendo. Si lo hace podría estar dividiendo entre 0.

• Solución por raíz cuadrada

Ahora se enfocará la atención hacia las ecuaciones cuadráticas que no tienen el término de primer grado, es decir, ecuaciones de la forma especial

$$ax^2 + c = 0 \qquad a \neq 0$$

El método de solución de esta forma especial requiere el uso directo de la propiedad de raíz cuadrada:

Propiedad de raíz cuadrada

Si $A^2 = C$, entonces $A = \pm \sqrt{C}$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Determine si cada uno de los siguientes pares de ecuaciones es equivalente o no. Explique sus respuestas.

(A) $x^2 = 4$ y $x = |2|$
(B) $x^2 = 4$ y $x = -2$
(C) $x = \sqrt{4}$ y $x = 2$
(D) $x = \sqrt{4}$ y $x = -2$

El uso de la propiedad de raíz cuadrada se ilustra en el ejemplo siguiente.

Nota: es práctica común representar soluciones de ecuaciones cuadráticas de manera informal mediante la última ecuación en vez de escribir un conjunto solución usando la notación conjunto. De ahora en adelante, se seguirá esta práctica a menos que se desee un énfasis particular.

EJEMPLO 2 **Uso de la propiedad de la raíz cuadrada**

Resuelva usando la propiedad de raíz cuadrada:

(A) $2x^2 - 3 = 0$ (B) $3x^2 + 27 = 0$ (C) $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$

Soluciones

(A) $2x^2 - 3 = 0$

$x^2 = \frac{3}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ o $\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ Conjunto solución: $\left\{\frac{-\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

(B) $3x^2 + 27 = 0$

$x^2 = -9$

$x = \pm\sqrt{-9}$ o $\pm 3i$ Conjunto solución: $\{-3i, 3i\}$

(C) $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$

$x + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$

$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Problema seleccionado 2 Resuelva usando la propiedad de raíz cuadrada:

(A) $3x^2 - 5 = 0$ (B) $2x^2 + 8 = 0$ (C) $(x + \frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Reemplace ? en cada una de las siguientes expresiones con un número que haga válida la ecuación.

(A) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + ?$ (B) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + ?$

(C) $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + ?$ (D) $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + ?$

Reemplace ? en cada una de las siguientes expresiones con un número que haga al trinomio un cuadrado perfecto.

(E) $x^2 + 10x + ?$ (F) $x^2 + 12x + ?$ (G) $x^2 + bx + ?$

• Solución al completar el cuadrado

La aplicación de los métodos de raíz cuadrada y de factorización por lo general conducen a soluciones rápidas; sin embargo, existen ecuaciones como $x^2 + 6x - 2 = 0$ (véase el ejemplo 4A), que no puede resolverse directamente por estos métodos. Se debe desarrollar un procedimiento más general para tomar en cuenta este tipo de ecuación, por ejemplo, el método de completar el cuadrado. Este método se basa en el proceso de transformar la ecuación cuadrática estándar

$$ax^2 + bx + c = 0$$

en la forma

$$(x + A)^2 = B$$

donde A y B son constantes. La última ecuación se puede resolver con facilidad usando la propiedad de raíz cuadrada. Pero, ¿cómo se transforma la primera ecuación en la segunda? El breve análisis siguiente proporciona la clave para el proceso.

¿Qué número se debe agregar a $x^2 + bx$ de manera que el resultado sea el cuadrado de un polinomio de primer grado? Hay una regla mecánica simple para encontrar este número, basado en el cuadrado de los binomios siguientes:

$$(x + m)^2 = x^2 + 2mx + m^2$$
$$(x - m)^2 = x^2 - 2mx + m^2$$

En cualquiera de los casos, se observa que el tercer término de la derecha es el cuadrado de una mitad del coeficiente de x en el segundo término de la derecha. Esta observación nos lleva directamente a la regla para completar el cuadrado.

Completando el cuadrado

Para completar el cuadrado de una cuadrática de la forma $x^2 + bx$, sume el cuadrado de la mitad del coeficiente de x, es decir, sume $(b/2)^2$. Así,

$$x^2 + bx \qquad\qquad x^2 + 5x$$

$$x^2 + bx + \qquad = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \qquad x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$$

EJEMPLO 3 **Completando el cuadrado**

Complete el cuadrado de cada una de las siguientes:

(A) $x^2 - 3x$ (B) $x^2 - bx$

Soluciones (A) $x^2 - 3x$

$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = (x - \frac{3}{2})^2$ Sume $\left(\frac{-3}{2}\right)^2$; es decir, $\frac{9}{4}$.

(B) $x^2 - bx$

$x^2 - bx + \frac{b^2}{4} = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$ Sume $\left(\frac{-b}{2}\right)^2$; es decir, $\frac{b^2}{4}$.

Problema seleccionado 3 Complete el cuadrado de cada una de las siguientes:

(A) $x^2 - 5x$ (B) $x^2 + mx$

Es importante notar que la regla para completar el cuadrado aplica sólo a formas cuadráticas, en las cuales el coeficiente del término de segundo grado es 1. Sin embargo, como se verá, esto causa algunos problemas. Ahora se resolverán dos ecuaciones con el método de completar el cuadrado.

EJEMPLO 4 **Solución al completar el cuadrado**

Resuelva al completar el cuadrado:

(A) $x^2 + 6x - 2 = 0$ (B) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

Soluciones (A) $x^2 + 6x - 2 = 0$

$x^2 + 6x = 2$

$x^2 + 6x + 9 = 2 + 9$ Complete el cuadrado del lado izquierdo y sume el mismo número en el lado derecho.

$(x + 3)^2 = 11$

$x + 3 = \pm\sqrt{11}$

$x = -3 \pm \sqrt{11}$

(B) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

$x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$ Haga el primer coeficiente igual a 1 al dividir entre 2.

$x^2 - 2x = -\frac{3}{2}$

$x^2 - 2x + 1 = -\frac{3}{2} + 1$ Complete el cuadrado en el lado izquierdo y sume el mismo número en el lado derecho.

$$(x-1)^2 = -\tfrac{1}{2} \qquad \text{Factorice el lado izquierdo.}$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{-\tfrac{1}{2}}$$

$$x = 1 \pm i\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$= 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i \qquad \text{Respuesta en la forma } a + bi.$$

Problema seleccionado 4 Resuelva al completar el cuadrado:

(A) $x^2 + 8x - 3 = 0$ (B) $3x^2 - 12x + 13 = 0$

• Solución por la fórmula cuadrática

Considere ahora la ecuación cuadrática general con coeficientes no especificados:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Se puede resolver al completar el cuadrado exactamente como se hizo con el ejemplo 4B. Para obtener el coeficiente principal 1, se debe multiplicar ambos lados de la ecuación por $1/a$. De esta forma,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Sumando $-c/a$ a ambos lados de la ecuación y después completando el cuadrado en el lado izquierdo, se tiene

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Ahora se factoriza el lado izquierdo y se resuelve usando la propiedad de raíz cuadrada:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{Véase el problema 75 en los ejercicios 1-6.}$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

De esta forma, se arribó a la muy conocida y ampliamente usada **fórmula cuadrática**:

Teorema 1 **Fórmula cuadrática**

Si $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La fórmula cuadrática se debe memorizar para usarla en la resolución de ecuaciones cuadráticas cuando otros métodos fallen o sea más difícil aplicarlos.

EJEMPLO 5 **Uso de la fórmula cuadrática**

Resuelva $2x + \frac{3}{2} = x^2$ mediante la fórmula cuadrática. Obtenga la respuesta en la forma radical más simple.

Solución

$$2x + \tfrac{3}{2} = x^2$$

$$4x + 3 = 2x^2 \quad \text{Multiplique ambos lados por 2.}$$

$$2x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \text{Escriba en la forma estándar}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad a = 2,\ b = -4,\ c = -3$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

PRECAUCIÓN

1. $-4^2 \neq (-4)^2$ $\quad -4^2 = -16$ y $(-4)^2 = 16$
2. $2 + \frac{\sqrt{10}}{2} \neq \frac{2 + \sqrt{10}}{2}$ $\quad 2 + \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$
3. $\frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} \neq \pm 2\sqrt{10}$ $\quad \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{2(2 \pm \sqrt{10})}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

Problema seleccionado 5 Resuelva $x^2 - \frac{5}{2} = -3x$ mediante el uso de la fórmula cuadrática. Obtenga la respuesta en la forma radical más simple.

EJEMPLO 6 **Uso de la fórmula cuadrática con una calculadora**

Resuelva $5.37x^2 - 6.03x + 1.17 = 0$ usando la calculadora, con dos cifras decimales.

Solución

$$5.37x^2 - 6.03x + 1.17 = 0$$

$$x = \frac{6.03 \pm \sqrt{(-6.03)^2 - 4(5.37)(1.17)}}{2(5.37)}$$

$$= 0.25, 0.87$$

Problema seleccionado 6 Resuelva $2.79x^2 + 5.07x - 7.69 = 0$ usando una calculadora, con dos cifras decimales.

Se concluye esta parte de la expresión, haciendo notar que $b^2 - 4ac$ en la fórmula cuadrática se denomina **discriminante** y proporciona información útil acerca de las raíces correspondientes, como se muestra en la tabla 1.

TABLA 1 Discriminante y raíces

Discriminante $b^2 - 4ac$	**Raíces de** $ax^2 + bx + c = 0$ **a, b y c son números reales, $a \neq 0$**
Positivo	Dos raíces reales distintas
0	Una raíz real (una raíz doble)
Negativo	Dos raíces imaginarias, una es el conjugado de la otra

Por ejemplo:

(A) $2x^2 - 3x - 4 = 0$ tiene dos raíces reales, ya que

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-4) = 41 > 0$$

(B) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ tiene una raíz real (doble), ya que

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(1) = 0$$

(C) $2x^2 - 3x + 4 = 0$ tiene dos raíces imaginarias, ya que

$$b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(4) = -23 < 0$$

• **Aplicaciones** Ahora considere algunas aplicaciones en las que se empleen ecuaciones cuadráticas. Primero, la estrategia para resolver problemas con literales, presentada en la sección 1-1, se repite a continuación.

Estrategia para resolver problemas con literales

1. Lea el problema cuidadosamente (varias veces si es necesario), hasta comprender con claridad qué es lo que busca y con qué información cuenta.

2. Represente una de las incógnitas con una variable, por ejemplo x, e intente representar las otras en términos de x. Este paso es importante y se debe hacer con cuidado.
3. Si lo considera adecuado, dibuje figuras o diagramas y marque las partes conocidas y las incógnitas.
4. Busque fórmulas que relacionen las cantidades conocidas con las incógnitas.
5. Plantee una ecuación que relacione las cantidades desconocidas con las incógnitas.
6. Resuelva la ecuación y escriba las respuestas de *todas* las preguntas que plantea el problema.
7. Compruebe e interprete todas las soluciones en términos del problema original (no sólo la ecuación que se encontró en el paso 5), ya que se pudo haber cometido un error en el establecimiento de la ecuación en el paso 5.

EJEMPLO 7 **Establecimiento y solución de un problema con literales**

La suma de un número y su recíproco es $\frac{13}{6}$. Encuentre esos números.

Solución Sea x = número; entonces:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6}$$

$$(6x)x + (6x)\frac{1}{x} = (6x)\frac{13}{6}$$ Multiplique ambos lados por $6x$. [*Nota:* $x \neq 0$.]

$$6x^2 + 6 = 13x$$ Una ecuación cuadrática

$$6x^2 - 13x + 6 = 0$$

$$(2x - 3)(3x - 2) = 0$$

$$2x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad 3x - 2 = 0$$

$$x = \tfrac{3}{2} \qquad\qquad x = \tfrac{2}{3}$$

Es decir, los dos números son $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

Comprobación

$$\tfrac{3}{2} + \tfrac{2}{3} = \tfrac{13}{6} \qquad \tfrac{2}{3} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{13}{6}$$

Problema seleccionado 7 La suma de dos números es 23 y su producto es 132. Encuentre los dos números. [*Sugerencia*: Si un número es x, entonces el otro número es $23 - x$.]

EJEMPLO 8 **Un problema de distancia, rapidez y tiempo**

A una lancha para excursiones le toma 1.6 horas hacer un viaje de ida y vuelta 36 millas aguas arriba. Si la rapidez de la corriente es de 4 millas por hora, ¿cuál es la rapidez de la lancha en aguas tranquilas?

Solución Sea

$$\begin{aligned} x &= \text{Rapidez de la lancha en aguas tranquilas} \\ x + 4 &= \text{Rapidez con la corriente a favor} \\ x - 4 &= \text{Rapidez a contracorriente} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}\text{Tiempo a} \\ \text{contracorriente}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Tiempo con la} \\ \text{corriente a favor}\end{pmatrix} = 1.6$$

$$\frac{36}{x-4} - \frac{36}{x+4} = 1.6 \qquad T = \frac{D}{R},\ x \neq 4,\ x \neq -4$$

$$\begin{aligned} 36(x+4) - 36(x-4) &= 1.6(x-4)(x+4) \\ 36x + 144 - 36x + 144 &= 1.6x^2 - 25.6 \\ 1.6x^2 &= 313.6 \\ x^2 &= 196 \\ x &= \sqrt{196} = 14 \end{aligned}$$

La rapidez en aguas tranquilas es de 14 millas por hora.

[*Nota:* $-\sqrt{196} = -14$ debe ser descartada, ya que en este problema no tiene sentido obtener como solución una rapidez negativa.]

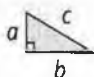
Comprobación

$$\text{Tiempo a contracorriente} = \frac{D}{R} = \frac{36}{14-4} = 3.6$$

$$\text{Tiempo con la corriente a favor} = \frac{D}{R} = \frac{36}{14+4} = 2$$

$$\overline{1.6} \quad \text{Diferencias de tiempos}$$

Problema seleccionado 8 Dos lanchas viajan en ángulos rectos uno con respecto al otro y arriban a un muelle al mismo tiempo. Una hora antes están separadas 25 millas. Si una de las lanchas viaja 5 millas por hora más rápido que la otra, ¿cuál es la rapidez a la que viaja la segunda? [*Sugerencia:* Use el teorema de Pitágoras,* recuerde que a distancias iguales tiempos iguales.]



* *Teorema de Pitágoras*: Un triángulo es rectángulo si y sólo si el cuadrado de la longitud del lado más largo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos lados más cortos: $c^2 = a^2 + b^2$.

EJEMPLO 9 **Un problema de cantidad, rapidez y tiempo**

Una nómina se puede terminar en 4 horas trabajando en dos computadoras simultáneamente. ¿Cuántas horas serán necesarias para que cada computadora termine sola si el modelo viejo se tarda 3 horas más que el nuevo? Calcule la respuesta con dos cifras decimales.

Solución Sea

x = Tiempo que tarda el nuevo modelo en terminar solo la nómina

$x + 3$ = Tiempo que tarda en terminar la nómina solo el modelo viejo

4 = Tiempo en que terminan la nómina ambas computadoras trabajando juntas

Entonces,

$\frac{1}{x}$ = Rapidez del modelo nuevo Termina $\frac{1}{x}$ de la nómina por hora

$\frac{1}{x+3}$ = Rapidez del modelo viejo Termina $\frac{1}{x+3}$ de la nómina por hora

$$\begin{pmatrix}\text{Parte del}\\ \text{trabajo terminada}\\ \text{por el modelo}\\ \text{nuevo en 4 horas}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Parte del}\\ \text{trabajo terminada}\\ \text{por el modelo}\\ \text{viejo en 4 horas}\end{pmatrix} = 1 \text{ trabajo completo}$$

$$\frac{1}{x}(4) + \frac{1}{x+3}(4) = 1 \qquad x \neq 0,\ x \neq -3$$

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{x+3} = 1$$

$$4(x + 3) + 4x = x(x + 3) \qquad \text{Multiplique ambos lados por } x(x+3).$$

$$4x + 12 + 4x = x^2 + 3x$$

$$x^2 - 5x - 12 = 0$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}$$

$$x = \frac{5 + \sqrt{73}}{2} \approx 6.77$$

$\frac{5 - \sqrt{73}}{2} \approx -1.77$ se descarta, puesto que x no puede ser negativa.

$$x + 3 = 9.77$$

El modelo nuevo terminaría la nómina en 6.77 horas trabajando sola, y el modelo viejo la terminaría en 9.77 horas.

Comprobación

$$\frac{1}{6.77}(4) + \frac{1}{9.77}(4) \stackrel{?}{=} 1$$

$$1.000\,259 \stackrel{\checkmark}{\approx} 1$$

Nota: No espere que la comprobación sea exacta, ya que las respuestas se redondearon a dos cifras decimales. Una comprobación exacta sólo se produciría usando $x = (5 + \sqrt{73})/2$. Esto último se deja al lector.

Problema seleccionado 9 Dos carteros pueden entregar la correspondencia en 3 horas cuando trabajan juntos. Uno puede terminar el trabajo 2 horas más rápido que el otro. ¿Cuánto tiempo le toma a uno entregar la correspondencia? Calcule las respuestas con dos cifras decimales.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $x = -4, \frac{5}{3}$ (B) $x = -\frac{3}{2}$ (una raíz doble) (C) $x = 0, \frac{5}{4}$
2. (A) $x = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ o $\pm\sqrt{15}/3$ (B) $x = \pm 2i$ (C) $x = (-1 \pm \sqrt{2})/3$
3. (A) $x^2 - 5x + \frac{25}{4} = (x - \frac{5}{2})^2$ (B) $x^2 + mx + (m^2/4) = [x + (m/2)]^2$
4. (A) $x = -4 \pm \sqrt{19}$ (B) $x = (6 \pm i\sqrt{3})/3$ o $2 \pm (\sqrt{3}/3)i$ 5. $x = (-3 \pm \sqrt{19})/2$
6. $x = -2.80, 0.98$ 7. 11 y 12 8. 15 y 20 millas por hora 9. 5.16 y 7.16 horas

EJERCICIO 1-6

Exprese todas las respuestas que implican radicales en una forma radical simplificada, a menos que se establezca lo contrario.

A

En los problemas del 1 al 6, resuelva por factorización.

1. $4u^2 = 8u$
2. $3A^2 = -12A$
3. $9y^2 = 12y - 4$
4. $16x^2 + 8x = -1$
5. $11x = 2x^2 + 12$
6. $8 - 10x = 3x^2$

En los problemas del 7 al 18, resuelva usando la propiedad de raíz cuadrada.

7. $m^2 - 12 = 0$
8. $y^2 - 45 = 0$
9. $x^2 + 25 = 0$
10. $x^2 + 16 = 0$
11. $9y^2 - 16 = 0$
12. $4x^2 - 9 = 0$
13. $4x^2 + 25 = 0$
14. $16a^2 + 9 = 0$
15. $(n + 5)^2 = 9$
16. $(m - 3)^2 = 25$
17. $(d - 3)^2 = -4$
18. $(t + 1)^2 = -9$

En los problemas del 19 al 26, resuelva usando la fórmula cuadrática.

19. $x^2 - 10x - 3 = 0$
20. $x^2 - 6x - 3 = 0$
21. $x^2 + 8 = 4x$
22. $y^2 + 3 = 2y$
23. $2x^2 + 1 = 4x$
24. $2m^2 + 3 = 6m$
25. $5x^2 + 2 = 2x$
26. $7x^2 + 6x + 4 = 0$

B

En los problemas del 27 al 34, resuelva completando el cuadrado.

27. $x^2 - 6x - 3 = 0$
28. $y^2 - 10y - 3 = 0$
29. $2y^2 - 6y + 3 = 0$
30. $2d^2 - 4d + 1 = 0$
31. $3x^2 - 2x - 2 = 0$
32. $3x^2 + 5x - 4 = 0$
33. $x^2 + mx + n = 0$
34. $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

En los problemas del 35 al 52, resuelva por cualquier otro método.

35. $12x^2 + 7x = 10$
36. $9x^2 + 9x = 4$
37. $(2y - 3)^2 = 5$
38. $(3m + 2)^2 = -4$
39. $x^2 = 3x + 1$
40. $x^2 + 2x = 2$
41. $7n^2 = -4n$
42. $8u^2 + 3u = 0$
43. $1 + \dfrac{8}{x^2} = \dfrac{4}{x}$
44. $\dfrac{2}{u} = \dfrac{3}{u^2} + 1$
45. $\dfrac{24}{10 + m} + 1 = \dfrac{24}{10 - m}$
46. $\dfrac{1.2}{y - 1} + \dfrac{1.2}{y} = 1$
47. $\dfrac{2}{x - 2} = \dfrac{4}{x - 3} - \dfrac{1}{x + 1}$
48. $\dfrac{3}{x - 1} - \dfrac{2}{x + 3} = \dfrac{4}{x - 2}$

49. $\frac{x+2}{x+3} - \frac{x^2}{x^2-9} = 1 - \frac{x-1}{3-x}$

50. $\frac{11}{x^2-4} + \frac{x+3}{2-x} = \frac{2x-3}{x+2}$

51. $|3u - 2| = u^2$

52. $|12 + 7x| = x^2$

En los problemas del 53 al 56, despeje para la variable indicada en términos de las otras variables. Use sólo la raíz cuadrada positiva.

53. $s = \frac{1}{2}gt^2$ para t

54. $a^2 + b^2 = c^2$ para a

55. $P = EI - RI^2$ para I

56. $A = P(1 + r)^2$ para r

Resuelva los problemas del 57 al 60 para obtener dos cifras decimales, use una calculadora.

57. $2.07x^2 - 3.79x + 1.34 = 0$

58. $0.61x^2 - 4.28x + 2.93 = 0$

59. $4.83x^2 + 2.04x - 3.18 = 0$

60. $5.13x^2 + 7.27x - 4.32 = 0$

61. Considere la ecuación cuadrática

$$x^2 + 4x + c = 0$$

donde c es un número real. Analice la relación entre los valores de c y los tres tipos de raíces enumerados en la tabla 1.

62. Considere la ecuación cuadrática

$$x^2 - 2x + c = 0$$

donde c es un número real. Analice la relación entre los valores de c y los tres tipos de raíces enumerados en la tabla 1.

Use el discriminante para determinar si las ecuaciones en los problemas del 63 al 66 tienen soluciones reales.

63. $0.0134x^2 + 0.0414x + 0.0304 = 0$

64. $0.543x^2 - 0.182x + 0.003\,12 = 0$

65. $0.0134x^2 + 0.0214x + 0.0304 = 0$

66. $0.543x^2 - 0.182x + 0.0312 = 0$

C

Resuelva los problemas del 67 al 70 y deje las respuestas en la forma de radical simplificada (i es la unidad imaginaria)

67. $\sqrt{3}x^2 = 8\sqrt{2}x - 4\sqrt{3}$

68. $2\sqrt{2}x + \sqrt{3} = \sqrt{3}x^2$

69. $x^2 + 2ix = 3$

70. $x^2 = 2ix - 3$

En los problemas 71 y 72, encuentre todas las soluciones.

71. $x^3 - 1 = 0$

72. $x^4 - 1 = 0$

73. ¿Puede una ecuación cuadrática con coeficientes racionales tener una raíz racional y una irracional? Explique.

74. ¿Puede una ecuación cuadrática con coeficientes reales tener una raíz real y una imaginaria? Explique.

75. Demuestre que si r_1 y r_2 son dos raíces de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $r_1r_2 = c/a$

76. Para r_1 y r_2 en el problema 75, demuestre que $r_1 + r_2 = -b/a$

77. En una etapa de la deducción de la fórmula cuadrática, reemplace la expresión

$$\pm\sqrt{(b^2 - 4ac)/4a^2}$$

con

$$\pm\sqrt{b^2 - 4ac}/2a$$

¿Cuál es la justificación para usar $2a$ en lugar de $|2a|$?

78. Encuentre el error en la siguiente "prueba" de que dos números arbitrarios son iguales entre sí: Suponga que a y b son números arbitrarios tales que $a \neq b$. Entonces

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2$$
$$(a - b)^2 = (b - a)^2$$
$$a - b = b - a$$
$$2a = 2b$$
$$a = b$$

APLICACIONES 

79. **Números.** Encuentre dos números tales que su suma sea 21 y su producto 104.

80. **Números.** Encuentre todos los números que tengan la propiedad de que cuando el número se suma a sí mismo el resultado de la suma sea igual que cuando el número se multiplica por sí mismo.

81. **Números.** Encuentre dos números consecutivos positivos enteros pares cuyo producto sea 168.

82. **Números.** La suma de un número y su recíproco es $\frac{10}{3}$. Encuentre el número.

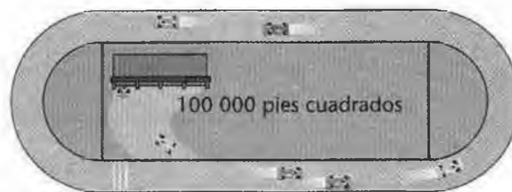
83. **Geometría.** Si la longitud y el ancho de un rectángulo de 4 por 2 pulgadas se aumentan en la misma cantidad cada una, el área del nuevo rectángulo será dos veces el área original. ¿Cuáles serán las dimensiones del rectángulo (con dos cifras decimales)?

84. **Geometría.** Encuentre la base b y la altura h de un triángulo cuya área es de 2 pies cuadrados si su base es 3 pies más larga que su altura y la fórmula para el área es $A = \frac{1}{2}bh$.

85. **Negocios.** Si se invierte \$$P$ a una tasa anual de interés r, después de 2 años la cantidad será $A = P(1 + r)^2$. ¿A qué tasa de interés los \$1 000 aumentarán a \$1 400 en 2 años? [*Nota:* $A = \$1\,440$ y $P = \$1\,000$.]

Lecturas del odómetro	
Bodega	5 2 8 4 6
Fábrica A	5 2 ? ? ?
Fábrica B	5 2 9 3 7
Bodega	5 3 0 0 2

96. Construcción. Una pista de carreras de $\frac{1}{4}$ de milla está formada por dos semicírculos unidos por carreteras rectas paralelas (véase la figura). Con el fin de proporcionar suficiente espacio para el equipo de servicio, vehículos de emergencia y estacionamiento para espectadores, el área de la pista debe medir 100 000 pies cuadrados. Encuentre la longitud de las carreteras y el diámetro de los semicírculos que más aproximen. [*Recuerde:* El área A y la circunferencia C de un círculo de diámetro d están dados por $A = \pi d^2/4$ y $C = \pi d$.]



SECCIÓN 1-7 Ecuaciones reducibles a la forma cuadrática

- Ecuaciones que implican radicales
- Ecuaciones que implican exponentes racionales

• Ecuaciones que implican radicales

Al resolver una ecuación que implica un radical como

$$x = \sqrt{x + 2}$$

parece que se puede eliminar al radical elevando al cuadrado cada lado, para después proceder a resolver la ecuación cuadrática resultante. En consecuencia,

$$\begin{aligned} x^2 &= (\sqrt{x+2})^2 \\ x^2 &= x + 2 \\ x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 \\ x &= 2, -1 \end{aligned}$$

Después se comprueban estos resultados en la ecuación original

Comprobación: $x = 2$	Comprobación: $x = -1$
$x = \sqrt{x + 2}$	$x = \sqrt{x + 2}$
$2 \stackrel{?}{=} \sqrt{2 + 2}$	$-1 \stackrel{?}{=} \sqrt{-1 + 2}$
$2 \stackrel{?}{=} \sqrt{4}$	$-1 \stackrel{?}{=} \sqrt{1}$
$2 \stackrel{\checkmark}{=} 2$	$-1 \neq 1$

Así, 2 es una solución, pero -1 no lo es. Estos resultados son un caso especial del teorema 1.

Teorema 1 **La operación de elevar al cuadrado en las ecuaciones**

Si ambos lados de una ecuación están elevados al cuadrado, entonces el conjunto solución de la ecuación original es un subconjunto del conjunto solución de la nueva ecuación.

Ecuación	Conjunto solución
$x = 3$	$\{3\}$
$x^2 = 9$	$\{-3, 3\}$

Este teorema proporciona un método para resolver algunas ecuaciones que implican radicales. Es importante recordar que cualquier ecuación nueva obtenida al extraer la raíz de ambos miembros de una ecuación elevados a la misma potencia puede tener soluciones, que se conocen como **soluciones extrañas**; es decir, que no son soluciones de la ecuación original. Por otra parte cualquier solución de la ecuación original debe estar entre las soluciones de la nueva ecuación.

Cada solución de la nueva ecuación debe ser comprobada en la ecuación original para eliminar soluciones extrañas.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Al elevar ambos lados de las ecuaciones $x = \sqrt{x}$ y $x = -\sqrt{x}$ se produce la nueva ecuación $x^2 = x$. Encuentre las soluciones de la nueva ecuación y después compruebe cada una de las soluciones extrañas en la ecuación original.

PRECAUCIÓN Recuerde que $\sqrt{9}$ representa la raíz cuadrada *positiva* de 9 y $-\sqrt{9}$ representa la raíz cuadrada *negativa* de 9. Es correcto usar el símbolo $\pm$ para combinar estas dos raíces cuando se esté resolviendo una ecuación:

$$x^2 = 9 \qquad \text{implica} \qquad x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Pero es incorrecto usar $\pm$ cuando se evalúa la raíz cuadrada positiva de un número:

$$\sqrt{9} \neq \pm 3 \qquad \sqrt{9} = 3$$

EJEMPLO 1 **Solución de ecuaciones que implican radicales**

Resuelva:

(A) $x + \sqrt{x - 4} = 4$ (B) $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} = 2$

Soluciones (A) $x + \sqrt{x - 4} = 4$

$\sqrt{x - 4} = 4 - x$ Se aísla al radical en un solo lado.

$x - 4 = 16 - 8x + x^2$ Elevando al cuadrado ambos lados.

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$
$$(x - 5)(x - 4) = 0$$
$$x = 5, 4$$

Comprobación

$x = 5$	$x = 4$
$x + \sqrt{x - 4} = 4$	$x + \sqrt{x - 4} = 4$
$5 + \sqrt{5 - 4} \stackrel{?}{=} 4$	$4 + \sqrt{4 - 4} \stackrel{?}{=} 4$
$6 \neq 4$	$4 \stackrel{\checkmark}{=} 4$

Esto muestra que 4 es una solución de la ecuación original y 5 es una solución extraña. Es decir,

$x = 4$ Es la única solución

(B) Para resolver una ecuación que contenga más de un radical, se debe despejar al radical en un solo lado y elevar al cuadrado ambos lados para eliminar al radical despejado. Se repite este proceso hasta eliminar todos los radicales.

$$\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} = 2$$
$$\sqrt{2x + 3} = \sqrt{x - 2} + 2$$ Aísle uno de los dos radicales.
$$2x + 3 = x - 2 + 4\sqrt{x - 2} + 4$$ Eleve al cuadrado ambos lados.
$$x + 1 = 4\sqrt{x - 2}$$ Aísle al radical restante.
$$x^2 + 2x + 1 = 16(x - 2)$$ Eleve al cuadrado ambos lados.
$$x^2 - 14x + 33 = 0$$
$$(x - 3)(x - 11) = 0$$
$$x = 3, 11$$

Comprobación

$x = 3$	$x = 11$
$\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} = 2$	$\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} = 2$
$\sqrt{2(3) + 3} - \sqrt{3 - 2} \stackrel{?}{=} 2$	$\sqrt{2(11) + 3} - \sqrt{11 - 2} \stackrel{?}{=} 2$
$2 \stackrel{\checkmark}{=} 2$	$2 \stackrel{\checkmark}{=} 2$

Ambas soluciones se comprueban. Por consiguiente,

$x = 3, 11$ Son las dos soluciones

Problema seleccionado 1 Resuelva:

(A) $x - 5 = \sqrt{x - 3}$ (B) $\sqrt{2x + 5} + \sqrt{x + 2} = 5$

PRECAUCIÓN Cuando se eleva al cuadrado una expresión como $\sqrt{x-2}+2$, hay que asegurarse de aplicar correctamente la fórmula para elevar al cuadrado la suma de dos términos (véase sección A-2):

$$(u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$$

$$(\sqrt{x-2}+2)^2 = (\sqrt{x-2})^2 + 2(\sqrt{x-2})(2) + (2)^2$$
$$= x-2+4\sqrt{x-2}+4$$

No omita el término medio en este producto:

$$(\sqrt{x-2}+2)^2 \neq x-2+4$$

• Ecuaciones que implican exponentes racionales

Para resolver la ecuación

$$x^{2/3} - x^{1/3} - 6 = 0$$

escriba esta ecuación en la forma

$$(x^{1/3})^2 - x^{1/3} - 6 = 0$$

Ahora se puede reconocer que la ecuación es cuadrática en $x^{1/3}$. Así, se resuelve primero para $x^{1/3}$ y después se resuelve para x. Se puede resolver directamente la ecuación o hacer la sustitución $u = x^{1/3}$, resolver para u y después resolver para x. Ambos métodos de solución se muestran en seguida.

Método I. Solución directa:

$$(x^{1/3})^2 - x^{1/3} - 6 = 0$$
$$(x^{1/3}-3)(x^{1/3}+2) = 0 \qquad \text{Factorice el lado izquierdo.}$$
$$x^{1/3} = 3 \quad \text{o} \quad x^{1/3} = -2$$
$$(x^{1/3})^3 = 3^3 \qquad (x^{1/3})^3 = (-2)^3 \qquad \text{Eleve al cubo ambos lados.}$$
$$x = 27 \qquad x = -8$$

Conjunto solución: $\{-8, 27\}$

Método II. Usando sustitución:
Sea $u = x^{1/3}$, resuelva para u y después resuelva para x.

$$u^2 - u - 6 = 0$$
$$(u-3)(u+2) = 0$$
$$u = 3, -2$$

Reemplace u con $x^{1/3}$, para obtener

$$x^{1/3} = 3 \quad \text{o} \quad x^{1/3} = -2$$
$$x = 27 \qquad x = -8$$

Conjunto solución: $\{-8, 27\}$

En general, si una ecuación que no es cuadrática se puede transformar a la forma

$$au^2 + bu + c = 0$$

donde u es una expresión de alguna otra variable, entonces la ecuación se llama **forma cuadrática**. Una vez que se ha reconocido como una forma cuadrática, una ecuación a menudo se puede resolver usando los métodos cuadráticos.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 ¿Cuáles de las siguientes ecuaciones se pueden transformar en una forma cuadrática haciendo una sustitución de la forma $u = x^n$?

(A) $3x^{-4} + 2x^{-2} + 7$ (B) $7x^5 - 3x^2 + 3$
(C) $2x^5 + 4x^2\sqrt{x} - 6$ (D) $8x^{-2}\sqrt{x} - 5x^{-1}\sqrt{x} - 2$

En general, si a, b, c, m y n son números reales diferentes de cero, ¿cuándo puede una expresión de la forma $ax^m + bx^n + c$ transformarse a una forma cuadrática?

EJEMPLO 2 **Solución de formas cuadráticas**

Resuelva tanto como le sea posible usando las técnicas desarrolladas hasta este punto. (Algunas ecuaciones pueden tener más soluciones imaginarias que no podría encontrar sin un estudio más profundo de la teoría de ecuaciones.)

(A) $x^{10} + 6x^5 - 16 = 0$
(B) $3x^{-4} + 6x^{-2} - 1 = 0$ (Encuentre todas las resoluciones reales.)

Soluciones (A) Para $x^{10} + 6x^5 - 16 = 0$, sea $u = x^5$ y resuelva:

$$u^2 + 6u - 16 = 0$$
$$(u + 8)(u - 2) = 0$$
$$u = -8, 2$$

Así que,

$$x^5 = -8 \quad \text{o} \quad x^5 = 2$$
$$x = \sqrt[5]{-8} = -\sqrt[5]{8} \qquad x = \sqrt[5]{2}$$

Nota: $x \neq (28)^5$ y $x \neq 2^5$.

Dos soluciones son $-\sqrt[5]{8}$ y $\sqrt[5]{2}$. En el capítulo 3 se verá que hay otras ocho soluciones.

(B) La ecuación $3x^{-4} + 6x^{-2} - 1 = 0$ es cuadrática en x^{-2}, así se puede resolver primero x^{-2} y después x. Sin embargo, es preferible primero convertir la ecuación en una que implique exponentes positivos. Para hacer esto se multiplican ambos lados por x^4, $x \neq 0$:

$$3x^{-4} + 6x^{-2} - 1 = 0$$
$$3 + 6x^2 - x^4 = 0 \qquad \text{Multiplique ambos lados por } x^4,\ x \neq 0$$
$$(x^2)^2 - 6x^2 - 3 = 0 \qquad \text{Cuadrática en } x^2$$

El lado izquierdo no se puede factorizar usando coeficientes enteros, así que se debe resolver x^2 usando la fórmula cuadrática:

$$x^2 = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(-3)}}{2}$$

$$x^2 = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

$$x = \pm\sqrt{3 \pm 2\sqrt{3}}$$

Puesto que $3 - 2\sqrt{3}$ es negativo y conduce a raíces imaginarias, se debe descartar (sólo se están buscando todas las raíces reales). Es decir,

$$x = \pm\sqrt{3 + 2\sqrt{3}} \quad \text{Dos raíces reales}$$

Problema seleccionado 2 Resuelva hasta donde le sea posible usando las técnicas que se han desarrollado hasta aquí.

(A) $x^{2/3} - x^{1/3} - 12 = 0$ (B) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
(C) $3x^{-4} = 1 - 10x^{-2}$ (Encuentre todas las soluciones reales.)

EJEMPLO 3 **Plantee y resuelva un problema con literales**

La diagonal de un rectángulo es de 10 pulgadas, y el área es de 45 pulgadas cuadradas. Encuentre las dimensiones del rectángulo correcto con una cifra decimal.

Solución Dibuje un rectángulo y etiquete las dimensiones como se muestra en la figura 1. A partir del teorema de Pitágoras,

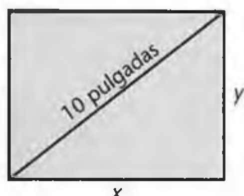


FIGURA 1

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

Es decir,

$$y = \sqrt{100 - x^2}$$

Ya que el área del rectángulo está dada por xy, se tiene

$$x\sqrt{100 - x^2} = 45 \quad \text{Área del rectángulo}$$

$$x^2(100 - x^2) = 2\,025 \quad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$

$$100x^2 - x^4 = 2\,025$$

$$(x^2)^2 - 100x^2 + 2\,025 = 0 \quad \text{Cuadrática en } x^2$$

$$x^2 = \frac{100 \pm \sqrt{100^2 - 4(1)(2\,025)}}{2}$$

$$x^2 = 50 \pm 5\sqrt{19}$$

$$x = \sqrt{50 \pm 5\sqrt{19}} \quad \text{Descarte las soluciones negativas, ya que } x > 0.$$

Si $x = \sqrt{50 + 5\sqrt{19}} \approx 8.5$, entonces

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{100 - x^2} \\ &= \sqrt{100 - (50 + 5\sqrt{19})} \\ &= \sqrt{50 - 5\sqrt{19}} \approx 5.3 \end{aligned}$$

Así, las dimensiones del rectángulo con una cifra decimal son 8.5 por 5.3 pulgadas. Observe que si $x = \sqrt{50 - 5\sqrt{19}}$, entonces $y = \sqrt{50 + 5\sqrt{19}}$, y las dimensiones aún son 8.5 por 5.3 pulgadas.

Comprobación

Área: $(8.5)(5.3) = 45.05 \approx 45$

Diagonal: $\sqrt{8.5^2 + 5.3^2} = \sqrt{100.34} \approx 10$

Nota: Se puede obtener una comprobación exacta usando $\sqrt{50 - 5\sqrt{19}}$ y $\sqrt{50 + 5\sqrt{19}}$ en lugar de estas aproximaciones decimales. Esto se deja como ejercicio al lector.

Problema seleccionado 3

Si el área de un triángulo rectángulo es de 24 pulgadas cuadradas y la hipotenusa es de 12 pulgadas, encuentre las longitudes de los lados del triángulo correcto con una cifra decimal.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $x = 7$ (B) $x = 2$
2. (A) $x = 64, -27$ (B) $x = \pm 1, \pm 2$ (C) $x = \pm\sqrt{5 + 2\sqrt{7}}$ (dos raíces reales)
3. 11.2 pulgadas por 4.3 pulgadas

EJERCICIO 1-7

A menos que se señale lo contrario, encuentre todas las posibles soluciones por las técnicas que se han desarrollado hasta aquí:

A

1. $\sqrt[3]{x + 5} = 3$
2. $\sqrt[4]{x - 3} = 2$
3. $\sqrt{5n + 9} = n - 1$
4. $m - 13 = \sqrt{m + 7}$
5. $\sqrt{x + 5} + 7 = 0$
6. $3 + \sqrt{2x - 1} = 0$
7. $\sqrt{3x + 4} = 2 + \sqrt{x}$
8. $\sqrt{3w - 2} - \sqrt{w} = 2$
9. $y^4 - 2y^2 - 8 = 0$
10. $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$
11. $x^{10} + 3x^5 - 10 = 0$
12. $x^{10} - 7x^5 - 8 = 0$
13. $2x^{2/3} + 3x^{1/3} - 2 = 0$
14. $x^{2/3} - 3x^{1/3} - 10 = 0$
15. $(m^2 - m)^2 - 4(m^2 - m) = 12$

B

16. $(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x) = 6$
17. $\sqrt{u - 2} = 2 + \sqrt{2u + 3}$
18. $\sqrt{3t + 4} + \sqrt{t} = -3$
19. $\sqrt{3y - 2} = 3 - \sqrt{3y + 1}$
20. $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x - 4} = 2$
21. $\sqrt{7x - 2} - \sqrt{x + 1} = \sqrt{3}$
22. $\sqrt{3x + 6} - \sqrt{x + 4} = \sqrt{2}$
23. $3n^{-2} - 11n^{-1} - 20 = 0$
24. $6x^{-2} - 5x^{-1} - 6 = 0$
25. $9y^{-4} - 10y^{-2} + 1 = 0$
26. $4x^{-4} - 17x^{-2} + 4 = 0$
27. $y^{1/2} - 3y^{1/4} + 2 = 0$
28. $4x^{-1} - 9x^{-1/2} + 2 = 0$
29. $(m - 5)^4 + 36 = 13(m - 5)^2$
30. $(x - 3)^4 + 3(x - 3)^2 = 4$

C

31. $\sqrt{5-2x} - \sqrt{x+6} = \sqrt{x+3}$

32. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = \sqrt{x+1}$

33. $2 + 3y^{-4} = 6y^{-2}$ (Encuentre todas las raíces)

34. $4m^{-2} = 2 + m^{-4}$ (Encuentre todas las raíces)

Resuelva los problemas del 35 al 38 de dos formas: por elevación al cuadrado y por sustitución.

35. $m - 7\sqrt{m} + 12 = 0$

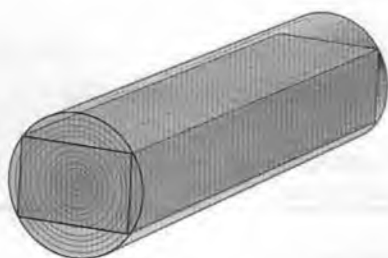
36. $y - 6 + \sqrt{y} = 0$

37. $t - 11\sqrt{t} + 18 = 0$

38. $x = 15 - 2\sqrt{x}$

APLICACIONES

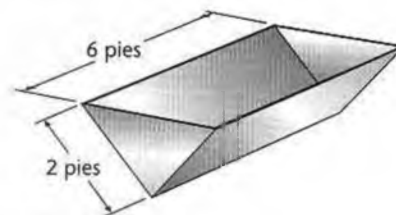
39. **Fabricación.** Un aserradero corta rectángulos de un tronco (véase la figura). Si el diámetro del tronco mide 16 pulgadas y el área de la sección transversal de la viga 120 pulgadas cuadradas, encuentre las dimensiones de la sección transversal de la viga correcta con una cifra decimal.



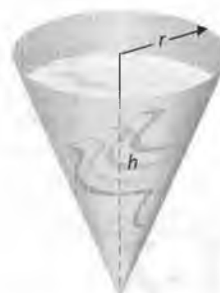
40. **Diseño.** Una compañía procesadora de alimentos empaca un lote de sus productos en latas rendondas de metal con un diámetro de 12 pulgadas. Se usan cuatro cajas rectangulares de idéntico tamaño para dividir la lata en ocho compartimentos (véase la figura). Si el área de la sección transversal de cada caja es de 15 pulgadas cuadradas, encuentre las dimensiones correctas de las cajas con una cifra decimal.



*41. **Construcción.** Una artesa para agua está construida con una placa rectangular de metal de 4 por 6 pies, con los extremos doblados de tal forma que al unirse entre sí exactamente enmedio del rectángulo, forman un triángulo en cada lado (véase la figura). Si el volumen de la artesa es de 9 pies cúbicos, encuentre el ancho correcto con dos cifras decimales.



*42. **Diseño.** Un cono de papel para beber agua, con la forma de un cono circular está formado por 125 centímetros cuadrados de papel (véase la figura). Si la altura del cono es de 10 centímetros, encuentre el radio correcto con dos cifras decimales.



Superficie lateral del área:

$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

43. **Oferta y demanda.** La oferta semanal y las ecuaciones de demanda para una cierta marca de teléfonos están dadas por

$p = 14 + 0.01q$ Ecuación de oferta

$p = 50 - 0.5\sqrt{q}$ Ecuación de demanda

donde q es el número de teléfonos y $\$p$ es el precio. Encuentre el precio de equilibrio y la cantidad equilibrio.

SECCIÓN 1-8 Desigualdades polinomiales y racionales

- Desigualdades polinomiales
- Desigualdades racionales

En esta sección se resolverán las desigualdades polinomiales simples y las desigualdades racionales de la forma

$$2x^2 - 3x - 4 < 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{x - 2}{x^2 - x - 3} \geq 0$$

Aun cuando el análisis se ha limitado a desigualdades cuadráticas y racionales con numeradores y denominadores de grado 2 o menores (en seguida podrá ver por qué), la teoría presentada se aplica a desigualdades polinomiales y racionales en general. En el capítulo 3, con una teoría adicional, podrá usar los métodos ahí desarrollados para resolver desigualdades polinomiales y racionales de naturaleza más general. El proceso también (con sólo ligeras modificaciones en los teoremas principales) es aplicable a las otras formas encontradas en cálculo.

¿Por qué el interés en resolver desigualdades? La mayoría de las aplicaciones importantes de las matemáticas implican más el uso de desigualdades que de igualdades. En el mundo real pocas cosas son exactas.

Desigualdades polinomiales

Sabemos cómo resolver desigualdades lineales como

$$3x - 7 \geq 5(x - 2) + 3$$

¿Pero cómo resolver desigualdades cuadráticas (o de polinomios de mayor grado) como las que se dan en seguida?

$$x^2 + 2x < 8 \tag{1}$$

Primero se escribe la desigualdad en la **forma estándar**; es decir, se transfieren todos los términos diferentes de 0 al lado izquierdo, dejando sólo al 0 en el lado derecho:

$$x^2 + 2x - 8 < 0 \quad \text{Forma estándar} \tag{2}$$

En este ejemplo, se está buscando valores de x que hagan que la cuadrática del lado izquierdo sea menor que 0, es decir, que sea negativa.

El teorema siguiente proporciona la base para resolver de manera efectiva este problema. El teorema 1 emplea en forma directa raíces *reales* de los polinomios en el lado izquierdo de la desigualdad (2). Las **raíces reales** de los polinomios son aquellos números reales que hacen que el polinomio sea igual a 0, es decir, las raíces reales de la ecuación polinomial correspondiente. Si un polinomio tiene una o más raíces reales, entonces se dibujan estas raíces en una recta numérica real dividiendo a la recta en dos o más intervalos.

Teorema 1 **Signo de un polinomio en una recta numérica real**

Un polinomio diferente de 0, tendrá un signo constante (ya sea siempre positivo o siempre negativo) dentro de cada intervalo determinado por sus raíces reales dibujadas en una recta numérica. Si un polinomio no tiene raíces reales, entonces el polinomio puede ser positivo sobre toda la recta numérica real, o negativa sobre toda la recta numérica real.

Ahora se termina la solución de la desigualdad (1) usando el teorema 1. Después de escribir (1) en la forma estándar, como se hizo en la desigualdad (2), encontramos a las raíces reales del polinomio del lado izquierdo al resolver la correspondiente ecuación polinomial:

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \quad \text{Puede ser resuelta por factorización}$$

$$(x - 2)(x + 4) = 0$$

$$x = -4, 2 \quad \text{Raíces reales del polinomio } x^2 + 2x - 8$$

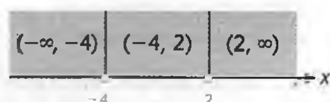


FIGURA 1 Raíces reales de $x^2 + 2x - 8$.

Después, se dibujan las raíces reales, −4 y 2, sobre una recta numérica (figura 1) y se observa que se determinan tres intervalos $(-\infty, -4)$, $(-4, 2)$ y $(2, \infty)$.

A partir del teorema 1 se sabe que el polinomio tiene signo constante en cada uno de los tres intervalos. Si se selecciona un **número de prueba** en cada intervalo y se evalúa al polinomio en ese número, entonces el signo del polinomio en este número de prueba debe ser el signo para todo el intervalo. Puesto que cualquier número dentro de un intervalo se puede usar como número de prueba, generalmente elegimos números de prueba que sean fáciles de calcular. En este ejemplo se eligieron −5, 0 y 3. La tabla 1 muestra los cálculos.

TABLA 1 Polinomio: $x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$

Número de prueba	−5	0	3
Valor del polinomio para cada número de prueba	7	−8	7
Signo del polinomio en el intervalo que contiene al número de prueba	+	−	+
Intervalo que contiene al número de prueba	$(-\infty, -4)$	$(-4, 2)$	$(2, \infty)$

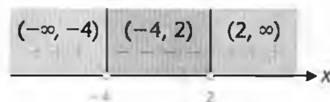


FIGURA 2 Cuadro de signos para $x^2 + 2x - 8$.

Usando la información de la tabla 1, construimos un **cuadro de signos** para el polinomio, como se muestra en la figura 2.

Es decir, $x^2 + 2x - 8$ es negativo en el intervalo $(-4, 2)$, y se puede resolver la desigualdad. La solución y gráfica se muestran en seguida y en la figura 3.

$$-4 < x < 2 \quad \text{Notación de desigualdad}$$

$$(-4, 2) \quad \text{Notación de intervalos}$$



FIGURA 3 Solución de $x^2 + 2x < 8$.

Nota: Si se hubiera usado $<$ en el problema original en lugar de $\leq$, entonces se podría haber incluido a las raíces del polinomio en el conjunto solución.

Los pasos para el proceso anterior se resumen en el cuadro siguiente:

Pasos a seguir para la solución de desigualdades polinomiales

Paso 1. Escriba la desigualdad polinomial en la forma estándar (es decir, una forma donde el lado derecho está igualado a 0).
Paso 2. Encuentre todos las raíces reales del polinomio (el lado izquierdo de la forma estándar).
Paso 3. Grafique las raíces reales en una recta numérica, y divida ésta en intervalos.
Paso 4. Elija una prueba numérica (que sea fácil de calcular) en cada intervalo, y evalúe el polinomio para cada número (es útil hacer una pequeña tabla).
Paso 5. Use los resultados del paso 4 para construir un cuadro de signos en donde se muestre el signo del polinomio en cada intervalo.
Paso 6. A partir del cuadro de signos, escriba abajo la solución de la desigualdad polinomial original (y dibuje la gráfica si se requiere).

Con un poco de experiencia, se pueden combinar varios de los pasos mencionados antes y en el proceso agrupar a dos o tres pasos clave de operación. La parte crítica del método es el paso 2, encontrar todas las raíces reales del polinomio. En este punto se pueden encontrar todas las raíces reales de cualquier polinomio cuadrático (véase la sección 1-6). Encontrar las raíces reales de los polinomios de grado más alto es más difícil, y este proceso se considera en detalle en el capítulo 3.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Se puede resolver una ecuación cuadrática factorizando al polinomio cuadrático e igualando a 0 cada factor, como se hizo en el ejemplo anterior. ¿Se puede resolver desigualdades cuadráticas de la misma manera? Es decir, ¿se puede resolver

$$(x - 2)(x + 4) < 0$$

considerando las desigualdades lineales que implican a los factores $x - 2$ y $x + 4$? Analice cómo se puede llegar a la solución correcta de $-4 < x < 2$, considerando las diferentes combinaciones de

$$x - 2 < 0 \qquad x - 2 > 0 \qquad x + 4 < 0 \qquad x + 4 > 0$$

Ahora se retomará una importante aplicación que implica a las desigualdades polinomiales.

EJEMPLO 1 **Análisis de pérdidas y ganancias**

Una empresa fabrica y vende linternas. Para un modelo en particular, los departamentos de mercadotecnia y finanzas calculan un precio de $\$p$ por unidad, el costo semanal C y los ingresos R (en millones de dólares) están dados por las ecuaciones

$$C = 7 - p \qquad \text{Ecuación de costo}$$

$$R = 5p - p^2 \qquad \text{Ecuación de ingresos}$$

Encuentre los precios (incluya una gráfica) para que la compañía tome en cuenta si tiene:

(A) Una ganancia (B) Una pérdida

Soluciones (A) Una ganancia sería el resultado de que el costo fuera menor que el ingreso, es decir, si

$$C < R$$

$$7 - p < 5p - p^2$$

Se resolverá la desigualdad siguiendo los pasos antes esbozados.

Paso 1. Escriba la desigualdad polinomial en la forma estándar.

$$p^2 - 6p + 7 < 0$$ Forma estándar

Paso 2. Encuentre todas las raíces reales del polinomio.

$$p^2 - 6p + 7 = 0$$

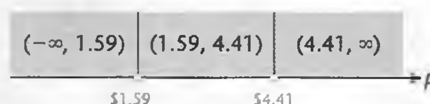
$$p = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2}$$ Resuelva con la fórmula cuadrática.

$$= 3 \pm \sqrt{2}$$

$$\approx \$1.59, \$4.41$$ Raíces reales del polinomio redondeados al centésimo más cercano.

Paso 3. Dibuje las raíces reales sobre una recta numérica.

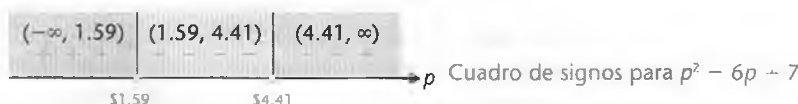
Las dos raíces reales determinan tres intervalos: $(-\infty, 1.59)$, $(1.59, 4.41)$ y $(4.41, \infty)$.



Paso 4. Elija una prueba numérica en cada intervalo y construya una tabla.

Polinomio: $p^2 - 6p + 7$			
Prueba número	1	2	5
Valor del polinomio para el número de prueba	2	−1	2
Signo del polinomio en el intervalo que contiene al número de prueba	+	−	+
Intervalos que contienen al número de prueba	$(-\infty, 1.59)$	$(1.59, 4.41)$	$(4.41, \infty)$

Paso 5. Construya un cuadro de signos.



Cuadro de signos para $p^2 - 6p + 7$

Paso 6. Escriba la solución y dibuje la gráfica.

Con referencia al cuadro de signos del polinomio $p^2 - 6p + 7$ del paso 5 se puede ver que $p^2 - 6p + 7 < 0$, y la utilidad ocurre cuando ($C < R$), para

$\$1.59 < p < \$4.41$ Utilidad

(B) Una pérdida sería el resultado si el costo fuese más grande que el ingreso; es decir, si

$$C > R$$
$$7 - p > 5p - p^2$$

Si se escribe la desigualdad polinomial en la forma estándar, se obtiene la misma desigualdad que se obtuvo en el paso 1 del inciso A, excepto que el orden de la desigualdad está invertido:

$$p^2 - 6p + 7 > 0 \quad \text{Forma estándar}$$

Con referencia al cuadro de signos del polinomio $p^2 - 6p + 7$ del paso 5 del inciso A, se puede ver que $p^2 - 6p + 7 > 0$, y la pérdida ocurre cuando($C > R$), para

$p < \$1.59$ o $p > \$4.41$

Puesto que un precio negativo no tiene sentido, se debe modificar este resultado al eliminar cualquier número que esté a la izquierda de 0. Es decir, una pérdida ocurrirá para los siguientes precios:

$\$0 \le p < \$1.59$ o $p > \$4.41$

Las raíces reales no están incluidas, ya que los valores para los cuales $R = C$, son los **valores de equilibrio** (sin pérdidas ni ganancias) de la compañía.

Problema seleccionado 1

Una compañía fabrica y vende cintas para impresoras. Para una cinta en particular los departamentos de mercadotecnia y de finanzas calculan un precio de $\$p$ por unidad. el costo semanal C y los ingresos R (en millones de dólares) están dados por las ecuaciones

$$C = 13 - p \quad \text{Ecuación de costos}$$
$$R = 7p - p^2 \quad \text{Ecuación de ingresos}$$

Encuentre los precios (incluya una gráfica) para los cuales la compañía tendrá:

(A) Una ganancia (B) Una pérdida

• Desigualdades racionales

Los pasos para resolver desigualdades polinomiales pueden, con ligeras modificaciones, usarse para resolver desigualdades racionales como

$$\frac{x-3}{x+5} > 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2+5x-6}{5-x} \leq 3$$

Si, después de realizar las operaciones adecuadas en una desigualdad, el lado derecho es 0 y el lado izquierdo es de la forma P/Q, donde P y Q son polinomios distintos de 0, entonces se dice que la desigualdad es una **desigualdad racional en forma estándar**. Cuando las raíces reales (si existen) de los polinomios P y Q se dibujan en una recta numérica, éstas dividen a la recta en dos o más intervalos. El siguiente teorema, que incluye al teorema 1 como un caso especial, proporciona una base para resolver desigualdades racionales de la forma estándar.

Teorema 2 **Signo de una expresión racional en una recta numérica real**

La expresión racional P/Q, donde P y Q son polinomios distintos de cero, tendrá un signo constante (ya sea siempre positivo o siempre negativo) dentro de cada intervalo determinado por las raíces reales de P y Q dibujadas sobre una recta numérica. Si ni P ni Q tienen raíces reales, entonces la expresión racional P/Q puede ser positiva sobre toda la recta numérica real o negativa sobre toda la recta numérica real.

Se ilustrará el uso del teorema 2 mediante un ejemplo.

EJEMPLO 2 **Solución de una desigualdad racional**

Resuelva y grafique: $\dfrac{x^2-3x-10}{1-x} \geq 2$

Solución Se podría intentar comenzando por multiplicar ambos lados por $1-x$ (como se haría si la desigualdad fuera una ecuación). Sin embargo, puesto que no se sabe si $1-x$ es positivo o negativo, no se conoce si el orden de la desigualdad se debe cambiar. En lugar de hacer esto se procede de la manera siguiente (se modifican los pasos para la solución de las desigualdades polinomiales como sea necesario):

Paso 1. Escriba la desigualdad en la forma estándar.

$$\frac{x^2-3x-10}{1-x} \geq 2$$

$$\frac{x^2-3x-10}{1-x} - 2 \geq 0 \qquad \text{Reste 2 de ambos lados.}$$

$$\frac{x^2-3x-10-2(1-x)}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Combine el lado izquierdo en una sola fracción.}$$

$$\frac{x^2-x-12}{1-x} \geq 0 \qquad \text{Forma estándar: } \frac{P}{Q} \geq 0$$

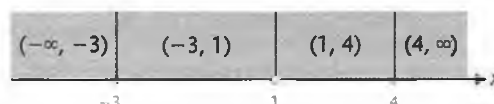
El lado izquierdo de la última desigualdad es una expresión racional de la forma P/Q, donde $P = x^2 - x - 12$ y $Q = 1 - x$. El problema ahora es encontrar todos los valores de x tales que $P/Q \geq 0$; es decir, de tal forma que P/Q sea positiva o 0.

Paso 2. Se encuentran todas las raíces reales de los polinomios P y Q.

$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$(x + 3)(x - 4) = 0$$
$$x = -3, 4 \quad \text{Raíces reales para } P$$

$$1 - x = 0$$
$$x = 1 \quad \text{Raíz real para } Q$$

Nota: Las raíces reales para P se encuentran haciendo P/Q igual a 0; así que la parte de igualdad de la desigualdad original se satisface para estas raíces y éstas deben estar incluidas en el conjunto solución final. Por otra parte, puesto que la división entre 0 no se permite, P/Q no está definida en las raíces de Q. Así, las raíces reales de Q no deben incluirse en el conjunto solución.



Paso 3. Dibuje todas las raíces reales para P y Q en una recta numérica.

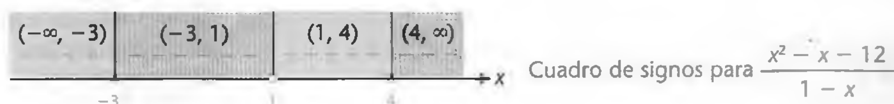
Las tres raíces de P y Q determinan cuatro intervalos: $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$, $(1, 4)$ y $(4, \infty)$. Observe que se usan puntos sólidos en -3 y 4 para indicar que las raíces de P son parte del conjunto solución. Sin embargo, se usa un punto abierto como en 1 para indicar que esta raíz de Q no es parte del conjunto solución. Recuerde que P/Q no está definido en las raíces de Q.

Paso 4. Elija un número de prueba en cada intervalo y construya una tabla.

Expresión racional: $\dfrac{x^2 - x - 12}{1 - x} = \dfrac{(x + 3)(x - 4)}{1 - x}$

Número de prueba	-4	0	2	5
Valor de P/Q	$\frac{8}{5}$	-12	10	-2
Signo de P/Q	+	−	+	−
Intervalo	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, 4)$	$(4, \infty)$

Paso 5. Construya un cuadro de signos.



Cuadro de signos para $\dfrac{x^2 - x - 12}{1 - x}$

Paso 6. Escriba la solución y dibuje la gráfica.

A partir del cuadro de signos, se puede ver que

$$\frac{x^2 - x - 12}{1 - x} \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2 - 3x - 10}{1 - x} \geq 2$$

para

$x \leq -3$ o $1 < x \leq 4$ Notación de desigualdad

$(-\infty, -3] \cup (1, 4]$ Notación de intervalo



Problema seleccionado 2 Resuelva y grafique: $\frac{3}{2 - x} \leq \frac{1}{x + 4}$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) Utilidades: $\$2.27 < p < \$5.73$



(B) Pérdidas: $\$0 \leq p < \$2.27$ o $p > \$5.73$



2. $-4 < x \leq -\frac{5}{2}$ o $x > 2$

$(-4, -\frac{5}{2}] \cup (2, \infty)$



EJERCICIO 1-8

A

En los problemas del 1 al 14, resuelva y grafique. Exprese las respuestas en forma de desigualdad y en notación de intervalos.

1. $x^2 < 10 - 3x$
2. $x^2 + x < 12$
3. $x^2 + 21 > 10x$
4. $x^2 + 7x + 10 > 0$
5. $x^2 \leq 8x$
6. $x^2 + 6x \geq 0$
7. $x^2 + 5x \leq 0$
8. $x^2 \leq 4x$
9. $x^2 > 4$
10. $x^2 \leq 9$
11. $\frac{x - 2}{x + 4} \leq 0$
12. $\frac{x + 3}{x - 1} \geq 0$
13. $\frac{x + 4}{1 - x} \leq 0$
14. $\frac{3 - x}{x + 5} \leq 0$

B

En los problemas del 15 al 26 resuelva y grafique. Exprese las respuestas en forma de desigualdad y en notación de intervalos.

15. $\frac{x^2 + 5x}{x - 3} \geq 0$
16. $\frac{x - 4}{x^2 + 2x} \leq 0$
17. $\frac{(x + 1)^2}{x^2 + 2x - 3} \leq 0$
18. $\frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 4} \leq 0$
19. $\frac{1}{x} < 4$
20. $\frac{5}{x} > 3$
21. $\frac{3x + 1}{x + 4} \leq 1$
22. $\frac{5x - 8}{x - 5} \geq 2$
23. $\frac{2}{x + 1} \geq \frac{1}{x - 2}$
24. $\frac{3}{x - 3} \leq \frac{2}{x + 2}$

25. $x^3 + 2x^2 \leq 8x$

26. $2x^3 + x^2 > 6x$

¿Para qué valores reales de x cada expresión de los problemas del 27 al 32 representa un número real? Escriba las respuestas usando notación de desigualdades.

27. $\sqrt{x^2 - 9}$

28. $\sqrt{4 - x^2}$

29. $\sqrt{2x^2 + x - 6}$

30. $\sqrt{3x^2 - 7x - 6}$

31. $\sqrt{\dfrac{x + 7}{3 - x}}$

32. $\sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 3}}$

Si a, b y c, son números reales, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ debe tener: ya sea dos raíces reales distintas, o una raíz real doble, o dos raíces imaginarias conjugadas. En los problemas del 33 al 36, use la información dada con respecto a las raíces para describir los posibles conjuntos solución para la desigualdad indicada. Ilustre sus conclusiones con ejemplos específicos.

33. $ax^2 + bx + c > 0$, da dos distintas raíces reales r_1 y r_2 con $r_1 < r_2$.

34. $ax^2 + bx + c \leq 0$, da dos distintas raíces reales r_1 y r_2 con $r_1 < r_2$.

35. $ax^2 + bx + c \geq 0$, da una raíz real (doble) r.

36. $ax^2 + bx + c < 0$, da una raíz real (doble) r.

37. Proporcione un ejemplo de desigualdad cuadrática cuyo conjunto solución sea la recta real completa.

38. Dé un ejemplo de desigualdad cuadrática cuyo conjunto solución sea el conjunto vacío.

C

En los problemas del 39 al 50, resuelva y grafique. Exprese las respuestas en forma de desigualdad y en notación de intervalos.

39. $x^2 + 1 < 2x$

40. $x^2 + 25 < 10x$

41. $x^2 < 3x - 3$

42. $x^2 + 3 > 2x$

43. $x^2 - 1 \geq 4x$

44. $2x + 2 > x^2$

45. $x^3 > 2x^2 + x$

46. $x^3 \leq 4x^2 + 3x$

47. $4x^4 + 4 \leq 17x^2$

48. $x^4 + 36 \geq 13x^2$

49. $|x^2 - 1| \leq 3$

50. $\left|\dfrac{x + 1}{x}\right| > 2$

APLICACIONES

51. Análisis de pérdidas y ganancias. A un precio de $\$p$ por unidad, el departamento de investigación de mercado en una compañía estima que el costo semanal C y los ingresos R (en millones de dólares) están dados por las ecuaciones

$C = 28 - 2p$ Ecuación de costos

$R = 9p - p^2$ Ecuación de ingresos

Encuentre los precios para los cuales la compañía tiene
(A) Una ganancia (B) Una pérdida

52. Análisis de pérdidas y ganancias. A un precio de $\$p$ por unidad, el departamento de investigación de mercado en una empresa estima que el costo semanal C y los ingresos R (en miles de dólares) están dados por las ecuaciones

$C = 27 - 2p$ Ecuación de costos

$R = 10p - p^2$ Ecuación de ingresos

Encuentre los precios para los cuales la compañía tiene
(A) Una ganancia (B) Una pérdida

53. Física. Si un objeto se dispara hacia arriba con una velocidad inicial de 112 pies sobre segundo, la distancia d (en pies) que asciende después de t segundos (desprecie la resistencia del aire) está dada por $d = 112t - 16t^2$. Encuentre el intervalo de tiempo en el que el objeto está a 160 pies más.

54. Física. En el problema 53, encuentre el intervalo de tiempo para el cual el objeto está en el suelo.

* **55. Investigación de seguridad.** Es de considerable importancia conocer la distancia más corta d (en pies) en la cual un carro se puede detener, incluyendo el tiempo de reacción del conductor, a cierta velocidad v (en millas por hora). La investigación de seguridad ha encontrado la fórmula $d = 0.044v^2 + 1.1v$ en la cual un carro se detiene. ¿A qué velocidad un carro necesitará una distancia de más de 330 pies para detenerse?

* **56. Investigación de seguridad.** Usando la información del problema 55, ¿a qué velocidad deberá ir el carro para poder detenerse en una distancia menor a 220 pies?

** **57. Mercadotecnia.** Cuando se introduce un nuevo software por primera vez y se tiene gran éxito, las ventas semanales por lo general aumentan rápidamente durante un periodo y después empiezan a disminuir. Suponga que las ventas semanales S (en miles de unidades), t semanas después de que se introdujo el software están dadas por

$$S = \frac{200t}{t^2 + 100}$$

¿Cuándo se venderán 8 000 unidades o más por semana?

** **58.** Medicina. Una droga es inyectada en el flujo sanguíneo del brazo derecho de una paciente. La concentración (en miligramos por mililitro) de la droga en el flujo sanguíneo del brazo izquierdo t horas después de la inyección está dada aproximadamente por

$$C = \frac{0.12t}{t^2 + 2}$$

¿Cuándo la concentración de la droga en el brazo izquierdo será de 0.04 miligramos por mililitro o mayor?

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 1 Razones de cambio

1. Razón promedio. Si usted ha obtenido 90 en su primer examen de matemáticas y 100 en el segundo examen, entonces su promedio de calificación de los dos exámenes es $\frac{1}{2}(90 + 100) = 95$. El número 95 se llama **promedio aritmético** de 90 y de 100. Ahora suponga que camina hacia arriba a 3 mph durante 5 horas, después regresa al punto de partida caminando a 6 mph durante 2.5 horas. El promedio aritmético de las razones para cada viaje es de $\frac{1}{2}(3 + 6) = 4.5$ mph. Por otra parte, caminó una distancia total de 30 millas en 7.5 horas, de tal manera que la velocidad para todo el viaje es de $30/7.5 = 4$ mph. ¿Cuál es la *velocidad promedio*? La fórmula básica $D = RT$ es válida en cualquier momento si un objeto viaja una distancia D a una velocidad constante R en un tiempo fijo T. Si la velocidad no es constante, entonces todavía puede usar esta fórmula, pero debe ser interpretada de manera distinta. Para precisar, en el caso de objetos que se mueven a velocidades no constantes, **la velocidad promedio es la distancia total dividida entre el tiempo total.** Así, su velocidad promedio para el viaje completo hacia arriba y hacia abajo es de 4 mph y no de 5.5 mph. La fórmula $R = D/T$ ahora tiene dos interpretaciones: $R = D/T$ es la velocidad de un objeto moviéndose a velocidad constante, y la velocidad promedio de un objeto cuya velocidad no siempre es la misma.

(A) Si r es el promedio para una parte de un viaje redondo y s es el promedio para el viaje de regreso, exprese la velocidad promedio del viaje redondo en términos de r y s.

(B) Un barco viaja a 10 mph en aguas tranquilas. El barco viaja a 60 millas río arriba con una corriente de 5 mph y después regresa hacia el punto de inicio. Encuentre la velocidad promedio para el viaje redondo usando la definición de velocidad promedio y compruebe con la fórmula que encontró en el inciso A.

(C) De acuerdo con el ejemplo de ascenso de montañas analizado anteriormente, si sube la montaña a 3 mph, ¿con qué rapidez debe bajar para que la velocidad promedio del viaje redondo sea de 6 mph? (Esto es similar a un famoso problema comentado a Albert Einstein por Max Wertheimer. Véase a Abraham S. Luchins y Edith H. Luchins, en "The Einstein -Wertheimer Correspondence en Geometric Proofs and Mathematical Puzzles", *Mathematical Intelligencer 2*, primavera de 1990, pp. 40-41. Para un análisis de éste y otros interesantes problemas de rapidez y tiempo, véase Lawrence S. Braden, "My Favorite Rate- Time Problems", en *Mathematics Teacher*, noviembre de 1991, pp. 635-638.)

2. Velocidad instantánea. Uno de los conceptos fundamentales del cálculo es la *velocidad instantánea* de un objeto en movimiento, el cual está relacionado estrechamente con la velocidad promedio antes analizada. Para introducir este concepto, considere el siguiente problema.

Una bola de acero caerá desde una torre una distancia de y pies en x segundos, como está dado aproximadamente por la fórmula (de física)

$$y = 16x^2$$

La figura 1 muestra la posición de la bola en una recta numérica (dirección positiva hacia abajo) después de 0, 1, 2 y 3 segundos. Salta a la vista que la bola no está cayendo a una velocidad constante.

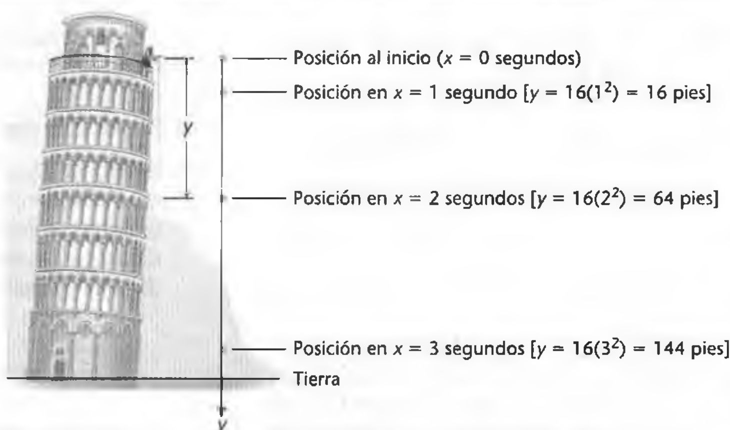


FIGURA 1 Posición de un objeto que cae. [*Nota*: La dirección positiva es hacia abajo.]

(A) ¿Cuál es la velocidad promedio a la que cae una pelota durante el primer segundo (de $x = 0$ a $x = 1$ segundo)? ¿Durante el siguiente segundo? ¿Durante el tercer segundo?

Por definición, la rapidez promedio implica a la distancia a la que viaja un objeto durante un *intervalo* de tiempo, como en el inciso A. ¿Cómo se puede determinar la velocidad de un objeto en un *instante dado* de tiempo? Por ejemplo, qué tan rápido está cayendo la pelota exactamente 2 segundos después de que ha sido lanzada? Este problema se podría tratar en dos maneras, numérica y algebraicamente.

(B) Complete la siguiente tabla de velocidades promedio. ¿Cuáles números de estas velocidades promedio corresponden a este enfoque?

Intervalo de tiempo	[1.9, 2]	[1.99, 2]	[1.999, 2]	[1.9999, 2]
Distancia que cae				
Rapidez promedio				

(C) Demuestre que la velocidad promedio en el intervalo de tiempo $[t, 2]$ es $\frac{64 - 16t^2}{2 - t}$. Simplifique esta expresión algebraica y analice sus valores para t cercano a 2.

(D) Con base en los resultados de los incisos B y C, ¿qué tan rápido piensa que está cayendo la pelota en 2 segundos?

Repaso del capítulo 1

1-1 ECUACIONES LINEALES Y APLICACIONES

Una **solución** o **raíz** de una ecuación es un número en el **dominio** o **conjunto de reemplazo** de la variable que cuando se sustituye para la variable hace que la ecuación sea un enunciado verdadero. Una ecuación es una **identidad** si ésta es cierta para todos los valores del dominio de la variable, y una **ecuación condicional** es verdadera para algunos valores del dominio y falsa para otros. Dos ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo **conjunto solución**. Las **propiedades de igualdad** se usan para resolver las ecuaciones:

1. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$. Propiedad de la suma
2. Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$. Propiedad de la resta
3. Si $a = b$, entonces $ca = cb$, $c \neq 0$ Propiedad de la multiplicación
4. Si $a = b$, entonces $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, $c \neq 0$. Propiedad de la división
5. Si $a = b$, entonces se puede sustituir en cualquiera de los otros enunciados sin cambiar la veracidad o falsedad del enunciado. Propiedad de sustitución

Una ecuación que se puede escribir en la **forma estándar** $ax + b = 0$, $a \neq 0$, es una ecuación **lineal** o de **primer grado**.

Estrategia para la solución de problemas con literales

1. Lea cuidadosamente el problema (varias veces si es necesario); es decir, hasta que lo entienda, conozca qué se está buscando, y qué datos se están dando.
2. Suponga que una de las incógnitas está representada por una variable, x, por ejemplo, y trate de representar a las otras incógnitas en términos de x. Éste es un paso muy importante y se debe realizar cuidadosamente.
3. Si lo considera necesario, dibuje figuras o diagramas y señale las partes conocidas y las incógnitas.
4. Observe qué fórmulas relacionan a las cantidades conocidas con las incógnitas.
5. Forme una ecuación que relacione a las incógnitas con las cantidades conocidas.
6. Resuelva la ecuación y escriba las respuestas de *todas* las preguntas del problema.
7. Compruebe e interprete todas las soluciones en términos del problema original —no exactamente la ecuación que encontró en el paso 5— ya que puede equivocarse en la ecuación del paso 5.

Si Q es la **cantidad** producida o la **distancia** recorrida a un promedio o **rapidez** uniforme R en T unidades de **tiempo,** entonces las **fórmulas** de **cantidad. rapidez y tiempo** son

$$R = \frac{Q}{T} \qquad Q = RT \qquad T = \frac{Q}{R}$$

1-2 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y APLICACIONES

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es un sistema de la forma:

$$\begin{aligned} ax + by &= h \\ cx + dy &= k \end{aligned} \qquad (1)$$

donde x y y son las dos variables. El par ordenado de números (x_0, y_0) es una **solución** al sistema (1) si cada ecuación se satisface por el par. El conjunto de todos los pares ordenados de números se llama **conjunto solución** del sistema. Para **resolver** un sistema; es decir, para encontrar su conjunto solución. Si resuelve el sistema por **sustitución**, resuelva una ecuación para una variable y sustituya en la otra ecuación, resuelva la ecuación lineal resultante en una variable, y después sustituya este valor en la expresión obtenida en el primer paso para encontrar la otra variable.

Si una ecuación en un sistema es una **ecuación de demanda** y la otra es una **ecuación de oferta**, entonces la solución produce el **precio de equilibrio** y la cantidad equilibrio. Si una ecuación en un sistema es una **ecuación de costos** (formada frecuentemente al usar **costos fijos** y **variables de costos**) y la otra es una **ecuación de ingresos**, entonces la solución produce el número de unidades que se deben fabricar en el **punto de equilibrio**.

1-3 DESIGUALDADES LINEALES

Los símbolos de desigualdades $<$, $>$, $\leq$, $\geq$ se usan para expresar **relaciones de desigualdad. Gráficas de rectas y notación de intervalos**, y el conjunto de operaciones de unión e intersección se usa para describir las relaciones de desigualdad. Una **solución** de una desigualdad lineal en una variable es un valor de la variable que hace que la desigualdad sea un enunciado verdadero. Dos desigualdades son **equivalentes** si tienen el mismo **conjunto solución.** Las **propiedades de la desigualdad** se usan para resolver desigualdades:

1. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.	Propiedad de transitividad
2. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.	Propiedad de la suma
3. Si $a < b$, entonces $a - c < b - c$.	Propiedad de la resta
4. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ca < cb$.	Propiedad de la multiplicación
5. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ca > cb$.	Propiedad de la multiplicación
6. Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.	Propiedades de la división
7. Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.	Propiedades de la división

El orden de una desigualdad se invierte si se multiplica o se divide a ambos lados de la desigualdad por un número negativo.

1-4 VALOR ABSOLUTO EN ECUACIONES Y DESIGUALDADES

El **valor absoluto** de un número x es la distancia sobre la recta numérica real desde el origen a un punto cuya coordenada x está dada por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

La **distancia entre los puntos A y B** con coordenadas a y b respectivamente, es $d(A, B) = |b - a|$ la cual tiene las siguientes **interpretaciones geométricas**:

$\|x - c\| = d$	La distancia entre x y c es igual a d.
$\|x - c\| < d$	La distancia entre x y c es menor que d.
$0 < \|x - c\| < d$	La distancia entre x y c es menor que d, pero $x \neq c$
$\|x - c\| > d$	La distancia entre x y c es mayor que d.

Las ecuaciones y desigualdades que implican valores absolutos se resuelven usando las siguientes relaciones para $p > 0$:

1. $|x| = p$ es equivalente a $x = p$ o $x = -p$.
2. $|x| < p$ es equivalente a $-p < x < p$.
3. $|x| > p$ es equivalente a $x < -p$ o $x > p$.

Estas relaciones también valen si x se reemplaza por $ax + b$. Para x cualquier número real, $\sqrt{x^2} = |x|$.

1-5 NÚMEROS COMPLEJOS

Un **número complejo** en **forma estándar** es un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales e i es la **unidad imaginaria**. Si $b \neq 0$, entonces $a + bi$ también es un **número imaginario**. Si $a = 0$, entonces $0 + bi = bi$ también se llama **número imaginario puro**. Si $b = 0$, entonces $a + 0i = a$ es un **número real.** El complejo **cero** es $0 + 0i = 0$. El **conjugado** de $a + bi$ es $a - bi$. **Igualdad. suma** y **multiplicación** se definen como sigue:

1. $a + bi = c + di$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$
2. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
3. $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Debido a que los números complejos obedecen a las mismas propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de los números reales, la mayoría de las operaciones con números complejos se realizan usando de estas propiedades y del hecho que $i^2 = -1$. Las **propiedades de los conjugados**,

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

se pueden usar para encontrar a los **recíprocos** y a los **cocientes**. Si $a > 0$, entonces la **raíz cuadrada principal del número real negativo** $-a$ es $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$.

1-6 ECUACIONES CUADRÁTICAS Y APLICACIONES

Una **ecuación cuadrática** en **forma estándar** es una ecuación que se puede escribir en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

donde x es una variable y a, b y c son constantes. Los métodos de solución incluyen:

1. **Factorización** y uso de la **propiedad cero**:

$$m \cdot n = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad m = 0 \text{ o } n = 0 \text{ (o ambos)}$$

2. Uso de la **propiedad de la raíz cuadrada**:

$$\text{Si } A^2 = C, \text{ entonces } A = \pm\sqrt{C}.$$

3. **Completando el cuadrado**:

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

4. Usando la **fórmula cuadrática**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si el **discriminante** $b^2 - 4ac$ es positivo, la ecuación tiene dos **raíces reales** distintas; si el discriminante es 0, la ecuación tiene una **raíz real doble**; y si el discriminante es negativo, la ecuación tiene dos **raíces imaginarias**, que son cada una la conjugada de la otra.

1-7 ECUACIONES REDUCIBLES A LA FORMA CUADRÁTICA

Un **radical de raíz cuadrada** puede ser eliminado de una ecuación al despejar al radical en uno de los lados de la ecuación y elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación. La nueva ecuación formada al elevar al cuadrado ambos lados puede tener **soluciones extrañas**. En consecuencia, **se debe comprobar cada solución de la nueva ecuación en la ecuación original para eliminar las soluciones extrañas**. Si una ecuación contiene más de un radical, entonces el proceso de despejar al radical y elevar ambos lados de la ecuación al cuadrado se puede repetir hasta que se hayan eliminado los radicales. Si una sustitución transforma a una ecuación en la forma $au^2 + bu + c = 0$, donde u es una expresión de alguna otra variable, entonces la ecuación está escrita en **forma cuadrática**, por lo tanto, puede ser resuelta por los métodos cuadráticos.

1-8 DESIGUALDADES POLINOMIALES Y RACIONALES

Una desigualdad está en la **forma estándar** si el lado derecho es 0. Si el lado izquierdo es un **polinomio**, entonces las **raíces reales** de este polinomio dividen a la recta numérica real en intervalos con la propiedad de que el polinomio tiene signo constante en cada intervalo. Seleccione un **número de prueba** en cada intervalo y construya una **tabla de signos** que dé como resultado la solución de la desigualdad. Si el lado izquierdo de una desigualdad es una **expresión racional** de la forma P/Q, donde P y Q son polinomios, entonces las raíces reales de ambos polinomios se usan para dividir la recta numérica real en intervalos para los cuales P/Q tiene signo constante. Puesto que la **división entre cero no es permitida**, las raíces reales de Q se excluyen del conjunto solución.

Ejercicios de repaso del capítulo 1

Después de resolver todos los problemas de este capítulo revise y compruebe las soluciones al final del libro, en donde están todas las respuestas a los problemas de revisión, y en seguida de cada respuesta está un número en tipo itálico que indica de qué sección es el problema que se está analizando. Si se le presentan dudas, revise la sección correspondiente en el texto.

A

Resuelva los problemas del 1 al 3.

1. $0.05x + 0.25(30 - x) = 3.3$

2. $\frac{5x}{3} - \frac{4+x}{2} = \frac{x-2}{4} + 1$

3. $y = 4x - 9$
$y = -x + 6$

En los problemas del 4 al 8 resuelva y grafique

4. $3(2 - x) - 2 \leq 2x - 1$

5. $|y + 9| < 5$

6. $|3 - 2x| \leq 5$

7. $x^2 + x < 20$

8. $x^2 \geq 4x + 21$

9. Realice las operaciones indicadas y escriba las respuestas en la forma estándar:

(A) $(-3 + 2i) + (6 - 8i)$
(B) $(3 - 3i)(2 + 3i)$
(C) $\frac{13 - i}{5 - 3i}$

Resuelva los problemas del 10 al 16.

10. $2x^2 - 7 = 0$

11. $2x^2 = 4x$

12. $2x^2 = 7x - 3$

13. $m^2 + m + 1 = 0$

14. $y^2 = \frac{3}{2}(y + 1)$

15. $\sqrt{5x - 6} - x = 0$

16. $3x + 2y = 5$
$4x - \ \ y = 14$

17. ¿Para qué valores de x, $\sqrt{3 - 5x}$ representa un número real?

B

Resuelva los problemas del 18 al 20

18. $\frac{7}{2-x} = \frac{10-4x}{x^2+3x-10}$

19. $\frac{u-3}{2u-2} = \frac{1}{6} - \frac{1-u}{3u-3}$

20. $5m + 6n = 2$
$4m - 9n = 20$

En los problemas del 21 al 25 resuelva y grafique.

21. $\frac{x+3}{8} \leq 5 - \frac{2-x}{3}$

22. $|3x - 8| > 2$

23. $\frac{1}{x} < 2$

24. $\frac{3}{x-4} \leq \frac{2}{x-3}$

25. $\sqrt{(1 - 2m)^2} \leq 3$

26. ¿Para qué valores de x la expresión siguiente representa un número real?

$$\sqrt{\frac{x+4}{2-x}}$$

27. Si las coordenadas de A y B en una recta numérica real son -8 y -2, respectivamente, encuentre:

(A) $d(A, B)$ (B) $d(B, A)$

28. Realicc las operaciones indicadas y escriba las respuestas finales en la forma estándar:

(A) $(3 + i)^2 - 2(3 + i) + 3$ (B) i^{27}

29. Convierta a la forma $a + bi$, realizando las operaciones indicadas, y escriba las respuestas finales en la forma estándar:

(A) $(2 - \sqrt{-4}) - (3 - \sqrt{-9})$
(B) $\frac{2 - \sqrt{-1}}{3 + \sqrt{-4}}$ (C) $\frac{4 + \sqrt{-25}}{\sqrt{-4}}$

En los problemas del 30 al 35, encuentre todas las posibles soluciones usando las técnicas que se han desarrollado hasta aquí.

30. $\left(u + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

31. $1 + \frac{3}{u^2} = \frac{2}{u}$

32. $\frac{x}{x^2 - x - 6} - \frac{2}{x-3} = 3$

33. $2x^{2/3} - 5x^{1/3} - 12 = 0$

34. $m^4 + 5m^2 - 36 = 0$

35. $\sqrt{y - 2} - \sqrt{5y + 1} = -3$

Use una calculadora para resolver los problemas del 36 al 40, y calcule con dos cifras decimales.

36. $2.15x - 3.73(x - 0.93) = 6.11x$

37. $-1.52 \leq 0.77 - 2.04x \leq 5.33$

38. $\frac{3.77 - 8.47i}{6.82 - 7.06i}$

39. $6.09x^2 + 4.57x - 8.86 = 0$

40. $15.2x + 5.6y = 20$
$2.5x + 7.5y = 10$

Resuelva los problemas del 41 al 43 para la variable indicada en términos de las otras variables.

41. $P = M - Mdt$ para M (matemáticas para las finanzas)

42. $P = EI - RI^2$ para I (ingeniería eléctrica)

43. $x = \frac{4y + 5}{2y + 1}$ para y

44. Encuentre el error en la "solución" siguiente y después busque la solución correcta.

$$\frac{4}{x^2 - 4x + 3} = \frac{3}{x^2 - 3x + 2}$$

$$4x^2 - 12x + 8 = 3x^2 - 12x + 9$$

$$x^2 = 1$$

$$x = -1 \quad \text{o} \quad x = 1$$

45. Considere la ecuación cuadrática

$$x^2 - 6x + c = 0$$

donde c es un número real. Analice la relación entre los valores de c y los tres tipos de raíces señalados en la tabla 1 de la sección 1-6.

C

46. ¿Para qué valores de a y b es verdadera la desigualdad $a + b < b - a$?

47. ¿Si a y b son números negativos y $a > b$, entonces a/b es mayor o menor que 1?

48. Resuelva para x en términos de y: $y = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1-x}}$

49. Resuelva y grafique: $0 < |x - 6| < d$

Resuelva los problemas 50 y 51.

50. $2x^2 = \sqrt{3x} - \frac{1}{2}$ (Encuentre todas las raíces.)

51. $4 = 8x^{-2} + x^{-4}$ (Encuentre todas las raíces reales.)

52. Evalúe: $(a + bi)\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}\, i\right)$, $a, b \neq 0$

Resuelva los problemas del 53 al 55.

53. $2x > \dfrac{x^2}{5} + 5$

54. $\dfrac{x^2}{4} + 4 \geq 2x$

55. $\left|x - \dfrac{8}{x}\right| \geq 2$

56. Resuelva para u y v en términos de x y y y compruébelos.

$$x = 2 + 3u + 7v$$
$$y = -3 + 2u + 5v$$

57. Analice la naturaleza del conjunto solución para cada uno de los siguientes sistemas:

(A) $2x - y = -5$, $-6x + 3y = 15$ (B) $2x - y = -5$, $-6x + 3y = 10$

APLICACIONES

58. Números. Encuentre un número tal que al restarle su recíproco dé como resultado $\frac{16}{15}$.

59. Medicina deportiva. La siguiente frase se encontró en un manual de medicina del deporte: "La idea es elevar y mantener la velocidad de su corazón al 70% de su velocidad máxima de seguridad para su edad. Una manera de determinarlo es restar su edad de 220 y multiplicar esta cantidad por 0.7."

(A) Si H es la máxima velocidad segura para su corazón (en latidos por minuto) para una persona de edad A (en años), escriba una fórmula que relacione a H con A.
(B) ¿Cuál es la velocidad máxima segura para el corazón de una persona de 20 años?
(C) Si la velocidad máxima segura para el corazón de una persona es de 126 latidos por minuto, ¿qué edad tiene la persona?

*__60. Química.__ Un depósito de productos químicos tiene una solución al 80% de alcohol y otra al 30%. ¿Cuántos mililitros de cada solución se deben usar para obtener 50 mililitros de solución al 60% de alcohol?

*__61. Velocidad y tiempo.__ Una lancha de excursión emplea 2 horas para un viaje de ida y vuelta 40 millas río arriba. Si la velocidad de la lancha en aguas tranquilas es de 12 millas por hora, ¿cuál es la velocidad de la corriente?

*__62. Velocidad y tiempo.__ Un equipo de cuatro tripulantes reman río arriba una distancia fija y después regresan a su punto de partida. El río tiene una corriente de 3 km/h.

(A) Normalmente los remeros pueden remar a 15 km/h en aguas tranquilas. Si les toma 25 minutos hacer el viaje redondo, ¿qué distancia tuvieron que remar río arriba?
(B) Después de una práctica adicional los remeros realizan el viaje redondo en 23 minutos. ¿Ahora a qué velocidad remaron en aguas tranquilas? Redondee su resultado a una cifra decimal.
(C) Si los remeros quieren aumentar su velocidad en aguas tranquilas a 18 km/h, ¿con qué rapidez deben hacer el viaje redondo? Exprese su respuesta en minutos redondeada a una cifra decimal.

63. Nutrición. Un agricultor puede usar dos tipos de fertilizantes en un plantío de naranjas, de marcas A y B. Cada bolsa de marca A contiene 8 libras de nitrógeno y 9 libras de ácido fosfórico. Cada bolsa dė marca B contiene 4 libras de nitrógeno y 7 de ácido fosfórico. Compruebe que el plantío necesita 860 libras de nitrógeno y 1 080 libras de ácido fosfórico. ¿Cuántas bolsas de cada marca se deben usar para obtener las cantidades necesarias de nitrógeno y de ácido fosfórico?

64. Análisis de costos. Las ecuaciones de costo para una fábrica son frecuentemente de naturaleza cuadrática. Si la ecuación de costos para fabricar calculadoras baratas es $C = x^2 - 10x + 31$, donde C es el costo de fabricación de x unidades por semana (C y x en miles), encuentre:

(A) La producción para un costo semanal de $15 mil
(B) La producción para un costo semanal de $6 mil

65. Análisis del punto de equilibrio. La fábrica del problema 64 vende sus calculadoras a mayoristas a $3 cada una. Es decir, su ecuación de ingresos es $R = 3x$, donde R es el

ingreso y x es el número de unidades vendidas por semana (ambas en miles). Encuentre el (o los) punto(s) de equilibrio para la fábrica; es decir, la producción para la cual los ingresos son iguales a los costos.

66. Análisis de ganancias. Con referencia a los problemas 64 y 65, encuentre todos los niveles de producción para los cuales se obtiene una utilidad, esto es, para los cuales $R > C$.

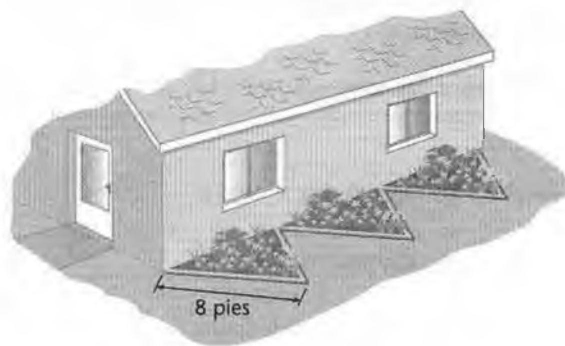
67. Química. Si la temperatura T de una solución debe estar dentro de 5°C a 110°C, exprese la restricción como una desigualdad de valores absolutos.



Figura para el ejercicio 68

68. Diseño. Las páginas de un libro de texto tienen márgenes uniformes de 2 centímetros en los cuatro lados (véase la figura). Si el área de toda la página mide 480 centímetros cuadrados y el área de la parte impresa 320 centímetros cuadrados, encuentre las dimensiones de la página.

69. Diseño. Un diseñador de jardines usa tablones de 8 pies para formar una serie de triángulos isósceles a lo largo de la pared de una casa (véase la figura). Si el área de cada triángulo mide 24 pies cuadrados, encuentre la base correcta con dos cifras decimales.



CAPÍTULO 2

GRÁFICAS Y FUNCIONES

$f(x)=/3x+4/+1$

$f(x)=/3x+$

$y=-x, x>0$

El concepto de función es una de las ideas más importantes en matemáticas. El estudio de las matemáticas, más allá del nivel elemental, requiere se comprenda a profundidad una lista básica de funciones elementales, sus propiedades y sus gráficas. En las dos primeras secciones de este capítulo se consideran algunos conceptos geométricos básicos, que incluyen las gráficas de círculos y de líneas rectas. En las secciones posteriores se introduce el importante concepto de función, se analizan sus propiedades básicas, y se consideran las operaciones que pueden realizarse con funciones. A medida que se avance en éste y los capítulos siguientes, se encontrará una variedad de tipos de funciones elementales. Un minucioso entendimiento de las definiciones, gráficas y propiedades de estas funciones elementales le proporcionarán un conjunto de herramientas matemáticas para usarse en éste y en cursos posteriores o actividades que impliquen matemáticas.

SECCIÓN 2-1 Herramientas básicas: círculos



- Sistema coordenado cartesiano
- Graficación: punto por punto
- Simetría
- Distancia entre dos puntos
- Círculos

En esta sección se desarrollarán algunas de las herramientas básicas usadas en geometría analítica y se aplicarán a la graficación de ecuaciones y a la deducción de la ecuación de un círculo.

• Sistema coordenado cartesiano

De igual manera que una recta numérica real se forma al establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos sobre la recta y los elementos en el conjunto de los números reales, se puede formar un **plano real** al establecer una correspondencia uno a uno entre los puntos en un plano y los elementos en el conjunto de todos los pares ordenados de los números reales. Esto se puede hacer mediante un sistema coordenado cartesiano.

Recuerde que para formar un **sistema coordenado rectangular** o **cartesiano**, se seleccionan dos rectas numéricas reales, una horizontal y una vertical, que se crucen en sus orígenes como se indica en la figura 1. Hacia arriba y a la derecha están las direcciones que usualmente se definen como positivas. Estas dos rectas numéricas se llaman **eje horizontal** y **eje vertical**, o, a ambas, **ejes coordenados**. Es común llamar al eje horizontal **eje** x y al eje vertical **eje** y, y el mismo nombre reciben las rectas correspondientes. En otras circunstancias se pueden usar otros nombres. Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes** que se numeran en sentido contrario al de las manecillas del reloj (véase figura 1).

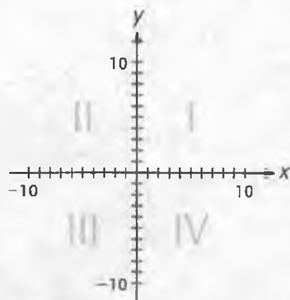


FIGURA 1 Sistema coordenado cartesiano.

Ahora es necesario asignar coordenadas a cada punto del plano. Dado un punto arbitrario P en el plano, se traza una recta horizontal y una recta vertical que pasen por él (figura 2). La recta vertical intersectará al eje horizontal en un punto con coordenada

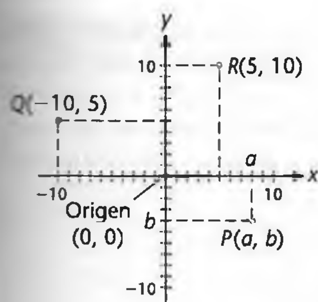


FIGURA 2 Coordenadas en un plano.

a, y la recta horizontal intersectará al eje vertical en un punto con coordenada b. Estos dos números se escriben como el par ordenado* (a, b) que forma a las coordenadas del punto P. A la primera coordenada a se le llama abscisa de P; y a la segunda coordenada, b, se le denomina ordenada de P. La abscisa de Q en la figura 2 es -10, y la ordenada de Q es 5. Las coordenadas de un punto también se pueden nombrar en términos de los nombres de los ejes. La coordenada x de R en la figura 2 es 5, y la coordenada y de R es 10. Al punto con coordenadas (0, 0) se le llama **origen**.

El procedimiento descrito asigna a cada punto P en el plano un par único de números reales (a, b). A la inversa, si se da un par ordenado de números reales (a, b), se invierte este procedimiento y se puede determinar un punto único P en el plano. Así:

Hay una correspondencia uno a uno entre los puntos en un plano y los elementos en el conjunto de todos los pares ordenados de números reales.

Este enunciado con frecuencia se denomina **teorema fundamental de la geometría analítica**.

Graficación punto por punto

El teorema fundamental de la geometría analítica permite que las formas algebraicas se vean de manera geométrica y las formas geométricas de manera algebraica. Se empezará por considerar una forma algebraica, como una ecuación con dos variables:

$$y = x^2 - 4 \tag{1}$$

Una **solución** de la ecuación (1) es un par ordenado de números reales (a, b) tal que

$$b = a^2 - 4$$

El **conjunto solución** de la ecuación (1) es el conjunto de todas sus soluciones. Más formalmente,

$$\text{Conjunto solución de la ecuación (1): } \{(x, y) \mid y = x^2 - 4\}$$

Para encontrar una solución de la ecuación (1) simplemente se reemplaza una de las variables con un número y se resuelve para la otra variable. Por ejemplo, si $x = 2$, entonces $y = 2^2 - 4 = 0$, y el par ordenado (2, 0) es una solución. De manera similar, si $y = 5$, entonces $5 = x^2 - 4$, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$, y los pares ordenados (3, 5) y (−3, 5) son soluciones.

Algunas veces al reemplazar una variable con un número y resolver para la otra variable se introducirán números imaginarios. Por ejemplo, si $y = -5$ en la ecuación (1), entonces

$$-5 = x^2 - 4$$
$$x^2 = -1$$
$$x = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Así, $(-i, 5)$ e $(i, 5)$ son soluciones de $y = x^2 - 4$. Sin embargo, las coordenadas de un punto en un sistema coordenado rectangular deben ser números reales. Por tanto, **cuando se grafica una ecuación, sólo se consideran aquellos valores de las variables que producen soluciones reales de la ecuación.**

* Un **par ordenado** de números reales es un par de números en el que se especifica el orden. Ahora se usarán (a, b) como las coordenadas de un punto en un plano. En el capítulo 1 se usó (a, b) para representar un intervalo en una recta numérica real. Estos conceptos no son los mismos. Se debe siempre interpretar al símbolo (a, b) en términos del contexto en el que se está usando.

La **gráfica de una ecuación con dos variables** es la gráfica de su conjunto solución. En la ecuación (1), se encuentra que su conjunto solución tendría un número infinito de elementos y su gráfica se extendería fuera de cualquier papel, sin importar lo largo que éste pudiera ser. Así, **para trazar la gráfica de una ecuación**, se incluyen suficientes puntos de su conjunto solución para que se represente su gráfica completa. A este proceso se le llama **graficación punto por punto**.

EJEMPLO 1 **Gráfica de una ecuación mediante graficación punto por punto**

Trace la gráfica de $y = x^2 - 4$.

Solución Se forma una tabla de soluciones con los pares ordenados de números reales que satisfagan la ecuación dada.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	12	5	0	−3	−4	−3	0	5	12

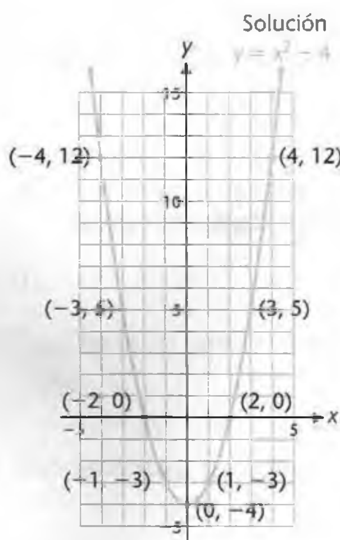


FIGURA 3

Después de graficar estas soluciones, si algunas partes de la gráfica no están claras, se trazan más puntos hasta completar la forma de la gráfica. Después se unen todos estos puntos con una curva suave, como se muestra en la figura 3. Las puntas de flecha se usan para indicar que la gráfica continúa más allá de la parte mostrada en la figura sin cambios significativos en la forma.

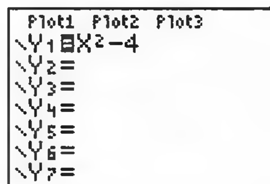
La figura resultante se llama *parábola*. Observe que si se dobla una hoja de papel a lo largo del eje y, el lado derecho se acopla con el lado izquierdo. Se dice que la gráfica es *simétrica con respecto al* eje y y al eje y se le llama *eje de la parábola*. Más adelante se abundará en el tema de las parábolas.

Problema seleccionado 1 Trace la gráfica de $y^2 = x$.

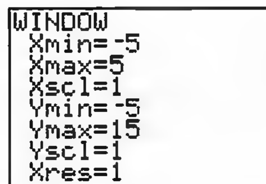


Ahora se usará un dispositivo de graficación electrónico para comprobar el ejemplo 1. Para este fin se recurrirá a cualquier dispositivo electrónico capaz de desplegar gráficas como un **dispositivo de graficación**. Los dos dispositivos de graficación más comunes son las calculadoras gráficas y las computadoras con el software apropiado. Este libro contiene diversas actividades en las que se usan dispositivos de graficación para enfatizar la relación entre los puntos de vista gráfico, numérico y algebraico. Todas estas actividades están claramente señaladas y se pueden omitir si no se cuenta con el dispositivo necesario. La figura 4 muestra los pasos necesarios para reproducir la gráfica de la figura 3 en un dispositivo de graficación.

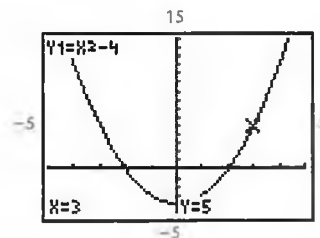
FIGURA 4



Introduzca la ecuación
(a)



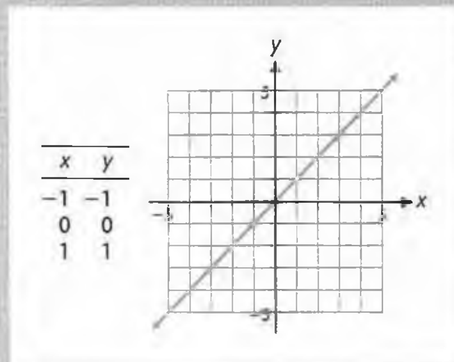
Introduzca las variables de la ventana
(b)



Grafique la ecuación
(c)

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Para graficar la ecuación, $y = -x^3 + 2x$, se usará la graficación punto por punto para obtener la gráfica de la figura 5.

FIGURA 5



x	y
−1	−1
0	0
1	1

(A) ¿Piensa que ésta es la gráfica correcta de la ecuación? Justifique su respuesta.

(B) Agregue puntos en la gráfica para $x = -2, -0.5, 0.5$ y 2.

(C) Ahora, ¿qué piensa de cómo se ve la gráfica? Trace su versión de la gráfica. agregue más puntos si es necesario.

(D) Escriba un enunciado corto que explique las conclusiones que obtuvo de las partes A, B y C.

(E) Compare su versión de la gráfica con una producida por un dispositivo de graficación.

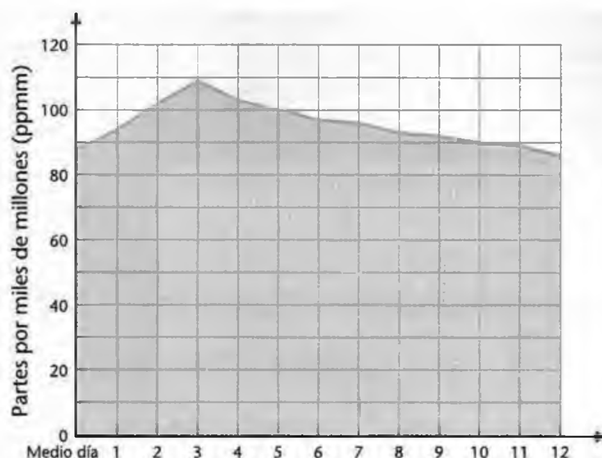
El uso de gráficas para ilustrar relaciones entre cantidades es muy común. La estimación de las coordenadas de los puntos en una gráfica proporciona ejemplos específicos de esta relación, incluso si no se dispone de la ecuación para la gráfica. El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

EJEMPLO 2 **Niveles de ozono**

El nivel de ozono se mide en partes por mil millones (ppmm). El nivel de ozono durante un periodo de 12 horas en un suburbio de Milwaukee, Wisconsin, en un día de verano en particular, está dado en la figura 6 (*fuente:* Departamento de recursos naturales de Wisconsin). Use esta gráfica para calcular los siguientes niveles de ozono al entero más cercano y los tiempos al cuarto de hora más cercano.

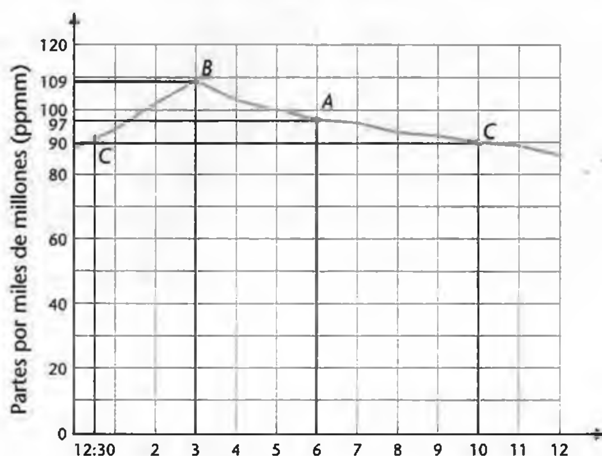
(A) El nivel de ozono a las 6 P.M.
(B) El nivel de ozono más alto y el tiempo al que esto ocurre.
(C) La(s) hora(s) en que el nivel de ozono es de 90 ppmm.

FIGURA 6 Nivel de ozono



Solución (A) La ordenada del punto de la gráfica con abscisa 6 es de 97 ppmm (véase figura 7).
(B) El nivel de ozono más alto es de 109 ppmm a las 3 P.M.
(C) El nivel de ozono es 90 ppmm a las 12:30 P.M. y nuevamente a las 10 P.M.

FIGURA 7



Problema seleccionado 2 Use la figura 6 para calcular los siguientes niveles de ozono cercanos al entero más próximo y los tiempos al cuarto de hora más cercano.

(A) El nivel de ozono a las 7 P.M.
(B) La(s) hora(s) cuando el nivel de ozono es de 100 ppmm.

Un aspecto importante de este curso, y después en el de cálculo, es el desarrollo de las herramientas que se podrán usar para el análisis de gráficas, ya sea mediante graficación punto por punto o con un dispositivo de graficación. Una herramienta particularmente útil es la *simetría*, la cual se analizará en seguida.

• Simetría

Se ha observado que la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el ejemplo 1 es *simétrica con respecto al eje y*; es decir, las dos partes de la gráfica coinciden si se dobla el papel a lo largo del

eje y. De manera similar, se dice que una gráfica es *simétrica con respecto al eje* x si las partes de arriba y de abajo del eje x coinciden cuando se dobla el papel a lo largo del eje x. En general, la definición de simetría con respecto al eje y, al eje x y al origen se expresa como sigue:

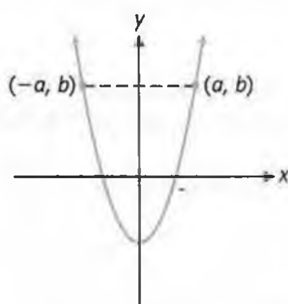
DEFINICIÓN 1 **Simetría**

Una gráfica es **simétrica con respecto a**:

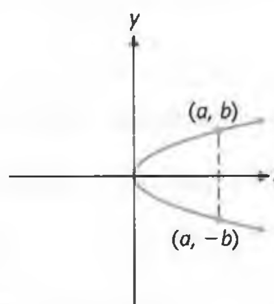
1. **Al eje y** si $(-a, b)$ y (a, b) están en la gráfica y si los dos puntos son equidistantes del eje y.
2. **Al eje x** si $(a, -b)$ y (a, b) están en la gráfica y si los dos puntos son equidistantes del eje x.
3. **El origen** si $(-a, -b)$ y (a, b) están en la gráfica y si los dos puntos son equidistantes del origen en una recta que pase a través del mismo.

La figura 8 ilustra estos tres tipos de simetría.

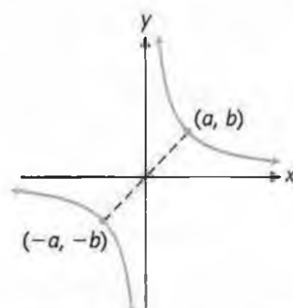
FIGURA 8 Simetría.



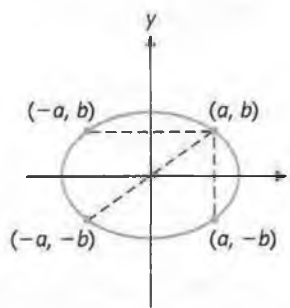
Simetría con respecto al eje y
(a)



Simetría con respecto al eje x
(b)



Simetría con respecto al origen
(c)



Simetría con respecto al eje y, al eje x y al origen
(d)

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Si una gráfica es simétrica en dos de las tres formas antes definidas, ¿debe ser simétrica también en la tercera forma? Explique.

Dada una ecuación, si se pueden determinar previamente las propiedades de simetría de su gráfica, se puede ahorrar mucho tiempo y energía al momento de trazarla. Por ejemplo, si se sabe que la gráfica de $y = x^2 - 4$ en el ejemplo 1 es simétrica con respecto al eje y, se puede dibujar con cuidado sólo el lado derecho de la gráfica; y después reflejar el resultado con respecto al eje y para obtener la gráfica completa; ¡la graficación punto por punto se reduce a la mitad!

Las pruebas para la simetría están dadas en el teorema 1. Estas pruebas se aplican fácilmente y son muy útiles para la graficación. Recuerde que dos ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Teorema 1 **Pruebas de simetría**

Simetría con respecto al	La ecuación es equivalente cuando
Eje y	x se reemplaza por $-x$
Eje x	y se reemplaza por $-y$
Origen	x y y se reemplaza por $-x$ y $-y$

EJEMPLO 3 Uso de las simetrías como ayuda para la graficación

Realice las pruebas de simetría y trace la gráfica:

(A) $y = x^3$ (B) $y = |x|$ (C) $x^2 + y^2 = 36$

Solución (A) **Pruebas de simetría para $y = x^3$.**

Pruebas con respecto al eje y
Reemplace x por $-x$:

$$y = (-x)^3$$
$$y = -x^3$$

Pruebas con respecto al eje y
Reemplace y por $-y$:

$$-y = x^3$$
$$y = -x^3$$

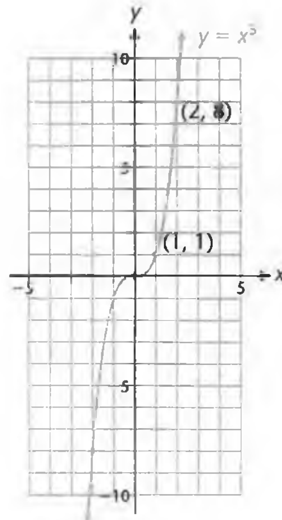
Pruebas con respecto al origen
Reemplace x por $-x$ y y por $-y$:

$$-y = (-x)^3$$
$$-y = -x^3$$
$$y = x^3$$

La única prueba que produce una ecuación equivalente es cuando se reemplaza a x por $-x$ y a y por $-y$. Así, la única propiedad de simetría para la gráfica de $y = x^3$ es la simetría con respecto al origen.

Gráfica. Observe que los valores positivos de x producen valores positivos para y y los valores negativos de x producen valores negativos para y. Por tanto, la gráfica está en el primer y en el tercer cuadrantes. Ahora se hará un cuidadoso trazo en el primer cuadrante; después se reflejarán estos puntos a través del origen para obtener la gráfica completa mostrada en la figura 9.

FIGURA 9



A primera vista, la gráfica muestra cómo varía y conforme varía x. Una gráfica es una ayuda visual y se deberá construir para obtener la máxima cantidad de información usando el mínimo esfuerzo por parte del observador. Se marcan los ejes coordenados y se indican las escalas en ambos ejes.

x	0	1	2
y	0	1	8

(B) **Pruebas de simetría para $y = |x|$.**

Pruebas con respecto al eje y
Reemplace x por $-x$:

$$y = |-x|$$
$$y = |x|$$

Pruebas con respecto al eje x
Reemplace y por $-y$:

$$-y = |x|$$
$$y = -|x|$$

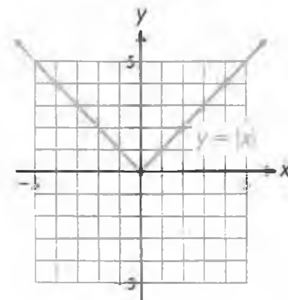
Pruebas con respecto al origen
Reemplace x por $-x$ y y por $-y$:

$$-y = |-x|$$
$$-y = |x|$$
$$y = -|x|$$

Así, la única propiedad de simetría para la gráfica de $y = |x|$, es la simetría con respecto al eje y.

Gráfica. Como $|x|$ nunca es negativa, esta gráfica estará en el primer y en el segundo cuadrantes. Se traza con cuidado en el primer cuadrante; y después se refleja esta gráfica a lo largo del eje y para obtener la gráfica completa mostrada en la figura 10.

FIGURA 10



x	0	2	4
y	0	2	4

(C) Puesto que tanto x como y existen sólo para potencias pares como $x^2 + 4y^2 = 36$, la ecuación será equivalente si x se reemplaza por $-x$ o si y se reemplaza por $-y$. En consecuencia, la gráfica es simétrica con respecto al eje y, al eje x y al origen. Se necesita hacer un cuidadoso trazo sólo en el primer cuadrante, reflejar esta gráfica a lo largo del eje y y después reflejar todo esto a lo largo del eje x. Para encontrar soluciones en el primer cuadrante, se resuelve la ecuación, ya sea en términos de y, en términos de x o x en términos de y. Se elige esta última porque es la más fácil de trabajar.

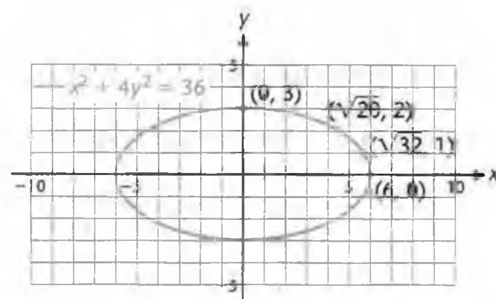
$$x^2 + 4y^2 = 36$$
$$x^2 = 36 - 4y^2$$
$$x = \pm\sqrt{36 - 4y^2}$$

Para obtener la parte de la gráfica en el primer cuadrante, se traza $x = \sqrt{36 - 4y^2}$ para $0 \le y \le 3$. Se observa que $36 - 4y^2 < 0$ para $y > 3$ y que no hay soluciones reales para $y > 3$. La gráfica final se muestra en la figura 11.

x	6	$\sqrt{32} \approx 5.7$	$\sqrt{20} \approx 4.5$	0
y	0	1	2	3

Elija valores para y y resuelva para x.

FIGURA 11

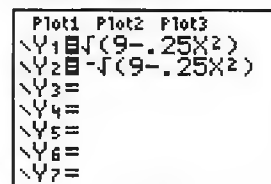


Esta figura se llama *elipse*.

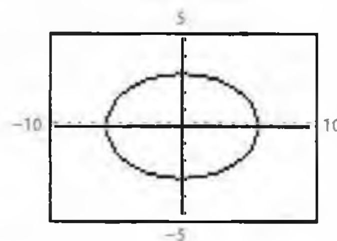


Las partes A y B del ejemplo 3 se comprueban fácilmente con un dispositivo de graficación, usted podría hacerlo si tiene uno de estos dispositivos. Comprobar la parte C es más complicado. Debido a que la mayoría de los dispositivos de graficación sólo grafican ecuaciones de la forma $y =$ (expresión de x), se debe resolver la ecuación para $x^2 + 4y^2 = 36$ para y (se omiten los detalles) y se grafican ambas soluciones como se muestra en la figura 12.

FIGURA 12



(a)



(b)

Problema seleccionado 3

Realice las pruebas de las simetrías y grafique:

(A) $y = x$ (B) $y = -|x|$ (C) $9x^2 + y^2 = 36$

• Distancia entre dos puntos

La geometría analítica se relaciona con dos problemas básicos:

1. Dada una ecuación, encuentre su gráfica.

2. Dada una figura (recta, círculo, parábola, elipse, etcétera) en un sistema coordenado, encuentre su ecuación.

Hasta ahora nuestra atención se ha enfocado en el primer problema. Se ha introducido una herramienta básica que se usa extensamente en la solución del segundo problema. Esta herramienta básica es la *fórmula de la distancia entre dos puntos*, la cual se deduce con facilidad usando el teorema de Pitágoras (véase nota de pie de página, sección 2-6). Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en un sistema coordenado rectangular (suponga que la escala en cada uno de los ejes es la misma). Entonces, refiriéndose a la figura 13, se puede ver que

$$[d(P_1, P_2)]^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{Puesto que } |N|^2 = N^2.$$

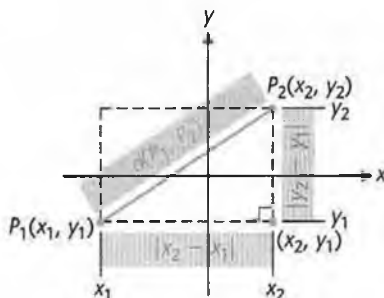


FIGURA 13 Distancia entre dos puntos.

Así:

Teorema 2 **Distancia entre $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$**

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

EJEMPLO 4 **Uso de la fórmula de la distancia entre dos puntos**

Encuentre la distancia entre los puntos $(-3, 5)$ y $(-2, -8)$.*

Solución No importa cuál punto se designe como P_1 o P_2 debido a los cuadrados en la fórmula. Sea $(x_1, y_1) = (-3, 5)$ y $(x_2, y_2) = (-2, -8)$. Entonces

$$d = \sqrt{[(-2) - (-3)]^2 + [(-8) - 5]^2}$$
$$= \sqrt{(-2 + 3)^2 + (-8 - 5)^2} = \sqrt{1^2 + (-13)^2} = \sqrt{1 + 169} = \sqrt{170}$$

Problema seleccionado 4 Encuentre la distancia entre los puntos $(6, -3)$ y $(-7, -5)$.

* Frecuentemente se habla del punto (a, b) cuando se hace referencia al punto con coordenadas (a, b). Esta forma breve, aunque no exacta, causa pocos problemas, así que se seguirá usando.

Círculos La fórmula de la distancia entre dos puntos es de gran ayuda si sólo se usa para encontrar la distancia real entre los puntos, tal como se mostró en el ejemplo 4. Sin embargo, es más pertinente usarla para encontrar las ecuaciones de figuras en un sistema coordenado rectangular. Se usará para deducir la ecuación estándar de un círculo. Para empezar se definirán las coordenadas libres de un círculo.

DEFINICIÓN 2 **Círculo**

Un **círculo** es el conjunto de todos los puntos en un plano equidistante de un punto fijo. La distancia fija se conoce como **radio**, y al punto fijo se le llama **centro**.

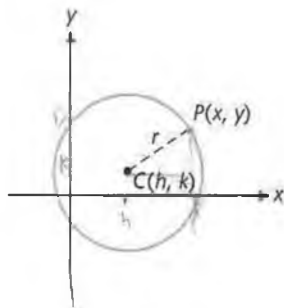


FIGURA 14 Círculo.

Se encontrará la ecuación de un círculo de radio r ($r > 0$) y centro C en (h, k) en un sistema coordenado rectangular (véase figura 14). El punto $P(x, y)$ está en el círculo si y sólo si $d(P, C) = r$; es decir, si y sólo si

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \qquad r > 0$$

o, de manera equivalente,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad r > 0$$

Teorema 3 **Ecuación estándar de un círculo**

1. Círculo con radio r y centro en (h, k):

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad r > 0$$

2. Círculo con radio r y centro en $(0, 0)$:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad r > 0$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3 Describa geométricamente el conjunto de todos los puntos (x, y) que son equidistantes de los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, y después use la fórmula de la distancia para verificar sus resultados en forma algebraica.

EJEMPLO 5 **Ecuaciones y gráficas de círculos**

Encuentre la ecuación de un círculo con radio 4 y centro en

(A) $(-3, 6)$ (B) $(0, 0)$

Trace la gráfica de cada ecuación.

Solución (A) $(h, k) = (-3, 6)$ y $r = 4$:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$[x - (-3)]^2 + (y - 6)^2 = 4^2$$
$$(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 16$$

Para graficar la ecuación, localice el centro $C(-3,6)$ y dibuje un círculo de radio 4 (véase figura 15).

(B) $(h, k) = (0, 0)$ y $r = 4$:

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = 4^2$$
$$x^2 + y^2 = 16$$

Para graficar la ecuación, localice el centro en el origen y dibuje un círculo de radio 4 (véase figura 16)

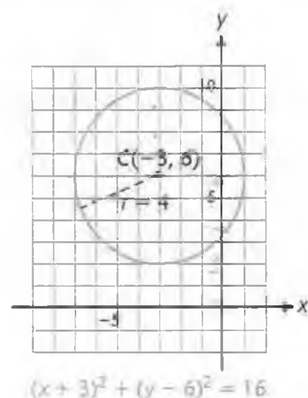


FIGURA 15

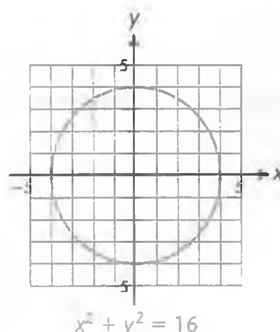


FIGURA 16

Problema seleccionado 5 Encuentre la ecuación de un círculo con radio 3 y centro en:

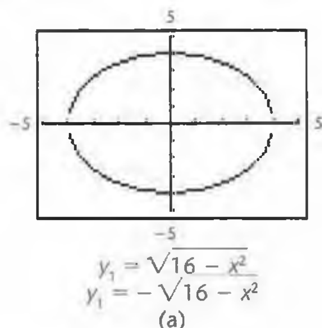
(A) $(3, -2)$ (B) $(0, 0)$

Grafique cada ecuación.

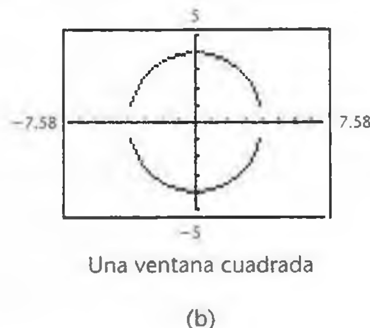


Para graficar el círculo de la figura 15 en un dispositivo de graficación, se deben graficar dos ecuaciones: $y_1 = \sqrt{16 - x^2}$ y $y_2 = -\sqrt{16 - x^2}$ [véase figura 17 (a)]. Observe que la gráfica no parece ser circular, porque las unidades en el eje x son físicamente más grandes que las unidades en el eje y en la ventana rectangular de visión. Para rectificar esto, se debe elegir a las variables de la ventana de tal manera que una unidad de longitud en el eje x sea igual a una unidad de longitud en el eje y. La ventana resultante se llama **cuadrado de visión**, y despliega círculos que parecen circulares [véase figura 17 (b)]. La mayoría de los dispositivos gráficos tienen una rutina, que por lo general se denota por el acercamiento cuadrado o algo similar, para ajustar automáticamente las variables y producir una ventana cuadrada. Consulte su manual para los detalles.

FIGURA 17



$y_1 = \sqrt{16 - x^2}$
$y_1 = -\sqrt{16 - x^2}$
(a)



Una ventana cuadrada
(b)

Observe también que las gráficas de la figura 17 tienen espacios cerca de $x = -4$ y $x = 4$ debido a la discrepancia entre las coordenadas reales de un punto y las coordenadas de la pantalla del pixel que contiene al punto. (Intente trazar sólo la gráfica de: $y_1 = \sqrt{16 - x^2}$ y observe qué ocurre cuando x está cercana a -4 o 4.) Es importante recordar que los dispositivos gráficos tienen dispositivos de baja resolución que producen sólo burdas aproximaciones de las gráficas. Es por esto que se debe visualizar la apariencia correcta de una gráfica y llenar cualquier espacio faltante.

EJEMPLO 6 **Determinación del centro y radio de un círculo**

Encuentre el centro y el radio de un círculo con ecuación $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$.

Solución Se transforma la ecuación en una de la forma $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ al completar el cuadrado respecto de x y con respecto de y (véase sección 1-6). A partir de esta forma estándar se puede determinar el centro y el radio.

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$$
$$(x^2 + 6x \quad) + (y^2 - 4y \quad) = 23$$
$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 23 + 9 + 4 \qquad \text{Complete los cuadrados.}$$
$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36$$
$$[x - (-3)]^2 + (y - 2)^2 = 6^2$$

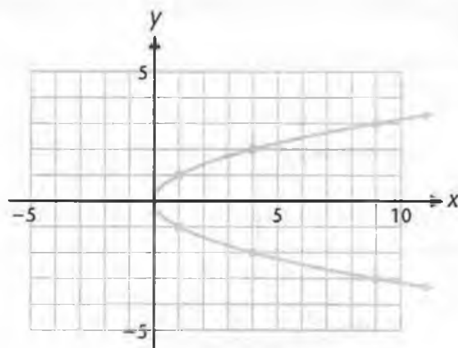
Centro: $C(h, k) = C(-3, 2)$

Radio: $r = \sqrt{36} = 6$

Problema seleccionado 6 Encuentre el centro y el radio del círculo con ecuación $x^2 + y^2 - 8x + 10y = -25$.

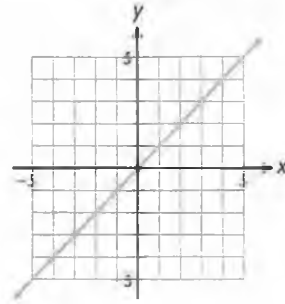
Respuestas a los problemas seleccionados

1.

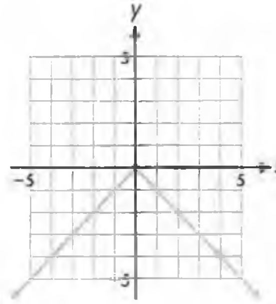


2. (A) 96 ppmm (B) 1:45 P.M. y 5 P.M.

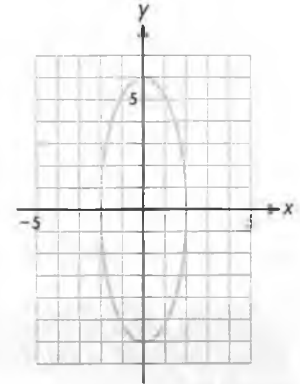
3. (A) Simétrica con respecto al origen



(B) Simétrica con respecto al eje y

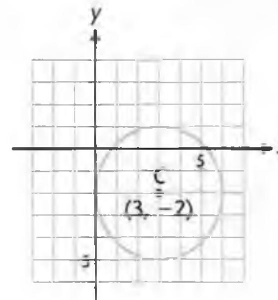


(B) Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen

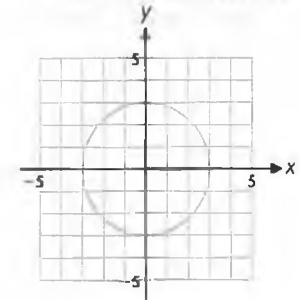


4. $d = \sqrt{173}$

5. (A) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$



(B) $x^2 + y^2 = 9$



6. $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 16$; radio: 4, centro: $(4, -5)$

EJERCICIO 2-1

A

En los problemas del 1 al 8, determine la simetría con respecto al eje x, al eje y o al origen, si existe alguna, y grafique.

1. $y = 2x - 4$
2. $y = \frac{1}{2}x + 1$
3. $y = \frac{1}{2}x$
4. $y = 2x$
5. $|y| = x$
6. $|y| = -x$
7. $|x| = |y|$
8. $y = -x$

Encuentre la distancia entre los puntos indicados en los problemas del 9 al 12. Exprese la respuesta en forma de radicales.

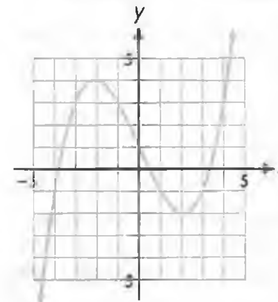
9. $(-6, -4), (3, 4)$
10. $(-5, 4), (6, -1)$
11. $(6, 6), (4, -2)$
12. $(5, -3), (-1, 4)$

En los problemas del 13 al 20, escriba la ecuación de un círculo con el radio y el centro indicados.

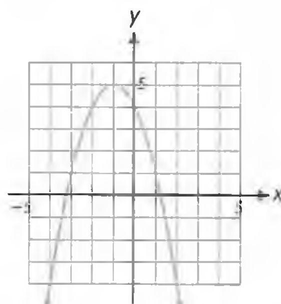
13. $C(0, 0), r = 7$
14. $C(0, 0), r = 5$
15. $C(2, 3), r = 6$
16. $C(5, 6), r = 2$
17. $C(-4, 1), r = \sqrt{7}$
18. $C(-5, 6), r = \sqrt{11}$

En los problemas del 19 al 20, use la gráfica para calcular el entero más cercano a las coordenadas faltantes de los puntos indicados. (Asegúrese de encontrar todas las respuestas posibles.)

19. (A) $(-3, ?)$ (B) $(2, ?)$
(C) $(?, 3)$ (D) $(?, -1)$

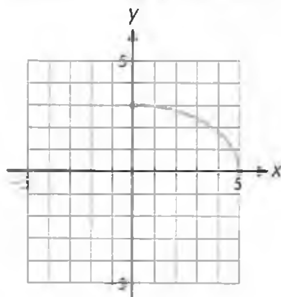


20. (A) $(-4, ?)$ (B) $(-1, ?)$
(C) $(?, 1)$ (D) $(?, 4)$

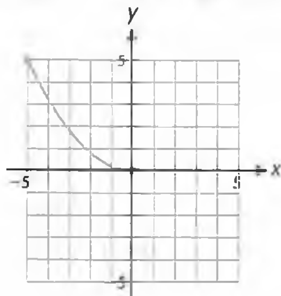


Las figuras en los problemas 21 y 22 muestran una parte de la gráfica. Extienda la gráfica dada a una que exhiba el tipo indicado de simetría.

21. (A) Sólo el eje x (B) Sólo el eje x
(C) Sólo el origen (D) Eje x y y



22. (A) Sólo el eje x (B) Sólo el eje x
(C) Sólo el origen (D) Eje x y y



B

En los problemas del 23 al 38, determine la simetría con respecto al eje x, eje y o al origen, si existe alguna, y grafíquelas.

**Compruebe sus gráficas de los problemas del 23 al 38 graficándolas con un dispositivo de graficación.*

23. $y^2 = x + 2$ **24.** $y^2 = x - 2$ **25.** $y = x^2 + 1$

26. $y + 2 = x^2$ **27.** $x^2 + 4y^2 = 4$ **28.** $x^2 + 9y^2 = 9$

29. $4y^2 - x^2 = 1$ **30.** $4x^2 - y^2 = 1$ **31.** $y^3 = x$

32. $y = x^4$ **33.** $y = 0.6x^2 - 4.5$

34. $x = 0.8y^2 - 3.5$ **35.** $y = \sqrt{17 - x^2}$

36. $y = \sqrt{100 - 4x^2}$ **37.** $y = x^{2/3}$

38. $y^{2/3} = x$

En los problemas 39 y 40, determine si los puntos dados son vértices de un triángulo rectángulo. (Recuerde, un triángulo es un triángulo rectángulo si y sólo si el cuadrado del lado más largo es igual a la suma de los cuadrados de los lados más cortos.)

39. $(-3, 2), (1, -2), (8, 5)$

40. $(-4, -1), (0, 7), (6, -6)$

Encuentre el perímetro (con dos cifras decimales) del triángulo con los vértices indicados en los problemas 41 y 42.

41. $(-3, 1), (1, -2), (4, 3)$

42. $(-2, 4), (3, 1), (-3, -2)$

43. Encuentre x tal que $(x, 8)$ esté a 13 unidades de $(2, -4)$.

44. Encuentre y tal que $(-2, y)$ esté a 5 unidades de $(-6, 6)$.

En los problemas del 45 al 50, encuentre el centro y el radio del círculo con la ecuación dada. Grafique la ecuación.

45. $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 7$

46. $(x - 5)^2 + (y + 7)^2 = 15$

47. $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 36$

48. $x^2 + y^2 - 2x - 10y = 55$

49. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 8 = 0$

50. $x^2 + y^2 + 4x + 10y + 15 = 0$

51. (A) Grafique el triángulo con vértices $A(1, 1)$, $B(7, 2)$ y $C(4, 6)$.
(B) Ahora grafique el triángulo con vértices $A'(1, -1)$, $B'(7, -2)$ y $C'(4, -6)$ en el mismo sistema coordenado.
(C) ¿Cómo se relacionan estos dos triángulos? ¿Cómo describiría el efecto del cambio de signo de la coordenada y de todos los puntos sobre la gráfica?

52. (A) Grafique el triángulo con vértices $A(1, 1)$, $B(7, 2)$ y $C(4, 6)$.
(B) Ahora grafique el triángulo con vértices $A'(-1, 1)$, $B'(-7, 2)$ y $C'(-4, 6)$ en el mismo sistema coordenado.
(C) ¿Cómo se relacionan estos dos triángulos? ¿Cómo describiría el efecto del cambio de signo de la coordenada x de todos los puntos sobre la gráfica?

53. (A) Grafique el triángulo con vértices $A(1, 1)$, $B(7, 2)$ y $C(4, 6)$.
(B) Ahora grafique el triángulo con vértices $A'(-1, -1)$, $B'(-7, -2)$ y $C'(-4, -6)$ en el mismo sistema coordenado.
(C) ¿Cómo se relacionan estos dos triángulos? ¿Cómo describiría el efecto del cambio de signo de las coordenadas x y y de todos los puntos sobre la gráfica?

* Por favor observe que el uso de un dispositivo de graficación no es requerido para realizar estos ejercicios. La comprobación con un dispositivo de graficación es opcional. Si usted no tiene uno, puede trabajar con los ejercicios.

54. (A) Grafique el triángulo con vértices $A(1, 2)$, $B(1, 4)$ y $C(3, 4)$.
(B) Ahora grafique $y = x$ en el triángulo obtenido al invertir las coordenadas para cada vértice del triángulo original: $A'(2, 1)$, $B'(4, 1)$ y $C'(4, 3)$.
(C) ¿Cómo se relacionan estos dos triángulos? ¿Cómo describiría el efecto de invertir las coordenadas de cada punto en una gráfica?

En los problemas del 55 al 58, despeje y, produciendo dos ecuaciones, y después grafique ambas ecuaciones en la misma ventana de visión.

55. $x^2 + y^2 = 3$ **56.** $x^2 + y^2 = 5$

57. $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$ **58.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3$

En los problemas del 59 al 62, grafique cada par de ecuaciones en la misma ventana de visión para señalar los valores indicados de x. Encuentre el centro y el radio del círculo resultante examinando la gráfica y encuentre la ecuación del círculo. Explique cómo podría comprobar su trabajo y realice la prueba.

59. $y = \sqrt{2x - x^2}, y = -\sqrt{2x - x^2}, 0 \le x \le 2$

60. $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}, y = 1 - \sqrt{1 - x^2}, -1 \le x \le 1$

61. $y = 1 + \sqrt{5 + 4x - x^2}, y = 1 - \sqrt{5 + 4x - x^2}, -1 \le x \le 5$

62. $y = -1 + \sqrt{4x - x^2}, y = -1 - \sqrt{4x - x^2}, 0 \le x \le 4$

C

En los problemas del 63 al 68, determine la simetría con respecto al eje x, al eje y o con respecto al origen, si existe alguna, y grafíquela.

Compruebe sus gráficas de los problemas del 63 al 68 graficándolas con un dispositivo de graficación.

63. $y^3 = |x|$ **64.** $|y| = x^3$ **65.** $xy = 1$

66. $xy = -1$ **67.** $y = 6x - x^2$ **68.** $y = x^2 - 6x$

69. Encuentre la ecuación de la bisectriz perpendicular del segmento de recta que une a los puntos $(-6, -2)$ y $(4, 4)$ mediante la fórmula de la distancia entre dos puntos.

70. Use la fórmula de la distancia entre dos puntos para mostrar que el punto

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

es el **punto medio** de segmento de recta que une a los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

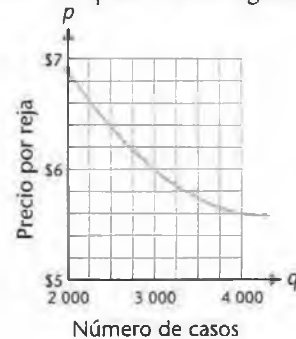
Encuentre la ecuación de un círculo que tenga un diámetro cuyos puntos extremos estén dados en los problemas 71 y 72. [Sugerencia: Véase el problema 70.]

71. $(7, -3), (1, 7)$ **72.** $(-3, 2), (7, -4)$

APLICACIONES

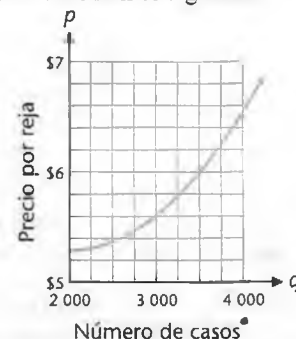
73. Precio y demanda. La cantidad de un producto que los consumidores están deseando comprar durante algún periodo depende de su precio. El precio p y la correspondiente demanda semanal q para una marca particular de refresco de dieta en una ciudad se muestran en la figura. Use esta gráfica para aproximar las siguientes demandas a las 100 rejas más cercanas.

(A) ¿Cuál es la demanda cuando el precio es de \$6.00 por reja?
(B) ¿La demanda aumenta o disminuye si el precio aumenta de \$6.00 a \$6.30 por reja? ¿En qué cantidad?
(C) ¿La demanda aumenta o disminuye si el precio disminuye de \$6.00 a \$5.70? ¿En qué cantidad?
(D) Describa de manera breve la relación entre el precio y la demanda que ilustra esta gráfica.



74. Precio y demanda. La cantidad de un producto que los proveedores están vendiendo voluntariamente durante algún periodo depende de su precio. El precio p y la correspondiente demanda semanal q para una marca en particular de refresco de dieta en una ciudad se muestra en la figura. Use esta gráfica para aproximar las siguientes demandas a las 100 rejas más cercanas.

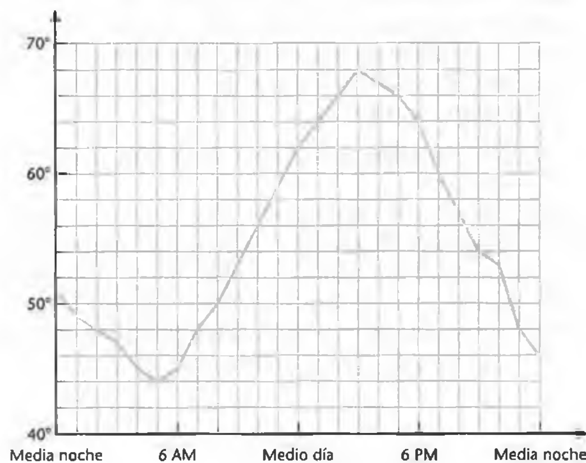
(A) ¿Cuál es la oferta cuando el precio es de \$5.60 por reja?
(B) ¿La oferta aumenta o disminuye si el precio aumenta de \$5.60 a \$5.80 por reja? ¿Qué tanto?
(C) ¿La oferta aumenta o disminuye si el precio disminuye de \$5.60 a \$5.40 por reja? ¿En qué cantidad?
(D) Describa en forma breve la relación entre precio y oferta ilustrado en esta gráfica.



75. Temperatura. La temperatura durante un día de primavera en el medio oeste se da en la figura. Use esta gráfica para

aproximar las siguientes temperaturas al grado más cercano y los tiempos a la hora más cercana.

(A) La temperatura a las 9:00 A.M.
(B) La temperatura más alta y la hora a la que esto ocurre.
(C) Los tiempos en que la temperatura es de 49°F.



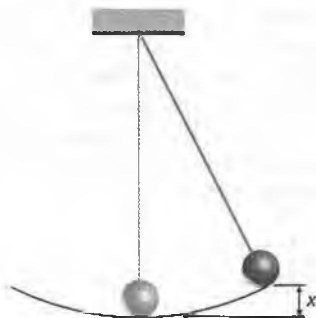
76. Temperatura. Use la gráfica del problema 75 para aproximar las siguientes temperaturas al grado más cercano y los tiempos al cuarto de hora más cercano.

(A) La temperatura a las 7:00 P.M.
(B) La temperatura más baja y la hora a la que esto ocurre.
(C) Los tiempos en los que la temperatura es de 52°F.

77. Física. La velocidad (en metros por segundo) de una pelota oscilando en el extremo de un péndulo está dada por

$$v = 0.5\sqrt{2 - x}$$

donde x es el desplazamiento vertical (en centímetros) de la pelota desde su posición de reposo (véase la figura).

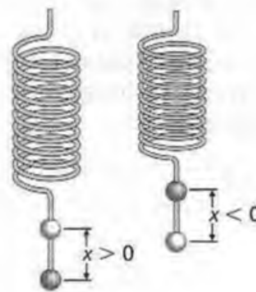


(A) Grafique v para $0 \leq x \leq 2$.
(B) Describa la relación entre esta gráfica y el comportamiento físico de la pelota cuando está oscilando.

78. Física. La velocidad (en metros por segundo) de una pelota oscilando en el extremo de un resorte está dada por

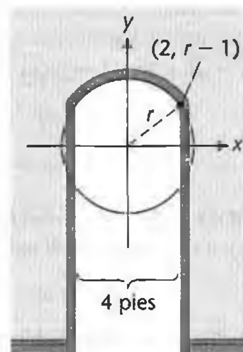
$$v = 4\sqrt{25 - x^2}$$

donde x es el desplazamiento vertical (en centímetros) desde su posición de reposo (los desplazamientos positivos se miden hacia abajo, véase la figura).



(A) Grafique v para $-5 \leq x \leq 5$.
(B) Describa la relación entre esta gráfica y la conducta física de la pelota cuando está oscilando hacia arriba y hacia abajo.

79. Arquitectura. Una puerta de arco se forma al colocar un arco circular en la parte superior de un rectángulo (véase la figura). Si el arco de la puerta mide 4 pies de ancho y la altura del arco al final de sus extremos es de 1 pie, ¿cuál es el radio del círculo que contiene al arco? [*Sugerencia:* Observe que $(2, r - 1)$ debe satisfacer a $x^2 + y^2 = r^2$.]



Puerta de arco

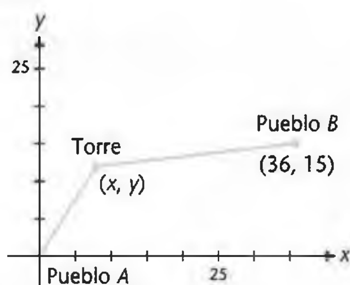
80. Ingeniería. La sección transversal de un remache tiene una cabeza que tiene la forma de un arco de círculo (véase la figura). Si los extremos del arco están separados por 12 milímetros y la cabeza está 4 milímetros arriba de los extremos, ¿cuál es el radio del círculo que contiene al arco?


Remache

*81. **Construcción.** El pueblo B está localizado 36 millas al este y 15 millas al norte del pueblo A (véase la figura). Una compañía local de teléfonos quiere colocar una torre de transmisión de tal manera que la distancia desde la torre al pueblo B sea dos veces la distancia desde la torre al pueblo A.

(A) Muestre que la torre debe estar en un círculo, encuentre el centro y el radio de éste y grafíquelo.

(B) Si la compañía decide colocar la torre en este círculo en un punto directamente al este del pueblo A, ¿a qué distancia del pueblo A la debe colocar? Calcule su respuesta con una cifra decimal.



*82. **Construcción.** Repita el problema 81 si la distancia desde la torre al pueblo A es el doble de la distancia desde la torre al pueblo B.

SECCIÓN 2-2 Líneas rectas



- Gráficas de ecuaciones de primer grado con dos variables
- Pendiente de una recta
- Ecuaciones de rectas: formas especiales
- Rectas paralelas y perpendiculares

En esta sección se considerará una de las figuras geométricas básicas (una línea recta). Se aprenderá cómo graficar a las líneas rectas, dando varias ecuaciones estándar, y cómo encontrar la ecuación de una línea recta, dada la información acerca de la recta. Se agregarán estas importantes herramientas a la caja de herramientas matemáticas, lo cual le capacitará para usar las líneas rectas como una herramienta efectiva de solución de problemas, como se mostrará en los ejercicios de aplicación que se incluyen al final de la sección.

• Gráficas de ecuaciones de primer grado con dos variables

Refiriéndose a su experiencia pasada en la graficación de ecuaciones con dos variables, probablemente recordará que las ecuaciones de primer grado con dos variables, tales como

$$y = -3x + 5 \qquad 3x - 4y = 9 \qquad y = -\tfrac{2}{3}x$$

tienen gráficas que son líneas rectas. Este hecho se estableció en el teorema 1. Para una prueba parcial de este teorema, véase el problema 80 de los ejercicios al final de esta sección.

Teorema 1 **La ecuación de una línea recta**

Si A, B y C son constantes, con A y B diferentes de 0, y x y y son variables, entonces la gráfica de la ecuación

$$Ax + By = C \qquad \textbf{Forma estándar} \qquad (1)$$

es una línea recta. Cualquier línea recta en un sistema coordenado rectangular tiene una ecuación de esta forma.

También, la gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$y = mx + b \tag{2}$$

donde m y b son constantes, es una línea recta. La forma (2), que después se analizará en detalle, es simplemente un caso especial de la forma (1) para $B \neq 0$. Esto se puede ver resolviendo la forma (1) para y en términos de x:

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B} \qquad B \neq 0$$

Para graficar (1) o (2), se dibujan dos puntos cualesquiera de su conjunto solución y se usa un segmento de recta para dibujar una línea recta que pase por estos dos puntos. Los puntos donde la recta cruza a los ejes son convenientes de usar y fáciles de encontrar. La **intersección con el eje y*** es la ordenada del punto donde la gráfica cruza al eje y, y la **intersección con el eje x**, es la abscisa del punto donde la gráfica cruza al eje x. Encontrar la intersección con el eje y, hace que $x = 0$ y se despeja y; encontrar la intersección x, hace que $y = 0$ y se despeja x. Esto es frecuentemente utilizado para encontrar un tercer punto como punto de prueba. Los tres puntos deben estar en la misma línea recta, si no es así, significa que se cometió algún error.

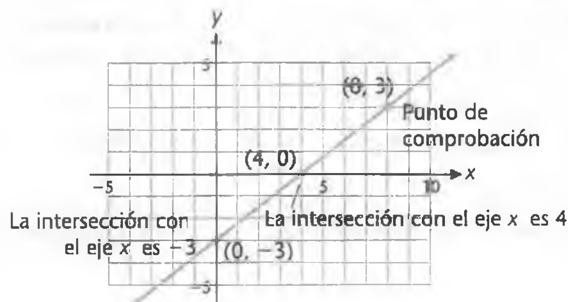
EJEMPLO 1 Uso de las intersecciones para graficar una línea recta

Grafique la ecuación $3x - 4y = 12$.

Solución Encuentre las intersecciones, un tercer punto de comprobación (optativo), y dibuje una línea recta que pase por los dos (tres) puntos (figura 1).

FIGURA 1

x	0	4	8
y	−3	0	3



Problema seleccionado 1 Grafique la ecuación $4x + 3y = 12$.

---

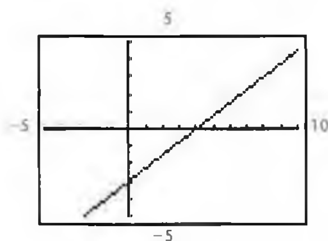
* Si la intersección con el eje x es a y la intersección con el eje y es b, entonces la gráfica de la recta pasa a través de los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$. Es una práctica común referirse a ambos puntos a y b y a los puntos $(a, 0)$ y $(0, b)$ como las intersecciones x y y de la recta.



Para comprobar la respuesta del ejemplo 1 con un dispositivo de graficación se debe resolver primero la ecuación para y y después graficar (figura 2):

$$3x - 4y = 12$$
$$-4y = -3x + 12$$
$$y = 0.75x - 3$$

FIGURA 2



Pendiente de una recta

Si se consideran dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ sobre una recta, entonces la razón de cambio en y con respecto al cambio en x, como cuando se hace un movimiento del punto P_1 al punto P_2 se llama **pendiente** de la recta. En lenguaje burdo, la pendiente es una medida de la "elevación" de una recta. Algunas veces al cambio en x se le llama **desplazamiento** y al cambio en y se le llama **elevación**.

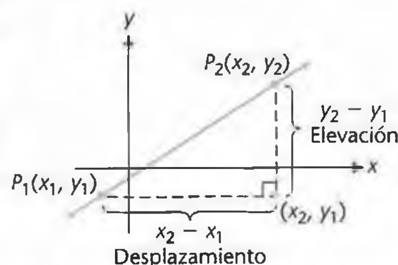
DEFINICIÓN 1

Pendiente de una recta

Si una recta pasa por dos puntos distintos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, entonces su pendiente m está dada por la fórmula

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad x_1 \neq x_2$$

$$= \frac{\text{Cambio vertical (elevación)}}{\text{Cambio horizontal (desplazamiento)}}$$



Para una recta horizontal, y no cambia conforme cambia x; por lo tanto, su pendiente es 0. Por otra parte, para una recta vertical, x no cambia cuando cambia y; por lo tanto, $x_1 = x_2$ y su pendiente no está definida:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0}$$ Para una recta vertical, la pendiente no está definida.

En general, la pendiente de una recta puede ser positiva, negativa, 0, o no estar definida. Cada uno de estos casos se interpreta geométricamente como se muestra en la tabla 1.

TABLA 1 Interpretación geométrica de la pendiente

Recta	Pendiente	Ejemplo
Se eleva conforme x se mueve de izquierda a derecha	Positiva	
Disminuye conforme x se mueve de izquierda a derecha	Negativa	
Horizontal	0	
Vertical	No está definida	

Al usar la fórmula para encontrar la pendiente de la recta que pasa por dos puntos, no importa cuál punto se marque, P_1 o P_2, ya que si se cambiara la marca también cambiaría el signo tanto del numerador como del denominador en la fórmula de la pendiente:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \qquad \text{Por ejemplo: } \frac{5-2}{7-3} = \frac{2-5}{3-7}$$

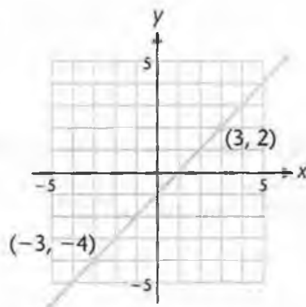
Además, es importante observar que la definición de pendiente no depende de los dos puntos elegidos en la recta siempre que éstos sean diferentes. Esto es consecuencia del hecho de que las proporciones de los lados correspondientes de triángulos similares son iguales.

EJEMPLO 2 **Determinación de la pendiente**

Trace una recta que una los pares de puntos indicados y encuentre su pendiente.

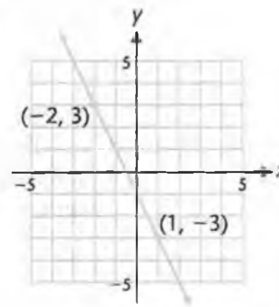
(A) $(-3, -4), (3, 2)$ (B) $(-2, 3), (1, -3)$
(C) $(-4, 2), (3, 2)$ (D) $(2, 4), (2, -3)$

Soluciones (A)



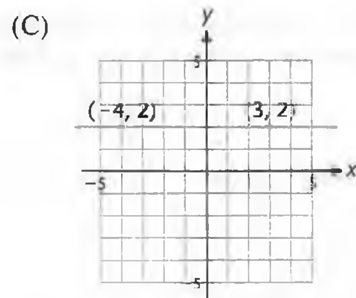
$$m = \frac{2 - (-4)}{3 - (-3)} = \frac{6}{6} = 1$$

(B)



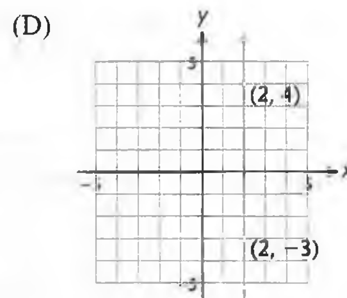
$$m = \frac{-3 - 3}{1 - (-2)} = \frac{-6}{3} = -2$$

(C)



$$m = \frac{2-2}{3-(-4)} = \frac{0}{7} = 0$$

(D)



$$m = \frac{-3-4}{2-2} = \frac{-7}{0};$$

la pendiente no está definida

Problema seleccionado 2

Encuentre la pendiente de la recta que une cada par de puntos. No grafique.

(A) $(-3, -3), (2, -3)$ (B) $(-2, -1), (1, 2)$
(C) $(0, 4), (2, -4)$ (D) $(-3, 2), (-3, -1)$

Ecuaciones de rectas: formas especiales

Para empezar es conveniente investigar por qué $y = mx + b$ se llama *forma intersección-pendiente* de una recta.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) Grafique $y = x + b$, en forma simultánea para $b = -5, -3, 0, 3$ y 5 en el mismo sistema coordenado. Describa verbalmente el significado geométrico de b.

(B) Grafique $y = mx - 1$ en forma simultánea para $m = -2, -1, 0, 1$ y 2 en el mismo sistema coordenado. Describa verbalmente el significado geométrico de m.

(C) Usando un dispositivo de graficación, explore la gráfica de $y = mx + b$ para diferentes valores de m y b.

Como podrá ver a partir de la exploración realizada, las constantes m y b en

$$y = mx + b \tag{3}$$

tienen un especial significado geométrico, que en seguida se establecerá de manera explícita.

Si se hace $x = 0$, entonces $y = b$, y se observa que la gráfica de la ecuación (3) cruza el eje y en el punto $(0, b)$. La constante b es la *intersección* con el eje y. Por ejemplo, la intersección y de la gráfica de $y = -3x - 2$ es -2.

Para determinar el significado geométrico de m, se procede de la siguiente manera: Si $y = mx + b$, se establece que $x = 0$ y $x = 1$, de donde se concluye que los puntos $(0, b)$ y $(1, m + b)$ están en la gráfica, que es una recta. Por lo tanto, se deduce que la pendiente de esta recta está dada por

$$\text{Pendiente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(m + b) - b}{1 - 0} = m$$

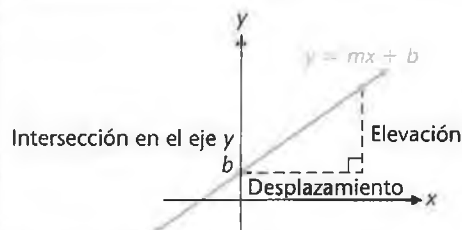
Así, m es la pendiente de la recta dada por la ecuación $y = mx + b$. Ahora se sabe por qué la ecuación (3) se llama **forma pendiente-intersección** de la ecuación de una recta.

Teorema 2 **Forma pendiente-intersección**

$$y = mx + b$$

$$m = \frac{\text{Elevación}}{\text{Desplazamiento}} = \text{Pendiente}$$

$$m = \text{Intersección con el eje } y$$



EJEMPLO 3 **Uso de la forma pendiente-intersección**

(A) Escriba la ecuación de la forma pendiente-intersección de una recta con una pendiente de $\frac{2}{3}$ e intersección con el eje y de -5.

(B) Encuentre la pendiente y la intersección y, y después haga la gráfica de $y = -\frac{3}{4}x - 2$.

Soluciones

(A) Sustituya $m -\frac{2}{3}$ y $b = -5$ en $y = mx + b$ para obtener

$$y = \tfrac{2}{3}x - 5$$

(B) La intersección con el eje y de $y = -\frac{3}{4}x - 2$ es -2, así que el punto $(0, -2)$ está en la gráfica. La pendiente de la recta es $-\frac{3}{4}$, de modo que, cuando la coordenada x de $(0, -2)$ aumenta cuatro unidades (desplazamiento), la coordenada y cambia por -3. El punto resultante $(4, -5)$ se dibuja fácilmente, y los dos puntos están en la gráfica. En resumen, se empieza con la intersección con el eje y en -2, y se mueve cuatro unidades a la derecha y tres hacia abajo para obtener un segundo punto. Después se dibuja una recta para unir los dos puntos, como se muestra en la figura 3.

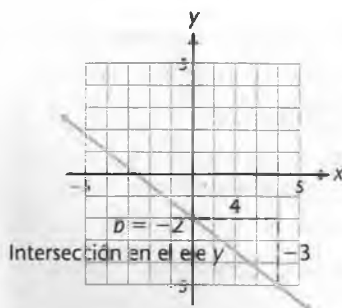


FIGURA 3

Problema seleccionado 3

Escriba la ecuación de pendiente-intersección de la recta con pendiente $\frac{2}{3}$ y la intersección con el eje y igual a 1. Grafique la ecuación.

En el ejemplo 3 se encontró la ecuación de una recta con una pendiente dada y por la intersección con el eje y. Esto también permite encontrar la ecuación de una recta que pasa por cierto punto con una pendiente dada o encontrar la ecuación de una recta que contenga dos puntos dados.

Suponga una recta que tiene pendiente m y pasa por un punto fijo (x_1, y_1). Si el punto (x, y) es cualquier otro punto sobre la recta, entonces:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \qquad x \neq x_1$$

esto es,

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{4}$$

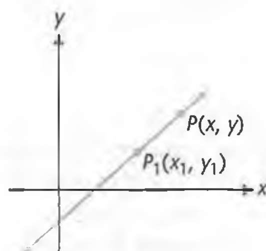
Se observa ahora que (x_1, y_1) también satisface la ecuación (4) y se concluye que (4) es la ecuación de una recta con pendiente m que pasa por (x_1, y_1).

Así se obtiene la **forma punto-pendiente** de la ecuación de una recta.

Teorema 3 **Forma punto-pendiente**

Una ecuación de una recta que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Recuerde que $P(x, y)$ es un punto variable y $P_1(x_1 - y_1)$ es un punto fijo.

La forma punto-pendiente es muy útil, ya que permite encontrar la ecuación de una recta si se conoce la pendiente y las coordenadas de un punto sobre la recta, o si se conocen las coordenadas de dos puntos sobre la recta. En este último caso, se encontrará primero la pendiente utilizando las coordenadas de los dos puntos de la recta; después se usa la forma punto-pendiente con cualesquiera de los dos puntos dados.

EJEMPLO 4 **Uso de la forma punto-pendiente**

(A) Encuentre una ecuación para la recta que tenga pendiente $\frac{2}{3}$ y pase por el punto $(-2, 1)$. Escriba la respuesta final en la forma estándar $Ax + By = C$.

(B) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(4, -1)$ y $(-8, 5)$. Escriba la respuesta final en la forma pendiente-intersección $y = mx + b$.

Soluciones (A) Sea $m = \frac{2}{3}$ y $(x_1, y_1) = (-2, 1)$. Entonces

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = \tfrac{2}{3}[x - (-2)]$$
$$y - 1 = \tfrac{2}{3}(x + 2)$$
$$3y - 3 = 2x + 4$$
$$-2x + 3y = 7 \qquad \text{o} \qquad 2x - 3y = -7$$

(B) Encuentre primero la pendiente de la recta usando la fórmula de la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-1)}{-8 - 4} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$$

Ahora deje que (x_1, y_1) sean cualquiera de los dos puntos dados y proceda como en la parte A, eligiendo $(x_1, y_1) = (4, -1)$:

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - (-1) &= -\tfrac{1}{2}(x - 4) \\ y + 1 &= -\tfrac{1}{2}(x - 4) \\ y + 1 &= -\tfrac{1}{2}x + 2 \\ y &= -\tfrac{1}{2}x + 1 \end{aligned}$$

Se debe verificar que usando $(-8, 5)$, el otro punto dado, se produce la misma ecuación.

Problema seleccionado 4

(A) Encuentre la ecuación para la recta que tiene una pendiente de $-\frac{2}{5}$ y pasa por el punto $(3, -2)$. Escriba la respuesta final en la forma estándar $Ax + By = C$.
(B) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 1)$ y $(7, -3)$. Escriba la respuesta final en la forma pendiente-intersección $y = mx + b$.

EJEMPLO 5

Política comercial de aumento de precios

Una tienda de artículos deportivos vende una caña de pescar que cuesta \$60 en \$82, y un par de botas para esquiar en campo-traviesa que cuesta \$80, en \$106.

(A) Si se supone que la política de aumento de precios de la tienda para artículos que cuesten más de \$30, es lineal y se refleja en el precio de estos dos artículos, escriba una ecuación que relacione el precio de venta al menudeo R con el costo C.
(B) Use la ecuación y encuentre el precio de venta al menudeo de un par de tenis para correr que cuestan \$40.
(C) Compruebe el resultado con un dispositivo de graficación.

Soluciones

(A) Si el precio de venta al menudeo R se supone es lineal en relación con el costo C, entonces se debe buscar una ecuación cuya gráfica pase por $(C_1, R_1) = (60, 82)$ y por $(C_2, R_2) = (80, 106)$. Se encuentra la pendiente, y después se usa la forma punto-pendiente para encontrar la ecuación.

$$m = \boxed{\frac{R_2 - R_1}{C_2 - C_1}} = \frac{106 - 82}{80 - 60} = \frac{24}{20} = 1.2$$

$$\begin{aligned} R - R_1 &= m(C - C_1) \\ R - 82 &= 1.2(C - 60) \\ R - 82 &= 1.2C - 72 \\ R &= 1.2C + 10 \end{aligned}$$

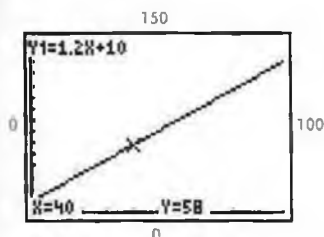


FIGURA 4

(B) $R = 1.2(40) + 10 = \$58$
(C) La comprobación se muestra en la figura 4.

Problema seleccionado 5

El gerente de una compañía que fabrica bolígrafos estima que sus costos de operación serán de \$200 por día con cero producción y de \$700 por día con una producción de 1 000 bolígrafos.

(A) Suponga que el costo total C por día está linealmente relacionado con la producción total x por día, escriba una ecuación que relacione estas dos cantidades.
(B) ¿Cuál es el costo por día para una producción de 5 000 bolígrafos?

Las ecuaciones más simples de las rectas son aquellas para rectas verticales y horizontales. Considere las siguientes dos ecuaciones:

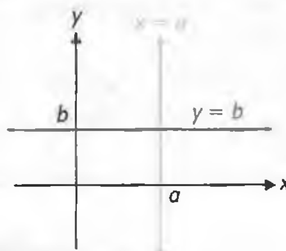
$$x + 0y = a \quad \text{o} \quad x = a \tag{5}$$

$$0x + y = b \quad \text{o} \quad y = b \tag{6}$$

En la ecuación (5), y puede ser cualquier número mientras que $x = a$. Así, la gráfica de $x = a$ es una recta vertical que cruza al eje x en $(a, 0)$. En la ecuación (6), x puede ser cualquier número mientras que $y = b$. Así, la gráfica de $y = b$ es una recta horizontal que cruza al eje y en $(0, b)$. El resumen de estos resultados es el siguiente:

Teorema 4 **Rectas horizontales y verticales**

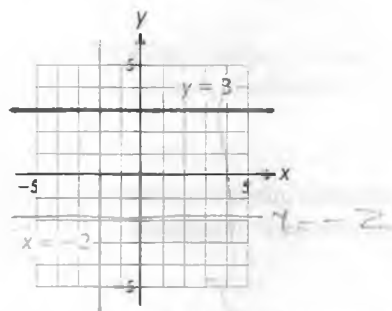
Ecuación		Gráfica
$x = a$	(versión corta para $x + 0y = a$)	Recta vertical que pasa por $(a, 0)$ (La pendiente está indefinida.)
$y = b$	(versión corta para $0x + y = b$)	Recta horizontal que pasa por $(0, b)$ (La pendiente es cero.)

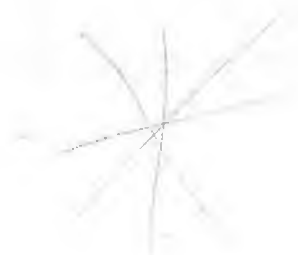


EJEMPLO 6 **Gráficas de rectas horizontales y verticales**

Grafique la recta $x = -2$ y la recta $y = 3$.

Solución





Problema seleccionado 6 Grafique la recta $x = 4$ y la recta $y = -2$.

En la tabla 2 se resumen las diferentes formas de la ecuación de una recta que se han analizado para una referencia conveniente.

TABLA 2 Ecuaciones de una recta

Forma estándar	$Ax + By = C$	A y B no son 0
Forma pendiente-intersección	$y = mx + b$	Pendiente: m; intersección con el eje y: b
Forma punto-intersección	$y - y_1 = m(x - x_1)$	Pendiente: m; Punto: (x_1, y_1)
Recta horizontal	$y = b$	Pendiente 0
Recta vertical	$x = a$	Pendiente indefinida

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Determine las condiciones en A, B y C de manera que la ecuación lineal $Ax + By = C$ pueda escribirse en cada una de las siguientes formas, y analice el número posible de intersecciones con los ejes x y y en cada caso.

1. $y = mx = b, m \neq 0$
2. $y = b$
3. $x = a$

• **Rectas paralelas y perpendiculares** De acuerdo con la geometría, dos rectas verticales son paralelas entre sí, y una recta horizontal y una vertical son perpendiculares una con respecto a la otra. ¿Cómo se le

podría llamar entonces a dos rectas no verticales cuando son paralelas o perpendiculares entre sí? El teorema 5, que se estableció sin prueba, proporciona un examen conveniente.

Teorema 5 **Rectas paralelas y perpendiculares**

Dadas dos rectas no verticales L_1 y L_2 con pendientes m_1 y m_2, respectivamente, entonces

$L_1 \parallel L_2$	si y sólo si	$m_1 = m_2$
$L_1 \perp L_2$	si y sólo si	$m_1 m_2 = -1$

Los símbolos $\parallel$ y $\perp$ significan, respectivamente, "es paralela a" y "es perpendicular a". En el caso de perpendicularidad, las condiciones $m_1 m_2 = -1$ también pueden escribirse como

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad \text{o} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Así:

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si sus pendientes son las recíprocas negativas de cada una.

EJEMPLO 7 **Rectas paralelas y perpendiculares**

Dada la recta L: $3x - 2y = 5$ y el punto $P(-3, 5)$, encuentre la ecuación de una recta que pasa por P que sea:

(A) Paralela a L (B) Perpendicular a L

Escriba las respuestas finales en la forma pendiente-intersección $y = mx + b$.

Soluciones Primero, encuentre la pendiente de L escribiendo $3x - 2y = 5$ en la forma pendiente-intersección equivalente $y = mx + b$.

$$3x - 2y = 5$$
$$-2y = -3x + 5$$
$$y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{5}{2}$$

Así, la pendiente de L es $\frac{3}{2}$. La pendiente de una recta paralela a L es la misma, $\frac{3}{2}$, y la pendiente de un recta perpendicular a L es $\frac{3}{2}$. Ahora se pueden encontrar las ecuaciones de las dos rectas de los incisos A y B usando la forma punto-pendiente.

(A) Paralelo ($m = \frac{3}{2}$):

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = \tfrac{3}{2}(x + 3)$$
$$y - 5 = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{2}$$
$$y = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{19}{2}$$

(B) Perpendicular ($m = -\frac{2}{3}$):

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 5 = -\tfrac{2}{3}(x + 3)$$
$$y - 5 = -\tfrac{2}{3}x - 2$$
$$y = -\tfrac{2}{3}x + 3$$

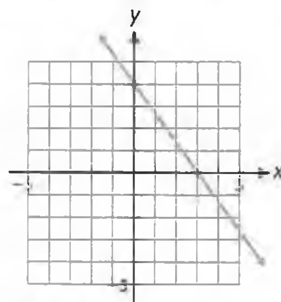
Problema seleccionado 7

Dada la recta L: $4x + 2y = 3$ y el punto $P(2, -3)$, encuentre la ecuación de la recta que pasa por P que sea:

(A) Paralela a L (B) Perpendicular a L

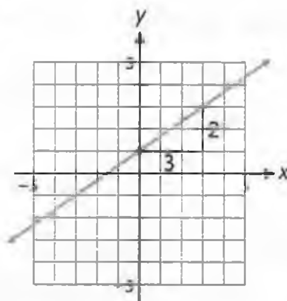
Escriba las respuestas finales en la forma pendiente-intersección $y = mx + b$.

Respuestas a los problemas seleccionados



2. (A) $m = 0$ (B) $m = 1$
(C) $m = -4$ (D) m no está definida

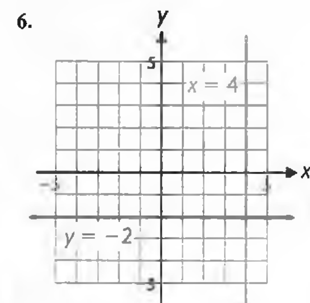
3. $y = \frac{2}{3}x + 1$



4. (A) $2x + 5y = -4$ (B) $y = -\frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$

5. (A) $C = 0.5x + 200$ (B) \$2 700

6.



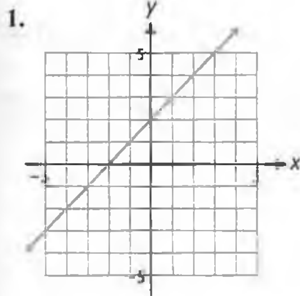
7. (A) $y = -2x + 1$ (B) $y = \frac{1}{2}x - 4$

EJERCICIO 2-2

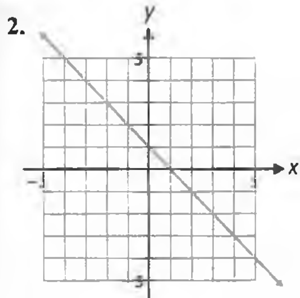
A

En los problemas del 1 al 6, use la gráfica de cada recta para encontrar la intersección con el eje x, y la intersección con el eje y y su pendiente.

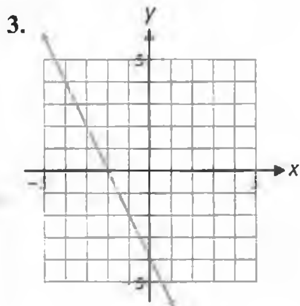
1.



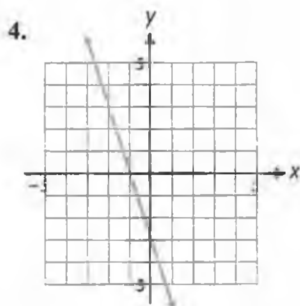
2.



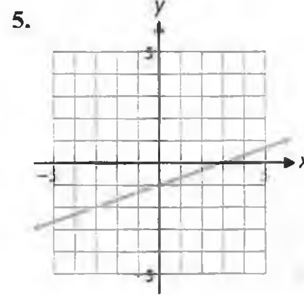
3.



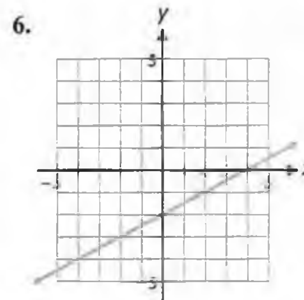
4.



5.



6.



En los problemas del 7 al 20 grafique cada ecuación e indique su pendiente, si ésta existe.



Compruebe sus gráficas de los problemas del 7 al 20 graficando cada una con un dispositivo de graficación.

7. $y = -\frac{3}{5}x + 4$

8. $y = -\frac{3}{2}x + 6$

9. $y = -\frac{3}{4}x$

10. $y = \frac{2}{3}x - 3$

11. $2x - 3y = 15$

12. $4x + 3y = 24$

13. $4x - 5y = -24$

14. $6x - 7y = -49$

15. $\frac{y}{8} - \frac{x}{4} = 1$

16. $\frac{y}{6} - \frac{x}{5} = 1$

17. $x = -3$

18. $y = -2$

19. $y = 3.5$

20. $x = 2.5$

En los problemas del 21 al 24, escriba la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta e indique su pendiente y su intersección con el eje y.

21. Pendiente $= 1$; intersección con el eje $y = 0$

22. Pendiente $= -1$; intersección con el eje $y = 7$

23. Pendiente $= -\frac{2}{3}$; intersección con el eje $y = -4$

24. Pendiente $= \frac{5}{3}$; intersección con el eje $y = 6$

B

En los problemas del 25 al 42, escriba la ecuación de la recta que contenga al(los) punto(s) indicado(s) y/o que tenga la pen-

diente indicada y/o que tengan las intersecciones indicadas. Escriba la ecuación final en la forma pendiente-intersección $y = mx + b$ o en la forma $x = c$.

25. $(0, 4); m = -3$
26. $(2, 0); m = 2$
27. $(-5, 4); m = -\frac{2}{5}$
28. $(3, -3); m = -\frac{1}{3}$
29. $(5, 5); m = 0$
30. $(-4, -2); m = \frac{1}{2}$
31. $(1, 6); (5, -2)$
32. $(-3, 4); (6, 1)$
33. $(-4, 8); (2, 0)$
34. $(2, -1); (10, 5)$
35. $(-3, 4); (5, 4)$
36. $(0, -2); (4, -2)$
37. $(4, 6); (4, -3)$
38. $(-3, 1); (-3, -4)$
39. La intersección con el eje x es 6; la intersección con el eje y es 2
40. La intersección con el eje x es 3; la intersección con el eje y es 4
41. La intersección con el eje x es -4; la intersección con el eje y es 3
42. La intersección con el eje x es -4; la intersección con el eje y es -5

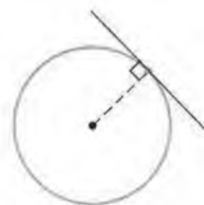
En los problemas del 43 al 54, escriba una ecuación para la recta que contenga los puntos indicados y encuentre la condición indicada. Escriba la respuesta final en la forma estándar $Ax + By = C, A \geq 0$.

43. $(-3, 4)$; paralela a $y = 3x - 5$
44. $(-4, 0)$; paralela a $y = -2x + 1$
45. $(2, -3)$; perpendicular a $y = -\frac{1}{3}x$
46. $(-2, -4)$; perpendicular a $y = \frac{2}{3}x - 5$
47. $(2, 5)$; paralela al eje y
48. $(7, 3)$; paralela al eje x
49. $(3, -2)$; vertical
50. $(-2, -3)$; horizontal
51. $(5, 0)$; paralela a $3x - 2y = 4$
52. $(3, 5)$; paralela a $3x + 4y = 8$
53. $(0, -4)$; perpendicular a $x + 3y = 9$
54. $(-2, 4)$; perpendicular a $4x + 5y = 0$
55. Grafique $y = mx + 2$ para $m = 2, m = \frac{1}{2}, m = 0, m = -\frac{1}{2}$, y $m = -2$, todas en el mismo sistema coordenado.
56. Grafique $y = -\frac{1}{2}x + b$ para $b = -3, b = 0$ y $b = 3$, todas en el mismo sistema coordenado.

Los problemas del 57 al 62 se refieren al cuadrilátero con vértices $A(0, 2)$, $B(4, -1)$, $C(1, -5)$ y $D(-3, -2)$.

57. Muestre que $AB \parallel DC$.
58. Muestre que $DA \parallel CB$.
59. Muestre que $AB \perp BC$.
60. Muestre que $AD \perp DC$.
61. Encuentre una ecuación del bisector perpendicular de AD. [*Sugerencia:* Encuentre primero el punto medio de AD.]
62. Encuentre una ecuación del bisector perpendicular de AB.

Los problemas del 63 al 68 se relacionan con el cálculo. Recuerde que una recta tangente a un círculo en un punto es perpendicular al radio dibujado en el punto (véase la figura). Encuentre la ecuación de la recta tangente al círculo en el punto indicado. Escriba la respuesta final en la forma estándar $Ax + By = C, A \geq 0$. Grafique el círculo y la recta tangente en el mismo sistema coordenado.



63. $x^2 + y^2 = 25, (3, 4)$
64. $x^2 + y^2 = 100, (-8, 6)$
65. $x^2 + y^2 = 50, (5, -5)$
66. $x^2 + y^2 = 80, (-4, -8)$
67. $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 169, (8, -16)$
68. $(x + 5)^2 + (y - 9)^2 = 289, (-13, -6)$

C

69. (A) Grafique las siguientes ecuaciones en el mismo sistema coordenado:

$$3x + 2y = 6 \qquad 3x + 2y = 3$$
$$3x + 2y = -6 \qquad 3x + 2y = -3$$

(B) A partir de sus observaciones en el inciso (A), describa la familia de rectas obtenidas al variar C en $Ax + By = C$ manteniendo fijos A y B.

(C) Verifique sus conclusiones del inciso B con una prueba.

70. (A) Grafique las siguientes dos ecuaciones en el mismo sistema coordenado:

$$3x + 4y = 12 \qquad 4x - 3y = 12$$

(B) Grafique las siguientes dos ecuaciones en el mismo sistema coordenado:

$$2x + 3y = 12 \qquad 3x - 2y = 12$$

(C) A partir de sus observaciones en los incisos (A) y (B), describa la relación aparente entre las gráficas de $Ax + By = C$ y $Bx - Ay = C$.

(D) Verifique sus conclusiones del inciso (C) con una prueba.

Dibuje las gráficas de las ecuaciones de los problemas del 71 al 76.

71. $y = |\frac{1}{2}x|$

72. $y = |x + 2|$

73. $y = 2|x| - 4$

74. $y = -\frac{1}{2}|x| + 1$

75. $x^2 - y^2 = 0$

76. $4y^2 - 9x^2 = 0$

77. Describa la relación entre las gráficas de $y = mx + b$ y $y = |mx + b|$. (Véase problemas 71 y 72.)

78. Describa la relación entre las gráficas de $y = mx + b$ y $y = m|x| + b$. (Véase problemas 73 y 74.)

79. Demuestre que si una recta L tiene una intersección con el eje x $(a, 0)$ y una intersección con el eje y $(0, b)$, entonces la ecuación de L se puede escribir en la **forma de intersección**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad a, b \neq 0$$

80. Sean

$$P_1(x_1, y_1) = P_1(x_1, mx_1 + b)$$
$$P_2(x_2, y_2) = P_2(x_2, mx_2 + b)$$
$$P_3(x_3, y_3) = P_3(x_3, mx_3 + b)$$

tres puntos arbitrarios que satisfacen $y = mx + b$ con $x_1 < x_2 < x_3$. Demuestre que P_1, P_2 y P_3 son **colineales**; es decir, los tres puntos están sobre la misma recta. [*Sugerencia:* Use la fórmula de la distancia y muestre que $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$.] Esto prueba que la gráfica de $y = mx + b$ es una línea recta.

APLICACIONES

81. Punto de ebullición del agua. Al nivel del mar, el agua hierve cuando alcanza una temperatura de 212°F. A altitudes mayores, la presión atmosférica es más baja y también la temperatura a la cual hierve el agua. El punto de ebullición B en grados Fahrenheit a una altitud de x pies está dado de manera aproximada por

$$B = 212 - 0.0018x$$

(A) Complete la tabla 1.

TABLA 1

x	0	5 000	10 000	15 000	20 000	25 000	30 000
B							

(B) Con base en la información de la tabla, escriba una descripción verbal breve de la relación entre la altitud y el punto de ebullición del agua.

82. Temperatura del aire. A medida que el aire seco se mueve hacia arriba, se expande y se enfría. La temperatura del aire A en grados Celsius a una altitud de x kilómetros está dada aproximadamente por

$$A = 25 - 9x$$

(A) Complete la tabla 2.

TABLA 2

x	0	1	2	3	4	5
A						

(B) Basado en la información de la tabla, escriba una descripción verbal de la relación entre la altitud y la temperatura del aire.

83. **Renta de autos.** Una agencia de renta de autos calcula un cargo de renta diaria para autos compactos con la ecuación

$$c = 25 + 0.25x$$

donde c es el cargo diario en dólares y x es el recorrido diario en millas. Traduzca este enunciado algebraico en un enunciado verbal que pueda ser usado para explicar los cargos diarios al consumidor.

84. **Cargos por instalación.** Una compañía de teléfonos calcula los cargos para una instalación de teléfonos con la ecuación

$$c = 15 + 0.7x$$

donde c es el cargo de instalación en dólares y x es el tiempo gastado en minutos al realizar la instalación. Traduzca este enunciado algebraico en una forma verbal que pueda ser usada para explicar los cargos por instalación a un consumidor.

La compañía Merck & Co., Inc., es la compañía farmacéutica más grande del mundo. Los problemas 85 y 86 se refieren a los datos de la tabla 3, tomados del reporte anual de la compañía para 1993.

TABLA 3 Datos financieros seleccionados (en miles de millones $) para Merck & Co., Inc.

	1988	1989	1990	1991	1992
Ventas	$5.9	$6.5	$7.7	$8.6	$9.7
Ingreso neto	$1.2	$1.5	$1.8	$2.1	$2.4

85. Análisis de ventas. Un modelo matemático para las ventas de la compañía Merck está dado por

$$y = 5.74 + 0.97x$$

donde $x = 0$ corresponde a 1988.

(A) Complete la tabla 4. Redondee los valores de y a una cifra decimal.

TABLA 4

x	0	1	2	3	4
Ventas	5.9	6.5	7.7	8.6	9.7
y					

(B) Trace la gráfica de y y los datos de ventas en los mismos ejes.
(C) Use la ecuación del modelo para estimar las ventas en 1993. En el 2000.
(D) Describa brevemente las ventas de la compañía de 1988 a 1992.

86. Análisis de ingresos. Un modelo matemático para los ingresos de la compañía Merck está dado por

$$y = 1.2 + 0.3x$$

donde $x = 0$ corresponde a 1988.

(A) Complete la tabla 5. Redondee los valores de y con una cifra decimal.

TABLA 5

x	0	1	2	3	4
Ingreso neto	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4
y					

(B) Trace la gráfica de la ecuación de modelación y los datos de las utilidades en los mismos ejes.
(C) Use la ecuación de modelación para calcular los ingresos en 1993 y en el 2000.
(D) Describa en forma breve los ingresos de la compañía desde 1988 hasta 1992.

87. Física. Las dos escalas de temperaturas Fahrenheit (F) y Celsius (C) están relacionadas linealmente. Se sabe que el agua se congela a 32°F o 0°C y hierve a 212°F o 100°C.

(A) Encuentre una ecuación lineal que exprese a F en términos de C.
(B) Si una familia europea tiene la calefacción a 20°C, ¿cuál es su equivalente en grados Fahrenheit? Si en Milwaukee la temperatura a la intemperie es de 86°F, ¿cuál es la temperatura en grados Celsius?
(C) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de la ecuación lineal encontrada en la parte A? (La pendiente indica el cambio en grados Fahrenheit por cambio unitario en grados Celsius.)

88. Física. La ley de Hooke establece la relación entre la deformación s de un resorte y el peso w que causa el estiramiento lineal (un principio bajo el cual se construyen todos los resortes). Para un resorte en particular, un peso de 5 libras causa un estiramiento de 2 pulgadas, mientras que cuando no hay peso el estiramiento del resorte es igual a 0.

(A) Encuentre una ecuación lineal que exprese s en términos de w.
(B) ¿Cuál es el peso que causa un estiramiento de 3.6 pulgadas?
(C) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de la ecuación? (La pendiente indica la cantidad de estiramiento por libra de aumento en el peso.)

89. Negocios: depreciación. Una firma de abogados compró una máquina copiadora en $8 000 que se supone tiene un valor de depreciación de $0 después de 5 años. La firma considera una depreciación lineal en un periodo de 5 años.

(A) Encuentre una ecuación lineal que exprese el valor V en dólares en función del tiempo t en años.
(B) ¿Cuál es el valor depreciado después de 3 años?
(C) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de la ecuación encontrada en el inciso (A)? Interprete verbalmente.

90. Negocios: política comercial de aumento de precios. Un almacén de ropa vende una camisa que cuesta $20 en $33 y una chamarra que cuesta $60 en $93.

(A) Si se supone que la política de aumento de precios del almacén para los objetos que cuestan más de $10 es lineal, escriba una ecuación que exprese el precio de venta al menudeo R. en términos del costo C (precio de venta al mayoreo).
(B) ¿Cuánto paga el almacén por un traje que vende al menudeo a $240?
(C) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de la ecuación que se encontró en el inciso (A)? Interprete verbalmente.

91. Condiciones de vuelo. En aire estable, la temperatura del aire disminuye alrededor de 5°F por cada 1 000 pies de altura.

(A) Si la temperatura al nivel del mar es de 70°F y un piloto comercial reporta una temperatura de −20°F a 18 000 pies, escriba una ecuación lineal que exprese la temperatura T en términos de la altitud A (en miles de pies).
(B) ¿A qué altura está el avión si la temperatura es de 0°F?
(C) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de la ecuación que se encontró en el inciso (A)? Interprete verbalmente.

***92. Navegación aérea.** Un indicador de velocidad aérea en un avión es afectado por los cambios en la presión atmosférica a diferentes alturas. Un piloto puede calcular la velocidad aérea real observando la velocidad aérea indicada y sumándole aproximadamente un 2% por cada 1 000 pies de altura.

(A) Si un piloto mantiene una lectura constante de 200 millas por hora en el indicador de la velocidad aérea conforme el avión sube del nivel del mar a una altura de 10 000 pies, escriba una ecuación lineal que exprese la velocidad del aire T (en millas por hora) en términos de la altura A (en miles de pies).
(B) ¿Cuál es la velocidad aérea real del avión a 6 500 pies?

(C) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de la ecuación encontrada en el inciso (A)? Interprete verbalmente.

*93. **Oceanografía.** Después de cerca de 9 horas de un viento tranquilo, la altura de las olas en el océano está relacionada de manera lineal aproximadamente con el tiempo en que el viento ha estado soplando. Durante una tormenta con vientos de 50 nudos, la altura de las olas después de 9 horas era de 23 pies, y después de 24 horas de 40 pies.

(A) Si t es la hora en que comenzaron a soplar vientos de 50 nudos y h es la altura de la ola en pies, escriba una ecuación lineal que exprese la altura h en términos del tiempo t.

(B) ¿Cuánto tiempo tendrá que estar soplando el viento para que las olas alcancen una altura de 50 pies?

Exprese todas las cantidades calculadas con tres dígitos significativos.

94. **Oceanografía.** Conforme un buzo desciende en el océano, la presión aumenta linealmente con la profundidad. La presión es de 15 libras por pulgada cuadrada en la superficie y 30 libras por pulgada cuadrada 33 pies debajo de la superficie.

(A) Si p es la presión en libras por pulgada cuadrada, y d es la profundidad debajo de la superficie en pies, escriba una ecuación que exprese a p en términos de d.

(B) ¿Hasta qué profundidad puede descender un buzo si la presión segura para su equipo y su grado de experiencia es de 40 libras por pulgada cuadrada?

*95. **Medicina.** Investigaciones cardiovasculares han mostrado que a un nivel de colesterol superior a 210, cada aumento de 1% por encima de este nivel aumenta el riesgo coronario en un 2%. Se encontró que para un grupo de edad particular el riesgo coronario en un nivel de 210 de colesterol es de 0.160, y a un nivel de 231 el riesgo es de 0.192.

(A) Encuentre una ecuación lineal que exprese el riesgo R en términos del nivel de colesterol C.

(B) ¿Cuál es el riesgo para un nivel de colesterol de 260?

(C) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica en términos de la ecuación encontrada en el inciso (A)? Interprete de manera verbal.

*96. **Demografía.** El número promedio de habitantes por casa en Estados Unidos ha estado disminuyendo en forma constante, mientras que la estadística se ha mantenido y es aproximadamente lineal con respecto al tiempo. En 1900, había cerca de 4.76 habitantes por casa y en 1990, cerca de 2.5.

(A) Si N representa el número promedio de personas por casa, y t representa el número de años desde 1900, escriba una ecuación lineal que represente a N en términos de t.

(B) ¿Cuál es la predicción del promedio de habitantes por casa para el año 2000?

Exprese todas las cantidades calculadas con tres dígitos significativos.

SECCIÓN 2-3 Funciones



- Definición de una función
- Funciones definidas por ecuaciones
- Notación de función
- Aplicación
- Una historia breve del concepto de función

La idea de la correspondencia desempeña un papel central en la formulación del concepto de función. Usted ya ha tenido experiencias con correspondencias en la vida cotidiana. Por ejemplo:

A cada persona le corresponde una edad.
A cada artículo en un almacén le corresponde un precio.
A cada automóvil le corresponde un número de placa.
A cada círculo le corresponde un área.
A cada número le corresponde su cubo.

Uno de los aspectos más importantes de cualquier ciencia (administrativa, de la vida, social, física, de la computación, etcétera) es el establecimiento de las correspondencias entre varios tipos de fenómenos. Una vez que se conoce una correspondencia, se pueden hacer predicciones. Un químico puede usar la ley de los gases para predecir la presión de un gas, dada su temperatura. Un ingeniero puede usar una fórmula para predecir las desviaciones de una viga sujeta a diferentes cargas. Un científico de la computación puede usar fórmulas para comparar la eficiencia de los algoritmos, o para

ordenar datos almacenados en una computadora. Un economista podría predecir las tasas de interés, dada la tasa de cambio de la oferta de la moneda. Y así sucesivamente.

• Definición de una función

¿Qué tienen los ejemplos anteriores en común? Cada uno describe la relación de los elementos de un conjunto con los elementos de un segundo conjunto. Considere las tablas 1 a 3, las cuales contienen una lista de valores para el cubo, el cuadrado y la raíz cuadrada, respectivamente

TABLA 1

Dominio (número)	Rango (cubo)
−2 →	−8
−1 →	−1
0 →	0
1 →	1
2 →	8

TABLA 2

Dominio (número)	Rango ([redacted])
−2 →	4
−1 →	1
0 →	0
1 →	1
2 →	4

TABLA 3

Dominio (número)	Rango (raíz cuadrada)
0 →	0
1 →	1, −1
4 →	2, −2
9 →	3, −3

Las tablas 1 y 2 especifican funciones, pero la tabla 3 no. ¿A qué se debe esto? En seguida se explicará la definición del término *función*.

DEFINICIÓN 1

Regla de la definición de una función

Una **función** es una regla que produce una correspondencia entre dos conjuntos de elementos, tales que a cada elemento del primer conjunto le corresponde *uno y sólo un* elemento del segundo conjunto.

El primer conjunto se llama **dominio**, y el conjunto de todos los elementos que corresponden al segundo conjunto se conoce como **rango**.

Las tablas 1 y 2 especifican funciones, ya que a cada valor del dominio le corresponde exactamente un valor del rango (por ejemplo, el cubo de −2 es −8 y no otro número). Por otra parte, la tabla 3 no especifica una función, ya que al menos a un valor del dominio le corresponde más de un valor del rango (por ejemplo, al valor del dominio 9 le corresponde −3 y 3, ambas raíces cuadradas de 9).

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Considere el conjunto de estudiantes inscritos en un colegio y el conjunto de profesores de ese colegio. Defina una correspondencia entre los dos conjuntos diciendo que a un estudiante le corresponde un profesor si está inscrito regularmente en uno de los cursos que él imparte. ¿Esta función es una correspondencia? Analice.

Puesto que una función es una regla que relaciona a cada elemento en el dominio con un elemento correspondiente en el rango, esta correspondencia se puede ilustrar usando pares ordenados de elementos, donde la primera componente representa un

elemento del dominio y la segunda componente representa el correspondiente elemento del rango. Así, las funciones definidas en las tablas 1 y 2 se pueden escribir como:

$$\text{Función } 1 = \{(-2, -8), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 8)\}$$

$$\text{Función } 2 = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$$

En ambos casos, observe que no hay dos pares ordenados cuya primera componente sea la misma y las segundas sean diferentes. Por otra parte, si se enumera al conjunto de pares ordenados A determinados en la tabla 3, se tiene

$$A = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), (9, 3)\ (9, -3)\}$$

En este caso, hay pares ordenados con la misma primera componente y con diferentes segundas componentes; por ejemplo, $(1, 1)$ y $(1, -1)$ pertenecen al conjunto A. Otra vez se observa que la tabla 3 no define a una función.

Esto sugiere una forma alternativa pero equivalente de definir funciones que permite una mejor comprensión de este concepto.

DEFINICIÓN 2 **Forma de conjunto de la definición de una función**

Una **función** es un conjunto de pares ordenados con la propiedad de que no hay dos pares ordenados cuya primera componente sea igual y sus segundas componentes diferentes.

El conjunto de todas las primeras componentes en una función se llama **dominio** de la función, y el conjunto de todas las segundas componentes se llama **rango**.



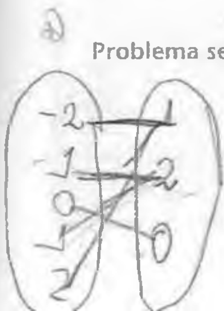
EJEMPLO 1 **Funciones definidas como conjuntos de pares ordenados**

(A) El conjunto $S = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$ define una función, ya que no hay dos pares ordenados cuya primera componente sea la misma y sus segundas componentes sean diferentes. El dominio y el rango son

Dominio $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Es el conjunto de las primeras componentes

Rango $= \{2, 3, 4\}$ Es el conjunto de las segundas componentes

(B) El conjunto $T = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (2, 4), (1, 5)\}$ no define una función, ya que hay pares ordenados que tienen la misma primera componente y las segundas componentes diferentes [por ejemplo, $(1, 4)$ y $(1, 5)$].



Problema seleccionado 1 Determine si cada uno de los conjuntos define una función. Si es así, establezca el dominio y el rango.

(A) $S = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 0), (-1, 1), (-2, 2)\}$

(B) $T = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 0), (1, 2), (2, 1)\}$

• Funciones definidas por ecuaciones

Ambas versiones de la definición de una función son bastante generales, sin restricciones en el tipo de elementos que se usan en el dominio o en el rango. Los puntos en el plano y los números complejos son dos ejemplos de los elementos del dominio y del rango que se usan en muchos cursos avanzados. En este texto, a menos que se indique otra cosa, **el dominio y el rango de una función serán conjuntos de números reales**.

Definir una función expresando la regla de correspondencia en una tabla o lista de pares ordenados de la función es pertinente sólo si el dominio y el rango son conjuntos finitos. Las funciones con dominios y rangos finitos se usan extensamente en ciertas áreas especializadas, como la computación, pero la mayoría de las aplicaciones de funciones implican dominios y rangos infinitos. Si el dominio y el rango de una función son conjuntos infinitos, entonces la regla de correspondencia no se puede mostrar en una tabla, y no es posible enumerar a todos los pares ordenados que pertenecen a la función. En la mayoría de las funciones se usa una ecuación con dos variables para especificar ambas: la regla de correspondencia y el conjunto de pares ordenados.

Considere la ecuación

$$y = x^2 + 2x \qquad x \text{ es cualquier número real} \qquad (1)$$

Esta ecuación asigna a cada valor del dominio x exactamente un valor del rango y. Por ejemplo,

$$\text{Si } x = 4 \quad \text{entonces} \quad y = (4)^2 + 2(4) = 24$$
$$\text{Si } x = -\tfrac{1}{3} \quad \text{entonces} \quad y = (-\tfrac{1}{3})^2 + 2(-\tfrac{1}{3}) = -\tfrac{5}{9}$$

Así, se puede ver a la ecuación (1) como una función con regla de correspondencia

$$y = x^2 + 2x \qquad x^2 + 2x \text{ corresponde a } x$$

o, equivalentemente, como una función con un conjunto de pares ordenados

$$\{(x, y) \mid y = x^2 + 2x, \quad x \text{ un número real}\}$$

La variable x que se llama *variable independiente*, indica cuáles valores se pueden asignar "independientemente" a cada x del dominio. La variable y se llama *variable dependiente*, indica qué valores de y "dependen" del valor asignado a x y a una ecuación dada. En general, cualquier variable que se usa como un compartimiento para los valores del dominio se llama **variable independiente**; cualquier variable que se usa como un compartimiento para los valores de rango se llama **variable dependiente**.

¿Qué ecuaciones se pueden usar para definir a las funciones?

Funciones definidas por ecuaciones

En una ecuación con dos variables, si a cada valor de la variable independiente le corresponde exactamente un valor de la variable dependiente, entonces la ecuación define a una función.

Si a cualquier valor de la variable independiente le corresponde más de un valor de la variable dependiente, entonces la ecuación no define a una función.

EJEMPLO 2 **Establecimiento de si una ecuación define a una función**

Observe las siguientes ecuaciones y determine cuáles definen funciones con variables independientes x y dominio en todos los números reales:

(A) $y^3 - x = 1$ (B) $y^2 - x^2 = 9$

Soluciones (A) Al despejar para la variable dependiente y, se tiene

$$y^3 - x = 1 \tag{2}$$
$$y^3 = 1 + x$$
$$y = \sqrt[3]{1 + x}$$

Como $1 + x$ es un número real para cada número real x, y puesto que cada número real tiene exactamente una raíz cúbica real, la ecuación (2) asigna exactamente un valor de la variable dependiente, $y = \sqrt[3]{1 + x}$, para cada valor de la variable independiente x. Así, la ecuación (2) define a una función.

(B) Al despejar para la variable dependiente y, se tiene

$$y^2 - x^2 = 9 \tag{3}$$
$$y^2 = 9 + x^2$$
$$y = \pm\sqrt{9 + x^2}$$

Como $9 + x^2$ es siempre un número real positivo, y puesto que cada número real positivo tiene dos raíces cuadradas reales, a cada valor de la variable independiente x le corresponden dos valores de la variable dependiente, $y = -\sqrt{9 + x^2}$ y $y = \sqrt{9 + x^2}$. Así, la ecuación (3) no define a una función.

Problema seleccionado 2 Determine cuáles de las siguientes ecuaciones definen funciones con variable independiente x y dominio en todos los números reales:

(A) $y^2 + x^4 = 4$ (B) $y^3 - x^3 = 3$

Observe que se ha estado usando la frase "una ecuación define a una función" más que "una ecuación es una función". Ésta es una distinción técnica diferente, pero se emplea en forma consistente en la literatura matemática, es por eso que se adoptará en este texto.

Es muy fácil determinar si una ecuación define a una función si ésta tiene la gráfica de la ecuación. Las dos ecuaciones que se han considerado en el ejemplo 2 están graficadas en la figura 1.

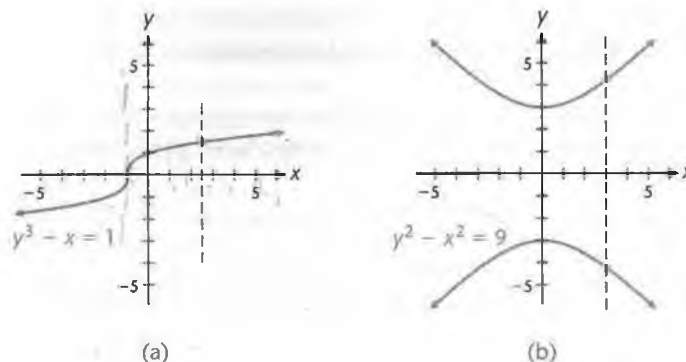


FIGURA 1 Gráficas de ecuaciones y prueba de la recta vertical.

En la figura 1(a), cada recta vertical intersecta la gráfica de la ecuación $y^3 - x = 1$ en exactamente un punto. Esto demuestra que a cada valor de la variable independiente x le corresponde exactamente un valor de la variable dependiente y, y confirma nuestra conclusión de que esta ecuación define a una función. Por otra parte, la figura 1(b) muestra que existen rectas verticales que intersectan la gráfica de $y^2 - x^2 = 9$ en dos puntos. Esto indica que existen valores de la variable independiente x que corresponden a dos diferentes valores de la variable dependiente y, lo cual confirma nuestra conclusión de que esta ecuación no define a una función. Estas observaciones se resumen en el teorema 1.

Teorema 1 **Prueba de la recta vertical para una función**

Una ecuación define a una función si cada recta vertical en el sistema coordenado rectangular pasa a lo más por un punto de la gráfica de la ecuación.

Si una recta vertical pasa por dos o más puntos de la gráfica de una ecuación, entonces la ecuación no define a una función.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 La definición de una función especifica que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un elemento en el rango.

(A) Dé un ejemplo de una función tal que a cada elemento del rango le correspondan exactamente dos elementos del dominio.

(B) Dé un ejemplo de una función tal que a cada elemento del rango le corresponda exactamente un elemento del dominio.

En el ejemplo 2, el dominio está dado en el enunciado del problema. En otros casos, no será así. A menos que se establezca lo contrario, se adoptará la siguiente convención para considerar dominios y rangos de funciones definidas por ecuaciones:

> **Convenciones sobre los dominios y rangos**
>
> Si una función está definida por una ecuación y el dominio no está indicado, entonces se debe suponer que el dominio está en el conjunto de todos los números reales de reemplazo de la variable independiente que producen *valores reales* para la variable dependiente. El rango es el conjunto de todos los valores de la variable dependiente que corresponden a esos valores del dominio.

EJEMPLO 3 **Determinación del dominio de una función**

Encuentre el dominio de una función definida por la ecuación $y = \sqrt{x - 3}$, suponiendo que x es la variable independiente.

Solución Para y real, $x - 3$ debe ser más grande o igual que 0. Es decir,

$$x - 3 \geq 0 \quad \text{o} \quad x \geq 3$$

Así,

$$\text{Dominio: } \{x \mid x \geq 3\} \;\text{ o }\; [3, \infty)$$

Observe que en algunos casos se omitirá la notación de conjunto y se escribirá simplemente $x \geq 3$ en lugar de $\{x \mid x \geq 3\}$.

Problema seleccionado 3 Encuentre el dominio de la función definida por la ecuación $y = \sqrt{x + 5}$, suponiendo que x es la variable independiente.

• Notación de función

Se usarán las literales para nombrar a las funciones y proporcionar una notación muy importante y conveniente para definir a las funciones. Por ejemplo, si f es el nombre de la función definida por la ecuación $y = 2x + 1$, entonces, en lugar de las representaciones más formales

$$f\colon y = 2x + 1 \qquad \text{Regla de correspondencia}$$

o

$$f\colon \{(x, y) \mid y = 2x + 1\} \qquad \text{Conjunto de pares ordenados}$$

se escribe simplemente

$$f(x) = 2x + 1 \qquad \text{Notación de función}$$

El símbolo $f(x)$ se lee "f de x", "f en x", o "el valor de f en x" y representa el número en el rango de la función f para la cual los valores del dominio x están relacionados. Así, $f(3)$ es el valor de rango para la función f asociado con el valor del dominio 3. Se encuentra este valor del rango reemplazando x por 3 donde x esté en la definición de la función

$$f(x) = 2x + 1$$

$2x + 1 \geq 0$
$2x \geq -1$
$x \geq -1/2$

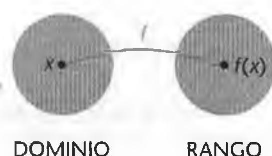
y se evalúa el lado derecho,

$$\begin{aligned} f(3) &= 2 \cdot 3 + 1 \\ &= 6 + 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

El enunciado $f(3) = 7$ indica de manera concisa que a la función f se le asigna el valor del rango 7 al valor del dominio 3 o, de manera equivalente, que el par ordenado (3, 7) pertenece a f.

El símbolo $f: x \rightarrow f(x)$, se lee "f transforma a x en $f(x)$", esto también se usa para denotar la relación entre el valor del dominio x y el valor del rango $f(x)$ (véase figura 2). Si se escribe $y = f(x)$, se supone que x es una variable independiente y que y y $f(x)$ representan a la variable dependiente.

FIGURA 2 Notación de función.



La función f "transforma" a los valores del dominio x en los valores del rango $f(x)$.

Otras literales distintas de f y x se pueden usar para representar funciones y variables independientes. Por ejemplo,

$$g(t) = t^2 - 3t + 7$$

define a g como una función de la variable independiente t. Para encontrar $g(-2)$, se reemplaza a t por -2 si t está en el dominio

$$g(t) = t^2 - 3t + 7$$

y se evalúa el lado derecho:

$$\begin{aligned} g(-2) &= (-2)^2 - 3(-2) + 7 \\ &= 4 + 6 + 7 \\ &= 17 \end{aligned}$$

Así, la función g asigna el valor del rango 17 al valor del dominio -2; el par ordenado $(-2, 17)$ pertenece a g.

Es importante entender y recordar la definición del símbolo $f(x)$:

DEFINICIÓN 3 **El símbolo $f(x)$**

El símbolo $f(x)$ representa al número real en el rango de la función f correspondiente al valor de dominio x. Simbólicamente, f: $x \to f(x)$. El par ordenado $(x, f(x))$ pertenece a la función f. Si x es un número real que no está en el dominio de f, entonces f **no está definida** en x y $f(x)$ **no existe**.

EJEMPLO 4 **Evaluación de funciones**

Para

$$f(x) = \frac{15}{x-3} \qquad g(x) = 16 + 3x - x^2 \qquad h(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

encuentre:

(A) $f(6)$ (B) $g(-7)$ (C) $h(10)$ (D) $f(0) + g(4) - h(-3)$

Solución (A) $f(6) = \dfrac{15}{6-3} = \dfrac{15}{3} = 5$

(B) $g(-7) = 16 + 3(-7) - (-7)^2 = 16 - 21 - 49 = -54$

(C) $h(10) = \sqrt{25 - 10^2} = \sqrt{25 - 100} = \sqrt{-75}$

Pero $\sqrt{-75}$ no es un número real. Ya que se ha acordado restringir el dominio de una función a los valores de x que produzcan valores reales para la función, 10 no está en el dominio de h y $h(10)$ no está definida.

(D) $f(0) + g(4) - h(-3)$

$$= \frac{15}{0-3} + [16 + 3(4) - 4^2] - \sqrt{25 - (-3)^2}$$

$$= \frac{15}{-3} + 12 - \sqrt{16}$$

$$= -5 + 12 - 4 = 3$$

Problema seleccionado 4 Use las funciones del ejemplo 4 para encontrar:

(A) $f(-2)$ (B) $g(6)$ (C) $h(-8)$ (D) $\dfrac{f(8)}{h(4)}$

EJEMPLO 5 **Determinación de los dominios de las funciones**

Encuentre los dominios de las funciones f, g y h:

$$f(x) = \frac{15}{x-3} \qquad g(x) = 16 + 3x - x^2 \qquad h(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

Soluciones

Dominio de f

La fracción $15/(x - 3)$ representa un número real para todos los reemplazos de x por un número real excepto en $x = 3$, ya que la división entre 0 no está definida. Así, $f(3)$ no existe, y el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excepto el 3. Frecuentemente se indicará esto al escribir

$$f(x) = \frac{15}{x-3} \qquad x \neq 3$$

Dominio de g

El dominio es R, el conjunto de todos los números reales, ya que $16 + 3x - x^2$ representa un número real para todos los reemplazos de x por números reales.

Dominio de h

El dominio es el conjunto de todos los números reales x, tales que $\sqrt{25 - x^2}$ es un número real; es decir, tales que $25 - x^2 \geq 0$. Resolviendo $25 - x^2 = (5 - x)(5 + x) \geq 0$ con los métodos analizados en la sección 2-8, se encuentra

$$\text{Dominio: } -5 \leq x \leq 5 \quad \text{o} \quad [-5, 5]$$

Problema seleccionado 5 Encuentre los dominios de las funciones F, G y H:

$$F(x) = x^2 + 5x - 2 \qquad G(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x+3}} \qquad H(x) = \frac{4}{x-2}$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3 Sean x y h números reales.

(A) Si $f(x) = 4x + 3$, qué parte de lo siguiente es verdadero:
 (1) $f(x + h) = 4x + 3 + h$
 (2) $f(x + h) = 4x + 4h + 3$
 (3) $f(x + h) = 4x + 4h + 6$

(B) Si $g(x) = x^2$, qué parte de lo siguiente es verdadero
 (1) $g(x + h) = x^2 + h$
 (2) $g(x + h) = x^2 + h^2$
 (3) $g(x + h) = x^2 + 2hx + h^2$

(C) Si $M(x) = x^2 + 4x + 3$, describa las operaciones que se deban realizar para evaluar $M(x + h)$.

Además de evaluar las funciones con números específicos, también es importante poder evaluar funciones de expresiones que impliquen una o más variables. Por ejemplo, la **diferencia de cocientes**

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad x \text{ y } x+h \text{ en el dominio de } f,\ h \neq 0$$

que se estudia extensamente en un curso de cálculo.

EJEMPLO 6 **Evaluación y simplificación de una diferencia de cocientes**

Para $f(x) = x^2 + 4x + 5$, encuentre y simplifique:

(A) $f(x + h)$ (B) $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$

Solución (A) para encontrar $f(x + h)$, se reemplaza x por $x + h$ en todo lugar que éste aparezca en la ecuación que define a f y simplifique:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^2 + 4(x+h) + 5 \\ &= x^2 + 2xh + h^2 + 4x + 4h + 5 \end{aligned}$$

(B) Se usa el resultado del inciso (A), para obtener

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{x^2+2xh+h^2+4x+4h+5-(x^2+4x+5)}{h} \\ &= \frac{x^2+2xh+h^2+4x+4h+5-x^2-4x-5}{h} \\ &= \frac{2xh+h^2+4h}{h} = \frac{h(2x+h+4)}{h} = 2x+h+4 \end{aligned}$$

Problema seleccionado 6 Repita el ejemplo 6 para $f(x) = x^2 + 3x + 7$.

PRECAUCIÓN

1. Si f es una función, entonces el símbolo $f(x + h)$ representa al valor de f en el número $x + h$ y se debe evaluar reemplazando la variable independiente en la ecuación que define a f con la expresión $x + h$, como se hizo en el ejemplo 6. No se debe confundir esta notación con la notación algebraica familiar para la multiplicación:

$f(x + h) \neq fx + fh$ $f(x + h)$ está en notación de función.

$4(x + h) = 4x + 4h$ $4(x + h)$ está en notación de multiplicación algebraica.

2. Existe otra interpretación común incorrecta del símbolo $f(x+h)$. Si f es una función arbitraria, entonces

$$f(x+h) \neq f(x) + f(h)$$

Es posible encontrar algunas funciones particulares para las cuales $f(x+h) = f(x) + f(h)$ es un enunciado verdadero, pero en general estas dos expresiones no son iguales.

• Aplicación

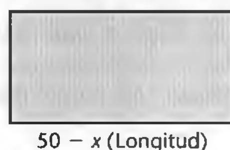
EJEMPLO 7 Construcción

Se desea hacer un comedero para cabras en forma rectangular con 100 metros de cerca.

(A) Si x representa el ancho del comedero, exprese esta área $A(x)$ en términos de x.
(B) ¿Cuál es el dominio de la función A (determinado por las restricciones físicas)?

Soluciones

(A) Dibuje una figura y marque los lados.



Perímetro = 100 metros de malla
Semiperímetro = 50
Si x = ancho, entonces $50 - x$ = longitud

$$A(x) = (\text{Ancho})(\text{Longitud}) = x(50 - x)$$

(B) Para hacer un comedero, x debe ser positivo; pero x también debe ser menor de 50 (o la longitud no existirá). Así,

Dominio: $0 < x < 50$ Notación de desigualdad
$(0, 50)$ Notación de intervalo

Problema seleccionado 7 Trabaje nuevamente con el ejemplo 7 suponiendo además que se usa un gran establo como uno de los lados del comedero.

• Una historia breve del concepto de función

La historia del uso de las funciones en matemáticas ilustra la tendencia de los matemáticos a extender y generalizar cada concepto. La palabra "función" fue usada por primera vez por Leibniz en 1694 para establecer cualquier cantidad asociada con una curva. En 1718, Johann Bernoulli consideró a una función como cualquier expresión hecha de constantes y variables. Posteriormente en el mismo siglo, Euler consideró a una función como cualquier ecuación hecha de constantes y variables. Euler extendió el uso de la muy importante notación $f(x)$, aunque su origen por lo general se le atribuye a Clairaut (1734).

La forma de la definición de función que se ha usado hasta el siglo XX (muchos textos aún contienen esta definición) fue formulada por Dirichlet (1805-1859). Él estableció que, si dos variables x y y están relacionadas de manera que a cada valor de x le corresponde exactamente un valor de y, entonces se dice que y es una función (univaluada) de x. Dirichlet determinó a x, la variable a la cual se le asignarían valores, variable independiente, y y a la variable cuyos valores dependen de los valores asignados a x, variable dependiente. A los valores supuestos para x les llamó dominio de la función, y a los correspondientes valores supuestos para y, rango de la función.

Ahora, como el conjunto de conceptos se usa en casi todas las matemáticas, se tiene la definición más general de función que se presenta en esta sección en términos de conjunto de pares ordenados de elementos.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) S no define una función
(B) T define una función con dominio $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y rango $\{0, 1, 2\}$
2. (A) No define una función (B) Define una función
3. $x \geq -5$ Notación de desigualdad
$[5, \infty)$ Notación de intervalo
4. (A) -3 (B) -2 (C) No existe (D) 1
5. Dominio de F: todos los números reales
Dominio de G: $x < -3$ o $x \geq 2$ Notación de desigualdad
$(-\infty, -3) \cup [2, \infty)$ Notación de intervalo
Dominio de H: Todos los números reales excepto el 2
6. (A) $x^2 + 2xh + h^2 + 3x + 3h + 7$ (B) $2x + h + 3$
7. (A) $A(x) = x(100 - 2x)$ (B) Dominio: $0 < x < 50$ Notación de desigualdad
$(0, 50)$ Notación de intervalo

EJERCICIO 2-3

A

Indique si cada tabla de los problemas del 1 al 6 define una función.

1.

Dominio	Rango
−1	1
0	2
1	3

2.

Dominio	Rango
2	1
4	3
6	5

3.

Dominio	Rango
1	3
3	5
	7
5	9

4.

Dominio	Rango
−1	0
−2	5
−3	8

5.

Dominio	Rango
−1	
0	3
1	
2	

6.

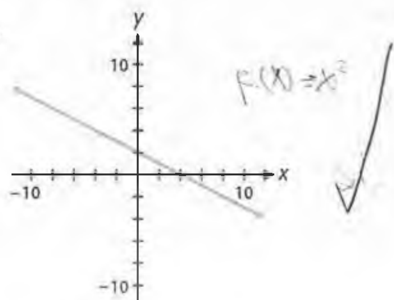
Dominio	Rango
2	8
3	
4	9
5	

Indique si cada uno de los conjuntos de los problemas del 7 al 12 definen a una función. Encuentre el dominio y el rango de cada función.

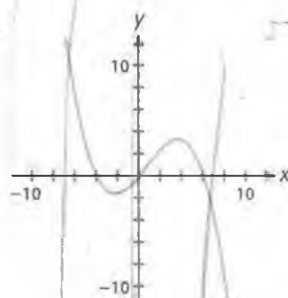
7. $\{(2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 10)\}$
8. $\{(-1, 4), (0, 3), (1, 2), (2, 1)\}$
9. $\{(10, -10), (5, -5), (0, 0), (5, 5), (10, 10)\}$
10. $\{(-10, 10), (-5, 5), (0, 0), (5, 5), (10, 10)\}$
11. $\{(0, 1), (1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$
12. $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$

Indique si cada una de las gráficas de los problemas del 13 al 18 es la gráfica de una función.

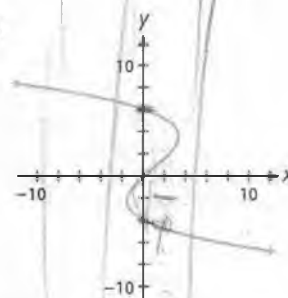
13.



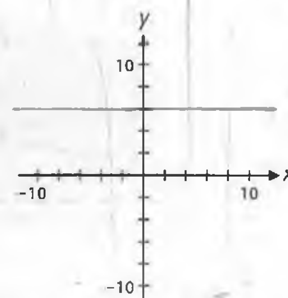
14.



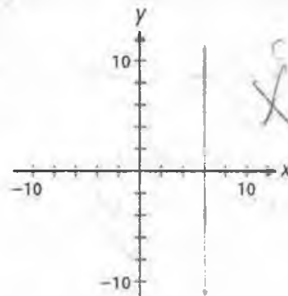
15.



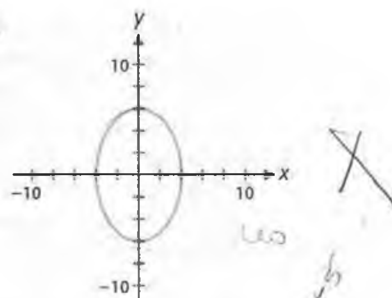
16.



17.



18.



Los problemas del 19 al 28 se refieren a las funciones

$$f(x) = 3x - 5 \qquad g(t) = 4 - t$$
$$F(m) = 3m^2 + 2m - 4 \qquad G(u) = u - u^2$$

Evalúe como se le indica.

19. $f(-1)$ **20.** $g(6)$

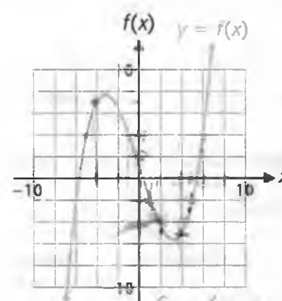
21. $G(-2)$ **22.** $F(-3)$

23. $F(-1) + f(3)$ **24.** $G(2) - g(-3)$

25. $2F(-2) - G(-1)$ **26.** $3G(-2) + 2F(-1)$

27. $\dfrac{f(0) \cdot g(-2)}{F(-3)}$ **28.** $\dfrac{g(4) \cdot f(2)}{G(1)}$

En los problemas del 29 al 32, use la siguiente gráfica de una función f para determinar a x o y al entero más cercano, como se indica. Algunos problemas pueden tener más de una respuesta.



29. $y = f(-4)$ **30.** $y = f(4)$

31. $4 = f(x)$ **32.** $-2 = f(x)$

B

Determine cuáles de las ecuaciones de los problemas del 33 al 42 definen una función con variable independiente x. Para aquellas que lo hagan, encuentre el dominio. Para aquellas que no lo hagan, encuentre un valor de x que corresponda a más de un valor de y.

33. $2x - 5y = 20$ **34.** $6y - 3x = 24$

35. $y^2 - x = 2$ **36.** $y - x^2 = 2$

37. $|x| + y^2 = 5$ 38. $x^2 + |y| = 5$

39. $xy - 5y = 10$ 40. $x + 4y + xy = 3$

41. $x^2 + y^2 = 81$ 42. $16x^2 + y^2 = 16$

En los problemas del 43 al 56, encuentre el dominio de la función indicada.

43. $f(x) = 3x + 8$ 44. $g(x) = -2x + 11$

45. $h(x) = \sqrt{x + 2}$ 46. $k(x) = \sqrt{4 - x}$

47. $s(x) = \dfrac{2 + 3x}{4 - x}$ 48. $m(x) = \dfrac{3 - 5x}{7 + x}$

49. $n(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x^2 - 2x - 8}$ 50. $p(x) = \dfrac{x^2 + 11}{x^2 + 3x - 10}$

51. $F(x) = \sqrt{4 - x^2}$ 52. $G(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

53. $H(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ 54. $K(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$

55. $L(x) = \sqrt{\dfrac{5 - x}{x - 2}}$ 56. $M(x) = \sqrt{\dfrac{x - 1}{6 - x}}$

El enunciado verbal "la función f multiplica el cuadrado del elemento del dominio por 3 y después resta 7 del resultado" y el enunciado algebraico "$f(x) = 3x^2 - 7$" define a la misma función. En los problemas del 57 al 60, traduzca cada definición verbal de una función en una definición algebraica.

57. La función g resta 5 del doble del cubo del elemento del dominio.

58. La función f multiplica al elemento del dominio por -3 y le suma 4 al resultado.

59. La función G multiplica la raíz cuadrada del elemento del dominio por 2 y le resta el cuadrado del elemento del dominio al resultado.

60. La función F multiplica al cubo del elemento del dominio por -8 y le suma tres veces la raíz cuadrada de tres al resultado.

En los problemas del 61 al 64, traduzca cada definición algebraica de la función en una definición verbal.

61. $f(x) = 2x - 3$ 62. $g(x) = -2x + 7$

63. $F(x) = 3x^3 - 2\sqrt{x}$ 64. $G(x) = 4\sqrt{x} - x^2$

65. Si $F(s) = 3s + 15$, encuentre: $\dfrac{F(2 + h) - F(2)}{h}$

66. Si $K(r) = 7 + 4r$, encuentre: $\dfrac{K(1 + h) - K(1)}{h}$

67. Si $g(x) = 2 - x^2$, encuentre: $\dfrac{g(3 + h) - g(3)}{h}$

68. Si $P(m) = 2m^2 + 3$, encuentre: $\dfrac{P(2 + h) - P(2)}{h}$

69. Si $L(w) = -2w^2 + 3w - 1$, encuentre: $\dfrac{L(-2 + h) - L(-2)}{h}$

70. Si $D(p) = -3p^2 - 4p + 9$, encuentre: $\dfrac{D(-1 + h) - D(-1)}{h}$

71. Encuentre $f(x)$, dado que

$$f(x + h) = 2(x + h)^2 - 4(x + h) + 6.$$

72. Encuentre $g(x)$, dado que

$$g(x + h) = 5 - 7(x + h)^2 + 8(x + h)$$

73. Encuentre $m(x)$, dado que

$$m(x + h) = 4(x + h) - 3\sqrt{x + h} + 9$$

74. Encuentre $s(x)$, dado que

$$s(x + h) = 2\sqrt[3]{x + h} - 6(x + h) - 5$$

C

En los problemas del 75 al 82, encuentre y simplifique:

(A) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ *(B)* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

75. $f(x) = 3x - 4$ 76. $f(x) = -2x + 5$

77. $f(x) = x^2 - 1$ 78. $f(x) = x^2 + x - 1$

79. $f(x) = -3x^2 + 9x - 12$ 80. $f(x) = -x^2 - 2x - 4$

81. $f(x) = x^3$ 82. $f(x) = x^3 + x$

83. El área de un rectángulo es de 64 pulgadas cuadradas. Exprese el perímetro $P(w)$ como una función del ancho w y establezca el dominio.

84. El perímetro de un rectángulo es de 50 pulgadas. Exprese el área $A(w)$ como una función del ancho w y establezca el dominio.

85. La altura de un triángulo rectángulo es de 5 metros. Exprese la hipotenusa $h(b)$ como una función de la base b y establezca el dominio.

86. La altura de un triángulo rectángulo es de 4 metros. Exprese la base $b(h)$ como una función de la hipotenusa h y establezca el dominio.

APLICACIONES

La mayoría de las aplicaciones en esta sección están relacionadas con el cálculo. Así, los problemas son similares a los que se abordan en un curso de cálculo, pero se requiere, además, un análisis de las funciones.

87. **Función de costo.** Los costos fijos por día para producir una docena de donas son \$300, y los costos variables \$1.75. Si diariamente se producen x docenas, exprese el costo diario $C(x)$ como una función de x.

88. **Función de costo.** Los costos fijos por par de esquís producidos son \$3 750, y los costos variables \$68. Si todos los días se producen x pares de esquís, exprese el costo diario $C(x)$ como una función de x.

89. Física: rapidez. La distancia en pies que un objeto cae en el vacío está dada por $s(t) = 16t^2$, donde t es el tiempo en segundos. Encuentre:

(A) $s(0), s(1), s(2), s(3)$

(B) $\dfrac{s(2 + h) - s(2)}{h}$

(C) ¿Qué sucede en el inciso (B) cuando h tiende a 0? Interprete físicamente.

90. Física: rapidez. Un automóvil parte del reposo y viaja por una carretera recta y nivelada. La distancia en pies que viaja el automóvil está dada por $s(t) = 10t^2$, donde t es el tiempo en segundos. Encuentre:

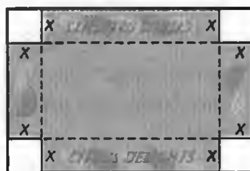
(A) $s(8), s(9), s(10), s(11)$

(B) $\dfrac{s(11 + h) - s(11)}{h}$

(C) ¿Qué sucede en el inciso (B) cuando h tiende a cero? Interprete físicamente.

91. Fabricación. Se va a hacer una caja para dulces con una pieza de cartón que mide 8 por 12 pulgadas. Se hacen cuadrados, de x pulgadas por lado, que después se cortan en cada una de las esquinas para después doblar los extremos hacia arriba (véase la figura). Encuentre una fórmula para el volumen de la caja $V(x)$ en términos de x. A partir de consideraciones prácticas, ¿cuál es el dominio de la función V?





92. Construcción. Un ranchero tiene 20 millas de malla para cercar un terreno de pastoreo en forma rectangular a lo largo de un río recto. Si no se requiriese cercar a lo largo del río y los lados perpendiculares al río tuvieran x millas de largo, encuentre una fórmula para el área $A(x)$ del rectángulo en términos de x. A partir de consideraciones prácticas, ¿cuál es el dominio de la función A?

93. El gerente de una clínica veterinaria quiere construir una perrera con cuatro corrales individuales, como se indica en la figura. La ley establece que cada corral debe tener una puerta de 3 pies de ancho y un área de 50 pies cuadrados. Si x es el ancho de un corral, exprese la cantidad total de malla $F(x)$ (excluyendo las puertas) requerida para construir la perrera como una función de x. Complete la siguiente tabla [redondee los valores de $F(x)$ a una cifra decimal]:

x	4	5	6	7
$F(x)$				

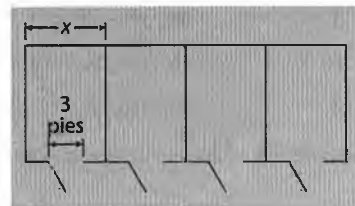
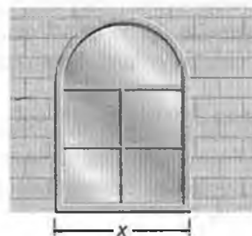


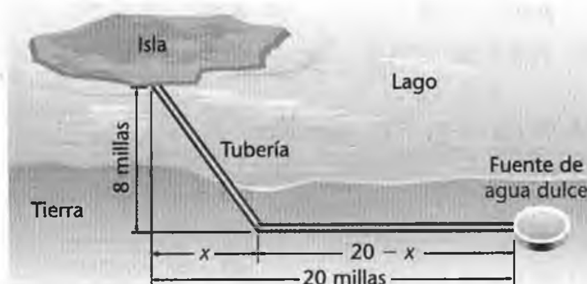
Figura para el ejercicio 93

94. Arquitectura. Un arquitecto quiere diseñar una ventana cuya área sea de 24 pies cuadrados, y tenga la forma de un rectángulo con un semicírculo montado, como se muestra en la figura. Si x es el ancho de la ventana, exprese el perímetro $P(x)$ de la ventana como una función de x. Complete la tabla de abajo [redondee cada valor de $P(x)$ a dos cifras decimales]:

x	4	5	6	7
$P(x)$				



95. Construcción. Una tubería de agua dulce va desde una fuente en la orilla de un lago a una pequeña comunidad de descanso en una isla a 8 millas de la costa, como se indica en la figura. El costo de colocar la tubería en la tierra es de $10 000 por milla y el de colocarla en el lago de $15 000. Exprese el costo total $C(x)$ para la construcción de la tubería como una función de x. A partir de consideraciones prácticas, ¿cuál es el dominio de la función C?



96. Clima. Se suelta un globo de observación en un punto a 10 millas de la estación que recibe su señal y se eleva verticalmente como se indica en la figura. Exprese la distancia $d(h)$ entre el globo y la estación de recepción como una función de la altitud h del globo.

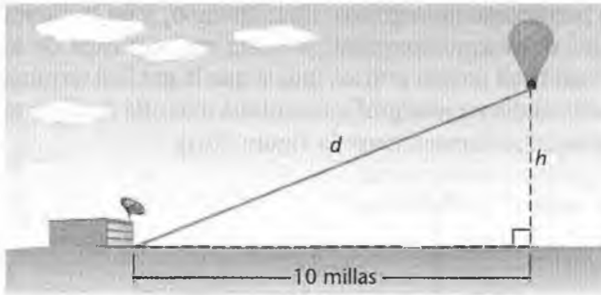


Figura para el ejercicio 96

97. Costos de operación. El costo de combustible por hora que un tren gasta en su recorrido es de $v^2/5$ dólares, donde v es la velocidad en millas por hora. (Note que el costo depende del cuadrado de la velocidad.) Otros costos, incluyendo el de mano de obra, son de $400 por hora. Exprese el costo total de un viaje de 500 millas como una función de la velocidad v.

98. Costos de operación. Refiérase al problema 97. Si al tren le toma t horas realizar un viaje de 500 millas, exprese el costo total como una función de t.

SECCIÓN 2-4 Gráficas de funciones



- Conceptos básicos
- Funciones lineales
- Funciones cuadráticas
- Funciones definidas en partes
- La función entero más grande

En esta sección se trata nuevamente a las gráficas de las ecuaciones lineales, esta vez se usan los conceptos de función introducidos en la sección anterior. También se desarrollan procedimientos para graficar funciones definidas por ecuaciones cuadráticas y funciones formadas por partes que unen a dos o más funciones. Se comenzará por analizar algunos conceptos generales relacionados con las gráficas de funciones.

• Conceptos básicos

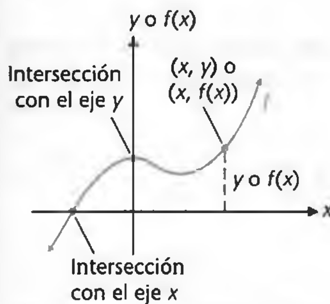


FIGURA 1 Gráfica de una función.

Cada función que tiene un dominio tiene un rango de números reales y una gráfica (la gráfica de los pares ordenados de números reales que constituyen la función). Cuando se grafican las funciones, los valores del dominio usualmente están asociados con el eje horizontal y el rango de valores con el eje vertical. Así, la **gráfica de una función f** es igual que la gráfica de la ecuación

$$y = f(x)$$

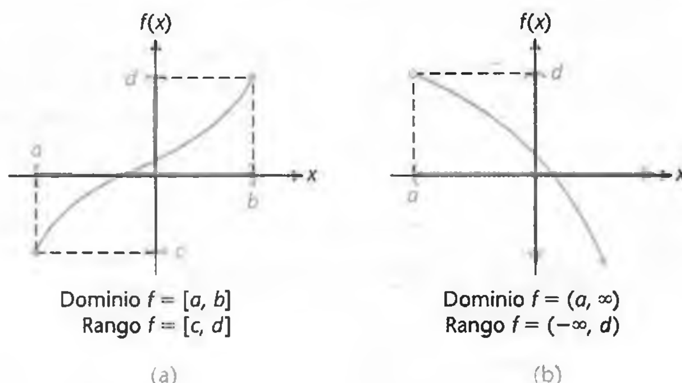
donde x es la variable independiente y la abscisa de un punto en la gráfica de f. Las variables y y $f(x)$ son variables dependientes, y también es la ordenada de un punto en la gráfica de f (véase la figura 1).

La abscisa de un punto en el que la gráfica de una función intersecta al eje x se denomina **intersección con el eje x** o **raíz** de la función. La intersección con el eje x es también una solución real o **raíz** de la ecuación $f(x) = 0$. La ordenada de un punto en el que la gráfica de una función cruza el eje y se denomina **intersección con el eje y** de la función. La intersección con el eje y está dada por $f(0)$, siempre que 0 esté en el dominio de f. Note que una función puede tener más de una intersección con el eje x, pero nunca puede tener más de una intersección con el eje y (una consecuencia de la prueba de la recta vertical que se analizó en la sección anterior).

El dominio de una función es el conjunto de todas las coordenadas x de los puntos en la gráfica de la función, y el rango es el conjunto de todas las coordenadas en el eje y. Es instructivo ver el dominio y rango como subconjuntos de los ejes coordenados como se verá en la figura 2. Observe el uso efectivo de la notación de intervalo describiendo el dominio y rango de las funciones en esta figura. En la figura 2(a) se usa un

punto sólido para indicar que un punto está en la gráfica de la función, y en la figura 2(b) se usa un punto abierto para indicar que un punto no está en la gráfica de la función. Un punto abierto o sólido al final de una gráfica indica que la gráfica termina ahí, mientras que una punta de flecha indica que la gráfica continúa más allá de la parte mostrada sin cambios significativos en su forma [véase la figura 2(b)].

FIGURA 2 Dominio o rango.



EJEMPLO 1 Determinación del dominio y rango de una gráfica

Encuentre el dominio y rango de la función f en la figura 3:

Solución

Los puntos en cada extremo de la gráfica de f indican que la gráfica termina en esos puntos. Así, las coordenadas x de los puntos en la gráfica están entre -3 y 6. El punto abierto en $(-3, 4)$ indica que -3 no está en el dominio de f, mientras que el punto cerrado $(6, -3)$ indica que 6 está en el dominio de f. Así,

$$\text{Dominio: } -3 < x \leq 6 \quad \text{o} \quad [-3, 6]$$

Las coordenadas y están entre -5 y 4, y, como antes, el punto abierto en $(-3, 4)$ indica que 4 no está en el rango de f y el punto cerrado en $(3, -5)$ indica que -5 está en el rango de f. Así,

$$\text{Rango: } -5 \leq y < 4 \quad \text{o} \quad [-5, 4]$$

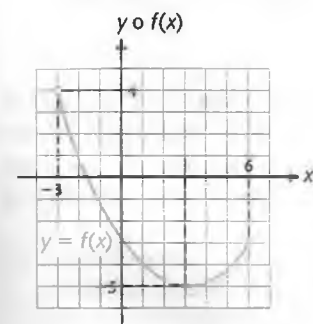


FIGURA 3

Problema seleccionado 1

Encuentre el dominio y rango de la función f dado por la gráfica de la figura 4.

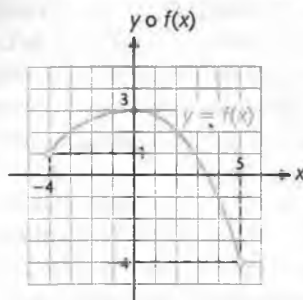


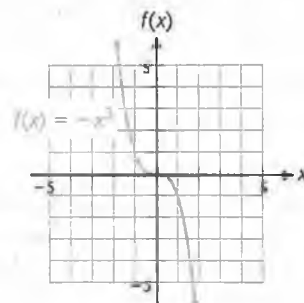
FIGURA 4

En general no se espera que pueda determinar el rango de cada función definida por una ecuación que encontrará en este curso, pero para ciertas funciones básicas reunidas en nuestra biblioteca de funciones elementales, es importante conocer el dominio y rango de cada una, y éstas se analizarán cuando se introduzcan las funciones elementales. Uno de los principales objetivos de este curso es proporcionarle una biblioteca de funciones matemáticas básicas, incluyendo sus gráficas y otras propiedades importantes. Éstas entonces se pueden usar para analizar gráficas y propiedades de una amplia variedad de funciones más complejas que surgen de manera natural en impor-

tantes aplicaciones. En esta sección se empieza este proceso introduciendo algo del lenguaje que se usa comúnmente para describir el comportamiento de una gráfica.

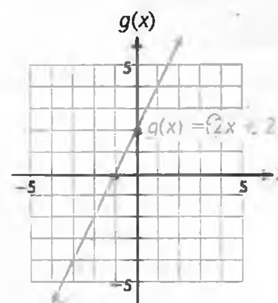
Ahora se verán las propiedades de aumento o disminución de las funciones. Intuitivamente, una función está aumentando sobre un intervalo I en su dominio y su gráfica aumenta conforme la variable independiente aumenta sobre I. Una función está disminuyendo sobre I si su gráfica desciende conforme la variable independiente aumenta sobre I (véase figura 5).

FIGURA 5 Funciones crecientes, decrecientes y constantes.



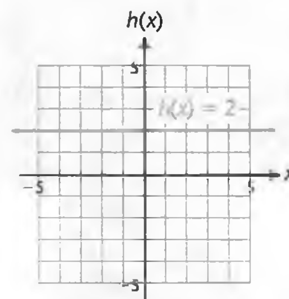
Decreciente en $(-\infty, \infty)$

(a)



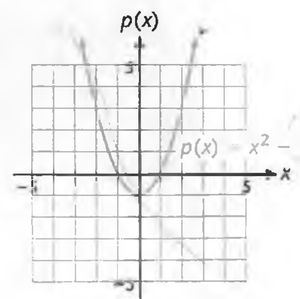
Decreciente en $(-\infty, \infty)$

(b)



Constante en $(-\infty, \infty)$

(c)



Decreciente en $(-\infty, 0]$
Creciente en $[0, \infty)$

(d)

De manera más formal, se definen las funciones crecientes, decrecientes o constantes como sigue:

DEFINICIÓN 1

Funciones crecientes, decrecientes y constantes

Sea I un intervalo en el dominio de una función f. Entonces:

1. f **es creciente** en I si $f(b) > f(a)$ siempre que $b > a$ en I.
2. f **es decreciente** en I si $f(b) < f(a)$ siempre que $b > a$ en I.
3. f **es constante** en I si $f(a) = f(b)$ para toda a y b en I.

• Funciones lineales

Ahora se aplicarán los conceptos generales analizados antes para especificar una clase de funciones conocidas como *funciones lineales*.

DEFINICIÓN 2 **Función lineal**

Una función f es una **función lineal** si

$$f(x) = mx + b \qquad m \neq 0$$

donde m y b son números reales.

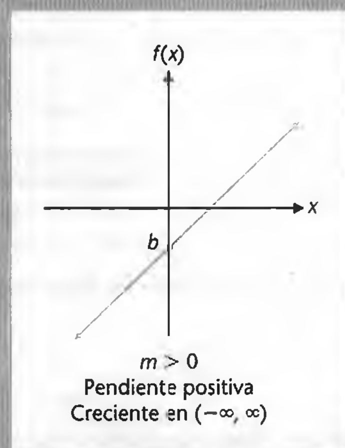
Graficar una función lineal es equivalente a graficar la ecuación

$$y = mx + b$$

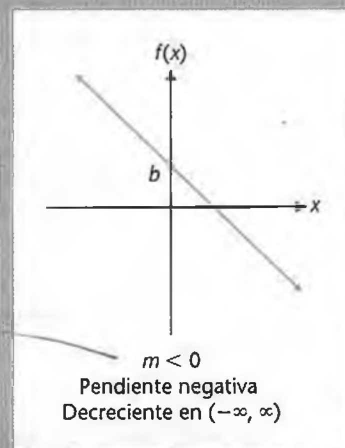
que se reconoce como la ecuación de una recta con pendiente m y b como intersección con el eje y. Como la expresión $mx + b$ representa un número real para todos los números reales de x; el dominio de una función lineal es el conjunto de todos los números reales. La restricción $m \neq 0$ en la definición de una función lineal implica que la gráfica no es una recta horizontal. Por consiguiente, el rango de una función lineal es también el conjunto de todos los números reales.

Gráfica de $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$

La gráfica de una función lineal f es una línea recta, no vertical y no horizontal con pendiente m e intersección con el eje y igual a b.



$m > 0$
Pendiente positiva
Creciente en $(-\infty, \infty)$



$m < 0$
Pendiente negativa
Decreciente en $(-\infty, \infty)$

Dominio: Todos los números reales — Rango: Todos los números reales

Ahora observe que hay dos tipos de rectas que no son gráficas de funciones lineales. Una recta vertical con ecuación $x = a$ no pasa la prueba de la recta vertical y no puede definir a una función. Una recta horizontal con ecuación $y = b$ pasa la prueba de la recta vertical y define una función. Sin embargo, una función de la forma

$$f(x) = b \qquad \text{Función constante}$$

se llama **función constante** y no una función lineal.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) ¿Es posible para una función lineal tener dos intersecciones con el eje x? ¿No hay intersecciones con el eje x? Si alguna de sus respuestas es positiva, dé un ejemplo.
(B) ¿Es posible para una función lineal tener dos intersecciones con el eje y? ¿No hay intersecciones con el eje y? Si alguna de sus respuestas es positiva, dé un ejemplo.
(C) Analice el número posible de intersecciones con el eje x y con el eje y para una función constante.

EJEMPLO 2 **Gráfica de una función lineal**

Encuentre la pendiente y las intersecciones, y después trace la gráfica de la función lineal definida por

$$f(x) = -\tfrac{2}{3}x + 4$$


Compruebe con un dispositivo de graficación.

Solución La intersección con el eje y es $f(0) = 4$, y la pendiente es $-\frac{2}{3}$. Para encontrar la intersección con el eje x, resuelva la ecuación $f(x) = 0$ para x:

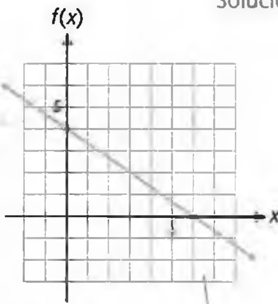


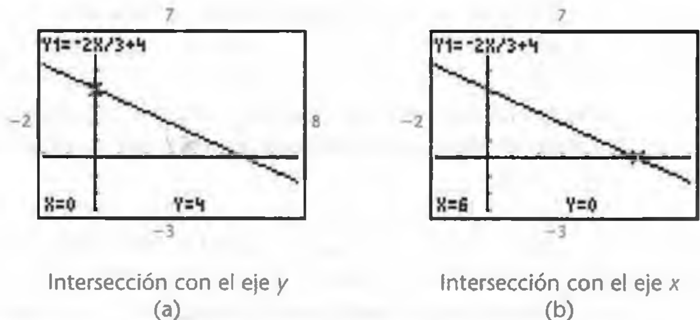
FIGURA 6

$$f(x) = 0$$
$$-\tfrac{2}{3}x + 4 = 0$$
$$-\tfrac{2}{3}x = -4$$
$$x = (-\tfrac{3}{2})(-4) = 6 \quad \text{Intersección en el eje } x$$

La gráfica de f se muestra en la figura 6


Para encontrar la intersección con el eje y con un dispositivo de graficación, evalúe simplemente la función en $x = 0$ [véase la figura 7(a)]. La mayoría de los dispositivos de graficación tienen un procedimiento preconstruido para aproximar a las intersecciones con el eje x, usualmente llamado *raíz* o *cero* de la función [véase figura 7(b)].

FIGURA 7



Intersección con el eje y
(a)

Intersección con el eje x
(b)

Problema seleccionado 2 Encuentre la pendiente y las intersecciones, y después trace la gráfica de la función lineal definida por

$$f(x) = \tfrac{3}{2}x - 6$$

• Funciones cuadráticas De la misma manera en que se usó el polinomio de primer grado $mx + b$, $m \neq 0$, para definir una función lineal, se usará el polinomio de segundo grado $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, para definir una *función cuadrática*.

DEFINICIÓN 3

Función cuadrática

Una función f es una **función cuadrática** si

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0 \tag{1}$$

donde a, b y c son números reales.

En la figura 8 se muestran las gráficas de tres funciones cuadráticas. La gráfica de una función cuadrática se llama **parábola**.

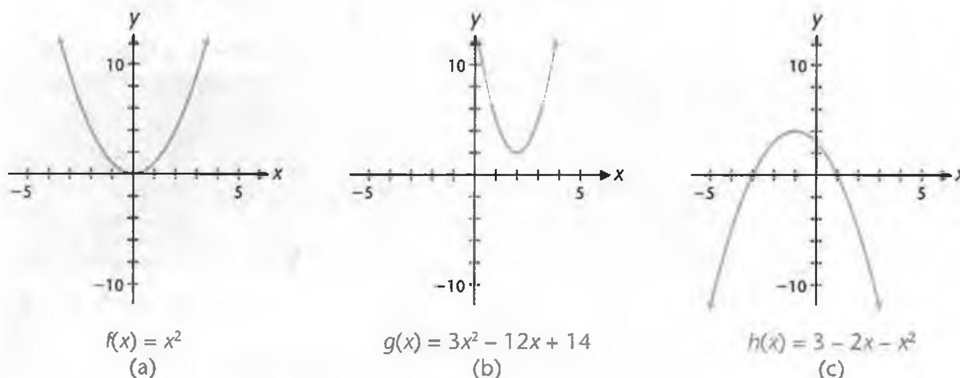


FIGURA 8 Gráficas de funciones cuadráticas.

Como la expresión $ax^2 + bx + c$ representa un número real para todo elemento el dominio de x:

> **El dominio de una función cuadrática es el conjunto de todos los números reales.**

El rango de una función cuadrática y muchas características importantes de esta gráfica se pueden determinar transformando primero la ecuación (1) al completar el cuadrado en la forma

$$f(x) = a(x - h)^2 + k \tag{2}$$

Un breve repaso de completar el cuadrado, que se analizó en la sección 1-6, sería de suma utilidad en este punto. Se ilustrará este método mediante un ejemplo y después se generalizarán los resultados.

Considere la función cuadrática dada por

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 4 \tag{3}$$

Se empezará por transformar la ecuación (3) en la forma (2) al completar el cuadrado como sigue:

$f(x) = 2x^2 - 8x + 4$	
$= 2(x^2 - 4x) + 4$	Factorice el coeficiente de x^2 de los dos primeros términos.
$= 2(x^2 - 4x + ?) + 4$	
$= 2(x^2 - 4x + 4) + 4 - 8$	Sume 4 para completar el cuadrado dentro del paréntesis. Pero como el 2 está fuera del paréntesis, se necesita en realidad sumar 8, de manera que se debe restar 8.
$= 2(x - 2)^2 - 4$	La transformación está completa.

Así,

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 4 \tag{4}$$

Si $x = 2$, entonces $2(x - 2)^2 = 0$ y $f(2) = -4$. Para cualquier otro valor de x, el número positivo $2(x - 2)^2$ se suma al número -4, de esta manera se hace más grande a $f(x)$. Por tanto,

$$f(2) = -4$$

es el *valor mínimo* de $f(x)$ para toda x (¡un resultado muy importante!). Es más, si se eligen dos valores cualesquiera, que estén equidistantes de la recta vertical $x = 2$, se obtendrán los mismos valores para la función. Por ejemplo $x = 1$ y $x = 3$ están a cada unidad de $x = 2$, y los valores correspondientes de la función son

$$f(1) = 2(-1)^2 - 4 = -2$$
$$f(3) = 2(1)^2 - 4 = -2$$

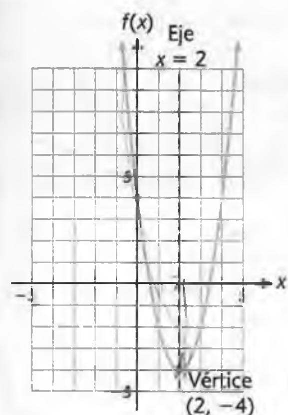


FIGURA 9 Gráfica de $f(x) = 2(x - 2)^2 - 4$.

En consecuencia, la recta vertical $x = 2$ es una recta de simetría. Es decir, si la gráfica se dibuja en una hoja de papel y el papel se dobla a lo largo de la recta $x = 2$, entonces los dos lados de la parábola se acoplarán perfectamente. Todos estos resultados se han ilustrado en las gráficas de las ecuaciones (3) o (4) y la recta $x = 2$ en el mismo sistema coordenado. (Véase figura 9.)

A partir del análisis anterior, se puede observar que si x se mueve de izquierda a derecha, $f(x)$ está decreciendo en $(-\infty, 2]$ y creciendo en $[2, \infty)$. Además, $f(x)$ puede tener valores más grandes o iguales a -4, pero no menores de -4. Así que,

$$\text{Rango de } f\text{: } y \geq -4 \quad \text{o} \quad [-4, \infty)$$

En general, la gráfica de una función cuadrática es una parábola con una recta de simetría paralela al eje vertical. El punto más bajo o más alto de la parábola, donde exista, se llama **vértice**. El valor máximo o mínimo de una función cuadrática siempre ocurre en el vértice de la parábola. La recta de simetría que pasa por el vértice se llama **eje** de la parábola. En el ejemplo anterior, $x = 2$ es el eje de la parábola y $(2, -4)$ es su vértice.

Observe los importantes resultados que se han obtenido al transformar la ecuación (3) en la ecuación (4):

El vértice de la parábola

El eje de la parábola

El valor mínimo de $f(x)$

El rango de la función f

Ahora, se explorará el efecto del cambio de las constantes a, h y k en la gráfica de $y = a(x - h)^2 + k$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Explore el efecto del cambio de las constantes a, h y k en la gráfica $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

(A) Sea $a = 1$ y $h = 5$. Grafique la función f para $k = -4, 0$ y 3 simultáneamente en el mismo sistema coordenado. Explique el efecto de cambiar k en la gráfica de f.
(B) Sea $a = 1$ y $k = 2$. Grafique la función f para $h = -4, 0$ y 5 simultáneamente en el mismo sistema coordenado. Explique el efecto de cambiar h en la gráfica de f.
(C) Sea $h = 5$ y $k = -2$. Grafique la función f para $a = 0.25$, 1 y 3 simultáneamente en el mismo sistema coordenado. Grafique la función f para $a = 1, -1$ y -0.25 simultáneamente en el mismo sistema coordenado.
(D) Analice los incisos A-C usando un dispositivo de graficación y la ventana de visión estándar.

El análisis anterior se generaliza para todas las funciones cuadráticas en el siguiente cuadro:

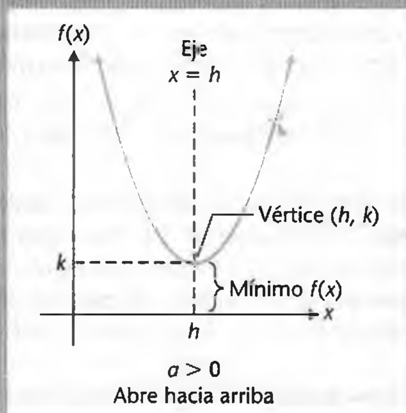
Propiedades de una función cuadrática y su gráfica

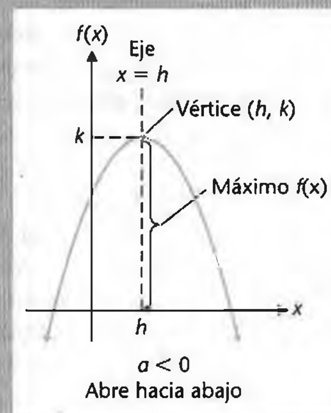
Dada una función cuadrática y la forma obtenida al completar el cuadrado

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k \qquad a \neq 0$$

se resumen las propiedades generales de la siguiente manera:

1. La gráfica de f es una parábola:





2. Vértice: (h, k). (La parábola aumenta en un lado del vértice y disminuye en el otro.)
3. Eje (de simetría): $x = h$. (Paralela al eje y.)

4. $f(h) = k$ es el mínimo si $a > 0$ y el máximo si $a < 0$.
5. Dominio: Todos los números reales.
6. Rango: $(-\infty, k]$ si $a < 0$ o $[k, \infty)$ si $a > 0$.

EJEMPLO 3 **Gráfica de una función cuadrática**

Grafique, encuentre el vértice, el eje, el máximo o mínimo de $f(x)$, los intervalos donde f está aumentando o disminuyendo y el rango.

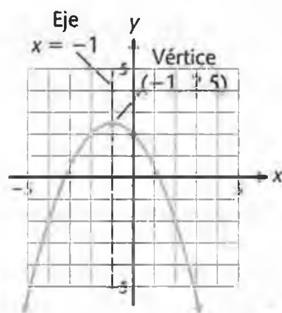
$$f(x) = -0.5x^2 - x + 2$$

Solución Complete el cuadrado:

$$\begin{aligned} f(x) &= -0.5x^2 - x + 2 \\ &= -0.5(x^2 + 2x + ?) + 2 \\ &= -0.5(x^2 + 2x + 1) + 2 + 0.5 \\ &= -0.5(x + 1)^2 + 2.5 \end{aligned}$$

A partir de la última forma se puede ver que $h = -1$ y $k = 2.5$. Así, el vértice está en $(-1, 2.5)$, el eje de simetría es $x = -1$, y el valor máximo es $f(-1) = 2.5$. Para graficar f, encuentre el eje y el vértice; después trace varios puntos en cada lado del eje (véase figura 10).

FIGURA 10



x	$f(x)$
−4	−2
−2	2
−1	2.5
0	2
2	−2

En la gráfica se ve que f está aumentando en $(-\infty, -1]$ y disminuye en $[-1, \infty)$. También, $y = f(x)$ puede ser cualquier número menor o igual a 2.5. Así, el rango de f es $y \le 2.5$ $(-\infty, 2.5]$.

Problema seleccionado 3 Grafique, encuentre el vértice, el eje, el máximo o mínimo de $f(x)$, los intervalos donde f está aumentando o disminuyendo y el rango.

$$f(x) = -x^2 + 4x - 4$$

Funciones definidas en partes

La **función valor absoluto** se puede definir usando la definición de valor absoluto de la sección 1-4:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Observe que esta función está definida por fórmulas diferentes para las diversas partes de su dominio. Las funciones cuyas definiciones implican más de una fórmula se llaman **funciones definidas en partes**. Como lo ilustra el siguiente ejemplo, las funciones definidas en partes ocurren de manera natural en muchas aplicaciones.

EJEMPLO 4 **Cargos por renta**

Una agencia de renta de autos cobra \$0.25 por milla si el total de millas recorridas no excede de 100. Si el total de millas recorridas excede a 100, la agencia carga \$0.25 por milla para las primeras 100 millas más \$0.15 por cada milla adicional recorrida. Si x representa el número de millas recorrido por un vehículo rentado, exprese el cargo por millas recorridas $C(x)$ como una función de x. Encuentre $C(50)$ y $C(150)$ y grafique a C.

Solución Si $0 \leq x \leq 100$, entonces

$$C(x) = 0.25x$$

Si $x > 100$, entonces

Cargo para las primeras 100 millas — Cargo para el millaje adicional

$$\begin{aligned} C(x) &= 0.25(100) + 0.15(x - 100) \\ &= 25 + 0.15x - 15 \\ &= 10 + 0.15x \end{aligned}$$

Así, se puede ver que C es una función definida en partes

$$C(x) = \begin{cases} 0.25x & \text{si } 0 \leq x \leq 100 \\ 10 + 0.15x & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

Las funciones definidas en partes se evalúan determinando primero cuál regla se va a aplicar y después usando la regla apropiada para encontrar el valor de la función. Por ejemplo, para evaluar $C(50)$, se usa la primera regla y se obtiene

$$C(50) = 0.25(50) = \$12.50 \qquad x = 50 \text{ satisface } 0 \leq x \leq 100$$

Para evaluar $C(150)$, se usa la segunda regla y se obtiene

$$C(150) = 10 + 0.15(150) = \$32.50 \qquad x = 150 \text{ satisface } x > 100$$

Para graficar C, se grafica cada regla en la definición para los valores indicados de x (véase la figura 11).

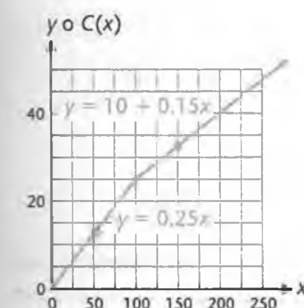


FIGURA 11

x	$y = 0.25x$
50	12.5
100	25

x	$y = 10 + 0.15x$
100	25
150	32.5

Observe que las dos fórmulas producen el mismo valor en $x = 100$ y que la gráfica de C no tiene cortes. De manera informal, una gráfica (o parte de una gráfica) se dice que es **continua** si no se corta o si no tiene separaciones. (Se puede encontrar una exposición formal de continuidad en un texto de cálculo.)

Problema seleccionado 4 Refiriéndose al ejemplo 4 encuentre $C(x)$ si la agencia carga $0.30 por milla cuando el total de millas recorridas no excede a 75, y $0.30 por milla para las primeras 75 millas, más $0.20 por cada milla adicional recorrida cuando el total de millas recorridas excede a 75. Encuentre $C(50)$ y $C(100)$ y grafique a C.

EJEMPLO 5 **Gráfica de una función que implica al valor absoluto.**

Grafique la función f dada por

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|}$$

y encuentre su dominio y rango.


Compruebe con un dispositivo de graficación.

Solución Ahora se usará la definición en partes de x para encontrar una definición en partes de f que no implique a x.

Si $x < 0$, entonces $x = -x$ y

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|} = x + \frac{x}{-x} = x - 1$$

Si $x = 0$, entonces f no está definida, ya que la división entre 0 no está permitida.
Si $x > 0$ entonces $x = x$ y

$$f(x) = x + \frac{x}{|x|} = x + \frac{x}{x} = x + 1$$

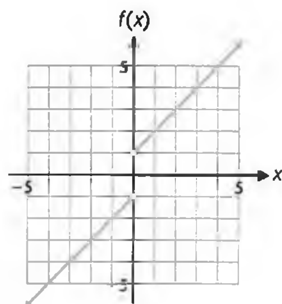


FIGURA 12

En consecuencia, una definición en partes para f es

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Dominio; } x \neq 0 \qquad \text{o} \qquad (-\infty, -0) \cup (0, \infty)$$

Se usa esta definición para graficar f como se muestra en la figura 12. Al examinar esta gráfica, se ve que $y = f(x)$ puede ser cualquier número menor que -1 o cualquier número mayor que 1. Así,

$$\text{Rango: } y < -1 \qquad \text{o} \qquad y > 1 \qquad \text{o} \qquad (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

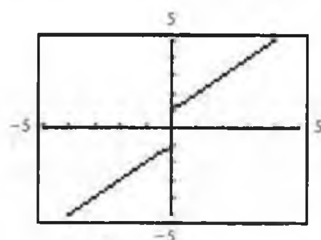


FIGURA 13

Observe que se han usado los puntos abiertos en la figura en $(0, -1)$ y $(0, 1)$ para indicar que estos puntos no pertenecen a la gráfica de f. Debido a la separación de la gráfica en $x = 0$, se dice que f es **discontinua** en $x = 0$.

La comprobación de esto se muestra en la figura 13. La mayoría de los dispositivos de graficación denotan al valor absoluto de la función por abs(x)(verifíquelo en su manual).

Problema seleccionado 5

Grafique la función f dada por

$$f(x) = -\frac{2x}{|x|} - x$$

y encuentre su dominio y rango.

• La función entero más grande

Se concluye esta sección con un análisis de una interesante y útil función llamada *función entero más grande*.

El **entero más grande** de un número real x, denotado por $[\![x]\!]$, es el entero n tal que $n \leq x < n + 1$; es decir, $[\![x]\!]$ es el entero más grande menor o igual a x. Por ejemplo:

$$[\![3.45]\!] = 3 \qquad [\![-2.13]\!] = -3 \quad \text{No es igual a } -2$$

$$[\![7]\!] = 7 \qquad [\![-8]\!] = -8$$

$$[\![0]\!] = 0$$

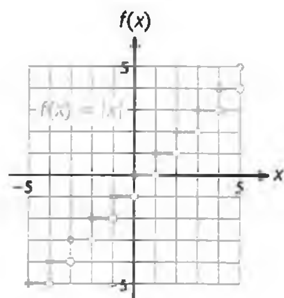
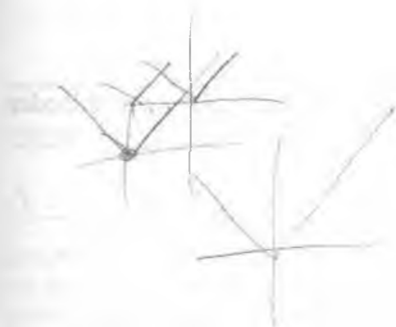


FIGURA 14 La función del entero más grande.

La **función entero más grande** f está definida por la ecuación $f(x) = [\![x]\!]$. En seguida se muestra una definición parte por parte de f para $-2 \leq x < 3$, y en la figura 14 se muestra una gráfica de f para $-5 \leq x \leq 5$. Como el dominio de f son todos los números reales, la definición por partes continúa indefinidamente en ambas direcciones como lo muestra el patrón de escalera de la figura. Así, el rango de f es el conjunto de todos los enteros. La función entero más grande es un ejemplo de una clase más general de funciones llamadas **funciones por pasos**.



$$f(x) = [\![x]\!] = \begin{cases} \vdots & \\ -2 & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

Se observa en la figura 14 que para cada valor entero de x hay una separación en la gráfica y entre los valores enteros de x no hay separación. Así, la función entero más grande es discontinua en cada entero n y continua en cada intervalo de la forma $[n, n + 1)$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3 La mayoría de los dispositivos de graficación denotan a la función entero más grande como int(x); aunque no todas se definen de la misma forma que la dada aquí. Grafique $y = \text{int}(x)$ para $-5 \leq x \leq 5$ y $-5 \leq y \leq 5$ y analice cualquier diferencia entre su gráfica y la figura 14. Si su dispositivo de graficación apoya un modo conectado y un modo de puntos para la graficación de funciones (consulte su manual), ¿qué modo es preferible usar para esta gráfica?

EJEMPLO 6 Ciencia de la computación

Sea

$$f(x) = \frac{[\![10x + 0.5]\!]}{10}$$

Encuentre:

(A) $f(6)$ (B) $f(1.8)$ (C) $f(3.24)$ (D) $f(4.582)$ (E) $f(-2.68)$

¿Qué operación desempeña esta función?

Soluciones

(A) $f(6) = \dfrac{[\![60.5]\!]}{10} = \dfrac{60}{10} = 6$

(B) $f(1.8) = \dfrac{[\![18.5]\!]}{10} = \dfrac{18}{10} = 1.8$

(C) $f(3.24) = \dfrac{[\![32.9]\!]}{10} = \dfrac{32}{10} = 3.2$

(D) $f(4.582) = \dfrac{[\![46.32]\!]}{10} = \dfrac{46}{10} = 4.6$

(E) $f(-2.68) = \dfrac{[\![-26.3]\!]}{10} = \dfrac{-27}{10} = -2.7$

Comparando los valores de x y $f(x)$ en la tabla 1, se concluye que esta función redondea las fracciones decimales al décimo más cercano.

Problema seleccionado 6

Sea $f(x) = [\![x + 0.5]\!]$. Encuentre:

(A) $f(6)$ (B) $f(1.8)$ (C) $f(3.24)$ (D) $f(-4.3)$ (E) $f(-2.69)$

¿Qué operación desempeña esta función?

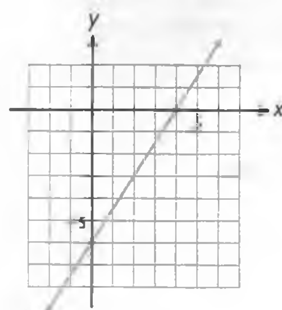
TABLA 1

x	$f(x)$
6	6
1.8	1.8
3.24	3.2
4. 582	4.6
–2.68	–2.7

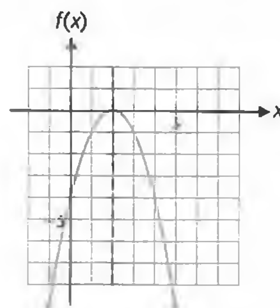
Respuestas a los problemas seleccionados

1. Dominio: $-4 < x < 5$
o $(-4, 5)$
Rango: $-4 < y \leq 3$
o $(-4, 3)$

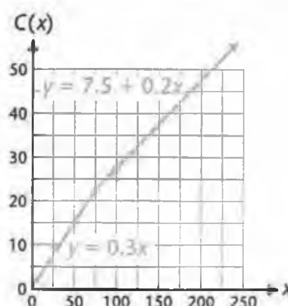
2. Intersección con el eje y: $f(0) = -6$
Intersección con el eje x: 4
Pendiente $\frac{2}{3}$



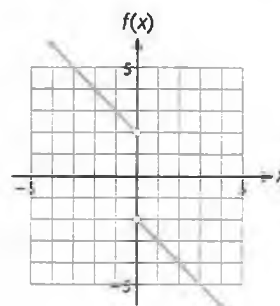
3. Eje: $x = 2$
Vértice: $(2, f(2))- = (2, 0)$
Máximo: $f(x)$; $f(2) = 0$
Crecimiento: $(-\infty, 2]$
Decrecimiento: $[2, \infty)$
Rango: $(-\infty, f(2)] = (-\infty, 0]$



4. $C(x) = \begin{cases} 0.3x & \text{si } 0 \leq x \leq 75 \\ 7.5 + 0.2x & \text{si } x > 75 \end{cases}$
$C(50) = \$15$; $C(100) = \$27.50$



5. $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x < 0 \\ -2 - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$
Dominio: $x \neq 0$ o $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$



6. (A) 6 (B) 2 (C) 3 (D) −4
(E) −3;
f se redondea a las fracciones decimales que más se acercan al entero.

EJERCICIO 2-4

A

Los problemas del 1 al 6 se refieren a las funciones f, g, h, k, p y q dadas en las siguientes gráficas. (Suponga que las gráficas continúan más allá de las partes mostradas como lo indica la figura.)

1. Para la función f, encuentre:

(A) Dominio
(B) Rango
(C) Intersección con el eje x
(D) Intersección con el eje y
(E) Intervalos en los cuales f está aumentando
(F) Intervalos en los cuales f está disminuyendo
(G) Intervalos en los cuales f es constante
(H) Cualquier punto de discontinuidad

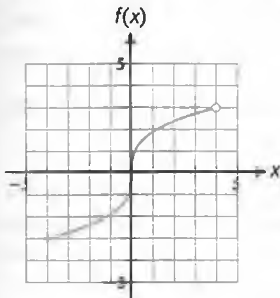
2. Repita el problema 1 para la función g.

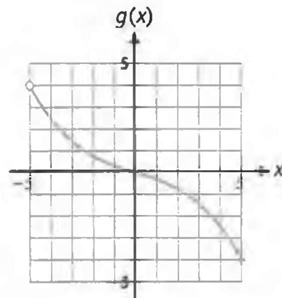
3. Repita el problema 1 para la función h.

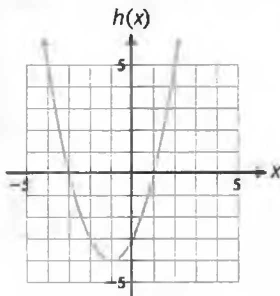
4. Repita el problema 1 para la función k.

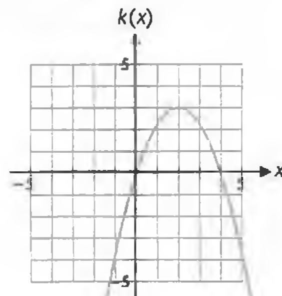
5. Repita el problema 1 para la función p.

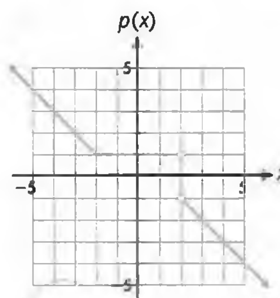
6. Repita el problema 1 para la función q.

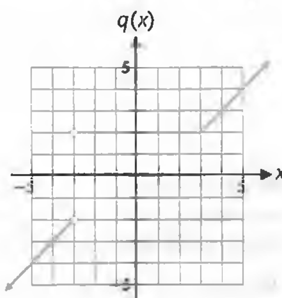












Los problemas del 7 al 12 describen la gráfica de una función continua f sobre el intervalo −5, 5. Trace la gráfica de la función que sea consistente con la información dada.

7. La función f es creciente en $[-5, -2]$, es constante en $[-2, -2]$ y decreciente en $[2, 5]$.

8. La función f es decreciente en $[-5, -2]$, es constante en $[-2, 2]$ y creciente en $[2, 5]$.

9. La función f es decreciente en $[-5, -2]$, es constante en $[-2, 2]$ y decreciente en $[2, 5]$.

10. La función f es creciente en $[-5, -2]$, constante en $[-2, 2]$ y creciente en $[2, 5]$.

11. La función f es decreciente en $[-5, -2]$, creciente en $[-2, 2]$ y decreciente en $[2, 5]$.

12. La función f es creciente en $[-5, -2]$, decreciente en $[-2, 2]$ y creciente en $[2, 5]$.

En los problemas del 13 al 16, encuentre la pendiente y las intersecciones, y después trace la gráfica.

13. $f(x) = 2x + 4$ **14.** $f(x) = 3x - 3$

15. $f(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{3}$ **16.** $f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{6}{5}$

En los problemas 17 y 18, encuentre una función lineal f que satisfaga las condiciones dadas.

17. $f(-2) = 7$ y $f(4) = -2$

18. $f(-3) = -2$ y $f(5) = 4$

B

En los problemas del 19 al 22, grafique, encuentre el eje, el vértice, el máximo o mínimo y el rango.

19. $f(x) = (x - 3)^2 + 2$

20. $f(x) = \frac{1}{2}(x + 2)^2 - 4$

21. $f(x) = -(x + 3)^2 - 2$

22. $f(x) = -(x - 2)^2 + 4$

En los problemas del 23 al 26, grafique, encuentre el eje, el vértice, las intersecciones con el eje x y con el eje y.

23. $f(x) = x^2 - 4x - 5$ **24.** $f(x) = x^2 - 6x + 5$

25. $f(x) = -x^2 + 6x$ **26.** $f(x) = -x^2 + 2x + 8$

En los problemas del 27 al 30, grafique, encuentre el eje, el vértice, los intervalos sobre los que es creciente, y los intervalos sobre los que es decreciente.

27. $f(x) = x^2 + 6x + 11$ **28.** $f(x) = x^2 - 8x + 14$

29. $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ **30.** $f(x) = -x^2 - 10x - 24$

En los problemas del 31 al 38, grafique, encuentre el dominio, el rango y cualquier punto de discontinuidad.

31. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ -x+1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -2 \le x < 1 \\ -x+2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -3 \le x < -1 \\ 4 & \text{si } -1 < x \le 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2 \le x < 2 \\ -3 & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -1 \\ x-2 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} -1-x & \text{si } x \le 2 \\ 5-x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

37. $g(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ -x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

38. $h(x) = \begin{cases} -x^2-2 & \text{si } x < 0 \\ x^2+2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

C

En los problemas del 39 al 44, grafique, encuentre el eje, el vértice, el máximo o mínimo de f(x), el rango, las intersecciones, los intervalos sobre los que es creciente y los intervalos sobre los que f es decreciente.

39. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$ **40.** $f(x) = 2x^2 - 12x + 14$

41. $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$ **42.** $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 10$

43. $f(x) = -2x^2 - 8x - 2$ **44.** $f(x) = -4x^2 - 4x - 1$

En los problemas del 45 al 50, encuentre una definición de función por partes de f que no implique la función valor absoluto (véase el ejemplo 5). Trace la gráfica y encuentre el dominio, el rango y cualquier punto de discontinuidad.

Compruebe sus gráficas de los problemas del 45 al 50 graficando la función dada de f con un dispositivo de graficación.

45. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ **46.** $f(x) = x|x|$

47. $f(x) = x + \dfrac{|x-1|}{x-1}$ **48.** $f(x) = x + 2\dfrac{|x+1|}{x+1}$

49. $f(x) = |x| + |x-2|$ **50.** $f(x) = |x| - |x-3|$

En los problemas del 51 al 56, escriba una definición para f (véase el análisis de la figura 14 en esta sección) y trace la gráfica de f. Incluya suficientes intervalos para ilustrar claramente la definición y la gráfica. Encuentre el dominio, el rango, y cualquier punto de discontinuidad.

Compruebe sus gráficas de los problemas 51 al 56 graficando la definición dada de f con un dispositivo de graficación.

51. $f(x) = [\![x/2]\!]$ **52.** $f(x) = [\![x/3]\!]$

53. $f(x) = [\![3x]\!]$ **54.** $f(x) = [\![2x]\!]$

55. $f(x) = x - [\![x]\!]$ **56.** $f(x) = [\![x]\!] - x$

57. Dado que f es una función cuadrática con mín $f(x) = f(2) = 4$, encuentre el eje, el vértice, el rango y las intersecciones con el eje x.

58. Dado que f es una función cuadrática con máx $f(x) = f(-3) = -5$, encuentre el eje, el vértice, el rango y las intersecciones con el eje x.

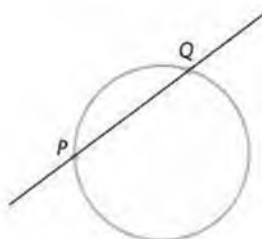
59. La función f es continua y creciente en el intervalo $[1, 9]$ con $f(1) = -5$ y $f(9) = 4$.
   (A) Trace una gráfica de f que sea consistente con la información dada.
   (B) ¿Cuántas veces su gráfica cruza al eje x? ¿Podría la gráfica cruzar más veces? ¿Menos veces? Apoye sus conclusiones con trazos adicionales y/o argumentos verbales.

60. Repita el problema 59 si la función no tiene que ser continua.

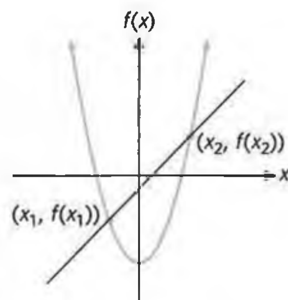
61. La función f es continua en el intervalo $[-5, 5]$ con $f(-5) = -4$, $f(1) = 3$, y $f(5) = -2$.
   (A) Trace una gráfica de f que sea consistente con la información dada.
   (B) ¿Cuántas veces cruza su gráfica al eje x? ¿Podría la gráfica cruzar más veces? ¿Menos veces? Apoye sus conclusiones con trazos adicionales y/o argumentos verbales.

62. Repita el problema 61 si f es continua en $[-8, 8]$ con $f(-8) = -6$, $f(-4) = 3$, $f(3) = -2$ y $f(8) = 5$.

*Los problemas del 63 al 66 están relacionados con cálculo. En geometría, una recta que intersecta a un círculo en dos puntos distintos, se llama recta secante, como se muestra en la figura (a). En cálculo, la recta que pasa por los puntos $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$ se llama **recta secante** para la gráfica de la función f, como se muestra en la figura (b).*



Recta secante para un círculo (a)



Recta secante para la gráfica de una función (b)

En los problemas 63 y 64, encuentre la ecuación de la recta secante que pasa por los puntos indicados en la gráfica de f. Grafique f y la recta secante en el mismo sistema coordenado.

63. $f(x) = x^2 - 4$; $(-1, -3)$, $(3, 5)$

64. $f(x) = 9 - x^2$; $(-2, 5), (4, -7)$

65. Sea $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Si h es un número real diferente de cero, entonces $(2, f(2))$ y $(2 + h, f(2 + h))$ son dos puntos distintos de la gráfica de f.

(A) Encuentre la pendiente de la recta secante que pasa por esos dos puntos.
(B) Evalúe la pendiente de una recta secante para $h = 1$, $h = 0.1$, $h = 0.01$ y $h = 0.001$. ¿A qué valor se va aproximando la pendiente?

66. Repita el problema 65 para $f(x) = x^2 + 2x - 6$.



Los problemas del 67 al 74 requieren del uso de un dispositivo de graficación.

En los problemas del 67 al 72, grafique primero las funciones f y g en la misma ventana de visión, después grafique m(x) y n(x) en su propia ventana de visión.

$$m(x) = 0.5[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$
$$n(x) = 0.5[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$$

67. $f(x) = -2x$, $g(x) = 0.5x$

68. $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = -0.5x - 4$

69. $f(x) = 5 - 0.2x^2$, $g(x) = 0.3x^2 - 4$

70. $f(x) = 0.15x^2 - 5$, $g(x) = 5 - 1.5|x|$

71. $f(x) = 0.2x^2 - 0.4x - 5$, $g(x) = 0.3x - 3$

72. $f(x) = 8 + 1.5x - 0.4x^2$, $g(x) = -0.2x + 5$

73. ¿Cómo podría caracterizar a la relación entre f, g y m en los problemas del 67 al 72? [*Sugerencia:* Véase el problema 89 en el ejercicio 2-4.]

74. ¿Cómo podría caracterizar la relación entre f, g y n en los problemas del 67 al 72? [*Sugerencia:* Véase el problema 90 en el ejercicio 2-4.]

APLICACIONES

75. Millas recorridas de un neumático. Una fábrica de neumáticos para automóvil recopila en la tabla 1 los datos que relacionan la presión del neumático x, en libras por pulgada cuadrada (lb/pulg²) y las millas recorridas, en miles de millas.

TABLA 1

x	28	30	32	34	36
Millaje	45	52	55	51	47

Un modelo matemático para estos datos esta dado por

$$f(x) = -0.518x^2 + 33.3x - 481$$

(A) Complete la tabla 2. Redondee los valores de $f(x)$ a una cifra decimal.

TABLA 2

x	28	30	32	34	36
Millaje	45	52	55	51	47
$f(x)$					

(B) Trace la gráfica de f y los datos de las millas recorridas en los mismos ejes.
(C) Use los valores de la función de modelación redondeado a dos cifras decimales para calcular las millas recorridas por un neumático que tiene presión de 31 lb/pulg². Y para 35 lb/pulg².
(D) Describa brevemente la relación entre la presión y las millas recorridas.

76. Producción de automóviles. La tabla 3 enumera la producción total de vehículos de la compañía General Motors de Estados Unidos en millones de unidades de 1989 a 1993.

TABLA 3

Año	89	90	91	92	93
Producci ó	4.7	4.1	3.5	3.7	5.0

Un modelo matemático para los datos de producción de la compañía General Motors está dado por

$$f(x) = 0.33x^2 - 1.3x + 4.8$$

donde $x = 0$ corresponde a 1989.

(A) Complete la tabla 4. Redondee los valores de x a una cifra decimal.

TABLA 4

x	0	1	2	3	4
Producci ó	4.7	4.1	3.5	3.7	5.0
$f(x)$					

(B) Trace la gráfica de f y los datos de producción en los mismos ejes.
(C) Use los valores de la función del modelo f, redondee a dos cifras decimales para calcular la producción en 1994 y en 1995.
(D) Describa en forma verbal la producción de General Motors de 1989 a 1993.

77. Física: fuerza de un resorte. La ley de Hooke establece que la relación entre el alargamiento s de un resorte y el peso w que causa el alargamiento es lineal (un principio en el cual se basa la construcción de las básculas de resortes). Un peso de 10 libras estira un resorte una pulgada, mientras que cuando no hay peso el alargamiento es cero.

(A) Encuentre una función lineal f: $s = f(w) = mw + b$ que represente esta relación. [*Sugerencia:* Los puntos (10, 1) y (0, 0) no están en la gráfica de f].
(B) Encuentre $f(15)$ y $f(30)$; es decir, el alargamiento del resorte para pesos de 15 y 30 libras respectivamente.
(C) ¿Cuál es la pendiente de la gráfica de f? (La pendiente indica el aumento en el alargamiento por cada libra de aumento en peso.)
(D) Grafique f para $0 \le w \le 40$.

78. Negocios y depreciación. Una compañía compró una computadora electrónica en \$20 000 y supuso que su valor de recuperación es de \$2 000 después de 10 años. Su valor se deprecia linealmente de \$20 000 a \$2 000.

(A) Encuentre la función lineal f: $V = f(t)$ que relaciona al valor V, en dólares, con el tiempo t en años.
(B) Encuentre $f(4)$ y $f(8)$, los valores de la computadora después de 4 y 8 años respectivamente.
(C) Encuentre la pendiente de la gráfica de f. (La pendiente indica la disminución en el valor por año.)
(D) Grafique f para $0 \le t \le 10$.

***79. Comisiones por ventas.** Un vendedor de aparatos recibe un salario base de \$200 a la semana y una comisión del 4% por todas las ventas de \$3 000 que hace durante la semana. Además, si las ventas por semana son de \$8 000 o más, el vendedor recibe un bono de \$100. Si x representa las ventas por semana (en dólares), exprese los ingresos por semana $E(x)$ como una función de x, y trace su gráfica. Identifique cualquier punto de discontinuidad. Encuentre $E(5\,750)$ y $E(9\,200)$.

***80. Cargos por servicio.** En los fines de semana y días feriados, un servicio de emergencia de plomería cobra \$2.00 por minuto para los primeros 30 minutos de un servicio a domicilio y \$1.00 por minuto por cada minuto adicional. Si x representa la duración de un servicio a domicilio en minutos, exprese el cargo total del servicio $S(x)$ como una función de x, y trace su gráfica. Identifique cualquier punto de discontinuidad. Encuentre $S(25)$ y $S(45)$.

81. Construcción. Se va a construir una perrera rectangular con 100 pies de malla.

(A) Si x representa el ancho de la perrera, exprese su área $A(x)$ en términos de x.
(B) Considerando las limitaciones físicas, ¿cuál es el dominio de la función A?
(C) Grafique la función para este dominio.
(D) Determine las dimensiones del rectángulo que va a formar el área máxima.

82. Construcción. Trabaje nuevamente con el problema 81, pero ahora suponga que se va a usar una cerca que ya existe para un lado del corral. (Sea x = Ancho; véase la figura).



83. Ciencias de la computación. Sea $f(x) = 10[\![0.5 + x/10]\!]$. Evalúe f en 4, −4, 6, −6, 24, 25, 247, −243, −245 y −246. ¿Qué operación realiza esta función?

84. Ciencias de la computación. Sea $f(x) = 100[\![0.5 + x/100]\!]$. Evalúe f en 40, −40, 60, −60, 740, 750, 7 551, −601, −649 y −651. ¿Qué operación realiza esta función?

***85. Ciencias de la computación.** Use la función del entero más grande para definir una función f que redondee a los números reales al centésimo más cercano.

***86. Ciencias de la computación.** Use la función del entero más grande para definir una función f que redondee los números reales al milésimo más cercano.

87. Cargos por entrega. Un servicio de entrega de paquetes por todo el país carga \$15 por la entrega nocturna de paquetes que pesan una libra o menos. Cada libra de más (o fracción) cuesta \$3. Sea $C(x)$ el cargo por entrega nocturna de un paquete que pesa x libras.

(A) Escriba una definición por partes de C para $0 < x \le 6$, y trace a mano la gráfica de la función C.
(B) ¿Puede usarse la función f definida por $f(x) = 15 + 3[\![x]\!]$ para calcular los cargos por entrega para toda x, $0 < x \le 6$? Justifique su respuesta.

88. Cargos de teléfonos. Se han cargado llamadas de los números 900 a un usuario. Una línea con el número 900 que proporciona consejos y sugerencias para juegos de video, cobra \$4 por el primer minuto de la llamada y \$2 por cada minuto adicional (o fracción de éste). Sea $C(x)$ el cargo para una llamada de x minutos.

(A) Escriba una definición por partes de C para $0 < x \le 6$, y dibuje a mano la gráfica de C.
(B) ¿Puede usarse la función f definida por $f(x) = 4 + 2[\![x]\!]$ para calcular los cargos para toda x, $0 < x \le 6$? Justifique su respuesta.

****89. Renta de autos.** Una agencia de renta de autos renta 300 automóviles diarios a una tarifa de \$40 por día. Por cada \$1 de aumento en la tarifa se rentan cinco autos menos. ¿A qué tarifa se tendrían que rentar para producir el máximo ingreso? ¿Cuánto es el ingreso máximo?

****90. Ingresos por rentas.** Un hotel de Las Vegas con 400 cuartos se llena cada noche a toda su capacidad a \$70 por habitación. Por cada \$1 de aumento en la renta, se rentan cuatro cuartos menos. Si en cada cuarto rentado se gastan \$10 en servicios por día, ¿cuánto debería cobrar el gerente por cada cuarto para maximizar la ganancia? ¿Cuánto es la máxima ganancia?

91. **Física. Un acróbata está planeando saltar en motocicleta de una rampa a otra como se ilustra en la figura. Las rampas miden 10 pies de altura, y la distancia entre ambas es de 80 pies. La trayectoria de la motocicleta en el aire está dada por la gráfica de

$$f(x) = \frac{1}{4}x - \left(\frac{16}{v^2}\right)x^2$$

donde v es la velocidad de la motocicleta en pies por segundo cuando ésta deja la rampa.

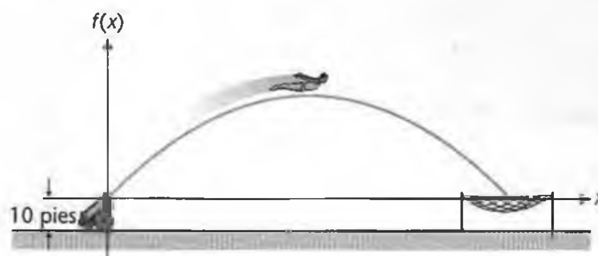


(A) ¿Con qué rapidez debe viajar la motocicleta cuando deja la rampa para seguir la trayectoria que se ilustra en la figura?
(B) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la motocicleta cuando sigue esta trayectoria?

92. **Física. La trayectoria que sigue un acróbata de circo cuando es disparado por un cañón está dada por la gráfica de la función

$$f(x) = x - \frac{1}{100}x^2$$

Tanto el cañón como la malla están a 10 pies de altura (véase la figura).



(A) ¿A qué distancia del cañón debe estar el centro de la malla para que el acróbata caiga en ese lugar?
(B) ¿Cuál es la altura máxima; con respecto al suelo, que alcanza el acróbata?

SECCIÓN 2-5 Combinación de funciones



- Operaciones en funciones
- Composición
- Funciones elementales
- Desplazamientos horizontales y verticales
- Reflexiones, expansiones y contracciones

Si dos funciones f y g están definidas para todos los números reales x, y si $f(x)$ y $g(x)$ son ambos números reales, entonces es posible realizar operaciones numéricas reales como la suma, resta, multiplicación o división con $f(x)$ y $g(x)$. Además, si $g(x)$ es un número en el dominio de f, entonces también es posible evaluar a f en $g(x)$. En esta sección se verá cómo efectuar operaciones en los valores de las funciones que se puedan usar para definir operaciones en las mismas funciones. También se investigan las implicaciones gráficas de algunas de estas operaciones.

• Operaciones en funciones

Las funciones f y g dadas por

$$f(x) = 2x + 3 \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 - 4$$

están definidas para todos los números reales. Así, para cualquier número real x se pueden realizar las siguientes operaciones:

$$f(x) + g(x) = 2x + 3 + x^2 - 4 = x^2 + 2x - 1$$
$$f(x) - g(x) = 2x + 3 - (x^2 - 4) = -x^2 + 2x + 7$$
$$f(x)g(x) = (2x + 3)(x^2 - 4) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$$

Para $x \neq \pm 2$ se puede también formar el cociente

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 3}{x^2 - 4} \qquad x \neq \pm 2$$

Observe que el resultado de cada operación es una nueva función. Así, se tiene

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x - 1 \qquad \text{Suma}$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + 2x + 7 \qquad \text{Diferencia}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 8x - 12 \qquad \text{Producto}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x + 3}{x^2 - 4} \quad x \neq \pm 2 \qquad \text{Cociente}$$

Observe que la suma, diferencia y producto de funciones están definidas para todos los valores de x, como se hizo con f y g, pero el dominio de la función cociente debe ser restringido a excluir aquellos valores donde $g(x) = 0$.

DEFINICIÓN 1 **Operaciones en funciones**

La **suma**, **diferencia**, **producto** y **cociente** de las funciones f y g son las funciones definidas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{Función suma}$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{Función diferencia}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{Función producto}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x) \neq 0 \qquad \text{Función cociente}$$

Cada función está definida en la intersección de los dominios de f y g, excepto que los valores de x donde $g(x) = 0$ se deben excluir del dominio de la función cociente.

EJEMPLO 1 **Determinación de las funciones suma, resta, producto y cociente**

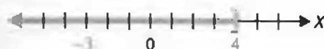
Sea $f(x) = \sqrt{4 - x}$ y $g(x) = \sqrt{3 + x}$. Encuentre las funciones $f + g, f - g, fg$ y f/g, y encuentre sus dominios.

Solución

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{3 + x}$$
$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{4 - x} - \sqrt{3 + x}$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \sqrt{4 - x}\sqrt{3 + x}$$
$$= \sqrt{(4 - x)(3 + x)}$$
$$= \sqrt{12 + x - x^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{4-x}}{\sqrt{3+x}} = \sqrt{\frac{4-x}{3+x}}$$

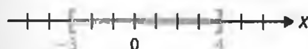
Dominio de f



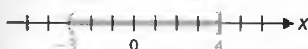
Dominio de g



Dominio de $f + g$, $f - g$, y fg



Dominio de $\frac{f}{g}$



Los dominios de f y g son

$$\text{Dominio de } f\text{: } x \le 4 \text{ o } (-\infty, 4]$$

$$\text{Dominio de } g\text{: } x \ge -3 \text{ o } [-3, \infty)$$

La intersección de estos dominios es

$$(-\infty, 4] \cap [-3, \infty) = [-3, 4]$$

Éste es el dominio de las funciones $f + g$, $f - g$ y fg. Como $g(-3) = 0$, $x = -3$ este punto se debe excluir del dominio de la función cociente. Así,

$$\text{Dominio de } \frac{f}{g}\text{: } (-3, 4)$$

Problema seleccionado 1 Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{10 - x}$. Encuentre las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g, y encuentre sus dominios.

Composición

Considere la función h dada por la ecuación

$$h(x) = \sqrt{2x + 1}$$

Dentro del radical hay un polinomio de primer grado que define a una función lineal. Como la función h es en realidad una combinación de una función raíz cuadrada y de una función lineal. Esto se puede ver más claramente como sigue. Sea

$$u = 2x + 1 = g(x)$$

$$y = \sqrt{u} = f(u)$$

Entonces

$$h(x) = f[g(x)]$$

Se dice que la función h está *compuesta* por dos funciones f y g. (Hablando vagamente, se puede pensar que h es una función de una función.) ¿Qué se puede decir acerca del dominio de h dados los dominios de f y g? Formando la función compuesta $h(x) = f[g(x)]$: **x debe estar restringida a que x esté en el dominio de g y $g(x)$ esté en el dominio de f.** Puesto que el dominio de f, donde $f(u) = \sqrt{u}$, es el conjunto de todos los números reales no negativos, se ve que $g(x)$ debe ser no negativo; es decir,

$$g(x) \ge 0$$

$$2x + 1 \ge 0$$

$$x \ge -\tfrac{1}{2}$$

Así, el dominio de h es este dominio restringido de g.

Un símbolo de función especial se usa frecuentemente para representar a la *función compuesta de dos funciones*, las cuales se definen en términos generales de la siguiente manera.

DEFINICIÓN 2

Funciones compuestas

Dadas las funciones f y g, entonces $f \circ g$ se llamada **compuesta** y se define por la ecuación

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números reales x en el dominio de g donde $g(x)$ está en el dominio de f.

Como consecuencia inmediata de la definición 2, se tiene (véase figura 1):

El dominio de $f \circ g$ es siempre un subconjunto del dominio de g, y el rango de $f \circ g$ es siempre un subconjunto del rango de f.

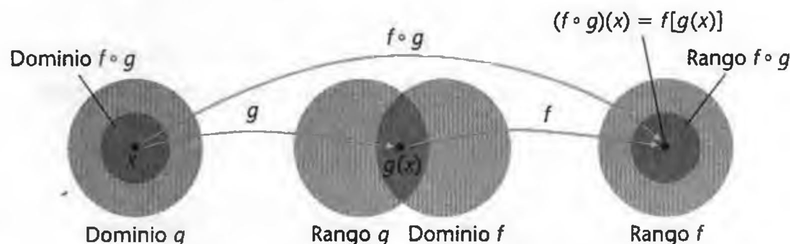


FIGURA 1 Composición de funciones.

EJEMPLO 2

Determinación de la composición de dos funciones

Encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ y sus dominios para $f(x) = x^{10}$ y $g(x) = 3x^4 - 1$.

Solución

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x^4 - 1) = (3x^4 - 1)^{10}$$
$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(x^{10}) = 3(x^{10})^4 - 1 = 3x^{40} - 1$$

Las funciones f y g están definidas para todos los números reales. Si x es cualquier número real, entonces x está en el dominio de g, $g(x)$ está en el dominio de f, y, en consecuencia, x está en el dominio de $f \circ g$. Así, el dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números reales. Usando razonamientos similares, el dominio $g \circ f$ también es el conjunto de todos los números reales.

Problema seleccionado 2 Encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ y sus dominios para $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = (x - 1)/2$.

Si dos funciones están definidas para todos los números reales, entonces también lo está su composición.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Verifique que si $f(x) = 1/(1 - 2x)$ y $g(x) = 1/x$, entonces $(f \circ g)(x) = x/(x - 2)$. Claramente $f \circ g$ no está definido en $x = 2$. ¿Hay algunos otros valores de x donde $f \circ g$ no está definido? Explique.

Si alguna función en una composición no está definida para algunos números reales, entonces como se ilustra en el ejemplo 3, puede ser que el dominio de la composición no sea el que pensó primero que sería.

EJEMPLO 3 Determinación de la composición de dos funciones

Encuentre $(f \circ g)(x)$ y su dominio para $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{3 - x}$.

Solución Se empieza por establecer los dominios de f y g, como una buena práctica en cualquier problema de composición:

$$\text{Dominio } f\text{: } -2 \le x \le 2 \quad \text{o} \quad [-2, 2]$$

$$\text{Dominio } g\text{: } x \le 3 \quad \text{o} \quad (-\infty, 3]$$

Ahora se encuentra la composición:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f[g(x)] = f(\sqrt{3 - x}) \\ &= \sqrt{4 - (\sqrt{3 - x})^2} \\ &= \sqrt{4 - (3 - x)} \qquad (\sqrt{t})^2 = t,\ t \ge 0 \\ &= \sqrt{1 + x}\end{aligned}$$

Aun cuando $\sqrt{1 + x}$ está definida para toda $x \ge -1$, se debe restringir el dominio de $f \circ g$ a aquellos valores que también están en el dominio de g. Así,

$$\text{Dominio } f \circ g\text{: } x \ge -1 \text{ y } x \le 3 \quad \text{o} \quad [-1, 3]$$

Problema seleccionado 3 Encuentre $(f \circ g)(x)$ y su dominio para $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$.

PRECAUCIÓN

El dominio de $f \circ g$ no siempre se puede determinar examinando simplemente la forma final de $(f \circ g)(x)$. Cualesquiera de los números que están excluidos del dominio de g deben ser excluidos también del dominio de $f \circ g$.

En cálculo, éste no sólo es importante para poder encontrar la composición de dos funciones, sino también para reconocer cuando una función dada es la composición de dos funciones más simples.

EJEMPLO 4 Reconocimiento de formas compuestas

Exprese h como una composición de dos funciones más simples para

$$h(x) = (3x + 5)^5$$ Dom(h)

Solución Si se hace que $f(x) = x^5$ y $g(x) = 3x + 5$, entonces

$$h(x) = (3x + 5)^5 = f(3x + 5) = f[g(x)] = (f \circ g)(x)$$

y se ha expresado h como la composición de f y g.

Problema seleccionado 4 Exprese h como una composición de la función raíz cuadrada y una función lineal para $h(x) = \sqrt{4x - 7}$.

• Funciones elementales

Las funciones

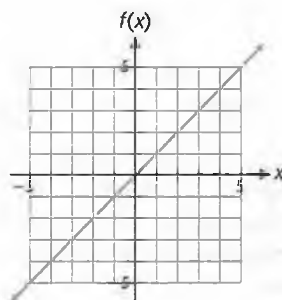
$$g(x) = x^2 - 4 \qquad h(x) = (x - 4)^2 \qquad k(x) = -4x^2$$

pueden obtenerse de la función $f(x) = x^2$ realizando operaciones simples en f:

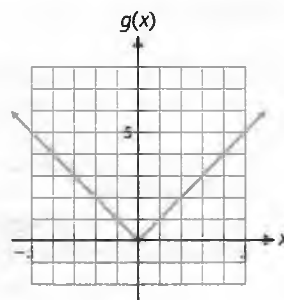
$$g(x) = f(x) - 4 \qquad h(x) = f(x - 4) \qquad k(x) = -4f(x)$$

Se concluye que las gráficas de funciones g, h y k están muy relacionadas con la gráfica de la función f. Antes de explorar relaciones de este tipo, se quiere identificar algunas funciones elementales, resumir sus propiedades básicas, e incluirlas en nuestra biblioteca de funciones elementales. La figura 2 muestra seis funciones básicas que se pueden encontrar con frecuencia. Si usted conociera la definición, dominio y rango de cada una podría trazar sus gráficas.

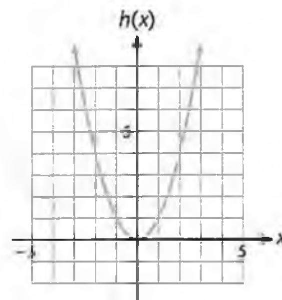
FIGURA 2 Algunas funciones básicas y sus gráficas. [*Nota*: Las letras usadas para designar estas funciones pueden variar dependiendo del contexto; R es el conjunto de todos los números reales.]



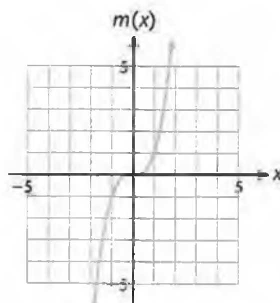
Función identidad
$f(x) = x$
Dominio: R
Rango: R
(a)



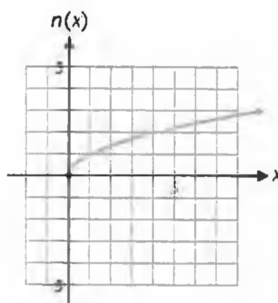
Función valor absoluto
$g(x) = |x|$
Dominio: R
Rango: $[0, \infty)$
(b)



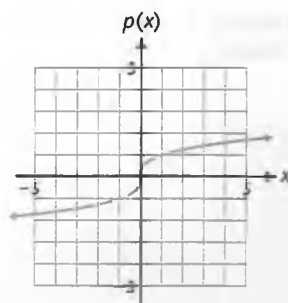
Función cuadrada
$h(x) = x^2$
Dominio: R
Rango: $[0, \infty)$
(c)



Función cúbica
$m(x) = x^3$
Dominio: R
Rango: R
(d)



Función raíz cuadrada
$n(x) = \sqrt{x}$
Dominio: $[0, \infty)$
Rango: $[0, \infty)$
(e)



Función raíz cúbica
$g(x) = \sqrt[3]{x}$
Dominio: R
Rango: R
(f)

Desplazamientos horizontales y verticales

¿Cómo son las gráficas de $y = (f + g)(x)$, $y = (fg)(x)$, y $y = (f \circ g)(x)$ relacionadas con las gráficas de $y = f(x)$ y $y = g(x)$? En general, ésta es una pregunta difícil de contestar. Sin embargo, si g se elige como una función muy simple, tal como $g(x) = k$ o $g(x) = x + h$, entonces se pueden establecer algunas relaciones muy útiles entre la gráfica de $y = f(x)$ y las gráficas de $y = f(x) + k$, $y = kf(x)$, y $y = f(x + h)$. A la gráfica obtenida al realizar una de estas operaciones sobre una función f se le conoce como **transformación** de la gráfica de $y = f(x)$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Sea $f(x) = |x|$.

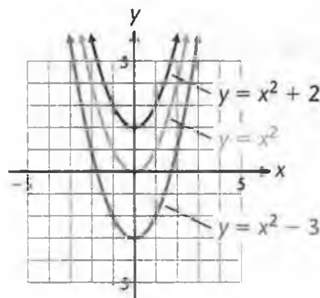
(A) Grafique $y = f(x) + k$ para $k = -2$, 0 y 1 simultáneamente en el mismo sistema coordenado. Describa la relación entre la gráfica de $y = f(x)$ y la gráfica de $y = f(x) + k$ para k, cualquier número real.
(B) Grafique $y = f(x + h)$ para $h = -2$, 0 y 1 simultáneamente en el mismo sistema coordenado. Describa la relación entre la gráfica de $y = f(x)$ y la gráfica de $y = f(x + h)$ para h cualquier número real.

EJEMPLO 5 **Desplazamientos vertical y horizontal**

(A) ¿Cómo son las gráficas de $y = x^2 + 2$ y $y = x^2 - 3$ relacionadas con la gráfica de $y = x^2$? Confirme su respuesta graficando estas tres funciones simultáneamente en el mismo sistema coordenado.
(B) ¿Cómo son las gráficas de $y = (x + 2)^2$ y $y = (x - 3)^2$ relacionadas con la gráfica de $y = x^2$? Confirme su respuesta graficando estas tres funciones simultáneamente en el mismo sistema coordenado.

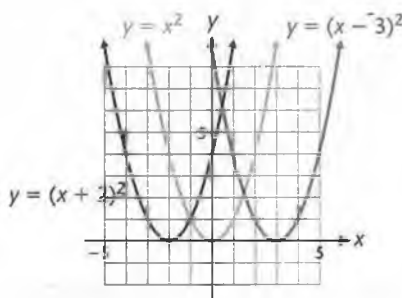
Soluciones (A) La gráfica de $y = x^2 + 2$ es igual a la gráfica de $y = x^2$ desplazada dos unidades, y la gráfica de $y = x^2 - 3$ es igual a la gráfica de $y = x^2$ desplazada tres unidades hacia abajo. La figura 3 confirma estas conclusiones. [Ahí se ve que la gráfica de $y = f(x) + k$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada hacia arriba si k es positiva y hacia abajo si k es negativa.]

FIGURA 3 Desplazamientos verticales.



(B) La gráfica de $y = (x + 2)^2$ es igual a la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia la izquierda dos unidades, y la gráfica de $y = (x - 3)^2$ es igual a la de $y = x^2$ desplazada hacia la derecha tres unidades. La figura 4 confirma estas conclusiones. Ahí se ve que la gráfica de $y = f(x + h)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada hacia la derecha si h es negativa y hacia la izquierda si h es positiva (lo opuesto de lo que se esperaba).

FIGURA 4 Desplazamientos horizontales.



Problema seleccionado 5 (A) ¿Cómo son las gráficas de $y = \sqrt{x} + 3$ y $y = \sqrt{x} - 1$ relacionadas con la gráfica de $y = \sqrt{x}$? Confirme su respuesta graficando las tres funciones simultáneamente en el mismo sistema coordenado?

(B) ¿Cómo son las gráficas de $y = \sqrt{x + 3}$ y $y = \sqrt{x - 1}$ relacionadas con la gráfica de $y = \sqrt{x}$? Confirme su respuesta graficando estas tres funciones simultáneamente en el mismo sistema coordenado.

Comparando a la gráfica de $y = f(x) + k$ con la gráfica de $y = f(x)$, se observa que la gráfica de $y = f(x) + k$ se puede obtener de la gráfica de $y = f(x)$ al **trasladar verticalmente** (desplazamiento) a la gráfica de esta última, k unidades hacia arriba si k es positiva y k unidades hacia abajo si k es negativa. Comparando la gráfica de $y = f(x + h)$ con la gráfica de $y = f(x)$, se observa que la gráfica de $y = f(x + h)$ puede obtenerse de la gráfica $y = f(x)$ al **trasladar horizontalmente** (desplazamiento) a la gráfica de esta última h unidades hacia la izquierda si $|h|$ es positiva y h unidades hacia la derecha si h es negativa.

EJEMPLO 6 Traslaciones verticales y horizontales (desplazamientos)

Las gráficas de la figura 5 son desplazamientos horizontales o verticales de la gráfica de $f(x) = |x|$. Escriba las ecuaciones apropiadas para las funciones H, G, M y N en términos de f.

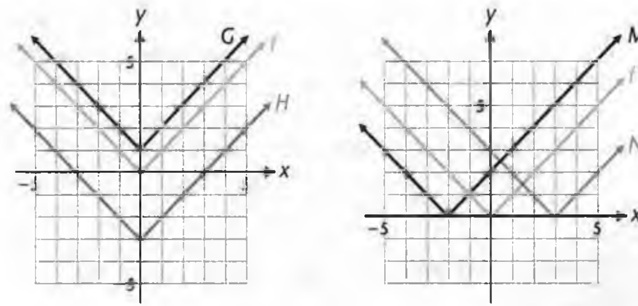


FIGURA 5 Desplazamientos verticales y horizontales.

Solución Las funciones H y G son los desplazamientos verticales dados por

$$H(x) = |x| - 3$$
$$G(x) = |x| + 1$$

Las funciones M y N son los desplazamientos horizontales dados por

$$M(x) = |x + 2|$$
$$N(x) = |x - 3|$$

Problema seleccionado 6 Las gráficas en la figura 6 son desplazamientos horizontales o verticales de la gráfica de $f(x) = x^3$. Escriba las ecuaciones apropiadas para las funciones H, G, M y N en términos de f.

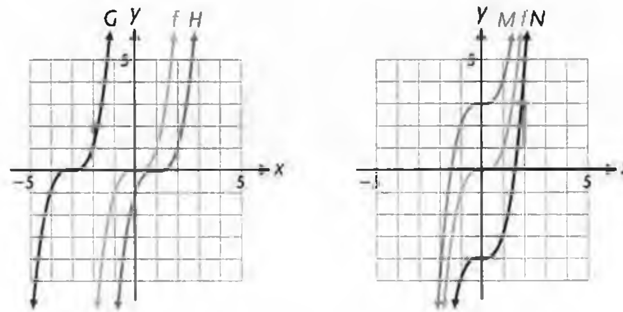


FIGURA 6 Desplazamientos verticales y horizontales.

• Reflexiones, expansiones y contracciones

Ahora se investigará cómo la gráfica de $y = Af(x)$ está relacionada con la gráfica de $y = f(x)$ para diferentes números reales A.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3

(A) Grafique $y = A\sqrt{x}$ para $A = 1, 2$ y $\frac{1}{2}$ simultáneamente en el mismo sistema coordenado.

(B) Grafique $y = A\sqrt{x}$ para $A = -1, -2$ y $-\frac{1}{2}$ simultáneamente en el mismo sistema coordenado.

(C) Describa la relación entre la gráfica de $h(x) = \sqrt{x}$ y la gráfica de $G(x) = A\sqrt{x}$ para cualquier número real A.

Comparando la gráfica de $y = Af(x)$ con la gráfica de $y = f(x)$, se observa que la gráfica de $y = Af(x)$ se puede obtener de la gráfica de $y = f(x)$ al multiplicar cada valor de la ordenada de esta última por A. El resultado es una **expansión vertical** de la gráfica de $y = f(x)$ si $A > 1$, una **contracción vertical** de la gráfica de $y = f(x)$ si $0 < A < 1$, y **una reflexión con respecto al eje** x si $A = -1$.

EJEMPLO 7 Reflexiones, expansiones y contracciones

(A) ¿Cómo son las gráficas de $y = 2\sqrt[3]{x}$ y $y = 0.5\sqrt[3]{x}$ relacionadas con la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$? Confirme su respuesta graficando estas tres funciones simultáneamente en el mismo sistema coordenado.

(B) ¿Cómo es la gráfica de $y = -2\sqrt[3]{x}$ relacionada con la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$? Confirme su respuesta graficando ambas funciones simultáneamente en el mismo sistema coordenado.

Solución (A) La gráfica de $y = 2\sqrt[3]{x}$ es una expansión vertical de la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ por el factor de 2, y la gráfica de $y = 0.5\sqrt[3]{x}$ es una contracción vertical de la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ por un factor de 0.5. La figura 7 confirma esta conclusión.

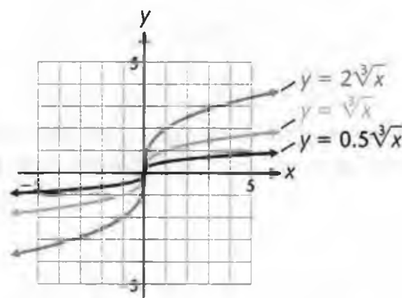


FIGURA 7 Expansión y contracción vertical.

(B) La gráfica de $y = -2\sqrt[3]{x}$ es una reflexión en el eje x y una expansión vertical de la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$. La figura 8 confirma esta conclusión.

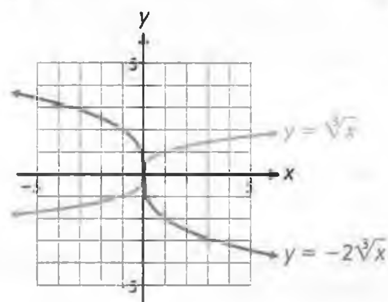


FIGURA 8 Reflexión y expansión vertical.

Problema seleccionado 7

(A) ¿Cómo son las gráficas de $y = 2x$ y $y = 0.5x$ relacionadas con la gráfica de $y = x$? Confirme su respuesta graficando estas tres funciones simultáneamente en el mismo sistema coordenado.

(B) ¿Cómo es la gráfica de $y = -0.5x$ relacionada con la gráfica de $y = x$? Confirme su respuesta graficando ambas funciones en el mismo sistema coordenado.

Las diferentes transformaciones antes consideradas están resumidas en el siguiente cuadro para una fácil referencia:

Transformaciones de gráficas (resumen)

Traslación vertical [véase figura 9(a)]:

$y = f(x) + k$	$k > 0$	Desplazamiento de la gráfica de $y = f(x)$ k unidades hacia arriba
	$k < 0$	Desplazamiento de la gráfica de $y = f(x)$ $\|k\|$ unidades hacia abajo

Traslación horizontal [véase figura 9(b)]:

$y = f(x + h)$	$h > 0$	Desplazamiento de la gráfica de $y = f(x)$ h unidades hacia la izquierda
	$h < 0$	Desplazamiento de la gráfica de $y = f(x)$ $\|h\|$ unidades hacia la derecha

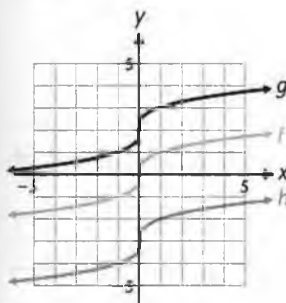
Reflexión [véase figura 9(c)].

$y = -f(x)$ Gráfica reflejada de $y = f(x)$ en el eje x

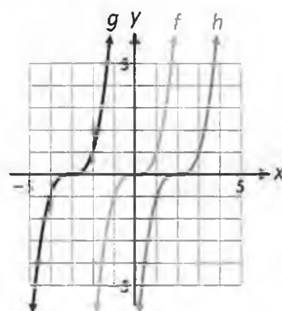
Expansión y contracción vertical [véase figura 9(d)]

$y = Af(x)$	$A > 1$	Expansión vertical de la gráfica de $y = f(x)$ multiplicando cada valor de la ordenada por A
	$0 < A < 1$	Contracción vertical de la gráfica de $y = f(x)$ multiplicando cada valor de la ordenada por A

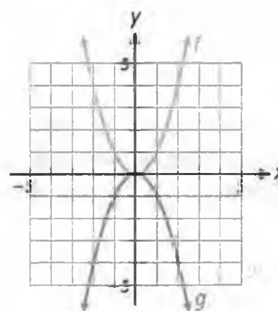
FIGURA 9 Transformaciones de la gráfica.



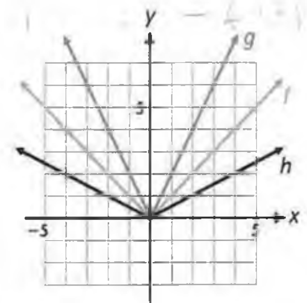
$g(x) = f(x) + 2$
$h(x) = f(x) - 3$
(a) Traslación vertical



$g(x) = f(x + 3)$
$h(x) = f(x - 2)$
(b) Traslación horizontal



$g(x) = -f(x)$
(c) Reflexión



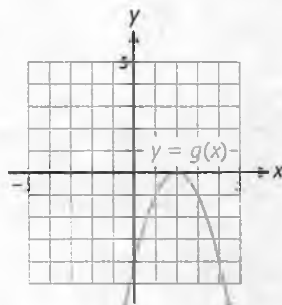
$g(x) = 2f(x)$
$h(x) = 0.5f(x)$
(b) Expansión y contracción

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 4 Use un dispositivo de graficación para explorar la gráfica de $y = A(x + h)^2 + k$ para diferentes valores de las constantes A, h y k. Analice cómo relaciona la gráfica de $y = A(x + h)^2 + k$ con la gráfica de $y = x^2$.

EJEMPLO 8 Combinación de transformaciones gráficas

La gráfica de $y = g(x)$ en la figura 10 es una transformación de la gráfica de $y = x^2$. Encuentre una ecuación para la función g.

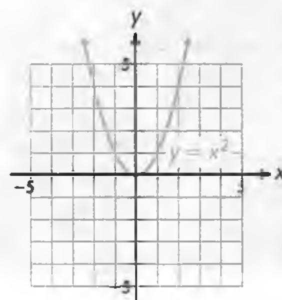
FIGURA 10



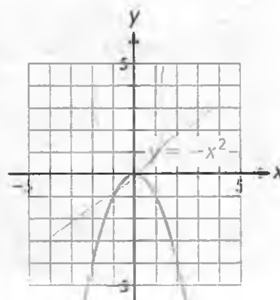
Solución Para transformar la gráfica de $y = x^2$ [véase figura 11(a)] en la gráfica de $y = g(x)$, primero se refleja la gráfica de $y = x^2$ en el eje x [véase figura 11(b)], después desplácela dos unidades a la derecha [véase figura 11(c)]. Así una ecuación para la función g es

$$g(x) = -(x - 2)^2$$

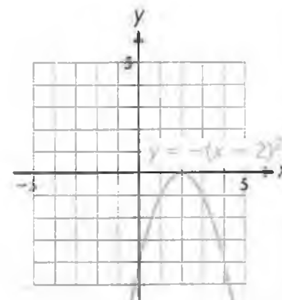
FIGURA 11



$y = x^2$
(a)



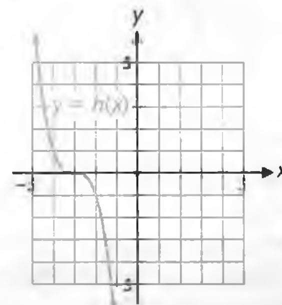
$y = -x^2$
(b)



$y = -(x-2)^2$
(c)

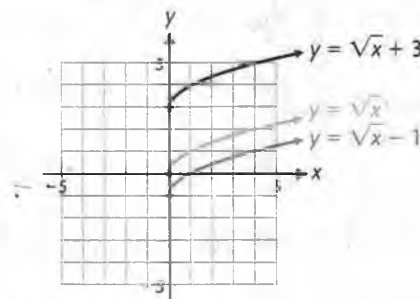
Problema seleccionado 8 La gráfica de $y = h(x)$ en la figura 12 es una transformación de la gráfica de $y = x^3$. Encuentre una ecuación para la función h.

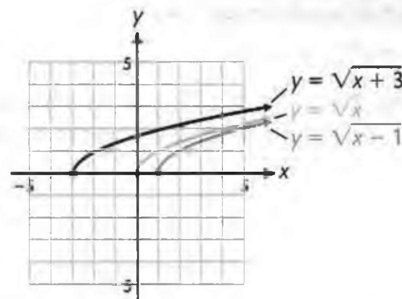
FIGURA 12



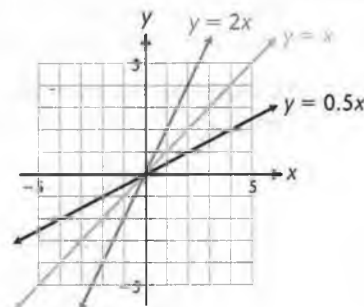
Respuestas a los problemas seleccionados

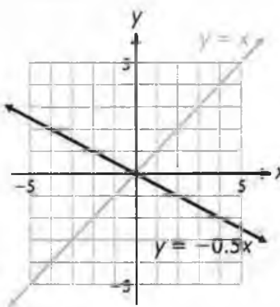
1. $(f+g)(x) = \sqrt{x} + \sqrt{10-x}$, $(f-g)(x) = \sqrt{x} - \sqrt{10-x}$, $(fg)(x) = \sqrt{10x - x^2}$, $(f/g)(x) = \sqrt{x(10-x)}$; las funciones $f+g$, $f-g$, y fg tienen dominio $[0, 10]$, el dominio de f/g es $[0, 10)$
2. $(f \circ g)(x) = x$, dominio $= (-\infty, \infty)$
   $(g \circ f)(x) = x$, dominio $= (-\infty, \infty)$
3. $(f \circ g)(x) = \sqrt{10-x}$, dominio $x \geq 1$ y $x \leq 10$ o $[1, 10]$
4. $h(x) = (f \circ g)(x)$, donde $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 4x - 7$
5. (A) La gráfica de $y = \sqrt{x} + 3$ es la misma que la gráfica de $y = \sqrt{x}$ desplazada tres unidades hacia arriba, y la gráfica de $y = \sqrt{x} - 1$ es igual a la gráfica de $y = \sqrt{x}$ desplazada una unidad hacia abajo. La figura confirma estas conclusiones.
   (B) La gráfica de $y = \sqrt{x+3}$ es igual a la gráfica de $y = \sqrt{x}$ desplazada tres unidades a la izquierda, y la gráfica de $y = \sqrt{x-1}$ es igual a la gráfica de $y = \sqrt{x}$ desplazada una unidad a la derecha. La figura confirma estas conclusiones.





6. $G(x) = (x+3)^3$, $H(x) = (x-1)^3$, $M(x) = x^3 + 3$, $N(x) = x^3 - 4$
7. (A) La gráfica de $y = 2x$ es una expansión vertical de la gráfica de $y = x$, y la gráfica de $y = 0.5x$ es una contracción vertical de la gráfica de $y = x$.
   (B) La gráfica de $y = -0.5x$ es una contracción vertical y una reflexión en el eje x de la gráfica de $y = x$. La figura confirma esta conclusión.





8. La gráfica de una función h es una reflexión en el eje x y una traslación horizontal de tres unidades a la izquierda de la gráfica de $y = x^3$. Una ecuación para h es $h(x) = -(x+3)^3$.

EJERCICIO 2-5

A

Sin volver a revisar el texto, indique el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones. (Puede ser útil hacer trazos burdos en hojas sueltas.)

1. $h(x) = -\sqrt{x}$ 2. $m(x) = -\sqrt[3]{x}$ 3. $g(x) = -2x^2$
4. $f(x) = -0.5|x|$ 5. $F(x) = -0.5x^3$ 6. $G(x) = 4x^3$

En los problemas del 7 al 12, para las funciones indicadas f y g, encuentre los dominios de f + g, f − g, fg y f/g, y encuentre sus dominios.

7. $f(x) = 4x$; $g(x) = x + 1$
8. $f(x) = 3x$; $g(x) = x - 2$
9. $f(x) = 2x^2$; $g(x) = x^2 + 1$

10. $f(x) = 3x$; $g(x) = x^2 + 4$

11. $f(x) = 3x + 5$; $g(x) = x^2 - 1$

12. $f(x) = 2x - 7$; $g(x) = 9 - x^2$

En los problemas del 13 al 18, para las funciones indicadas f y g, encuentre las funciones f ∘ g y g ∘ f, y sus dominios.

13. $f(x) = x^3$; $g(x) = x^2 - x + 1$

14. $f(x) = x^2$; $g(x) = x^3 + 2x + 4$

15. $f(x) = |x + 1|$; $g(x) = 2x + 3$

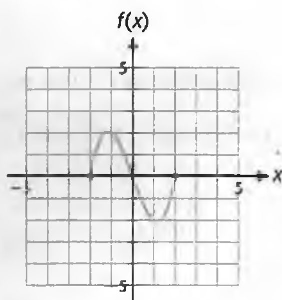
16. $f(x) = |x - 4|$; $g(x) = 3x + 2$

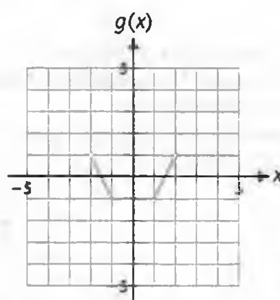
17. $f(x) = x^{1/3}$; $g(x) = 2x^3 + 4$

18. $f(x) = x^{2/3}$; $g(x) = 8 - x^3$

Los problemas del 19 al 30 se refieren a las funciones f y g dadas por las gráficas de abajo (el dominio de cada función es [−2, 2]).

Use la gráfica de f o g, que sea necesaria, para graficar cada función dada.





19. $f(x) + 2$ **20.** $g(x) - 1$ **21.** $g(x) + 2$

22. $f(x) - 1$ **23.** $f(x - 2)$ **24.** $g(x - 1)$

25. $g(x + 2)$ **26.** $f(x - 1)$ **27.** $-f(x)$

28. $-g(x)$ **29.** $2g(x)$ **30.** $\frac{1}{2}f(x)$

B

En los problemas del 31 al 36, indique cómo se relaciona la gráfica de cada función con la gráfica de una de las seis funciones básicas de la figura 2. Trace una gráfica de cada función.



Compruebe sus descripciones y gráficas del problema del 31 al 36 graficando cada función con un dispositivo de graficación.

31. $g(x) = -|x + 2|$ **32.** $h(x) = -|x - 4|$

33. $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ **34.** $m(x) = (x + 1)^2 + 3$

35. $f(x) = 4 - 2\sqrt{x}$ **36.** $g(x) = -2 + 3\sqrt[3]{x}$

En los problemas del 37 al 42, para las funciones indicadas f y g, encuentre las funciones f + g, f − g, fg y f/g, y encuentre sus dominios.

37. $f(x) = \sqrt{2 - x}$; $g(x) = \sqrt{x + 3}$

38. $f(x) = \sqrt{x + 4}$; $g(x) = \sqrt{3 - x}$

39. $f(x) = \sqrt{x} + 2$; $g(x) = \sqrt{x} - 4$

40. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$; $g(x) = 2 - \sqrt{x}$

41. $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$; $g(x) = \sqrt{7 + 6x - x^2}$

42. $f(x) = \sqrt{8 + 2x - x^2}$; $g(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$

En los problemas del 43 al 48, para las funciones indicadas f y g, encuentre las funciones f ∘ g y g ∘ f, y sus dominios.

43. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x - 4$

44. $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 2x + 5$

45. $f(x) = x + 2$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

46. $f(x) = x - 3$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

47. $f(x) = |x|$; $g(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

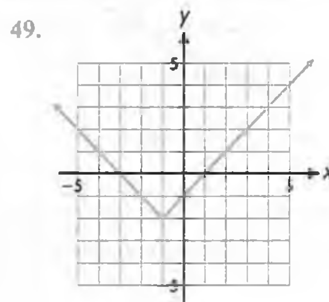
48. $f(x) = |x - 1|$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

Cada gráfica de los problemas del 49 al 54 es el resultado de aplicar una secuencia de transformaciones a las gráficas de una de las seis funciones básicas en la figura 2. Identifique la función básica y describa verbalmente la transformación. Escriba una ecuación para la gráfica dada.

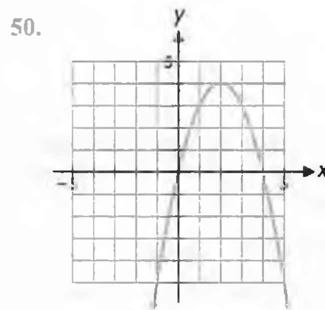


Compruebe sus ecuaciones en los problemas del 49 al 54 graficando cada una con un dispositivo de graficación.

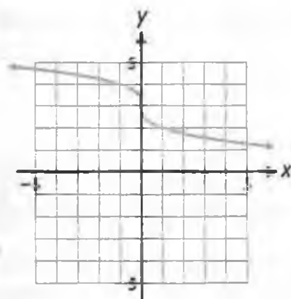
49.



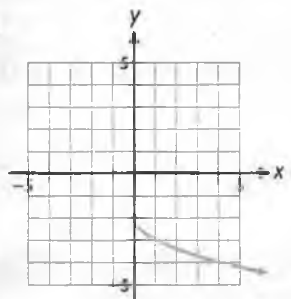
50.



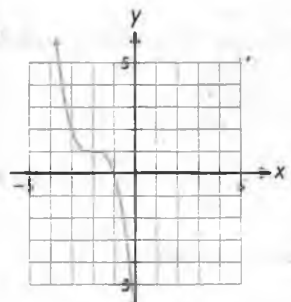
51.



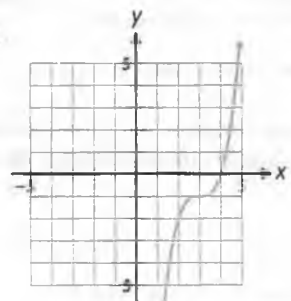
52.



53.



54.



En los problemas del 55 al 60, la gráfica de la función g se forma aplicando la secuencia indicada de las transformaciones a la función dada f. Encuentre una ecuación para la función g y la gráfica de g usando $-5 \le x \le 5$ y $-5 \le y \le 5$.

55. La gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ se desplaza dos unidades a la izquierda y tres unidades hacia arriba.

56. La gráfica de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ se desplaza tres unidades a la derecha y dos unidades hacia abajo.

57. La gráfica de $f(x) = |x|$ se refleja en el eje x y se desplaza tres unidades a la derecha.

58. La gráfica de $f(x) = |x|$ se refleja en el eje x y se desplaza una unidad a la izquierda.

59. La gráfica de $f(x) = x^3$ se refleja en el eje x y se desplaza dos unidades a la izquierda y una unidad hacia arriba.

60. La gráfica de $f(x) = x^2$ se refleja en el eje x y se desplaza dos unidades a la derecha y cuatro hacia abajo.

En los problemas del 61 al 64, use el completar el cuadrado para transformar cada función cuadrática f en la forma $f(x) = C(x + h)^2 + k$ donde C, h y k son constantes. Indique cómo se relaciona la gráfica de f con la gráfica de la función $p(x) = x^2$. Grafique $y = f(x)$.

61. $f(x) = 2x^2 - 8x + 4$

62. $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$

63. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$

64. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 4$



En los problemas del 65 al 72, exprese h como la composición de dos funciones simples f y g de la forma $f(x) = x^n$ y $g(x) = ax + b$, donde n es un número racional y a y b son enteros.

65. $h(x) = (2x - 7)^4$

66. $h(x) = (3 - 5x)^7$

67. $h(x) = \sqrt{4 + 2x}$

68. $h(x) = \sqrt{3x - 11}$

69. $h(x) = 3x^7 - 5$

70. $h(x) = 5x^6 + 3$

71. $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + 3$

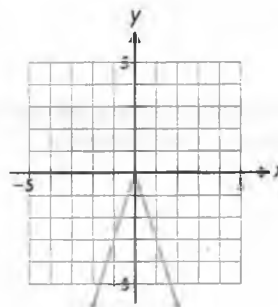
72. $h(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}} + 1$

C

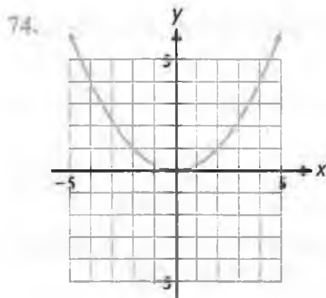
Cada una de las siguientes gráficas implica una reflexión en el eje x y/o una expansión vertical o contracción de una de las funciones básicas de la figura 2. Identifique la función básica y describa la transformación verbalmente. Escriba una ecuación para la gráfica dada.

Compruebe sus ecuaciones de los problemas del 73 al 76 graficando cada una con un dispositivo de graficación.

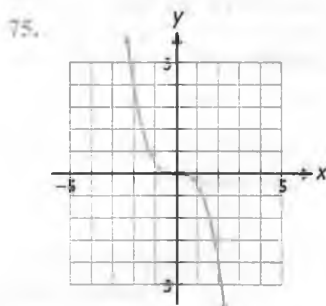
73.



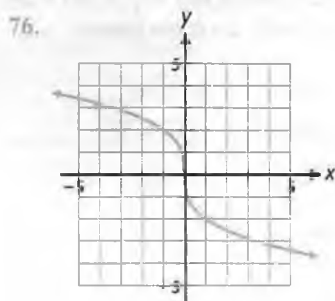
74.



75.



76.



En los problemas del 77 al 80, para las funciones indicadas f y g, encuentre las funciones f + g, f − g, fg y f/g, y encuentre sus dominios.

77. $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $g(x) = x - \frac{1}{x}$

78. $f(x) = x - 1$; $g(x) = x - \frac{6}{x - 1}$

79. $f(x) = 1 - \frac{x}{|x|}$; $g(x) = 1 + \frac{x}{|x|}$

80. $f(x) = x + |x|$; $g(x) = x - |x|$

En los problemas del 81 al 86, para las funciones indicadas f y g, encuentre las funciones f ∘ g y g ∘ f y sus dominios.

81. $f(x) = \sqrt{4 - x}$; $g(x) = x^2$

82. $f(x) = \sqrt{x - 1}$; $g(x) = x^2$

83. $f(x) = \frac{x + 5}{x}$; $g(x) = \frac{x}{x - 2}$

84. $f(x) = \frac{x}{x - 1}$; $g(x) = \frac{2x - 4}{x}$

85. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$; $g(x) = \sqrt{9 + x^2}$

86. $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$; $g(x) = \sqrt{x^2 + 25}$



En los problemas del 87 al 90, grafique f(x), |f(x)| y −|f(x)| en ventanas de visión separadas con un dispositivo de graficación.

87. $f(x) = 0.2x^2 - 5$

88. $f(x) = 4 - 0.25x^2$

89. $f(x) = 4 - 0.1(x + 2)^3$

90. $f(x) = 0.25(x - 1)^3 - 1$

91. Describa la relación entre las gráficas de $f(x)$ y $|f(x)|$ en los problemas del 87 al 90.

92. Describa la relación entre las gráficas de $f(x)$ y $-|f(x)|$ en los problemas del 87 al 90.

APLICACIONES

93. Mercadotecnia. La demanda x y el precio p (en dólares) para un cierto producto están relacionadas por

$$x = f(p) = 4\,000 - 200p$$

El ingreso (en dólares) por la venta de x unidades está dada por

$$R(x) = 20x - \frac{1}{200}x^2$$

y el costo (en dólares) de producción de x unidades está dado por

$$C(x) = 10x + 30\,000$$

Exprese la utilidad como una función del precio p.

94. Mercadotecnia. La demanda x y el precio p (en dólares) de un cierto producto están relacionadas por

$$x = f(p) = 5\,000 - 100p$$

El ingreso (en dólares) por la venta de x unidades y el costo (en dólares) de producción de x unidades están dados, respectivamente, por

$$R(x) = 50x - \frac{1}{100}x^2 \quad \text{y} \quad C(x) = 20x + 40\,000$$

Exprese la utilidad como una función del precio p.



95. Familia de curvas. En cálculo, las soluciones de ciertos tipos de problemas frecuentemente implican una constante no especificada. Por ejemplo, considere la ecuación

$$y = \frac{1}{C}x^2 - C$$

donde C es una constante positiva. El conjunto de gráficas de esta ecuación para todos los valores permitidos de C se llama **familia de curvas**. En el mismo eje, grafique los miembros de esta familia correspondientes a $C = 1, 2, 3$ y 4.

96. Familia de curvas. Una familia de curvas se define por la ecuación

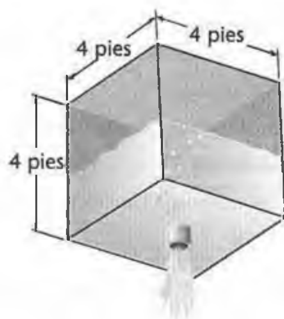
$$y = 2C - \frac{2}{C}x^2$$

donde C es una constante positiva. En los mismos ejes, grafique a los miembros de esta familia correspondientes a $C = 1, 2, 3$ y 4.

97. Flujo de fluidos. Un tanque cúbico tiene cuatro pies por lado y está inicialmente lleno de agua. El agua fluye hacia afuera por un orificio en el fondo del tanque con una rapidez proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad (véase la figura). Usando conceptos avanzados de matemáticas y física, se puede demostrar que el volumen del agua en el tanque t minutos después de que comienza a fluir está dado por

$$V(t) = \frac{64}{C^2}(C - t)^2 \qquad 0 \le t \le C$$

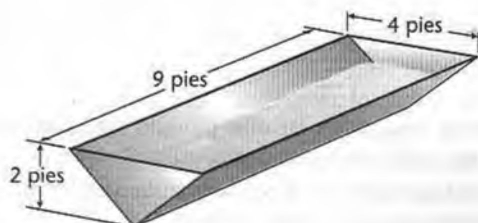
donde C es una constante que depende del tamaño del orificio. Grafique $V(t)$ para $C = 1$, $C = 2$, $C = 4$ y $C = 8$.



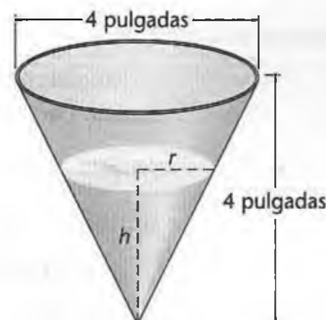
98. Evaporación. Un abrevadero con extremos triangulares tiene 9 pies de largo, 4 pies de ancho y 2 de profundidad (véase la figura). Inicialmente, el abrevadero está lleno de agua, pero debido a su evaporación el volumen disminuye con una rapidez proporcional a la raíz cuadrada del volumen. Usando conceptos avanzados de matemáticas y de física, se puede demostrar que el volumen después de t horas está dado por

$$V(t) = \frac{1}{C^2}(t + 6C)^2 \qquad 0 \le t \le 6|C|$$

donde C es una constante. Grafique $V(t)$ para $C = -4$, $C = -5$ y $C = -6$.



***99. Flujo de fluidos.** Un cono de papel con diámetro de 4 pulgadas y altura de 4 pulgadas está inicialmente lleno de agua. Se le hace un pequeño hoyo en el fondo y el agua comienza a fluir. Sea h y r la altura y el radio, respectivamente, del agua en el cono t minutos después de que el agua empieza a fluir.



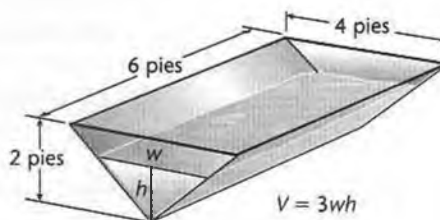
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(A) Exprese r como una función de h.
(B) Exprese al volumen V como una función de h.
(C) Si la altura del agua después de t minutos está dada por

$$h(t) = 0.5\sqrt{t}$$

exprese V como una función de t.

***100. Evaporación.** Un abrevadero con extremos triangulares tiene 6 pies de largo 4 pies de ancho y 2 de profundidad. Inicialmente, el abrevadero está lleno de agua, pero debido a la evaporación el volumen disminuye. Sean h y w la altura y el ancho, respectivamente, del agua en el tanque t horas después de que ésta comienza a evaporarse.



(A) Exprese w como una función de h.
(B) Exprese V como una función de h.
(C) Si la altura del agua después de t horas está dada por

$$h(t) = 2 - 0.2\sqrt{t}$$

exprese V como una función de t.

SECCIÓN 2-6 Funciones inversas



- Funciones uno a uno
- Funciones inversas

Muchas relaciones matemáticas importantes se pueden expresar en términos de funciones. Por ejemplo,

$C = \pi d = f(d)$	La circunferencia de un círculo es una función del diámetro *d*.
$V = s^3 = g(s)$	El volumen de un cubo es una función de su lado *s*.
$d = 1\,000 - 100p = h(p)$	La demanda para un producto es una función del precio *p*.
$F = \frac{9}{5}C + 32$	La temperatura medida en °F es una función de la temperatura en °C.

En muchos casos, lo que interesa es *invertir* la correspondencia determinada por una función. Así,

$d = \frac{C}{\pi} = m(C)$	El diámetro de un círculo es una función de la circunferencia *C*.
$s = \sqrt[3]{V} = n(V)$	El lado de un cubo es una función del volumen *V*.
$p = 10 - \frac{1}{100}d = r(d)$	El precio de un producto es una función de la demanda *d*.
$C = \frac{5}{9}(F - 32)$	La temperatura medida en °C es una función de la temperatura en °F.

Como lo muestran estos ejemplos, invertir la relación entre dos cantidades a menudo produce una nueva función. Esta nueva función se denomina *inversa* de la función original. Más tarde en este texto se verá que muchas funciones importantes (por ejemplo, funciones logarítmicas) están de hecho definidas como las inversas de otras funciones.

En esta sección se desarrollan las técnicas para determinar si existe la función inversa, algunas propiedades generales de funciones inversas, y métodos para encontrar la regla de correspondencia que define la función inversa. Un repaso de la sección 2-3 probará la utilidad en este punto.

• Funciones uno a uno

Recuerde la forma del conjunto de la definición de una función:

> **Una función es un conjunto de pares ordenados, con la propiedad de que ninguno de los dos pares ordenados tiene la misma primera componente y diferentes segundas componentes.**

Sin embargo, es posible que dos pares ordenados en una función pudieran tener la misma segunda componente y diferentes primeras componentes. Si esto no sucede, entonces a esta función se le denomina *función uno a uno*. Resulta que las funciones uno a uno son las únicas funciones que tienen funciones inversas.

DEFINICIÓN 1

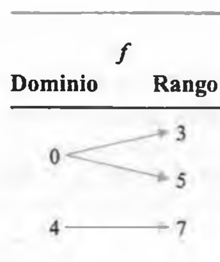
Función uno a uno

Una función es uno a uno si ninguno de los dos pares ordenados en la función tienen la misma segunda componente y diferentes primeras componentes.

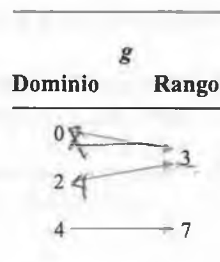
Para ilustrar este concepto, considere los siguientes tres conjuntos de pares ordenados:

$$f = \{(0, 3), (0, 5), (4, 7)\}$$
$$g = \{(0, 3), (2, 3), (4, 7)\}$$
$$h = \{(0, 3), (2, 5), (4, 7)\}$$

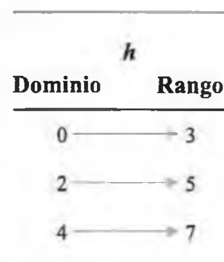
El conjunto f no es una función, ya que los pares ordenados (0, 3) y (0, 5) tienen la misma primera componente y diferentes segundas componentes. El conjunto g es una función, pero no es una función uno a uno debido a que los pares ordenados (0, 3) y (2, 3) tienen la misma segunda componente y diferentes primeras componentes. Pero el conjunto h es una función, y es uno a uno. Representando estos tres conjuntos de pares ordenados como reglas de correspondencia se puede comprender mejor el significado de este concepto.



f no es una función.



g es una función pero no es uno a uno.



h es una función uno a uno.

EJEMPLO 1 **Determinación de si una función es uno a uno**

Determine si f es una función uno a uno para:

(A) $f(x) = x^2$ (B) $f(x) = 2x - 1$

Soluciones

(A) Para demostrar que una función no es uno a uno, todo lo que se tiene que hacer es encontrar dos diferentes pares ordenados en la función con la misma segunda componente y diferentes primeras componentes. Como

$$f(2) = 2^2 = 4 \quad \text{y} \quad f(-2) = (-2)^2 = 4$$

los pares ordenados (2, 4) y (−2, 4) pertenecen a f y f no es una función uno a uno.

(B) Para demostrar que una función es uno a uno, se tiene que mostrar que ninguno de los pares ordenados tenga la misma segunda componente y diferentes primeras componentes. Para hacer esto, se supone que hay dos pares ordenados $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ en f con las mismas segundas componentes y entonces mostrar que las primeras componentes deben también ser las mismas. Es decir, se demuestra que $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$. Se procede como sigue:

$f(a) = f(b)$	Suponga que las segundas componentes son iguales.
$2a - 1 = 2b - 1$	Evalúe $f(a)$ y $f(b)$.
$2a = 2b$	Simplifique.
$a = b$	Conclusión: f es uno a uno.

De esta manera, por la definición 1, f es una función uno a uno.

Problema seleccionado 1

Determine si f es una función uno a uno para:

(A) $f(x) = 4 - x^2$ (B) $f(x) = 4 - 2x$

Los métodos usados en la solución del ejemplo 1 se pueden postular como un teorema.

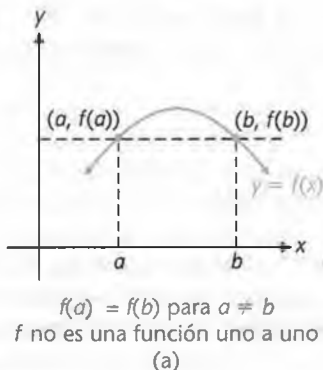
Teorema 1

Funciones uno a uno

1. Si $f(a) = f(b)$ para al menos un par ordenado de valores del dominio a y b, $a \neq b$, entonces f no es una función uno a uno.
2. Si la suposición $f(a) = f(b)$ implica siempre que el dominio de los valores a y b son iguales, entonces f es una función uno a uno.

Aplicar el teorema 1 no siempre es fácil, por ejemplo intente probar $f(x) = x^3 + 2x + 3$. Sin embargo, si se da la gráfica de una función, entonces existe un procedimiento gráfico simple para determinar si la función es uno a uno. Si una recta horizontal intersecta la gráfica de una función en más de un punto, entonces la función no es uno a uno, como se muestra en la figura 1(a). No obstante, si cada recta horizontal intersecta la gráfica en un punto, o si no lo hace, entonces la función es uno a uno, como se muestra en la figura 1(b). Estas observaciones forman la base de la *prueba de la recta horizontal.*

FIGURA 1 Intersecciones de las gráficas y de las rectas horizontales.



$f(a) = f(b)$ para $a \neq b$
f no es una función uno a uno
(a)



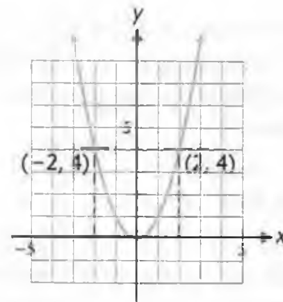
Sólo un punto tiene ordenada $f(a)$; f es una función uno a uno
(b)

Teorema 2 **Prueba de la recta horizontal**

Una función es uno a uno si y sólo si cada recta horizontal intersecta la gráfica de la función en a lo más un punto.

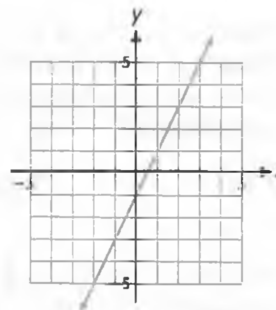
Las gráficas de las funciones que se consideraron en el ejemplo 1, se muestran en la figura 2. Aplicando la prueba de la recta horizontal a cada gráfica, se confirman los resultados obtenidos en el ejemplo 1.

FIGURA 2 Aplicación de la prueba de la recta horizontal.



$f(x) = x^2$ no pasa la prueba de recta horizontal; f no es uno a uno

(a)



$f(x) = 2x - 1$ pasa la prueba de recta horizontal; f es uno a uno

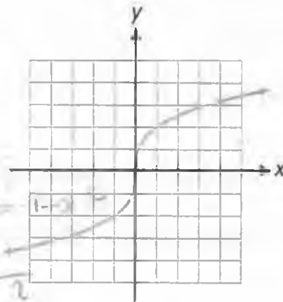
(b)

Una función que es creciente en todo su dominio o decreciente en todo su dominio siempre pasará la prueba de la recta horizontal [véase figuras 3(a) y 3(b)]. Así, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 3 **Funciones crecientes y decrecientes**

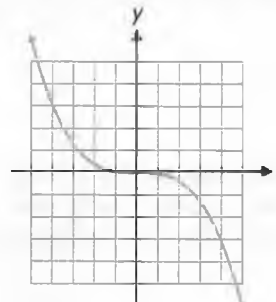
Si una función f es creciente en todo su dominio o decreciente en todo su dominio, entonces f es una función uno a uno.

FIGURA 3 Funciones crecientes, decrecientes y uno a uno.



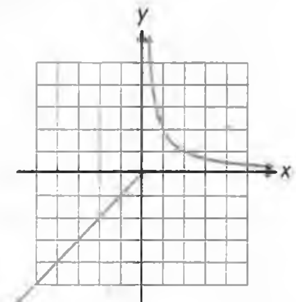
Una función creciente es siempre uno a uno

(a)



Una función decreciente es siempre uno a uno

(b)



Una función uno a uno no es siempre creciente o decreciente

(c)

La inversa del teorema 3 es falsa. Para ver esto, considere la función graficada en la figura 3(c). Esta función es creciente en $(-\infty, 0]$ y es decreciente en $(0, \infty)$, aunque la gráfica pase la prueba de la recta horizontal. En consecuencia, ésta es una función uno a uno que no es creciente ni decreciente.

Funciones inversas

Ahora se podría ver cómo se puede formar una función nueva invirtiendo la correspondencia determinada por una función dada. Sea g la función definida como sigue:

$$g = \{(-3, 9), (0, 0), (3, 9)\}$$ *g* no es uno a uno

Observe que g no es uno a uno debido a que los elementos del dominio –3 y 3, corresponden al rango del elemento 9. Se puede revertir la correspondencia determinada por la función g simplemente invirtiendo las componentes en cada par ordenado en g, lo que produciría el conjunto siguiente:

$$G = \{(9, -3), (0, 0), (9, 3)\}$$ *g* no es una función

Pero el resultado no es una función, ya que el dominio del elemento 9 corresponde a dos diferentes elementos del rango, –3 y 3. Por otra parte, si se invierten los pares ordenados en la función

$$f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 9)\}$$ *f* es uno a uno

se obtiene

$$F = \{(2, 1), (4, 2), (9, 3)\}$$ *F* es una función

Esta vez f es una función uno a uno, y el conjunto F resulta ser también una función. Esta nueva función F, se forma al invertir todos los pares ordenados en f, esto se conoce como la *inversa* de f y usualmente se denota* por f^{-1}. Así que,

$$f^{1} = \{(2, 1), (4, 2), (9, 3)\}$$ La inversa de *f*

Note que f^{-1} es también una función uno a uno y que se cumplen las relaciones siguientes:

$$\text{Dominio de } f^{-1} = \{2, 4, 9\} = \text{Rango de } f$$

$$\text{Rango de } f^{-1} = \{1, 2, 3\} = \text{Dominio de } f$$

De esta manera, al invertir todos los pares ordenados en una función uno a uno forma una nueva función uno a uno y se invierte el dominio y rango en el proceso. Ahora se está listo para presentar una definición formal de la inversa de una función.

* f^{1}, se lee "f inversa", éste es un símbolo especial para representar a la inversa de la función f. Esto *no* significa $1/f$.

DEFINICIÓN 2 **Inversa de una función**

Si f es una función uno a uno, entonces la **inversa** de f, se denota por f^{-1}, que es la función formada al invertir todos los pares ordenados en f. Por consiguiente,

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \text{ está en } f\}$$

Si f no es una función uno a uno, entonces f **no tiene una inversa** y f^{-1} **no existe.**

Las propiedades siguientes de las funciones inversas se infieren directamente de la definición.

Teorema 4 **Propiedades de las funciones inversas**

Si f^{-1} existe, entonces

1. f^{-1} es una función uno a uno.
2. Dominio de f^{-1} = Rango de f.
3. Rango de f^{-1} = Dominio de f.

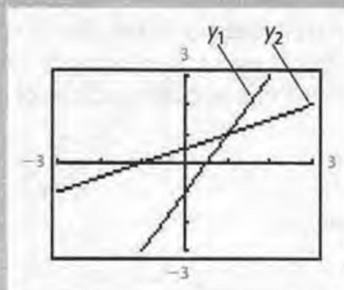
EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 La mayoría de los dispositivos de graficación tienen una rutina, que usualmente se denota por "Dibuje la inversa" (o una abreviatura de esta frase, consulte su manual), que trazará la gráfica formada invirtiendo los pares ordenados de todos los puntos en la gráfica de una función. Por ejemplo, la figura 4(a) muestra la gráfica de $f(x) = 2x - 1$ junto con la gráfica obtenida al usar la rutina de "Dibuje la inversa". La figura 4(b) realiza lo mismo para $f(x) = x^2$.

(A) ¿La gráfica obtenida con "Dibuje la inversa" en la figura 4(a) es la gráfica de una función? ¿Existe f^{-1}? Explique.

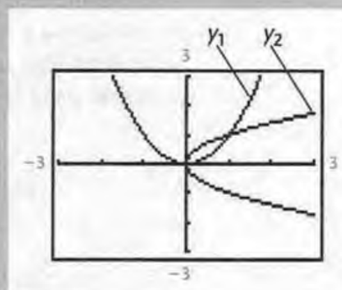
(B) ¿La gráfica obtenida con "Dibuje la inversa" en la figura 4(b) es la gráfica de una función? ¿Existe f^{-1}? Explique.

(C) Si cuenta con dispositivo de graficación con la rutina "Dibuje la inversa", úselo con las gráficas de $y = \sqrt{x - 1}$ y $y = 4x - x^2$ para determinar si el resultado es la gráfica de una función y si existe la inversa de la función original.

FIGURA 4



$y_1 = 2x - 1$
y_2 = Gráfica de la inversa de y_1
(a)



$y_1 = x^2$
y_2 = Gráfica de la inversa de y_1
(b)

Encontrando a la inversa de una función definida por un conjunto finito de pares ordenados es fácil; sólo invierta cada par ordenado. Pero, ¿cómo se encuentra la inversa de una función definida por una ecuación? Considere la función f uno a uno definida por

$$f(x) = 2x - 1$$

Para encontrar f^{-1}, se hace $y = f(x)$ y se despeja x:

$$\begin{aligned} y &= 2x - 1 \\ y + 1 &= 2x \\ \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2} &= x \end{aligned}$$

Como el par ordenado (x, y) está en f si y sólo si el par ordenado invertido (y, x) está en f^{-1}, esta última ecuación define a f^{-1}:

$$x = f^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2} \tag{1}$$

Algo interesante sucede si se forma la composición* de f y f^{-1} en cualquiera de los dos órdenes posibles

$$f^{-1}[f(x)] = f^{-1}[2x - 1] = \tfrac{1}{2}(2x - 1) + \tfrac{1}{2} = x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = x$$

y

$$f[f^{-1}(y)] = f(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}) = 2(\tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}) - 1 = y + 1 - 1 = y$$

Esas composiciones indican que si f transforma a x en y, entonces f^{-1} transforma a y en x, y si f^{-1} transforma a y en x, entonces f transforma a x en y. Esto se interpreta de manera esquemática en la figura 5.

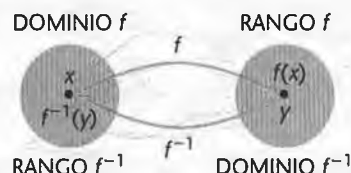


FIGURA 5 Composición de f y de f^{-1}.

Por último, se observa que usualmente se usa x para representar la variable independiente y a y como la variable dependiente en una ecuación que define una función. Se acostumbra también hacer esto para funciones inversas. Así, intercambiando las variables x y y en la ecuación (1), se puede establecer que la inversa de

$$y = f(x) = 2x - 1$$

es

$$y = f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}$$

* Cuando se trabaja con funciones inversas, se acostumbra escribir las composiciones como $f[g(x)]$ más que como $(f \circ g)(x)$.

En general, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5 **Relaciones entre f y f^{-1}**

Si f^{-1} existe, entonces

1. $x = f^{-1}(y)$ si y sólo si $y = f(x)$.
2. $f^{-1}[f(x)] = x$ para toda x en el dominio de f.
3. $f[f^{-1}(y)] = y$ para toda y en el dominio de f^{-1} o, si x y y se han intercambiado, $f[f^{-1}(x)] = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}.

Si f y g son funciones uno a uno que satisfacen

$$f[g(x)] = x \quad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } g$$

$$g[f(x)] = x \quad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f$$

entonces se puede mostrar que $g = f^{-1}$ y $f = g^{-1}$. Así, la función inversa es la única función que satisface ambas composiciones. Se puede usar este hecho para comprobar si se encontró la inversa de manera correcta.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Encuentre $f[g(x)]$ y $g[f(x)]$ para

$$f(x) = (x-1)^3 + 2 \quad \text{y} \quad g(x) = (x-2)^{1/3} + 1$$

¿Cómo se relacionan f y g?

El procedimiento para encontrar la inversa de una función definida por una ecuación se indica en el cuadro siguiente. Este procedimiento se puede aplicar, siempre que sea posible, para resolver $y = f(x)$ para x en términos de y.

Determinación de la inversa de una función f

Paso 1. Encuentre el dominio de f y verifique que f es uno a uno. Si f no es una función uno a uno, entonces no continúe, ya que no existe f^{-1}.

Paso 2. Resuelva la ecuación $y = f(x)$ para x. El resultado es una ecuación de la forma $x = f^{-1}(y)$.

Paso 3. Intercambie x y y en la ecuación encontrada en el paso 2. Esto expresa a f^{-1} como una función de x.

Paso 4. Encuentre el dominio de f^{-1}. Recuerde, el dominio de f^{-1} debe ser igual que el rango de f.

Compruebe su trabajo al verificar que

$$f^{-1}[f(x)] = x \qquad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f$$

y

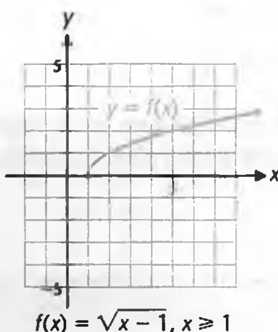
$$f[f^{-1}(x)] \stackrel{?}{=} x \qquad \text{para toda } x \text{ en el dominio de } f^{-1}$$

EJEMPLO 2 **Determinación de la inversa de una función**

Encuentre f^{-1} para $f(x) = \sqrt{x-1}$

Solución

Paso 1. Encuentre el dominio de f y verifique que f es uno a uno. El dominio de f es $[1, \infty)$. La gráfica de f en la figura 6 muestra que f es uno a uno, por consiguiente, f^{-1} existe.



$f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$

FIGURA 6

Paso 2. Resuelva la ecuación $y = f(x)$ para x.

$$y = \sqrt{x-1}$$
$$y^2 = x - 1$$
$$x = y^2 + 1$$

Así,

$$x = f^{-1}(y) = y^2 + 1$$

Paso 3. Intercambie x y y.

$$y = f^{-1}(x) = x^2 + 1$$

Paso 4. Encuentre el dominio de f^{-1}. La ecuación $f^{-1}(x) = x^2 + 1$ está definida para todo valor de x, pero esto no indica cuál es el dominio de f^{-1}. Recuerde, el dominio de f^{-1} debe ser igual al rango de f. De la gráfica de f, se observa que el rango de f es $[0, \infty)$. Así, el dominio de f^{-1} es también $[0, \infty)$. Esto es,

$$f^{-1}(x) = x^2 + 1 \qquad x \geq 0$$

Comprobación Para x en $[1, \infty)$, el dominio de f, se tiene

$$\begin{aligned} f^{-1}[f(x)] &= f^{-1}(\sqrt{x-1}) \\ &= (\sqrt{x-1})^2 - 1 \\ &= x - 1 + 1 \\ &\stackrel{\checkmark}{=} x \end{aligned}$$

Para x en $[0, \infty)$, el dominio de f^{-1}, se tiene

$$
\begin{aligned}
f[f^{-1}(x)] &= f(x^2 + 1) \\
&= \sqrt{(x^2 + 1) - 1} \\
&= \sqrt{x^2} \\
&= |x| && \sqrt{x^2} = |x| \text{ para cualquier número real } x. \\
&\stackrel{\checkmark}{=} x && |x| = \text{ para } x \geq 0.
\end{aligned}
$$

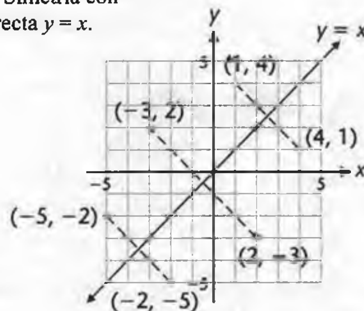
Problema seleccionado 2 Encuentre f^{-1} para $f(x) = \sqrt{x + 2}$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3 La mayoría de las operaciones aritméticas básicas se pueden invertir al realizar una segunda operación: la resta invierte la suma, la división invierte la multiplicación, elevar al cuadrado invierte sacar la raíz cuadrada, etcétera. Observar a la función como una secuencia de operaciones reversibles proporciona un conocimiento adicional acerca del concepto de función inversa. Por ejemplo, la función $f(x) = 2x - 1$ se puede describir de manera verbal como una función que multiplica cada dominio del elemento por 2 y después le resta 1. Invertir la secuencia describe una función g que suma 1 a cada elemento del dominio y después se divide entre 2, o $g(x) = (x + 1)/2$, que es la inversa de la función f. Para cada una de las funciones siguientes, escriba una descripción verbal de la función, invierta su descripción y escriba la ecuación algebraica resultante. Verifique que el resultado es la inversa de la función original.

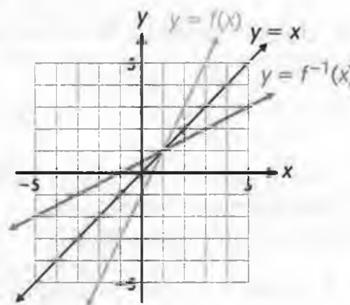
(A) $f(x) = 3x + 5$ (B) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ (C) $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$

Hay una relación importante entre la gráfica de cualquier función y su inversa, que se basa en la observación siguiente: En un sistema coordenado rectangular, los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos con respecto a la recta $y = x$ [véase la figura 7(a)]. El teorema 6 es una consecuencia inmediata de esta observación.

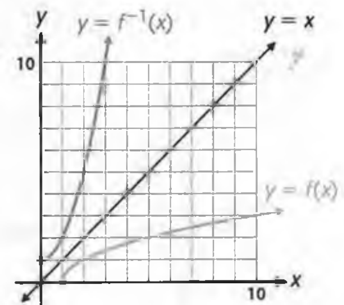
FIGURA 7 Simetría con respecto a la recta $y = x$.



(a, b) y (b, a) son simétricas con respecto a la recta $y = x$
(a)



$f(x) = 2x - 1$
$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
(b)



$f(x) = \sqrt{x - 1}$
$f^{-1}(x) = x^2 + 1,\ x \geq 0$
(c)

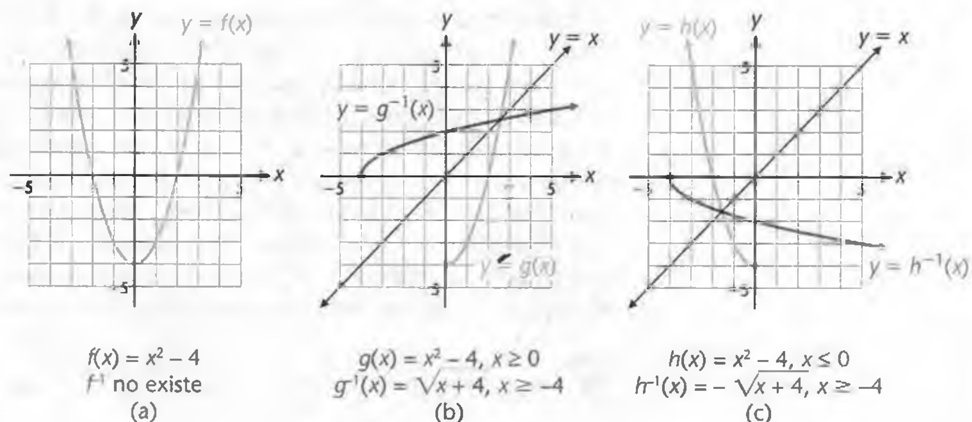
Teorema 6 **Propiedad de simetría para las gráficas de f y f^{-1}**

Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$ son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

El conocimiento de esta propiedad de simetría facilita la graficación de f^{-1} si se conoce la gráfica de f, y viceversa. Las figuras 7(b) y 7(c) ilustran esta propiedad para las dos funciones inversas que antes se encontraron en esta sección.

Si una función no es uno a uno, a menudo se puede restringir el dominio de la función para producir una nueva función que sea uno a uno. Entonces se puede encontrar una inversa para la función restringida. Suponga que se comienza con $f(x) = x^2 - 4$. Como f no es uno a uno, f^{-1} no existe [véase la figura 8(a)]. Pero existen muchas formas en las que el dominio de f se puede restringir para obtener una función uno a uno. Las figuras 8(b) y 8(c) ilustran dos de esas restricciones.

FIGURA 8 Restricciones al dominio de la función.



EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 4 Para graficar la función

$$g(x) = 4x - x^2, x \geq 0$$

con un dispositivo de graficación, introduzca

$$y_1 = (4x - x^2)/(x \geq 0)$$

(A) A la expresión boleana $(x \geq 0)$ se le asigna el valor de 1 si la desigualdad es verdadera y el de 0 si es falsa. ¿Cómo restringe este resultado la gráfica de $4x - x^2$ a sólo aquellos valores de x que satisfacen $x \geq 0$?

(B) Use este concepto para reproducir las figuras 8(b) y 8(c) en un dispositivo de graficación.

(C) ¿Sus gráficas parecen ser simétricas con respecto a la recta $y = x$? ¿Qué sucede si se usa una ventana cuadrada para la gráfica?

Recuerde del teorema 2 que las funciones crecientes y decrecientes son siempre uno a uno. Esto proporciona la base para un método conveniente y popular de restringir el dominio de una función:

Si el dominio de una función f se restringe a un intervalo en el eje x sobre el cual f es creciente (o decreciente), entonces la nueva función obtenida por esta restricción es uno a uno y tiene una inversa.

Se usa este método para formar las funciones g y h en la figura 6.

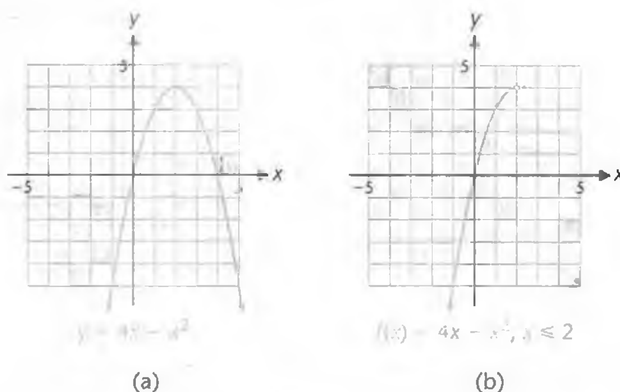
EJEMPLO 3 Determinación de la inversa de una función

Encuentre la inversa de $f(x) = 4x - x^2$, $x \le 2$. Grafique f, f^{-1} y $y = x$ en el mismo sistema coordenado.

Solución

Paso 1. Encuentre el dominio de f y verifique que f es uno a uno. La gráfica de $y = 4x - x^2$ es la parábola que se muestra en la figura 9(a). Restringiendo el dominio de f a $x \le 2$ se restringe la gráfica de f al lado izquierdo de esta parábola [véase la figura 9(b)]. De esta manera, f es una función uno a uno.

FIGURA 9



(a) (b)

Paso 2. Despeje la ecuación $y = f(x)$ para x.

$$y = 4x - x^2$$

$$x^2 - 4x = -y \qquad \text{Reacomodo de los términos.}$$

$$x^2 - 4x + 4 = -y + 4 \qquad \text{Sume 4 para completar el cuadrado del lado izquierdo.}$$

$$(x - 2)^2 = 4 - y$$

Al sacar la raíz cuadrada en ambos lados de esta ultima ecuación, se obtienen dos soluciones posibles:

$$x - 2 = \pm\sqrt{4 - y}$$

El dominio restringido de f indica cuáles soluciones usar. Como $x \le 2$ implica que $x - 2 \le 0$, se debe seleccionar la raíz cuadrada negativa. Así,

$$x - 2 = -\sqrt{4 - y}$$
$$x = 2 - \sqrt{4 - y}$$

y se tiene que

$$x = f^{-1}(y) = 2 - \sqrt{4 - y}$$

Paso 3. Intercambie x y y.

$$y = f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4 - x}$$

Paso 4. Encuentre el dominio de f^{-1}. La ecuación $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4 - x}$ se define para $x \le 4$. De la gráfica en la figura 9(b), el rango de f es también $(-\infty, 4]$. Así,

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4 - x} \qquad x \le 4$$

La comprobación se deja al lector.

Las gráficas de f, f^{-1} y $y = x$ se muestran en la figura 10. Algunas veces es difícil visualizar la reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$. Se seleccionan algunos puntos en la gráfica de f y al dibujar primero sus reflexiones se facilita más trazar la gráfica de f^{-1}. La figura 11 muestra una comprobación en un dispositivo de graficación.

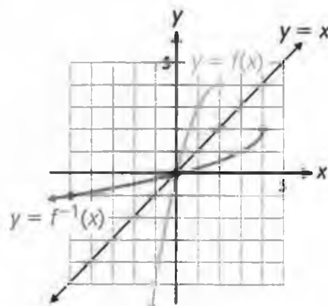


FIGURA 10

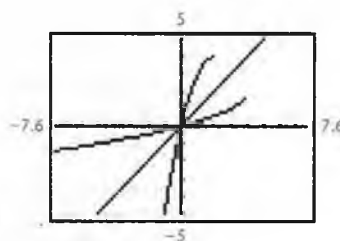
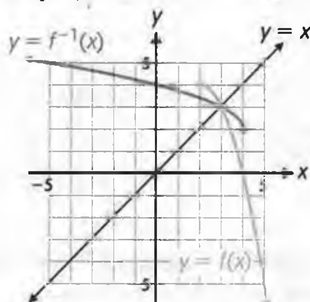


FIGURA 11

Problema seleccionado 3 Encuentre la inversa de $f(x) = 4x - x^2$, $x \ge 2$. Grafique f, f^{-1} y $y = x$ en el mismo sistema coordenado.

Respuestas a los problemas seleccionados.

1. (A) Ninguna función uno a uno (B) Uno a uno
2. $f^{-1}(x) = x^2 - 2$, $x \ge 0$
3. $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4 - x}$, $x \le 4$



EJERCICIO 2-6

A

¿Cuáles de las funciones en los problemas del 1 al 16 son uno a uno?

1. $\{(1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3)\}$
2. $\{(-1, 0), (0, 1), (1, -1), (2, 1)\}$
3. $\{(5, 4), (4, 3), (3, 3), (2, 4)\}$
4. $\{(5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1)\}$

5.

Dominio		**Rango**
−2	→	−4
−1	→	−2
0	→	0
1	→	1
2	→	5

6.

Dominio		**Rango**
−2	→	−3
−1	→	−3
0	→	7
1	→	9
2	→	9

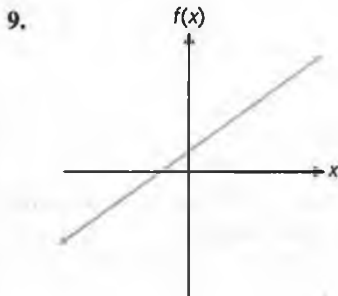
7.

Dominio		**Rango**
1	→	7
2	→	7
3	→	7
4	→	7
5	→	7

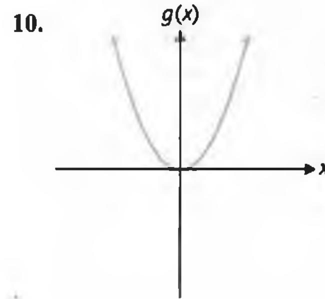
8.

Dominio		**Rango**
1	→	5
2	→	3
3	→	1
4	→	2
5	→	4

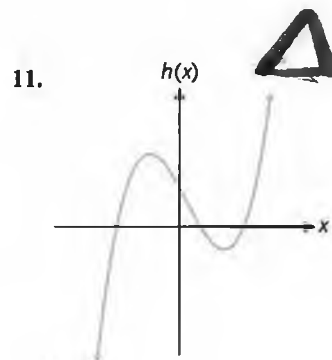
9.



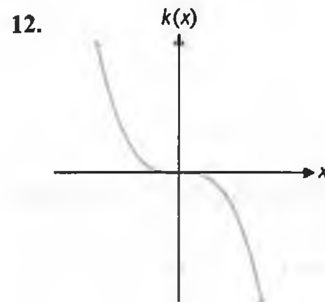
10.



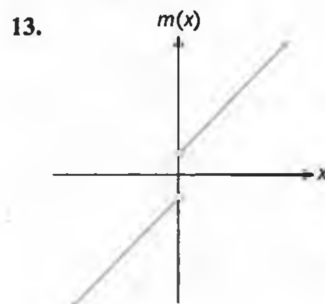
11.



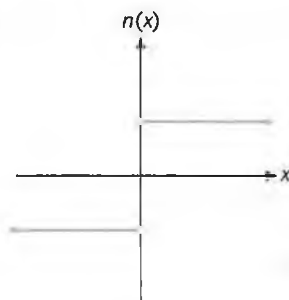
12.



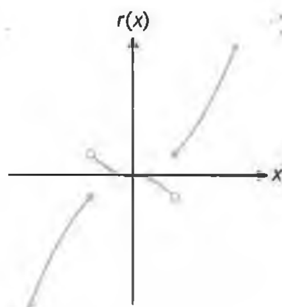
13.



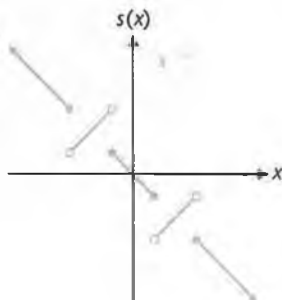
14.



15.



16.



B

¿Cuáles de las funciones en los problemas del 17 al 22 son uno a uno?

17. $F(x) = \frac{1}{2}x + 2$

18. $G(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

19. $H(x) = 4 - x^2$

20. $K(x) = \sqrt{4 - x}$

21. $M(x) = \sqrt{x + 1}$

22. $N(x) = x^2 - 1$

En los problemas del 23 al 30 es necesario usar un dispositivo de graficación. Grafique cada función y use la gráfica para determinar si la función es uno a uno.

23. $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x}$

24. $f(x) = \dfrac{x^2 - |x|}{x}$

25. $f(x) = \dfrac{x^3 + |x|}{x}$

26. $f(x) = \dfrac{|x|^3 + |x|}{x}$

27. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{|x - 2|}$

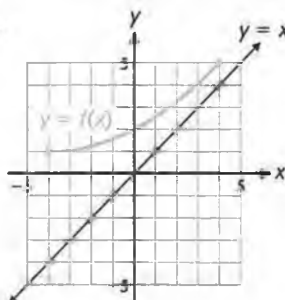
28. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{|x + 1|}$

29. $f(x) = \dfrac{x^3 - 9x}{|x^2 - 9|}$

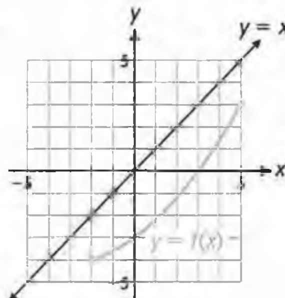
30. $f(x) = \dfrac{4x - x^3}{|x^2 - 4|}$

En los problemas del 31 al 34, use la gráfica de la función uno a uno, f, para trazar la gráfica de f^{-1}. Establezca el dominio y el rango de f^{-1}.

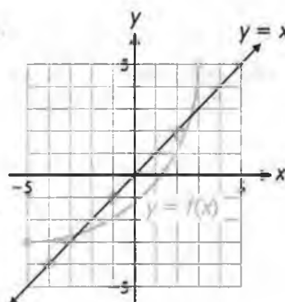
31.



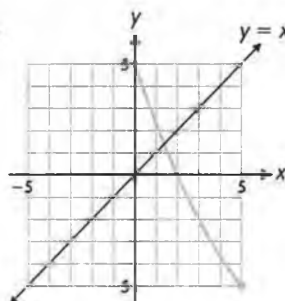
32.



33.



34.



En los problemas del 35 al 40, compruebe que g es la inversa de la función uno a uno f al mostrar que g[f(x)] = x y f[g(x)] = x. Trace las gráficas de f, g y la recta y = x en el mismo sistema coordenado.

Compruebe sus gráficas en los problemas del 35 al 40 al graficar f, g y la recta y = x en una ventana cuadrada de visión mediante un dispositivo de graficación.

35. $f(x) = 3x + 6$; $g(x) = \frac{1}{3}x - 2$

36. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$; $g(x) = -2x + 4$

37. $f(x) = 4 + x^2, x \geq 0$; $g(x) = \sqrt{x - 4}$

38. $f(x) = \sqrt{x + 2}$; $g(x) = x^2 - 2, x \geq 0$

39. $f(x) = -\sqrt{x - 2}$; $g(x) = x^2 + 2, x \leq 0$

40. $f(x) = 6 - x^2, x \leq 0$; $g(x) = -\sqrt{6 - x}$

Las funciones en los problemas del 41 al 60 son uno a uno. Encuentre f^{-1}.

41. $f(x) = 3x$

42. $f(x) = \frac{1}{2}x$

43. $f(x) = 4x - 3$

44. $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

45. $f(x) = \frac{1}{10}x + \frac{3}{5}$

46. $f(x) = -2x - 7$

47. $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

48. $f(x) = \dfrac{3}{x + 4}$

49. $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

50. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x}$

51. $f(x) = \dfrac{2x + 5}{3x - 4}$

52. $f(x) = \dfrac{5 - 3x}{7 - 4x}$

53. $f(x) = x^3 + 1$

54. $f(x) = x^5 - 2$

55. $f(x) = 4 - \sqrt[5]{x + 2}$

56. $f(x) = \sqrt[3]{x + 3} - 2$

57. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x}$

58. $f(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{36 - x}$

59. $f(x) = 3 - \sqrt{x - 2}$

60. $f(x) = 4 + \sqrt{5 - x}$

61. ¿Cómo se relacionan las intersecciones de x y y de una función con su inversa?

62. ¿Una función constante tiene una inversa? Explique.

C

Las funciones en los problemas del 63 al 66 son uno a uno. Encuentre f^{-1}.

63. $f(x) = (x - 1)^2 + 2, x \geq 1$

64. $f(x) = 3 - (x - 5)^2, x \leq 5$

65. $f(x) = x^2 + 2x - 2, x \leq -1$

66. $f(x) = x^2 + 8x + 7, x \geq 4$

La gráfica de cada función en los problemas del 67 al 70 es un cuarto de la gráfica del círculo con radio 3 y centro (0, 0). Encuentre f^{-1}, encuentre también el dominio y rango de f^{-1}, y trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo sistema coordenado.

67. $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}, 0 \leq x \leq 3$

68. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, 0 \leq x \leq 3$

69. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, -3 \leq x \leq 0$

70. $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}, -3 \leq x \leq 0$

La gráfica de cada función en los problemas del 71 al 74 es un cuarto de la gráfica del círculo con radio 1 y centro (0, 1). Encuentre f^{-1}, encuentre también el dominio y rango de f^{-1}, y trace las gráficas de f y f^{-1} en el mismo sistema coordenado.

71. $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 1$

72. $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 1$

73. $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 0$

74. $f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 0$

75. Encuentre $f^{-1}(x)$ para $f(x) = ax + b, a \neq 0$.

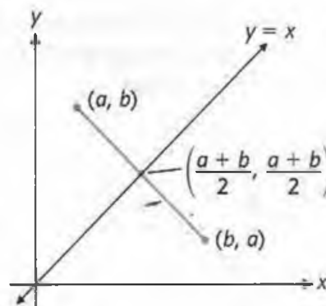
76. Encuentre $f^{-1}(x)$ para $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, a > 0, 0 \leq x \leq a$.

77. Refiérase al problema 75. ¿Para qué valores de a y b es f su propia inversa?

78. ¿Cómo podría reconocer la gráfica de una función que sea su propia inversa?

79. Demuestre que la recta a través de los puntos (a, b) y (b, a), $a \neq b$, es perpendicular a la recta $y = x$ (véase la figura).

80. Demuestre que el punto $(a + b)/2$, $(a + b)/2$ biseca el segmento de recta desde (a, b) hasta (b, a), $a \neq b$ (véase la figura).



En los problemas del 81 al 84, la función f no es uno a uno. Encuentre las inversas de las funciones formadas por la restricción del dominio de f como se indica.

*Compruebe sus gráficas en los problemas 81 a 84 graficando f, g y la recta y = x en una ventana de visión cuadrada de un dispositivo de graficación. [Sugerencia: Para restringir la gráfica de y = f(x) a un intervalo de la forma a ≤ x ≤ b, introduzca y = f(x)/((a ≤ x) * (x ≤ b)).]*

81. $f(x) = (2 - x)^2$:
(A) $x \leq 2$ (B) $x \geq 2$

82. $f(x) = (1 + x)^2$:
(A) $x \leq -1$ (B) $x \geq -1$

83. $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$:
(A) $0 \leq x \leq 2$ (B) $2 \leq x \leq 4$

84. $f(x) = \sqrt{6x - x^2}$:
(A) $0 \leq x \leq 3$ (B) $3 \leq x \leq 6$

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 2 Modelado matemático en los negocios*

Este grupo de actividades, tiene que ver con el análisis de un modelo básico para la fabricación y venta de un producto usando tablas de datos y regresión lineal, para determinar los valores adecuados de las constantes a, b, m y n en las funciones siguientes:

TABLA 1 Funciones para el modelado en negocios

Función	Definición	Interpretación
Precio-demanda	$p(x) = m - nx$	x es el número de artículos que se pueden vender a $ P
Costo	$C(x) = a + bx$	Costo total de producción de x artículos
Ingresos	$R(x) = xp$ $= x(m - nx)$	Ingresos totales de la venta de x artículos
Ganancia	$P(x) = R(x) - C(x)$	Ganancia total de la venta de x artículos

Una compañía fabrica y vende bicicletas de montaña. Al gerente le gustaría tener las funciones de precio-demanda y funciones de costos para el análisis del punto de equilibrio y de pérdidas-ganancias. Las funciones de precio-demanda y de costos podrían establecerse al obtener los datos adecuados en los diferentes niveles de producción, y después encontrando un modelo en la forma de una función básica elemental (de nuestra biblioteca de funciones elementales) que "ajuste a lo más cercano" los datos obtenidos. El departamento de finanzas, usando técnicas estadísticas, llegó a los datos de precio-demanda y costo que se muestran en las tablas 2 y 3, donde p es el precio de mayoreo de una bicicleta para una demanda de x miles de bicicletas y C es el costo, en miles de dólares, para producir y vender x miles de bicicletas.

TABLA 2 Precio-demanda

x (miles)	p($)
7	530
13	360
19	270
25	130

TABLA 2 Costo

x (miles)	C(miles $)
5	2 100
12	2 940
19	3 500
25	3 920

(A) Construcción de un modelo matemático para el precio-demanda. Trace los datos de la tabla 2 y observe que la relación entre p y x es casi lineal. Después de observar una relación entre variables, a menudo los analistas intentan modelar la relación en términos de una función básica, de un portafolio de funciones elementales, que "ajuste mejor" los datos.

1. **Las rectas de regresión lineal** se usan frecuentemente para modelar fenómenos lineales. Éste es un proceso de ajuste de un conjunto de datos, a una línea recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias de

* Este proyecto de grupo puede hacerse sin usar un dispositivo de graficación, pero se obtiene un conocimiento adicional en el modelado matemático, si se dispone de un dispositivo de graficación.

todos los puntos en la gráfica de los datos a la recta, mediante el **método de mínimos cuadrados**. Muchos dispositivos de graficación tienen esta rutina preconstruida. Lea su manual del usuario para su dispositivo de graficación en particular, y analice entre los miembros de su grupo cómo se hace esto. Después de obtener la recta de regresión lineal con los datos de la tabla 2, grafique la recta y los datos en la misma ventana de visión.

2. La recta de regresión lineal encontrada en la parte 1 es un modelo matemático para la función precio-demanda y está dada por

$$p(x) = 666.5 - 21.5x \qquad \text{Función precio-demanda}$$

Grafique los datos de la tabla 2 y la función precio-demanda en el mismo sistema coordenado rectangular.

3. La recta de regresión lineal define la función lineal de precio-demanda. Interprete la pendiente de la función. Analice su dominio y rango. Mediante el modelo matemático, determine el precio para una demanda de 10 000 bicicletas y para una demanda de 20 000 bicicletas.

(B) Construcción de un modelo matemático para el costo. Trace los datos de la tabla 3 en un sistema coordenado rectangular. ¿Qué tipo de función resulta que ajusta mejor los datos?

1. Ajuste los datos de la tabla 3 con una recta de regresión lineal. Después trace los puntos dados por los datos y la recta en la misma ventana de visión.

2. La recta de regresión lineal encontrada en la parte 1 es un modelo matemático para la función costo y está dada por

$$C(x) = 86x + 1\,782 \qquad \text{Función costo}$$

Grafique los datos de la tabla 3 y la función costo en el mismo sistema coordenado rectangular.

3. Interprete la pendiente y la intersección y de la función costo. Analice su dominio y rango. Mediante el modelo matemático, determine el costo para una producción y venta de 10 000 bicicletas y para una producción y venta de 20 000 bicicletas.

(C) Análisis del punto de equilibrio y de ganancias-pérdidas. Formule una ecuación para la función ingreso y establezca su dominio. Formule la ecuación para la función ganancia y establezca su dominio.

1. Grafique la función ganancia y la función costo, simultáneamente en el mismo sistema coordenado rectangular. Determine, en forma algebraica, con qué producción (a la unidad más cercana) la compañía alcanza su punto de equilibrio. Determine dónde los costos exceden a los ingresos y dónde los ingresos exceden a los costos.

2. Grafique la función de ganancia y la función costo, simultáneamente en la misma ventana de visión. Determine, de manera gráfica, con qué producción (a la unidad más cercana) la compañía llega a su punto de equilibrio y dónde los costos exceden a los ingresos y dónde los ingresos exceden los costos.

3. Grafique la función ganancia en un sistema coordenado rectangular. Determine, algebraicamente, con qué producción (a la unidad más cercana) la compañía llega a su punto de equilibrio. Determine dónde ocurren las ganancias y dónde las pérdidas. ¿Con qué producción y precio se tendrá la máxima ganancia? ¿Se tienen los máximos ingresos y máxima ganancia con la misma producción? Analice.

4. Grafique la función ganancia con un dispositivo de graficación. Determine, gráficamente, con qué producción (a la unidad más cercana) la compañía llega a su punto de equilibrio y dónde ocurren las pérdidas y ganancias. ¿Con qué producción y precio se tendrá una máxima ganancia? ¿Se tienen los máximos ingresos y utilidades con la misma producción? Analice.

Repaso del capítulo 2

2-1 HERRAMIENTAS BÁSICAS; CÍRCULOS

Un **sistema coordenado rectangular** o **cartesiano** se forma por la intersección de una recta numérica real horizontal y una recta numérica real vertical en su origen. Estas rectas se denominan **ejes coordenados.** El **eje horizontal** es a menudo denominado **eje** x y el **eje vertical eje** y. Estos ejes dividen al plano en cuatro **cuadrantes.** Cada punto en el plano corresponde a sus **coordenadas,** esto es, un par ordenado (a, b) que se determina al pasar las rectas horizontal y vertical por el punto. La **abscisa** o **coordenada** x de a, es la coordenada de la intersección de la recta vertical con el eje horizontal, y la **ordenada** o **coordenada** y, b es la coordenada de la intersección de la recta horizontal con el eje vertical. El punto (0, 0) se denomina **origen.** El **conjunto solución** de una ecuación con dos variables, es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales que hacen de la ecuación un postulado verdadero. La **gráfica de una ecuación con dos variables** es la gráfica de su conjunto solución, formada mediante la **graficación punto por punto** o con la ayuda de un **dispositivo de graficación.**

La **distancia entre dos puntos** $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Las **ecuaciones estándar para un círculo** son

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad \text{Radio: } r > 0, \quad \text{Centro: } (h, k)$$

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{Radio: } r > 0, \quad \text{Centro: } (0, 0)$$

Mediante una **ventana cuadrada** se mejorará la apariencia de un círculo en un dispositivo de graficación.

2-2 LÍNEAS RECTAS

La **forma estándar** para la ecuación de una recta es $Ax + By = C$, donde A, B y C son constantes, A y B no son cero. La **intersección** y es la ordenada del punto en que la gráfica cruza al eje y, y la **intersección** x es la abscisa del punto donde la gráfica cruza al eje x. La **pendiente** de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \text{si } x_1 \neq x_2$$

La pendiente no está definida para una recta vertical, donde $x_1 = x_2$. Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son **paralelas** si y sólo si $m_1 = m_2$ y **perpendiculares** si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

Ecuaciones de una recta

Forma estándar	$Ax + By = C$	A y B no son iguales a 0
Forma pendiente-intersección	$y = mx + b$	Pendiente: m; Intersección con el eje y: b
Forma punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$	Pendiente: m; Punto: (x_1, y_1)
Recta horizontal	$y = b$	Pendiente: 0
Recta vertical	$x = a$	Pendiente: Indefinida

2-3 FUNCIONES

Una **función** es una **regla** que produce una correspondencia entre dos conjuntos de elementos, de manera que a cada elemento en el primer conjunto le corresponda uno y sólo un elemento en el segundo conjunto. El primer conjunto se denomina **dominio** y el conjunto de todos los elementos correspondientes en el segundo conjunto se denomina **rango.** De manera equivalente, una **función** es un **conjunto de pares ordenados** con la propiedad que dos pares ordenados no tienen la misma primera componente y diferentes segundas componentes. El **dominio** es el conjunto de todas las primeras componentes, y el **rango** es el conjunto de todas las segundas componentes. Una **ecuación** con dos variables **define una función** si para cada valor de la **variable independiente**, al sitio de los valores del dominio, le corresponde exactamente un valor de la **variable dependiente**, al sitio de los valores del rango. Una **recta vertical** intersectará la gráfica de una función en a lo más un punto. A menos que se especifique otra cosa, el **dominio de una función definida por una ecuación** se supone que es el conjunto de todos los de números reales reemplazados para la variable independiente que produzca valores reales para la variable dependiente. El símbolo $\boldsymbol{f(x)}$ representa el número real en el rango de la función f que corresponde al valor del dominio x. De manera equivalente, el par ordenado $(x, f(x))$ pertenece a la función f.

2-4 GRÁFICAS DE FUNCIONES

La **gráfica de una función** f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$. La abscisa de cualquier punto en que la gráfica de una función f cruza el eje x se denomina **intersección** x de f. La ordenada de un punto donde la gráfica cruza al eje y se denomina intersección y.

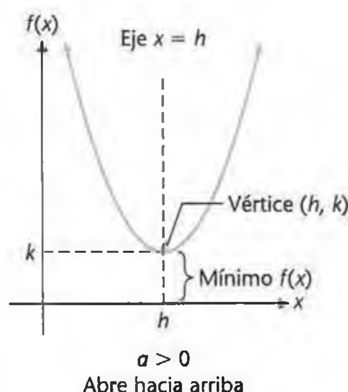
Sea I un intervalo en el dominio de una función f. Entonces:

1. f **es creciente** en I si $f(b) > f(a)$ siempre que $b > a$ en I.
2. f **es decreciente** en I si $f(b) < f(a)$ siempre que $b > a$ en I.
3. f **es constante** en I si $f(a) = f(b)$ para toda a y b en I.

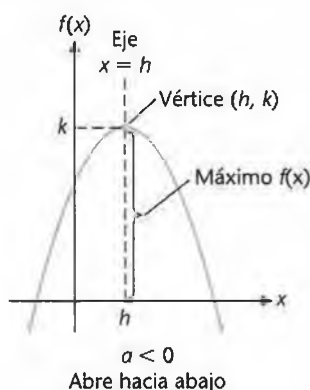
Una función f es una **función lineal** si $f(x) = mx + b$, $m \neq 0$, y una **función cuadrática** si $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. La gráfica de una función lineal es una recta que no es horizontal ni vertical.

Propiedades de $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - h)^2 + k$, $a \neq 0$, y su gráfica:

1. La gráfica de f es una parábola:



$a > 0$
Abre hacia arriba



$a < 0$
Abre hacia abajo

2. Vértice: (h, k). (La parábola aumenta en un lado del vértice y disminuye en el otro.)

3. Eje (de simetría): $x = h$. (Paralelo al eje y.)

4. $f(h) = k$ es el mínimo si $a > 0$ y el máximo si $a < 0$.

5. Dominio: Todos los números reales.

   Rango: $(-\infty, k]$ si $a < 0$ o $[k, \infty)$ si $a > 0$

Una **función definida por partes** es una función cuya definición involucra más de una fórmula. La gráfica de una función es **continua** si no tiene huecos o cortes y discontinua si tiene en cualquier punto un hueco o corte. La **función entera más grande** se define por

$$f(x) = [\![x]\!] = n \qquad \text{donde } n \text{ es un entero, } n \leq x < n + 1$$

2-5 COMBINACIÓN DE FUNCIONES

La **suma, diferencia, producto** y **cociente** de las funciones f y g están definidas por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad g(x) \neq 0$$

El **dominio** de cada función es la intersección de los dominios de f y g, con la excepción de que los valores de x donde $g(x) = 0$ deben ser excluidos del dominio de f/g.

La **composición** de funciones f y g se define por $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$. El **dominio** de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números reales x en el dominio de g donde $g(x)$ está en el dominio de f. El dominio de $f \circ g$ es siempre un subconjunto del dominio de g.

Traslación vertical:

$y = f(x) + k$, $k > 0$	Desplazamiento de la gráfica de $y = f(x)$, k unidades hacia arriba.
$y = f(x) - k$, $k > 0$	Desplazamiento de la gráfica de $y = f(x)$, k unidades hacia abajo.

Traslación horizontal:

$y = f(x - h)$, $h > 0$	Desplazamiento de la gráfica de $y = f(x)$, h unidades hacia la derecha.
$y = f(x + h)$, $h > 0$	Desplazamiento de la gráfica de $y = f(x)$, h unidades hacia la izquierda.

Reflexión:

$y = -f(x)$	Refleje la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje x.

Expansión y contracción:

$y = Cf(x)$, $C > 1$	Amplíe la gráfica de $y = f(x)$ multiplicando cada valor por C.
$y = Cf(x)$, $0 < C < 1$	Contraiga la gráfica de $y = f(x)$ multiplicando cada valor por C.

2-6 FUNCIONES INVERSAS

Una función es **uno a uno** si dos pares ordenados en la función no tienen la misma segunda componente y diferentes primeras componentes. Una **recta horizontal** intersectará la gráfica de una función uno a uno en a lo más un punto. Una función que es creciente (o decreciente) en todo su dominio es uno a uno. La **inversa** de la función uno a uno f es la función f^{-1} que se forma invirtiendo todos los pares ordenados en f. Si f no es uno a uno, entonces f^{-1} **no existe**.

Suponga que f^{-1} existe, entonces:

1. f^{-1} es uno a uno.
2. Dominio de f^{-1} = Rango de f.

3. Rango de f^{-1} = Dominio de f.
4. $x = f^{-1}(y)$ si y sólo si $y = f(x)$
5. $f^{-1}[f(x)] = x$ para toda x en el dominio de f.
6. $f[f^{-1}(x)] = x$ para toda x en el dominio de f^{-1}.
7. Para encontrar f^{-1}, resuelva la ecuación de $y = f(x)$ para x y después intercambie x y y.
8. Las gráficas de $y = f(x)$ y $y = f^{-1}(x)$ son simétricas con respecto a la recta $y = x$.

Ejercicios de repaso del capítulo 2

Al trabajar con los problemas de este capítulo revise y compruebe sus respuestas con las que se dan al final del libro. Se incluyen todas las respuestas a los problemas de repaso y después de cada una está un número en tipo itálico que indica la sección de la cual se tomó el problema que se está analizando. Si se presentan dudas repase las secciones adecuadas en el texto.

A

1. Dados los puntos $A(-2, 3)$ y $B(4, 0)$, encuentre:
   (A) La distancia entre A y B
   (B) Pendiente de la recta que pasa por A y B
   (C) Pendiente de la recta perpendicular a la recta que une a A y B.

2. Escriba la ecuación de un círculo con radio $\sqrt{7}$ y centro:
   (A) (0, 0) (B) (3, −2)

3. Encuentre el centro y el radio del círculo dados por

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$$

4. Grafique $3x + 2y = 9$ e indique su pendiente.

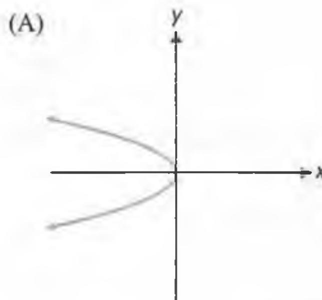
5. Escriba una ecuación de una recta con intersección con el eje x en 6 e intersección con el eje y en 4. Escriba la respuesta final en la forma estándar $Ax + By = C$, donde A, B y C son enteros.

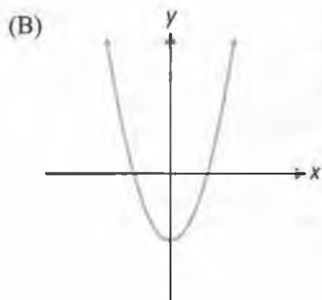
6. Escriba la forma pendiente-intersección de la ecuación de la recta con pendiente $-\frac{2}{3}$ e intersección con el eje y en 2.

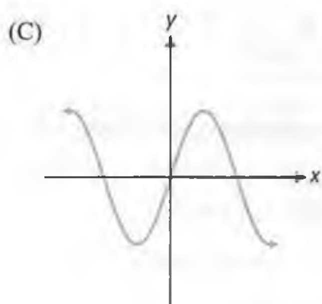
7. Escriba las ecuaciones de las rectas vertical y horizontal que pasan por el punto (−3, 4). ¿Cuál es la pendiente de cada una?

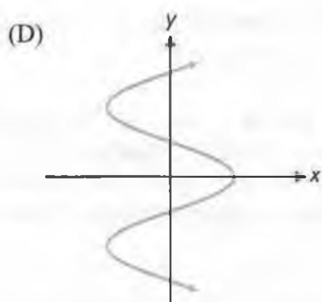
8. Indique si cada conjunto define a una función. Encuentre el dominio y el rango de cada función.
   (A) $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$
   (B) $\{(1, 1), (1, -1), (2, 2), (2, -2)\}$
   (C) $\{(-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2)\}$

9. Indique si cada gráfica especifica una función:

(A)


(B)


(C)


(D)


10. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones define funciones?

(A) $y = x$ (B) $y^2 = x$
(C) $y^3 = x$ (D) $|y| = x$

Los problemas del 11 al 20 se refieren a las funciones f, g, k y m dadas por:

$$f(x) = 3x + 5 \qquad g(x) = 4 - x^2$$
$$k(x) = 5$$
$$m(x) = 2|x| - 1$$

Encuentre las cantidades indicadas o expresiones

11. $f(2) + g(-2) + k(0)$ **12.** $\dfrac{m(-2) + 1}{g(2) + 4}$

13. $\dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ **14.** $\dfrac{g(a + h) - g(a)}{h}$

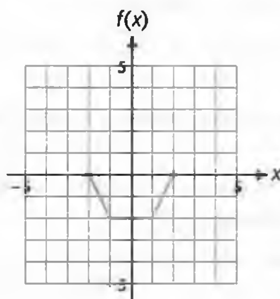
15. $(f + g)(x)$ **16.** $(f - g)(x)$

17. $(fg)(x)$ **18.** $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

19. $(f \circ g)(x)$ **20.** $(g \circ f)(x)$

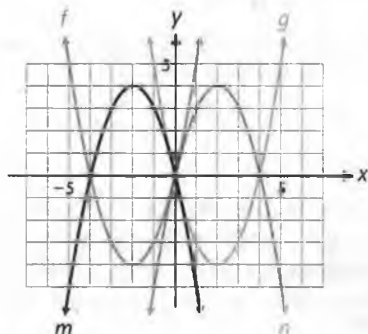
21. Trace una gráfica de cada una de las funciones en los incisos A-D, usando la gráfica de la función f mostrada en la figura.

(A) $y = -f(x)$ (B) $y = f(x) + 4$
(C) $y = f(x - 2)$ (D) $y = -f(x + 3) - 3$



22. Relacione cada ecuación con una gráfica de una de las funciones f, g, m o n mostradas en la figura. Cada gráfica representa una de las ecuaciones y se supone que continúa sin límites más allá de la parte mostrada.

(A) $y = (x - 2)^2 - 4$ (B) $y = -(x + 2)^2 + 4$
(C) $y = -(x - 2)^2 + 4$ (D) $y = (x + 2)^2 - 4$



23. Refiriéndose a la gráfica de la función f mostrada en la figura del problema 22 y usando las propiedades conocidas de las funciones cuadráticas, encuentre cada uno de los siguientes conceptos, con aproximación al entero más cercano:

(A) Intersecciones (B) Vértice
(C) Máximo o mínimo (D) Rango
(E) Intervalo creciente (E) Intervalo decreciente

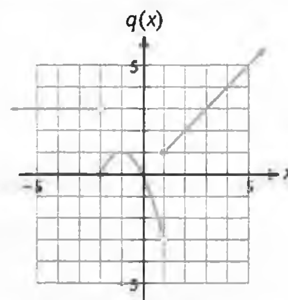
24. Encuentre el valor máximo o mínimo de $f(x) = x^2 - 6x + 11$ sin graficación. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la gráfica?

25. ¿Cómo están relacionadas las gráficas de las siguientes funciones con la gráfica de $y = x^2$?

(A) $y = -x^2$ (B) $y = x^2 - 3$
(C) $y = (x + 3)^2$

B

Los problemas del 26 al 32 se refieren a la función q dada por la gráfica siguiente. (Suponga que la gráfica continúa como se indica más allá de la parte mostrada.)



26. Encuentre y con el entero más cercano:

(A) $y = q(0)$ (B) $y = q(1)$
(C) $y = q(2)$ (D) $y = q(-2)$

27. Encuentre x con el entero más cercano:

(A) $q(x) = 0$ (B) $q(x) = 1$
(C) $q(x) = -3$ (D) $q(x) = 3$

28. Encuentre el dominio y rango de q.

29. Encuentre los intervalos para los que q es creciente.

30. Encuentre los intervalos para los que q es decreciente.

31. Encuentre los intervalos para los que q es constante.

32. Identifique cualquier punto de discontinuidad.

33. La función f multiplica el cubo del dominio del elemento por 4 y después resta la raíz cuadrada del dominio del elemento. Escriba una definición algebraica de f.

34. Escriba una descripción verbal de la función $f(x) = 3x^2 + 4x - 6$.

35. (A) Encuentre una ecuación de la recta por $P(-4, 3)$ y $Q(0, -3)$. Escriba la respuesta final en la forma estándar $Ax + By = C$, donde A, B y C son enteros con $A > 0$.

(B) Encuentre $d(P, Q)$.

36. Escriba las ecuaciones de las rectas

(A) Paralelas a (B) Perpendiculares a

la recta $6x + 3y = 5$ y pasa por el punto $(-2, 1)$. Escriba las respuestas finales en la forma pendiente-intersección $y = mx + b$.

37. Analice la gráfica de $4x^2 + 9y^2 = 36$ respecto a la simetría con respecto al eje x, eje y y al origen.

38. Encuentre el dominio de $g(x) = 1/\sqrt{3 - x}$

39. Grafique $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Muestre el eje de simetría y vértice, y encuentre el rango, intersecciones y valor máximo y mínimo de $f(x)$.

40. Encuentre el dominio de $h(x) = 1/(4 - \sqrt{x})$.

41. Dados $f(x) = \sqrt{x} - 8$ y $g(x) = |x|$:

(A) Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$.
(B) Encuentre los dominios de $f \circ g$ y $g \circ f$.

42. ¿Cuáles de las funciones siguientes son uno a uno?
(A) $f(x) = x^3$
(B) $g(x) = (x - 2)^2$
(C) $h(x) = 2x - 3$
(D) $F(x) = (x + 3)^2, x \geq -3$

43. Dada $f(x) = 3x - 7$:

(A) Encuentre $f^{-1}(x)$.
(B) Encuentre $f^{-1}(5)$.
(C) Encuentre $f^{-1}[f(x)]$.
(D) ¿Es f creciente, decreciente o constante en $(-\infty, \infty)$?

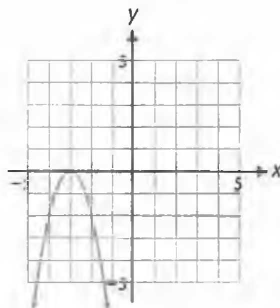
Compruebe f, f^{-1} y $y = x$ graficando en una ventana de visión cuadrada mediante un dispositivo de graficación.

44. Grafique, encuentre el dominio, rango y cualquiera de los puntos de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

45. La gráfica siguiente es el resultado de aplicar una secuencia de transformaciones de la gráfica de $y = x^2$. Describa las transformaciones verbalmente y escriba una ecuación para la gráfica dada.

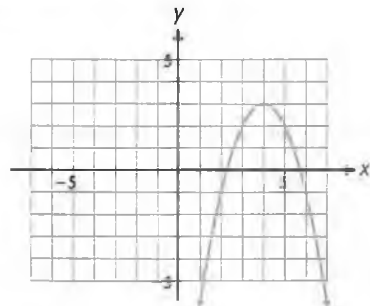
Compruebe graficando su ecuación con un dispositivo de graficación.



46. La gráfica de $f(x) = x$ se expande por un factor de 3, reflejada en el eje x, y desplazada 2 unidades a la derecha y 5 unidades hacia arriba para formar la gráfica de la función g. Encuentre una ecuación para la función g y la gráfica g.

47. Escriba una ecuación para la siguiente gráfica en la forma $y = a(x - h)^2 + k$, donde a puede ser -1 o $+1$ y h y k son enteros.

Compruebe graficando su ecuación con un dispositivo de graficación.



48. Grafique:
(A) $y = |x| - 2$ (B) $y = |x + 1|$
(C) $y = \frac{1}{2}|x|$

49. Dada $f(x) = \sqrt{x - 1}$.

(A) Encuentre $f^{-1}(x)$.
(B) Encuentre el dominio y rango de f y f^{-1}.
(C) Grafique f, f^{-1} y $y = x$ en el mismo sistema coordenado.

Compruebe graficando f, f^{-1} y $y = x$ en una ventana de visión cuadrada mediante un dispositivo de graficación.

50. Encuentre la ecuación de un círculo que pasa por el punto $(-1, 4)$ con centro en $(3, 0)$.

51. Encuentre el centro y radio del círculo dado por $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$.

52. Determine la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen y grafique $xy = 4$.

53. Si la pendiente de una recta es negativa, ¿la función lineal está representada por la gráfica de la recta creciente, decreciente o constante en $(-\infty, \infty)$?

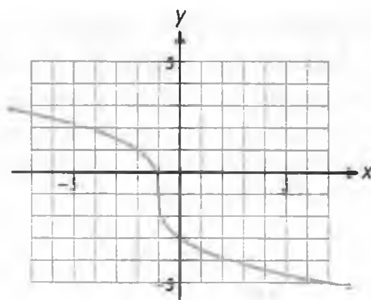
54. Dada $f(x) = x^2 - 1, x \geq 0$:

(A) Encuentre el dominio y rango de f y f^{-1}.
(B) Encuentre $f^{-1}(x)$.
(C) Encuentre $f^{-1}(3)$.
(D) Encuentre $f^{-1}[(f(4)]$.
(E) Encuentre $f^{-1}[f(x)]$.

Compruebe graficando f, f^{-1} y $y = x$ en una ventana de visión cuadrada mediante un dispositivo de graficación.

C

55. La gráfica que se muestra en la parte superior de la página siguiente es el resultado de aplicar una secuencia de transformaciones a la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$. Describa las transformaciones verbalmente y escriba una ecuación para la gráfica dada.





Compruebe graficando su ecuación con un dispositivo de graficación.

56. ¿Cómo es la gráfica de la función $f(x) = -(x-2)^2 - 1$ en relación con la gráfica de la función $g(x) = x^2$?

57. Grafique $f(x) = -|x+1| - 1$

58. Encuentre el dominio de $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

59. Dadas $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{1-x}$, encuentre cada función y su dominio.

(A) fg (B) f/g (C) $f \circ g$ (D) $g \circ f$

60. Para una función f uno a uno que está dada por

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3}$$

(A) Encuentre $f^{-1}(x)$.
(B) Encuentre $f^{-1}(3)$.
(C) Encuentre $f^{-1}[f(x)]$.

61. Encuentre la definición por partes de $f(x) = |x+1| - |x-1|$ que no involucre el valor absoluto de la función. Encuentre el dominio y el rango de f.

62. Encuentre la ecuación del conjunto de puntos equidistantes de (3, 3) y (6, 0). ¿Cómo se llama la figura geométrica formada por este conjunto?

63. Pruebe que dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si sus pendientes son las mismas.

64. Pruebe que las rectas $mx - y = b$ y $x + my = c$ son perpendiculares.

65. Grafique:

(A) $f(x) = [\![|x|]\!]$ (B) $g(x) = |[\![x]\!]|$



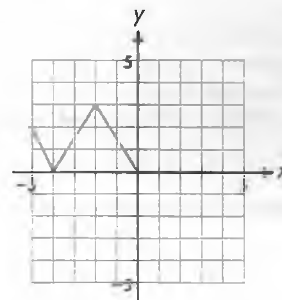
66. Grafique en una ventana de visión estándar:

$$f(x) = 0.1(x-2)^2 + \frac{|3x-6|}{x-2}$$

Suponiendo que la gráfica continúa como se indicó más allá de la parte mostrada en esta ventana, encuentre el dominio, rango y cualquiera de los puntos de discontinuidad. (Use el modo de puntos en su dispositivo de graficación, si es que lo tiene.)

67. Una gráfica parcial de la función f se muestra en la figura. Complete la gráfica de f sobre el intervalo [0, 5] dado que:

(A) f es simétrica con respecto al eje y.
(B) f es simétrica con respecto al origen.



68. La función f es decreciente en [−5, 5] con $f(-5) = 4$ y $f(5) = -3$.

(A) Si f es continua en [−5, 5], ¿cuántas veces la gráfica de f puede cruzar el eje x? Justifique su conclusión con ejemplos y/o argumentos verbales?
(B) Repita el inciso (A) si la función no tiene que ser continua.

APLICACIONES



69. Depreciación lineal. Una pequeña compañía compró un sistema de cómputo en $12 000 y supone que su valor de depreciación será de $2 000 después de 8 años. Si el valor se deprecia linealmente de $12 000 a $2 000:

(A) Encuentre la ecuación lineal que relaciona el valor V (en dólares) con un tiempo t (en años).
(B) ¿Cuál sería el valor depreciado del sistema después de 5 años?

70. Negocios: precios. Una tienda de artículos deportivos vende unos shorts para jugar tenis que cuestan $30 en $48 y unos lentes de sol que le cuestan $20 en $32.

(A) Si la política de ganancias de la tienda para los artículos que cuestan $10 se supone que es lineal y se refleja en el precio de estos dos artículos, escriba una ecuación que exprese el precio al menudeo R como una función del costo C.
(B) ¿Cuál debe ser el precio al menudeo de un par de esquíes que cuestan $105?

* **71. Ingresos.** Un vendedor recibe un salario base de $200 por semana y una comisión del 10% en las ventas realizadas por arriba de los $3 000 durante la semana. Si x representa las ventas realizadas por el vendedor durante la semana, exprese el total de las ganancias de la semana $E(x)$ como una función de x. Encuentre $E(2\ 000)$ y $E(5\ 000)$.

72. Demanda. El consumo de huevo ha ido disminuyendo con el tiempo, presumiblemente por el aumento en la información del alto contenido de colesterol que se encuentra

en las yemas del huevo. En la tabla 1 se enlista el consumo anual per cápita de huevo en Estados Unidos (*fuente:* Departamento de Agricultura).

TABLA 1

Año	1970	1975	1980	1985	1990
Consumo	309	276	271	255	233

Un modelo matemático para estos datos está dado por

$$f(x) = 303.4 - 3.46x$$

donde $x = 0$ corresponde al año de 1970.

(A) Complete la tabla 2. Redondee los valores de $f(x)$ al entero más cercano.

TABLA 2

x	0	5	10	15	20
Consumo	309	276	271	255	233
$f(x)$					

(B) Grafique $y = f(x)$ y los datos de la tabla en el mismo conjunto de ejes.
(C) Use la función modelamiento de f para calcular el consumo de huevo per cápita en 1995. En 2000.
(D) Con base en la información de la tabla, describa en forma breve los cambios en el consumo de huevo de 1970 a 1990.

73. Precios. Una tienda de artículos para oficina vende bolígrafos con punto rodante a $0.49 cada uno. Para un pedido de bolígrafos de tres docenas o más, el precio por bolígrafo para todo el pedido de bolígrafos se reduce a $0.44, y para un pedido de seis docenas o más se reduce a $0.39.

(A) Si $C(x)$ es el costo total en dólares para un pedido de x bolígrafos, escriba una definición por partes para C.
(B) Grafique $y = C(x)$ para $0 \leq x \leq 108$, e identifique cualquier punto de discontinuidad.

74. Análisis del punto de equilibrio. Una compañía de producción de videos está planeando producir un video educativo. El productor calcula que la grabación del video costará $84 000 y $15 por unidad por la copia y distribución. El precio de mayoreo por unidad es de $50.

(A) Escriba la ecuación de costo y la ecuación de ingresos, y grafique ambas de manera simultánea en un sistema coordenado rectangular.
(B) Determine cuándo $R = C$; después, con la ayuda del inciso (A), determine cuando $R < C$ y $R > C$.

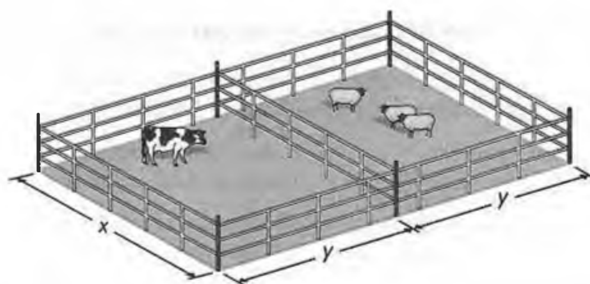
75. Mercadotecnia. Si cada semana se producen x unidades de un producto que se vende a un precio de $\$p$ por unidad, entonces la demanda por semana, ingresos y la ecuación de costos son, respectivamente,

$$x = 500 - 10p$$
$$R(x) = 50x - \tfrac{1}{10}x^2$$
$$C(x) = 20x + 4\,000$$

Exprese la ganancia semanal como una función del precio p.

76. Arquitectura. La parte superior de una entrada está formada por un arco de 6 pies por lado vertical y 8 pies de separación. Si la parte superior del arco está a 2 pies por arriba de sus extremos, ¿cuál es el radio del arco?

77. Construcción. Un granjero tiene 120 pies de cerca para construir dos corrales rectangulares idénticos, con un lado en común (véase la figura).



(A) Exprese el área total $A(x)$ delimitada por ambos corrales como una función del ancho x.
(B) De acuerdo con las consideraciones físicas, ¿cuál es el dominio de la función A?
(C) Encuentre las dimensiones de los corrales que harán que el área total encerrada sea la máxima.

78. Ciencia de la computación. En programación de computadoras, a menudo es necesario comprobar números para ciertas propiedades (pares, impares, cuadrados perfectos, etcétera). La función entera más grande proporciona un método conveniente para determinar algunas de esas propiedades. Por ejemplo, la siguiente función se puede usar para determinar si un número es el cuadrado de un entero:

$$f(x) = x - ([\![\sqrt{x}]\!])^2$$

(A) Encuentre $f(1)$.
(B) Encuentre $f(2)$.
(C) Encuentre $f(3)$.
(D) Encuentre $f(4)$.
(E) Encuentre $f(5)$.
(F) Encuentre $f(n^2)$, donde n es un entero positivo.

Ejercicios de repaso acumulativo de los capítulos 1 y 2

Trabaje en todos los problemas de este repaso acumulativo y compruebe las respuestas con las que se indican al final del libro. Después de cada respuesta a los problemas hay un número en tipo itálico que indica la sección a la que pertenece el problema que se está analizando. Si tiene dificultades para resolverlos, revise las secciones adecuadas en el texto.

A

1. Despeje para x: $\frac{7x}{5} - \frac{3 + 2x}{2} = \frac{x - 10}{3} + 2$

2. Despeje para x y y: $2x - 3y = 8$
$4x + y = 2$

Resuelva y grafique los problemas del 3 al 5.

3. $2(3 - y) + 4 \le 5 - y$

4. $|x - 2| < 7$

5. $x^2 + 3x \ge 10$

6. Realice las operaciones indicadas y escriba la respuesta en la forma estándar:

(A) $(2 - 3i) - (-5 + 7i)$
(B) $(1 + 4i)(3 - 5i)$
(C) $\frac{5 + i}{2 + 3i}$

Resuelva los problemas del 7 al 10.

7. $3x^2 = -12x$

8. $4x^2 - 20 = 0$

9. $x^2 - 6x + 2 = 0$

10. $x - \sqrt{12 - x} = 0$

11. ¿Para qué valores de x $\sqrt{2 + 3x}$ representa un número real?

12. Dados los puntos $A(3, 2)$ y $B(5, 6)$, encuentre:

(A) La distancia entre A y B.
(B) La pendiente de la recta que pasa por A y B.
(C) La pendiente de una recta perpendicular a la recta que pasa por A y B.

13. Encuentre la ecuación del círculo con radio $\sqrt{2}$ y centro:

(A) $(0, 0)$
(B) $(-3, 1)$

14. Grafique $2x - 3y = 6$ e indique su pendiente e intersecciones.

15. Indique si cada conjunto define una función. Encuentre el dominio y rango de cada función.

(A) $\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$
(B) $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$
(C) $\{(-2, 2), (-1, -1), (0, 0), (1, -1), (2, 2)\}$

16. Para $f(x) = x^2 - 2x + 5$ y $g(x) = 3x - 2$, encuentre:

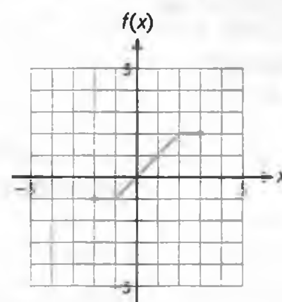
(A) $f(-2) + g(3)$
(B) $(f + g)(x)$
(C) $(f \circ g)(x)$
(D) $\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$

17. ¿Cómo se relacionan las gráficas siguientes con la gráfica de $y = |x|$?

(A) $y = 2|x|$
(B) $y = |x - 2|$
(C) $y = |x| - 2$

18. Trace una gráfica de cada una de las funciones de los incisos A y B usando la función de la gráfica f en la figura.

(A) $y = -f(x + 1)$
(B) $y = 2f(x) - 2$



B

Resuelva los problemas del 19 al 22.

19. $\frac{x + 3}{2x + 2} + \frac{5x + 2}{3x + 3} = \frac{5}{6}$

20. $\frac{3}{x} = \frac{6}{x + 1} - \frac{1}{x - 1}$

21. $2x + 1 = 3\sqrt{2x - 1}$

22. $2x - 3y = 9$
$4x + 2y = 23$

Resuelva y grafique los problemas del 23 al 25.

23. $|4x - 9| > 3$

24. $\sqrt{(3m - 4)^2} \le 2$

25. $\frac{2}{x + 1} \ge \frac{1}{x - 2}$

26. ¿Para qué valores de x, representa la siguiente expresión un número real?

$$\frac{\sqrt{x - 2}}{x - 4}$$

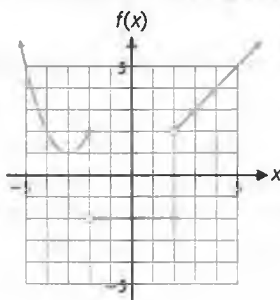
27. Realice las operaciones indicadas y escriba las respuestas finales en la forma estándar:

(A) $(2 - 3i)^2 - (4 - 5i)(2 - 3i) - (2 + 10i)$
(B) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i + \frac{1}{\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i}$
(C) i^{35}

28. Convierta a las formas $a + bi$, realice las operaciones indicadas, y escriba las respuestas finales en la forma estándar:

(A) $(5 + 2\sqrt{-9}) - (2 - 3\sqrt{-16})$
(B) $\frac{2 + 7\sqrt{-25}}{3 - \sqrt{-1}}$
(C) $\frac{12 - \sqrt{-64}}{\sqrt{-4}}$

29. Encuentre lo que se pide para la función f dada por la gráfica que se muestra en seguida.



(A) El dominio de f.
(B) El rango de f.
(C) $f(-3) + f(-2) + f(2)$.
(D) Los intervalos sobre los que f es creciente.
(E) Las coordenadas x de cualquiera de los puntos de discontinuidad.

30. Escriba las ecuaciones de las rectas

(A) Paralelas a (B) Perpendiculares a
la recta $3x + 2y = 12$ y que pasa por el punto $(-6, 1)$. Escriba las respuestas finales en forma de pendiente-intersección $y = mx + b$.

31. Encuentre el dominio de $g(x) = \sqrt{x + 4}$.

32. Grafique $f(x) = x^2 - 2x - 8$. Muestre el eje de simetría y vértice, y encuentre el rango, intersecciones y valor máximo o mínimo de $f(x)$.

33. Dada $f(x) = 1/(x - 2)$ y $g(x) = (x + 3)/x$, encuentre $f \circ g$. ¿Cuál es el dominio de $f \circ g$?

34. Encuentre $f^{-1}(x)$ para $f(x) = 2x + 5$.

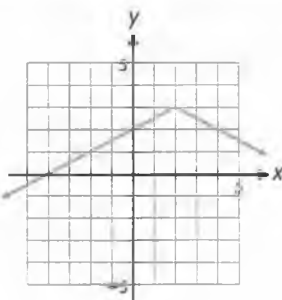
35. Grafique, encontrando el dominio, rango y cualquier punto de discontinuidad:

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

36. Grafique:

(A) $y = 2\sqrt{x} + 1$ (B) $y = -\sqrt{x + 1}$

37. La gráfica mostrada en la figura es el resultado de aplicar una secuencia de transformaciones a la gráfica de $y = |x|$. Describa las transformaciones de manera verbal, y escriba una ecuación para la gráfica de la figura.



Compruebe graficando su ecuación mediante un dispositivo de graficación.

38. Sea $f(x) = \sqrt{x + 4}$.

(A) Encuentre $f^{-1}(x)$.
(B) Encuentre el dominio y rango de f y f^{-1}.
(C) Grafique f, f^{-1} y $y = x$ en el mismo sistema coordenado.

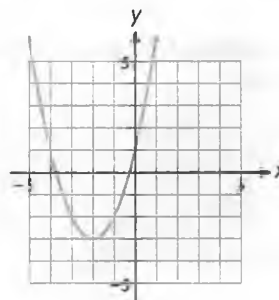
Compruebe graficando f, f^{-1} y $y = x$ en una ventana cuadrada con un dispositivo de graficación.

39. Encuentre el centro y radio del círculo dado por $x^2 - 6x + y^2 + 2y = 0$. Grafique el círculo y muestre el centro y el radio.

40. Analice la simetría con respecto al eje x, al eje y y al origen para la ecuación

$$xy + |xy| = 5$$

41. Escriba una ecuación para la gráfica mostrada en la figura en la forma $y = a(x - h)^2 + k$, donde a es -1 o $+1$ y h y k son enteros.



Compruebe graficando su ecuación con un dispositivo de graficación.

Resuelva los problemas del 42 al 45.

42. $1 + \frac{14}{y^2} = \frac{6}{y}$

43. $4x^{2/3} - 4x^{1/3} - 3 = 0$

44. $u^4 + u^2 - 12 = 0$

45. $\sqrt{8t - 2} - 2\sqrt{t} = 1$

Use una calculadora para resolver los problemas del 46 al 48. Calcule las respuestas con dos cifras decimales.

46. $-3.45 < 1.86 - 0.33x \leq 7.92$

47. $2.35x^2 + 10.44x - 16.47 = 0$

48. $12.5x + 2.5y = 20$
$3.5x + 8.7y = 10$

49. Despeje y en términos de x:

$$\frac{x - 2}{x + 1} = \frac{2y + 1}{y - 2}$$

50. Despeje para s y t en términos de x y y y compruebe:

$$x = -1 + 5s + 2t$$
$$y = 2 + 2s + t$$

51. Grafique $y = -2\sqrt{x+1} + 3$.

C

52. Evalúe $x^2 - x + 2$ para $x = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{7}$.

53. ¿Para qué valores de a y b es verdadera la desigualdad $a - b < b - a$?

54. Despeje y en términos de x:

$$\frac{x + y}{y - \dfrac{x + y}{x - y}} = 1$$

55. Encuentre todas las raíces: $3x^2 = 2\sqrt{2}x - 1$.

56. Considere la ecuación cuadrática

$$x^2 + bx + 1 = 0$$

donde b es un número real. Analice la relación entre los valores de b y los tres tipos de raíces enlistados en la tabla 1 de la sección 1-6.

57. Encuentre todas las raíces reales: $1 = 6x^{-2} + 9x^{-4}$

58. Escriba en la forma estándar: $\dfrac{a + bi}{a - bi}$, $a, b \neq 0$

59. Resuelva: $\left|\dfrac{x+4}{x}\right| < 3$

60. Encuentre una definición por partes de $f(x) = |x + 2| + |x - 2|$ que no involucre el valor absoluto de la función. Grafique f y encuentre el dominio y rango.

61. Dada $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, encuentre:

(A) El dominio de g.
(B) f/g y su dominio.
(C) $f \circ g$ y su dominio.

62. Sea $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $x \geq 1$.

(A) Encuentre $f^{-1}(x)$.
(B) Encuentre el dominio y rango de f^{-1}.
(C) Grafique f, f^{-1} y $y = x$ en el mismo sistema coordenado.

Compruebe graficando f, f^{-1} y $y = x$ en una ventana cuadrada con un dispositivo de graficación.

63. Escriba una definición por partes para $f(x) = 2x - [\![2x]\!]$ y trace la gráfica de f. Incluya suficientes intervalos para ilustrar de forma clara la definición y la gráfica. Encuentre el dominio, rango y cualquier punto de discontinuidad.

APLICACIONES

64. Números. Encuentre un número tal que exceda su recíproco por $\frac{3}{2}$.

65. Rapidez y tiempo. Un transportador de banda viejo trabajando solo puede llenar de material un vagón de ferrocarril en 14 minutos. Con la banda vieja y una nueva operando juntas se puede llenar el vagón en 6 minutos. ¿Cuánto tiempo le toma a la nueva banda trabajando sola llenar de material el vagón?

***66. Rapidez y tiempo.** Una lancha viaja corriente arriba 35 millas y después regresa a su punto de partida. Si el viaje redondo toma 4.8 horas y la velocidad del bote en aguas tranquilas es de 15 millas por hora, ¿cuál es la velocidad de la corriente?

***67. Química.** ¿Cuántos galones de agua destilada se deben mezclar con 24 galones de una solución de ácido sulfúrico al 90% para obtener una solución al 60%?

68. Análisis del punto de equilibrio. Los costos fijos de una editorial para producir un nuevo libro de cocina son de \$41 800. Los costos variables son de \$4.90 por libro. Si el libro se vende a las librerías en \$9.65, ¿cuántos libros debe vender la editorial para alcanzar el punto de equilibrio?

69. Finanzas. Un inversionista instruye a un corredor para que compre ciertas acciones siempre y cuando el precio por acción p del mercado esté entre \$10 y \$200. Exprese esta instrucción como una desigualdad de valor absoluto.

70. Oferta y demanda. Suponga que las ecuaciones de oferta y demanda para la espuma de estireno "cabezas de queso" en Green Bay para una semana en particular son

$p = 5.5 + 0.002q$ Ecuación de oferta
$p = 22 - 0.001q$ Ecuación de demanda

donde p es el precio en dólares y q es el número de cabezas de queso. Encuentre el precio de equilibrio y la cantidad.

71. Análisis de pérdidas y ganancias. A un precio de \$$p$ por unidad, el departamento de mercadotecnia en una compañía estima que el costo semanal C y el ingreso semanal R, en miles de dólares, estará dado por las ecuaciones

$C = 88 - 12p$ Ecuación de costo
$R = 15p - 2p^2$ Ecuación de ingresos

Encuentre los precios para los que la compañía tiene:

(A) Una ganancia.
(B) Una pérdida.

***72. Barcos.** Un barco sale del puerto A, se dirige hacia el este al puerto B, y después hacia el norte al puerto C, viaja en total 115 millas de distancia. Al siguiente día el barco viaja directamente desde el puerto C de regreso al puerto A, una distancia de 85 millas. Encuentre la distancia entre los puertos A y B y entre los puertos B y C.

3. **Precio y demanda.** La demanda semanal de enjuagues bucales en una cadena de farmacias es de 1 160 botellas a un precio de \$3.79 cada uno. Si el precio se reduce a \$3.59, la demanda semanal aumenta a 1 340 botellas. Suponiendo que la relación entre la demanda semanal x y el precio por botella p es lineal, exprese x como una función de p. ¿Cuántas botellas se podrían vender cada semana si el precio se redujera a \$3.29?

4. **Negocios y precios.** Una compañía telefónica empieza un nuevo plan de tarifas en las que les cobra a los usuarios por llamadas locales como sigue: Las primeras 60 llamadas de cada mes son a 6 centavos cada una, las siguientes 90 son a 5 centavos cada una, las siguientes 150 son a 4 centavos cada una y las llamadas adicionales son a 3 centavos cada una. Si C es el costo, en dólares, al realizar x llamadas por mes, escriba una definición por partes de C como una función de x y grafíquela.

5. **Construcción.** Una persona tiene 80 pies de malla de alambre para construir una perrera adyacente a su casa (véase la figura).



(A) Exprese el área $A(x)$ delimitada por la perrera como una función del ancho x.
(B) De las consideraciones físicas, ¿cuál es el dominio de la función A?
(C) Grafique A y determine las dimensiones de la perrera para que se tenga un área máxima.

76. **Ciencia de la computación.** Sea $f(x) = x - [\![2x/2]\!]$. Esta función se puede usar para determinar si un entero es impar o par.

(A) Encuentre $f(1), f(2), f(3), f(4)$.
(B) Encuentre $f(n)$ para cualquier entero n. [*Sugerencia:* Considere dos casos, $n = 2k$ y $n = 2k + 1$, k es un entero.]

*77. **Física.** La distancia s sobre el suelo (en pies) a la que está un objeto que se deja caer de un globo aerostático t segundos después de que se soltó está dada por

$$s = a + bt^2$$

donde a y b son constantes. Suponga que el objeto está a 2 100 pies sobre el suelo cinco segundos después de que se soltó, y a 900 pies 10 segundos después de que se soltó.

(A) Encuentre las constantes a y b.
(B) ¿A qué altura está el globo?
(C) ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en caer?

CAPÍTULO 3

FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

$f(x)=|3x + 4| + 1$

Recuerde que las raíces de una función f son las soluciones o raíces de la ecuación $f(x) = 0$, si existe alguna. Se conoce cómo encontrar todas las raíces reales e imaginarias de funciones lineales y cuadráticas (véase la tabla 1).

TABLA 1 Raíces de funciones lineales y cuadráticas

Función	Forma	Ecuación	Raíces
Lineal	$f(x) = ax + b, a \neq 0$	$ax + b = 0$	$x = -\frac{b}{a}$
Cuadrática	$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	$ax^2 + bx + c = 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Las funciones lineales y cuadráticas se conocen también como funciones polinomiales de primer y segundo grado, respectivamente. Así, en la tabla 1 se indican las fórmulas para encontrar las raíces de cualquier función polinomial de primer o segundo grado. Aquí surge la pregunta, ¿cómo se puede resolver funciones polinomiales de orden superior? tales como

$$p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \qquad \text{Tercer grado}$$

$$q(x) = -2x^4 + 5x^2 - 6 \qquad \text{Cuarto grado}$$

$$r(x) = x^5 - x^4 + x^3 - 10 \qquad \text{Quinto grado}$$

Como puede verse existen métodos (directos, aunque complicados) para encontrar todas las raíces de cualquier función polinomial de tercer o cuarto grado. Sin embargo, el francés Évariste Galois (1811-1832) comprobó a la edad de 20 años, que para funciones polinomiales de grado superior a cuatro no hay un proceso finito paso a paso con el que siempre se obtengan todas las raíces.* Esto no significa que no se intente encontrar las raíces de funciones polinomiales de grado superior, sino que será necesario usar diferentes métodos especializados, y en ocasiones se tendrá que aproximar las raíces. El desarrollo de estos métodos es uno de los objetivos principales de este capítulo.

La sección 3-1 comienza con el análisis de las propiedades gráficas de funciones polinomiales. En la sección 3-2 se desarrollan las herramientas para encontrar las raíces racionales de una ecuación polinomial con coeficientes racionales. En la sección 3-3 se estudian los métodos para localizar las raíces reales de un polinomio con coeficientes. Una vez localizadas, las raíces reales se pueden aproximar fácilmente con la ayuda de un dispositivo de graficación. En la sección 3-4 se abordan las funciones racionales y sus gráficas y en la sección 3-5 se analiza la descomposición de funciones racionales en formas más simples, una herramienta importante en el cálculo.

* La contribución de Galois, al usar un nuevo concepto de "grupo", tuvo gran importancia para las matemáticas por su originalidad. Sin embargo, sus contemporáneos muy rara vez leían sus artículos, los que despreciaban calificándolos como "casi ininteligibles". A la edad de 21 años, implicado en agitaciones políticas, Galois encontró la muerte en forma prematura en un duelo. Un breve pero fascinante relato de la trágica vida de Galois se puede encontrar en el libro de E. T. Bell, *Hombres en las matemáticas* (Nueva York: Simon & Schuster, 1937), pp. 362-377.

SECCIÓN 3-1 Funciones polinomiales y gráficas

- Funciones polinomiales
- División de polinomios
- Algoritmo de división
- Teorema del residuo
- Graficación de funciones polinomiales

• Funciones polinomiales

En el capítulo 2 se introdujeron las siguientes funciones básicas

$$f(x) = b \qquad \text{Función constante}$$

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0 \qquad \text{Función lineal}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0 \qquad \text{Función cuadrática}$$

así como para algunos casos especiales de funciones más complicadas, por ejemplo,

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0 \qquad \text{Función cúbica}$$

Observe cómo se genera el patrón de la función constante a la función cúbica, esto es, los términos en cada ecuación son de la forma ax^n, donde n es un entero no negativo y a es un número real. Todas estas funciones son casos especiales de la clase general de funciones denominadas *funciones polinomiales*. La función

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

se conoce como **función polinomial de n ésimo grado**. También se hará referencia a $P(x)$ como un **polinomio de grado n** o, de manera más simple, como un **polinomio**. Los números a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0 se llaman **coeficientes de la función**. Una función constante, diferente de cero, es un polinomio de grado cero, una función lineal es un polinomio de primer grado y una función cuadrática es un polinomio de segundo grado. La función cero $Q(x) = 0$ también se considera como un polinomio, pero no se le asigna un grado. Los coeficientes de una función polinomial pueden ser números complejos, o pueden estar restringidos a los números reales, números racionales o enteros, dependiendo de nuestro interés. El dominio de una función polinomial puede ser el conjunto de números complejos, el conjunto de números reales, o subconjuntos adecuados de ellos, dependiendo de nuestro interés. En general, el contexto indicará la elección de los coeficientes y del dominio.

Se dice que el número r que es una **raíz de la función P**, o una **raíz del polinomio $P(x)$**, o una **solución o raíz de la ecuación $P(x) = 0$**, si

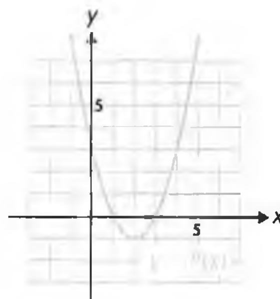
$$P(r) = 0$$

Una raíz de un polinomio puede o no ser el número 0. Una raíz de un polinomio es cualquier número que haga que el valor del polinomio sea 0. Si los coeficientes de un polinomio $P(x)$ son números reales, entonces una raíz real es simplemente una intersección en el eje x de la gráfica de $y = P(x)$. Considere el polinomio

$$P(x) = x^2 - 4x + 3$$

La gráfica de P se muestra en la figura 1.

FIGURA 1 Raíces e intersecciones con el eje x.



Las intersecciones con el eje x en 1 y 3 son raíces de $P(x) = x^2 - 4x + 3$, ya que $P(1) = 0$ y $P(3) = 0$. Las intersecciones con el eje x en 1 y 3 son también soluciones o raíces de la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$.

En general:

> **Raíces**
>
> Si los coeficientes de un polinomio $P(x)$ son reales, entonces las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = P(x)$ son las **raíces reales** de P y $P(x)$, y son **soluciones reales** o **raíces** para la ecuación $P(x) = 0$.

• División de polinomios

Se puede encontrar cocientes de polinomios mediante un proceso de división larga, similar al usado en aritmética. Un ejemplo ilustrará este proceso.

EJEMPLO 1

División algebraica larga

Divida $5 + 4x^3 - 3x$ entre $2x - 3$.

Solución

$$\begin{array}{r l}
 & 2x^2 + 3x + 3 \\
2x - 3 \,\big) & 4x^3 + 0x^2 - 3x + 5 \\
 & \underline{4x^3 - 6x^2} \\
 & \qquad 6x^2 - 3x \\
 & \qquad \underline{6x^2 - 9x} \\
 & \qquad\qquad 6x + 5 \\
 & \qquad\qquad \underline{6x - 9} \\
 & \qquad\qquad\quad 14 = R
\end{array}$$

Residuo

Arregle el dividendo y el divisor en potencias descendentes de la variable. Inserte, con coeficientes 0, cualquier término que falte de grado menor que 3. Divida el primer término del divisor entre el primer término del dividendo. Multiplique el divisor por $2x^2$, alinee los términos semejantes, réstelos como en aritmética y colóquelos abajo de $-3x$. Repita el proceso hasta que el grado del residuo sea menor que el del divisor.

Así que

$$\frac{4x^3 - 3x + 5}{2x - 3} = 2x^2 + 3x + 3 + \frac{14}{2x - 3}$$

Comprobación

$$(2x - 3)\left[(2x^2 + 3x + 3) + \frac{14}{2x - 3}\right] = (2x - 3)(2x^2 + 3x + 3) + 14$$

$$= 4x^3 - 3x + 5$$

Problema seleccionado 1 Divida $6x^2 - 30 + 9x^3$ entre $3x - 4$.

Poder dividir un polinomio $P(x)$ entre un polinomio lineal de la forma $x - r$, rápida y exactamente, será de gran ayuda en la búsqueda de las raíces de funciones polinomiales de grado superior. Se puede llevar a cabo este tipo de división de manera más eficiente mediante un método conocido como **división sintética**. El método se entenderá mejor mediante el siguiente ejemplo. Comencemos por dividir $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$ entre $x + 2$, usando división ordinaria larga. Las partes críticas del proceso se indican en color.

$$
\begin{array}{rrl}
 & 2x^3 - 1x^2 + 2x - 5 & \text{Cociente} \\
\text{Divisor} \quad x + 2 & \overline{)\,2x^4 + 3x^3 + 0x^2 - 1x - 5} & \text{Dividendo} \\
 & \underline{2x^4 + 4x^3} \qquad\qquad\qquad\quad & \\
 & -1x^3 + 0x^2 \qquad\qquad & \\
 & \underline{-1x^3 - 2x^2} \qquad\qquad & \\
 & 2x^2 - 1x \qquad & \\
 & \underline{2x^2 + 4x} \qquad & \\
 & -5x - 5 & \\
 & \underline{-5x - 10} & \\
 & 5 & \text{Residuo}
\end{array}
$$

Los números indicados en color, que representan la parte esencial del proceso de la división, se ordenan de manera más conveniente como sigue:

Coeficiente del dividendo

	2	3	0	−1	−5
		4	−2	4	−10
2	2	−1	2	−5	5

Coeficiente del cociente — Residuo

Mecánicamente, se observa que el segundo y tercer renglón de números se generan como sigue. El primer coeficiente, 2, del dividendo se baja y multiplica por 2 del divisor; y el producto, 4, se coloca debajo del segundo coeficiente del dividendo, 3, y se resta. La diferencia, −1, se multiplica de nuevo por el 2 del divisor, y el producto se coloca debajo del tercer coeficiente del dividendo y se resta. Este proceso se repite hasta obtener el residuo. Este proceso se puede hacer un poco más rápido, y con menos probabilidades de equivocarse en los signos, cambiando el +2 del divisor por −2 y sumando en vez de restar. De esta manera

Coeficientes del dividendo

	2	3	0	−1	−5
		−4	2	−4	10
−2	2	−1	2	−5	5

Coeficientes del cociente — Residuo

Pasos clave en el proceso de división sintética

Para dividir el polinomio $P(x)$ entre $x - r$:

Paso 1. Arregle los coeficientes de $P(x)$ en orden de potencias descendentes de x. Escriba 0 como el coeficiente de cada potencia faltante.

Paso 2. Después de escribir el divisor en la forma $x - r$, use r para generar el segundo y tercer renglones de números como sigue. Baje el primer coeficiente del dividendo y multiplíquelo por r; después sume el producto al segundo coeficiente del dividendo. Multiplique esta suma por r y sume el producto al tercer coeficiente del dividendo. Repita el proceso hasta que un producto se sume al término constante de $P(x)$.

Paso 3. El último número a la derecha en el tercer renglón de números es el residuo. Los otros números en el tercer renglón son los coeficientes del cociente, que es de grado 1 menor que $P(x)$.

EJEMPLO 2 **División sintética**

Use división sintética para encontrar el cociente y residuo resultante de dividir $P(x) = 4x^5 - 30x^3 - 50x - 2$ entre $x + 3$. Escriba la respuesta en la forma $Q(x) + R/(x - r)$, donde R es una constante.

Solución Como $x + 3 = x - (-3)$, se tiene $r = -3$, y

	4	0	−30	0	−50	−2
		−12	36	−18	54	−12
−3	4	−12	6	−18	4	−14

El cociente es $4x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 18x + 4$ con un residuo de -14. Así,

$$\frac{P(x)}{x+3} = 4x^4 - 12x^3 + 6x^2 - 18x + 4 + \frac{-14}{x+3}$$

Problema seleccionado 2 Repita el ejemplo 2 con $P(x) = 3x^4 - 11x^3 - 18x + 8$ y divisor $x - 4$.

Una calculadora es una herramienta conveniente para realizar la división sintética. Se puede usar cualquier tipo de calculadora, aunque una con memoria ahorrará algunos tecleos. El diagrama de flujo de la figura 2 muestra los pasos repetitivos en el proceso de división sintética, y la figura 3 muestra, en una calculadora gráfica, los resultados de aplicar este proceso al ejemplo 2.

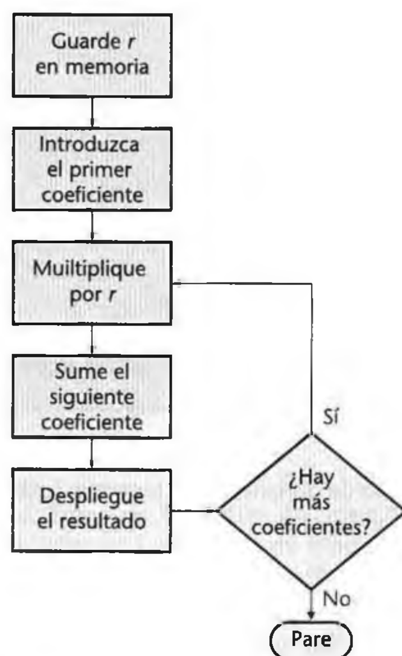


FIGURA 2 División sintética.

```
-3→R
                -3
4*R+0
               -12
Ans*R+(-30)
                 6
Ans*R+0
               -18
Ans*R+(-50)
                 4
Ans*R+(-2)
               -14
```

FIGURA 3

- Algoritmo de división

Si se divide $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 13$ entre $x - 3$, se obtiene

$$\frac{2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 13}{x - 3} = 2x^3 + x^2 - x - 3 + \frac{4}{x - 3} \qquad x \neq 3$$

Si se multiplican ambos lados de esta ecuación por $x - 3$, entonces se obtiene

$$2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 13 = (x - 3)(2x^3 + x^2 - x - 3) + 4$$

Esta última ecuación es una identidad en la que el lado izquierdo es igual al lado derecho para *todos* los reemplazos de x por números reales o imaginarios, incluyendo $x = 3$, Este ejemplo sugiere el importante **algoritmo de división**, que se estableció como el teorema 1 sin prueba.

Teorema 1 **Algoritmo de división**

Por cada polinomio $P(x)$ de grado mayor que 0 en cada número r, existe un polinomio único $Q(x)$ de grado 1 menor que $P(x)$ y un número único R tal que

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

El polinomio $Q(x)$ se denomina **cociente**, $x - r$ es el **divisor**, y R es el **residuo**. Observe que R puede ser 0.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 8$.

(A) Evalúe $P(x)$ para

(i) $x = -2$ (ii) $x = 1$ (iii) $x = 3$

(B) Use división sintética para encontrar el residuo cuando $P(x)$ se divide entre

(i) $x + 2$ (ii) $x - 1$ (iii) $x - 3$

¿Qué se concluye de comparar los resultados de los incisos (A) y (B)?

■ Teorema del residuo

Use ahora el algoritmo de división en el teorema 1 para probar el *teorema del residuo*.

La ecuación en el teorema 1,

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

es una identidad; es decir, es verdadera para todos los reemplazos reales o imaginarios de x. En particular, si se hace $x = r$, entonces se observa una relación muy interesante y útil:

$$\begin{aligned} P(r) &= (r - r)Q(r) + R \\ &= 0 \cdot Q(r) + R \\ &= 0 + R \\ &= R \end{aligned}$$

En palabras, el valor de un polinomio $P(x)$ en $x = r$ es el mismo residuo R que se obtuvo cuando se dividió $P(x)$ entre $x - r$. Con esto se prueba el bien conocido teorema del residuo:

Teorema 2 **Teorema del residuo**

Si R es el residuo después de dividir el polinomio $P(x)$ entre $x - r$, entonces

$$P(r) = R$$

EJEMPLO 3 **Dos métodos para evaluar polinomios**

Si $P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$, encuentre $P(-3)$ de las maneras siguientes:

(A) Usando el teorema del residuo y la división sintética.
(B) Evaluando directamente $P(-3)$.

Soluciones (A) Use la división sintética para dividir $P(x)$ entre $x - (-3)$.

	4	10	0	19	5
		−12	6	−18	−3
−3	4	−2	6	1	2 = $R = P(-3)$

(B) $P(-3) = 4(-3)^4 + 10(-3)^3 + 19(-3) + 5$

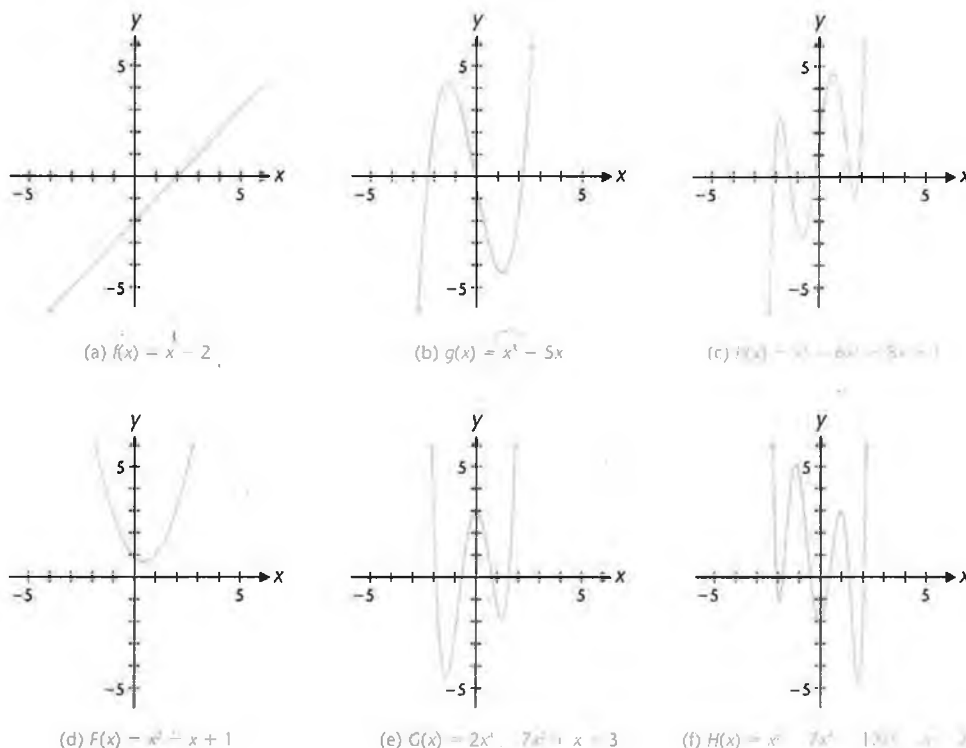
$= 2$

Problema seleccionado 3 Repita el ejemplo 3 para $P(x) = 3x^4 - 16x^2 - 3x + 7$ y $x = -2$.

• Graficación de funciones polinomiales

La forma de la gráfica de una función polinomial está conectada con el grado del polinomio. Las formas de funciones polinomiales de grado impar tienen algo en común, y las formas de funciones polinomiales de grado par también tienen algo en común. La figura 4 muestra algunas gráficas representativas de funciones polinomiales que parten del grado 1 hasta el 6 y sugiere algunas propiedades generales de gráficas de funciones polinomiales.

FIGURA 4 Gráficas de funciones polinomiales.



Observe que las gráficas de polinomios de grado impar comienzan en el eje y negativo, terminan en el eje y positivo y cruzan el eje x al menos una vez. Las gráficas de polinomios de grado par comienzan en el eje y positivo, terminan en el eje y positivo y no todas cruzan el eje x. En todos los casos mostrados en la figura 4, se seleccionó positivo el coeficiente del término de grado más alto. Si se hubiera escogido negativo cualquier coeficiente principal, entonces se podría tener una gráfica similar pero reflejada con respecto al eje x.

La forma de la gráfica de un polinomio, también está relacionada con la forma de la gráfica de grado más alto o con el **término principal** del polinomio. En la figura 5 se compara la gráfica de uno de los polinomios de la figura 4 con la gráfica de su término principal. Aunque son muy diferentes para los puntos cercanos al origen, conforme se realiza un "alejamiento" a los puntos distantes del origen, las gráficas se vuelven muy similares. El término principal en el polinomio domina todos los otros términos combinados.

FIGURA 5 $p(x) = x^5$, $h(x) = x^5 - 6x^3 + 8x + 1$.

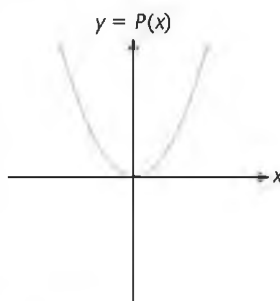


En general, el comportamiento de la gráfica de una función polinomial conforme x disminuye sin llegar al límite izquierdo o conforme x aumenta sin llegar al límite derecho, está determinado por su término principal. A menudo se usan los símbolos $-\infty$ y ∞ para ayudar a describir este comportamiento a la izquierda y a la derecha.* En el teorema 3 se resumen las diferentes posibilidades.

Teorema 3 **Comportamiento a la izquierda y derecha de un polinomio**

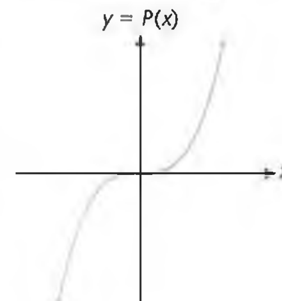
$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, \qquad a_n \neq 0$$

1. $a_n > 0$ y n es par
La gráfica de $P(x)$ aumenta sin límite conforme x disminuye a la izquierda y conforme x aumenta a la derecha.



$$P(x) \to \begin{cases} \infty & \text{conforme } x \to -\infty \\ \infty & \text{conforme } x \to \infty \end{cases}$$

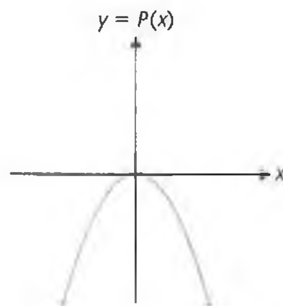
2. $a_n > 0$ y n es impar
La gráfica de $P(x)$ disminuye sin límite conforme x disminuye a la izquierda y aumenta sin límite conforme x aumenta a la derecha.



$$P(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{conforme } x \to -\infty \\ \infty & \text{conforme } x \to \infty \end{cases}$$

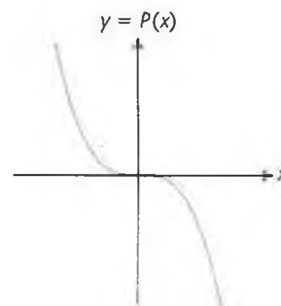
* Recuerde que el símbolo ∞ no representa un número real. Antes se usaba ∞ para denotar intervalos sin límite, tal como $[0, \infty)$. Ahora se usa para describir cantidades que están creciendo sin límite superior en su tamaño.

3. $a_n < 0$ y n es par
La gráfica de $P(x)$ disminuye sin límite conforme x disminuye a la izquierda y conforme x aumenta a la derecha.



$$P(x) \to \begin{cases} -\infty & \text{conforme } x \to -\infty \\ -\infty & \text{conforme } x \to \infty \end{cases}$$

4. $a_n < 0$ y n es impar
La gráfica de $P(x)$ aumenta sin límite conforme x disminuye a la izquierda y disminuye sin límite conforme x aumenta a la derecha.



$$P(x) \to \begin{cases} \infty & \text{conforme } x \to -\infty \\ -\infty & \text{conforme } x \to \infty \end{cases}$$

La figura 4 muestra ejemplos de funciones polinomiales con gráficas que contienen el máximo número posible de *puntos de retorno*, para un polinomio de ese grado. Un **punto de retorno** sobre una gráfica continua, es un punto que separa la parte que está aumentando de la parte que está disminuyendo. En el teorema 4 se enumeran propiedades útiles de funciones polinomiales que se aceptan sin prueba. La propiedad 3 se analiza en forma detallada en este capítulo un poco más adelante. Las otras propiedades se establecen en cálculo.

Teorema 4 **Propiedades de gráficas de funciones polinomiales**

Sea P un n ésimo grado de una función polinomial con coeficientes reales.

1. P es continua para todos los números reales.
2. La gráfica de P es una curva suave.
3. La gráfica de P tiene a lo más n intersecciones en el eje x.
4. P tiene a lo más $n - 1$ puntos de retorno.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2

(A) ¿Cuál es el menor número de puntos de retorno que puede tener una función polinomial de grado impar? ¿Y una función polinomial de grado par?
(B) ¿Cuál es el máximo número de intersecciones con el eje x que puede tener una función polinomial de grado n?
(C) ¿Cuál es el máximo número de soluciones reales que puede tener una ecuación polinomial de $n$ésimo grado?
(D) ¿Cuál es el menor número de intersecciones con el eje x que puede tener la gráfica de una función polinomial de grado impar? ¿Y una de grado par?

(E) ¿Cuál es el menor número de soluciones reales que puede tener una ecuación polinomial de grado impar? ¿Y una de grado par?

EJEMPLO 4 **Graficación de un polinomio**

Grafique $P(x) = x^3 - 12x + 2$, $-4 \leq x \leq 4$. Encuentre los puntos usando división sintética y el teorema del residuo. ¿Cuántas intersecciones con el eje x tiene la gráfica? ¿Cuántos puntos de retorno? Describa el comportamiento de $P(x)$ a la izquierda y a la derecha.

Solución Se evalúa $P(x)$ desde $x = -4$ hasta $x = 4$ para valores enteros de x. Se puede apresurar el proceso formando una tabla de división sintética. Para simplificar la forma de la tabla, se omite escribir el producto de r con cada coeficiente en el cociente y se realizan los cálculos mentalmente o con una calculadora. Se vuelve más útil el uso de una calculadora a medida que los coeficientes son más numerosos o complicados. La tabla proporciona también otra información importante, como se verá en las secciones subsecuentes.

	1	0	−12	2	
−4	1	−4	4	−14	$= P(-4)$
−3	1	−3	−3	11	$= P(-3)$
−2	1	−2	−8	18	$= P(-2)$
−1	1	−1	−11	13	$= P(-1)$
0	1	0	−12	2	$= P(0)$
1	1	1	−11	−9	$= P(1)$
2	1	2	−8	−14	$= P(2)$
3	1	3	−3	−7	$= P(3)$
4	1	4	4	18	$= P(4)$

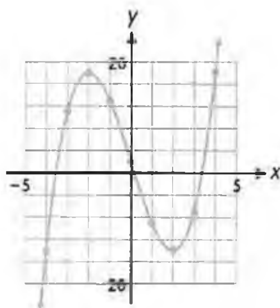


FIGURA 6
$P(x) = x^3 - 12x + 2$.

Ahora se trazan los puntos encontrados en la tabla y se unen con una curva suave (figura 6). Conforme se dibuja esta curva, se observa que la gráfica cruza el eje x tres veces y cambia de dirección en dos ocasiones. Las siguientes dos secciones se dedicarán a determinar de manera precisa el lugar en el que una gráfica cruza al eje x. La determinación exacta de la localización de puntos de retorno requiere de técnicas de cálculo. Si falta esta información, simplemente se cambia de dirección a $x = -2$ y $x = 2$.

El término principal de $P(x)$ es x^3. Del caso 2 en el teorema 3, se observa que $P(x) \to -\infty$ como $x \to -\infty$ y $P(x) \to \infty$ conforme $x \to \infty$.

Problema seleccionado 4 Grafique $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$, $-3 \leq x \leq 5$. Encuentre los puntos usando la división sintética y el teorema del residuo. ¿Cuántas intersecciones con el eje x tiene la gráfica? ¿Cuántos puntos de retorno? Describa el comportamiento a la izquierda y a la derecha de $P(x)$.

Comentario. Un dispositivo de graficación puede producir rápidamente una tabla de valores, sin usar la división sintética, y puede graficar un polinomio igual de rápido. En la sección 4-3 se mostrará que una tabla para la división sintética es una herramienta valiosa cuando se usa junto con un dispositivo de graficación. De manera que los estudiantes que tengan dispositivos de graficación deben aprender también a construir tablas de división sintética. (Véase la tabla 1 en la sección 3-3 para una forma más eficiente de construir una tabla de división sintética con un dispositivo de graficación.)

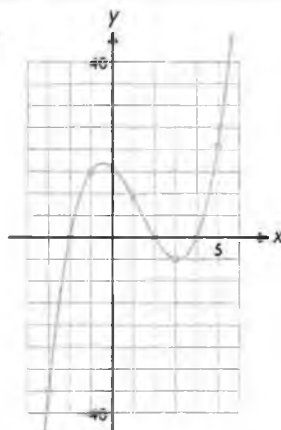
Respuestas a los problemas seleccionados

1. $3x^2 + 6x + 8 + \dfrac{2}{3x - 4}$

2. $\dfrac{P(x)}{x - 4} = 3x^3 + x^2 + 4x - 2 + \dfrac{0}{x - 4} = 3x^3 + x^2 + 4x - 2$

3. $P(-2) = -3$ para ambas partes, como debe ser.

4.



x	$P(x)$
−3	−35
−2	0
−1	15
0	16
1	9
2	0
3	−5
4	0
5	21

Tres intersecciones en x y dos puntos de retorno $P(x) \to -\infty$ como $x \to -\infty$; $P(x) \to$ como $x \to \infty$.

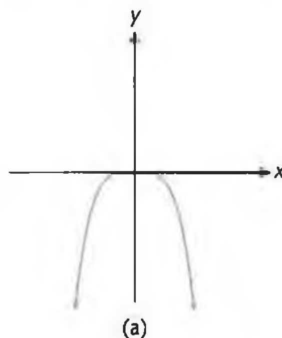
EJERCICIO 3-1

A

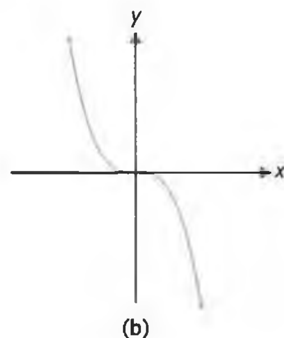
En los problemas del 1 al 4, a es un número real positivo. Relacione cada función con cada una de las gráficas (a)−(d).

1. $f(x) = ax^3$ **2.** $g(x) = -ax^4$

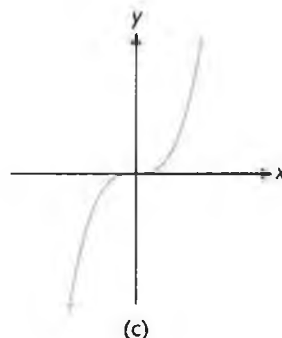
3. $h(x) = ax^6$ **4.** $k(x) = -ax^5$



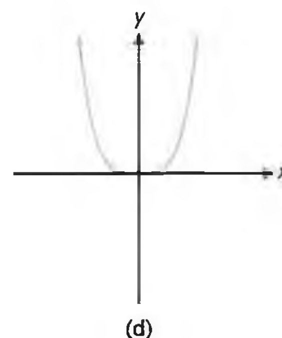
(a)



(b)

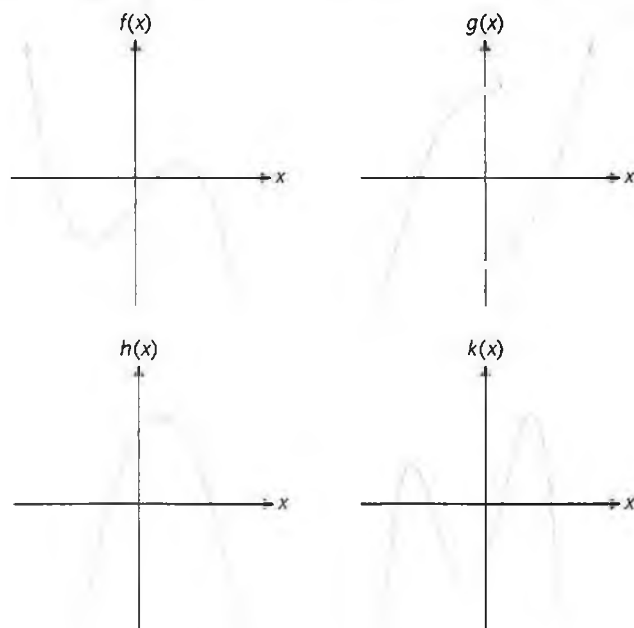


(c)



(d)

Los problemas del 5 al 8 se refieren a las gráficas de las funciones f, g, h y k que se muestran a continuación.



5. ¿Cuál de esas funciones puede ser un polinomio de segundo grado?
6. ¿Cuál de esas funciones puede ser un polinomio de tercer grado?
7. ¿Cuál de esas funciones puede ser un polinomio de cuarto grado?
8. ¿Cuál de esas funciones no es un polinomio?

En los problemas del 9 al 16, divida, usando la división algebraica larga. Escriba el cociente e indique el residuo.

9. $(4m^2 - 1) \div (2m - 1)$ **10.** $(y^2 - 9) \div (y + 3)$

11. $(6 - 6x + 8x^2) \div (2x + 1)$

12. $(11x - 2 + 12x^2) \div (3x + 2)$

13. $(x^3 - 1) \div (x - 1)$ **14.** $(a^3 + 27) \div (a + 3)$

15. $(3y - y^2 + 2y^3 - 1) \div (y + 2)$

16. $(3 + x^3 - x) \div (x - 3)$

En los problemas del 17 al 22, use división sintética para escribir el cociente $P(x) \div (x - r)$ en la forma $P(x)/(x - r) = Q(x) + R/(x - r)$, donde R es una constante.

17. $(x^2 + 3x - 7) \div (x - 2)$

18. $(x^2 + 3x - 3) \div (x - 3)$

19. $(4x^2 + 10x - 9) \div (x + 3)$

20. $(2x^2 + 7x - 5) \div (x + 4)$

21. $(2x^3 - 3x + 1) \div (x - 2)$

22. $(x^3 + 2x^2 - 3x - 4) \div (x + 2)$

Use división sintética y el teorema del residuo en los problemas del 23 al 28.

23. Encuentre $P(-2)$, dado $P(x) = 3x^2 - x - 10$.

24. Encuentre $P(-3)$, dado $P(x) = 4x^2 + 10x - 8$.

25. Encuentre $P(2)$, dado $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 7$.

26. Encuentre $P(5)$, dado $P(x) = 2x^3 - 12x^2 - x + 30$.

27. Encuentre $P(-4)$, dado $P(x) = x^4 - 10x^2 + 25x - 2$.

28. Encuentre $P(-7)$, dado $P(x) = x^4 + 5x^3 - 13x^2 - 30$.

En los problemas del 29 al 44, divida, usando división sintética. Escriba el cociente e indique el residuo. Como se implican más coeficientes, una calculadora debe probar su utilidad. No redondee (todas las cantidades son exactas).

29. $(3x^4 - x - 4) \div (x + 1)$ **30.** $(5x^4 - 2x^2 - 3) \div (x - 1)$

31. $(x^5 + 1) \div (x + 1)$ **32.** $(x^4 - 16) \div (x - 2)$

33. $(3x^4 + 2x^3 - 4x - 1) \div (x + 3)$

34. $(x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 3) \div (x - 4)$

35. $(2x^6 - 13x^5 + 75x^3 + 2x^2 - 50) \div (x - 5)$

36. $(4x^6 + 20x^5 - 24x^4 - 3x^2 - 13x + 30) \div (x + 6)$

37. $(4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 1) \div (x + \frac{1}{2})$

38. $(2x^3 - 5x^2 + 6x + 3) \div (x - \frac{1}{2})$

39. $(4x^3 + 4x^2 - 7x - 6) \div (x + \frac{3}{2})$

40. $(3x^3 - x^2 + x + 2) \div (x + \frac{2}{3})$

41. $(3x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) \div (x - 0.4)$

42. $(4x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 6) \div (x - 0.7)$

43. $(3x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 7x - 3) \div (x + 0.8)$

44. $(7x^5 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5) \div (x + 0.9)$

En los problemas del 45 al 52, grafique cada función polinomial usando división sintética y el teorema del residuo. Después describa verbalmente cada gráfica, incluyendo el número de intersecciones con el eje x, el número de puntos de retorno y el comportamiento de la función polinomial a la derecha y a la izquierda.

**Compruebe su trabajo en los problemas del 45 al 52 graficándolos con un dispositivo de graficación.*

$P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8, -2 \leq x \leq 5$

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6, -4 \leq x \leq 3$

$P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4, -5 \leq x \leq 2$

$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6, -3 \leq x \leq 4$

$P(x) = -x^3 + 2x^2 - 3, -2 \leq x \leq 3$

$P(x) = -x^3 - x + 4, -2 \leq x \leq 2$

$P(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 2, -1 \leq x \leq 3$

$P(x) = -x^3 + x^2 + 4x + 6, -3 \leq x \leq 4$

* Note por favor que no se necesita usar un dispositivo de graficación para terminar estos ejercicios. La comprobación con un dispositivo de graficación es opcional.

En los problemas del 53 al 56, dé un ejemplo de un polinomio con coeficientes reales que satisfaga las condiciones dadas o explique por qué tal polinomio no puede existir.

53. $P(x)$ es un polinomio de tercer grado con una intersección con el eje x.

54. $P(x)$ es un polinomio de cuarto grado sin intersección con el eje x.

55. $P(x)$ es un polinomio de tercer grado sin intersección con el eje x.

56. $P(x)$ es un polinomio de cuarto grado sin puntos de retorno.

En los problemas del 57 al 60, divida, usando división sintética y una calculadora. Lleve todos los números a la capacidad máxima de su calculadora conforme proceda mediante el proceso de la división sintética. Sin embargo, escriba abajo los coeficientes del cociente y el residuo con dos cifras decimales a medida que vaya avanzando.

57. $(2.14x^3 - 5.23x^2 - 8.71x + 6.85) \div (x - 3.37)$

58. $(6.03x^3 - 35.67x^2 + 8.98x - 12.81) \div (x - 5.72)$

59. $(0.96x^4 + 4.09x^2 + 9.44x - 1.87) \div (x + 1.37)$

60. $(6.45x^4 - 1.07x^3 + 8.67x - 3.03) \div (x + 0.88)$

C

En los problemas 61 y 62, divida usando división algebraica larga. Escriba el cociente e indique el residuo.

61. $(16x - 5x^3 - 8 + 6x^4 - 8x^2) \div (2x - 4 + 3x^2)$

62. $(8x^2 - 7 - 13x + 24x^4) \div (3x + 5 + 6x^2)$

En los problemas 63 y 64, divida usando división sintética. No use calculadora.

63. $(x^3 - 3x^2 + x - 3) \div (x - i)$

64. $(x^3 - 2x^2 + x - 2) \div (x + i)$

En los problemas del 65 al 72, grafique cada función polinomial usando división sintética y el teorema del residuo. Después describa cada gráfica de manera verbal, incluyendo el número de intersecciones en x, el número de puntos de retorno y el comportamiento a la izquierda y a la derecha.

Compruebe su trabajo en los problemas del 65 al 72 graficando con un dispositivo de graficación.

65. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$

66. $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + 7x - 6$

67. $P(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 - 10x - 8$

68. $P(x) = x^4 - 8x^2 - 4x + 10$

69. $P(x) = -x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 10x - 9$

70. $P(x) = -x^4 - 5x^3 + x^2 + 20x + 5$

71. $P(x) = x^5 - 6x^4 + 4x^3 + 17x^2 - 5x - 7$

72. $P(x) = x^5 - 9x^3 + 4x^2 + 15x - 10$

73. (A) Divida $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ entre $x - r$, usando la división sintética y el proceso de división larga, y compare los coeficientes del cociente y el residuo producido por cada método.
(B) Desarrolle la expresión que representa el residuo. ¿Qué observa?

74. Repita el problema 73 para

$$P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

75. Los polinomios se evalúan también de manera adecuada usando un esquema de "factorización anidada". Por ejemplo, el polinomio $P(x) = 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$ se puede escribir en forma de factorización anidada, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7 \\ &= (2x - 3)x^3 + 2x^2 - 5x + 7 \\ &= [(2x - 3)x + 2]x^2 - 5x + 7 \\ &= \{[(2x - 3)x + 2]x - 5\}x + 7 \end{aligned}$$

Use la forma de factorización anidada para encontrar $P(-2)$ y P(1.7). [*Sugerencia:* Para evaluar $P(-2)$, guarde -2 en la memoria de su calculadora, para llamarla cuando se necesite, y proceda de izquierda a derecha.]

76. Encuentre $P(-2)$ y $P(1.3)$ para $P(x) = 3x^4 + x^3 - 10x^2 + 5x - 2$ usando el esquema de factorización presentado en el problema 75.

SECCIÓN 3-2 Determinación de raíces racionales de polinomios

- Teorema de factorización
- Teorema fundamental del álgebra
- Raíces imaginarias
- Raíces racionales

En esta sección se desarrollarán algunas propiedades importantes de los polinomios con coeficientes arbitrarios. Después se considerará el problema de encontrar todas las raíces racionales de un polinomio con coeficientes racionales. En algunos casos, este proceso también permitirá encontrar raíces irracionales o imaginarias.

• Teorema de factorización

El algoritmo de división (teorema 1 en la sección 4-1)

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

podría, debido al teorema del residuo (teorema 2 en la sección 4-1), escribirse en una forma donde R se reemplace por $P(r)$:

$$P(x) = (x - r)Q(x) + P(r)$$

Es fácil ver que $x - r$ es un factor de $P(x)$ si y sólo si $P(r) = 0$; es decir, si y sólo si r es una raíz del polinomio $P(x)$. Este resultado se conoce como **teorema de factorización**:

Teorema 1 **Teorema de factorización**

Si r es una raíz del polinomio $P(x)$, entonces $x - r$ es un factor de $P(x)$. Por el contrario, si $x - r$ es un factor de $P(x)$, entonces r es una raíz de $P(x)$.

La relación entre raíces, factores e intersecciones en el eje x es fundamental para estudiar los polinomios. También es importante el teorema de factorización, puesto que en él se establece que los siguientes postulados son equivalentes para cualquier polinomio $P(x)$:

1. r es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$.
2. r es una raíz de $P(x)$.
3. $x - r$ es un factor de $P(x)$.

Si, además, los coeficientes de $P(x)$ son números reales y r es un número real, entonces se puede sumar un cuarto postulado a la lista:

4. r es una intersección con el eje x en la gráfica de $P(x)$.

EJEMPLO 1 **Factores, raíces e intersecciones**

(A) Use el teorema de factorización para demostrar que $x + 1$ es un factor de $P(x) = x^{25} + 1$
(B) ¿Cuáles son las raíces de $P(x) = 3(x - 5)(x + 2)(x - 3)$?
(C) ¿Cuáles son las raíces de $x^4 - 1 = 0$?
(D) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de la gráfica de $P(x) = x^4 - 1$?

Soluciones (A) Como $x + 1 = x - (-1)$, se tiene $r = -1$ y

$$P(r) = P(-1) = (-1)^{25} + 1 = -1 + 1 = 0$$

Por consiguiente, -1 es una raíz de $P(x) = x^{25} + 1$. Por el teorema de factorización, $x - (-1) = x + 1$ es un factor de $x^{25} + 1$.

(B) Como $(x - 5)$, $(x + 2)$ y $(x - 3)$ son factores de $P(x)$, 5, -2 y 3 son raíces de $P(x)$.

(C) Con la factorización del lado izquierdo, se tiene

$$x^4 - 1 = 0$$
$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$
$$(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i) = 0$$

De esta forma, las raíces de $x^4 - 1 = 0$ son 1, -1, i y $-i$.

(D) Del inciso C, las raíces de $P(x)$ son 1, -1, i y $-i$. Sin embargo, las intersecciones con el eje x deben ser números reales. Por lo tanto, las intersecciones con el eje x de la gráfica de $P(x) = x^4 - 1$ son 1 y -1 (véase la figura 1).

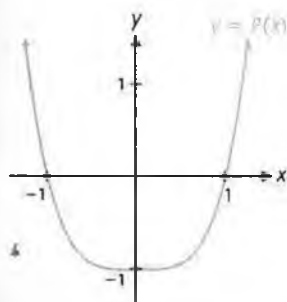


FIGURA 1 Intersecciones de $P(x) = x^4 - 1$.

Problema seleccionado 1

(A) Use el teorema de factorización para demostrar que $x - 1$ es un factor de $P(x) = x^{54} - 1$.

(B) ¿Cuáles son las raíces de

$$P(x) = 2(x + 3)(x + 7)(x - 8)(x + 1)?$$

(C) ¿Cuáles son las raíces de $x^2 + 4 = 0$?

(D) ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x de $P(x) = x^2 + 4$?

• Teorema fundamental del álgebra

El teorema 2, a menudo conocido como **teorema fundamental del álgebra**, requiere de una verificación que está más allá del alcance de este libro, de manera que se postula sin comprobarlo.

Teorema 2 **Teorema fundamental del álgebra**

Cada polinomio $P(x)$ de grado $n > 0$ tiene al menos una raíz.

Si $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ es un polinomio de grado $n > 0$ con coeficientes complejos, entonces, de acuerdo con el teorema 2, tiene al menos una raíz, por ejemplo r_1. Según el teorema de factorización, $x - r_1$ es un factor de $P(x)$. En consecuencia,

$$P(x) = (x - r_1)Q_1(x)$$

donde $Q_1(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $n - 1 = 0$, entonces $Q_1(x) = a_n$. Si $n - 1 > 0$, entonces, por el teorema 2, $Q_1(x)$ tiene al menos una raíz, por ejemplo r_2. Y

$$Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x)$$

donde $Q_2(x)$ es un polinomio de grado $n - 2$. Así que,

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$$

Si $n - 2 = 0$, entonces $Q_2(x) = a_n$. Si $n - 2 > 0$, entonces $Q_2(x)$ tiene al menos una raiz, por ejemplo r_3. Y

$$Q_2(x) = (x - r_3)Q_3(x)$$

donde $Q_3(x)$ es un polinomio de grado $n - 3$.

Se continúa en esta forma hasta que $Q_k(x)$ sea de grado 0, es decir, hasta que $k = n$. En este punto, $Q_n(x) = a_n$, y se tiene

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdot\dots\cdot (x - r_n)a_n$$

De esta manera, $r_1, r_2, \dots, r_n$ son las n raíces, no necesariamente distintas de $P(x)$. ¿Es posible que $P(x)$ tenga más que esas n raíces? Si se supone que r es un número diferente de las raíces anteriores. Entonces

$$P(r) = a_n(r - r_1)(r - r_2) \cdot\dots\cdot (r - r_n) \neq 0$$

ya que r no es igual a ninguna de las raíces. Por lo tanto, r no es una raíz, y se podría concluir que $r_1, r_2, \dots, r_n$ son las únicas raíces de $P(x)$. Esto sólo es un esbozo de prueba del teorema 3.

Teorema 3 **Teorema de las n raíces**

Cada polinomio $P(x)$ de grado $n > 0$ se puede expresar como el producto de n factores lineales. De aquí que, $P(x)$ tenga exactamente n raíces (no necesariamente distintas).

Los teoremas 2 y 3 se probaron por primera vez en 1797, por Carl Friedrich Gauss (a la edad de 20 años), uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos.

Si $P(x)$ se representa como el producto de los factores lineales y $x - r$ ocurre m veces, entonces r se denomina **raíz de multiplicidad m**. Por ejemplo, si

$$P(x) = 4(x - 5)^3(x + 1)^2(x - i)(x + i)$$

entonces este polinomio de séptimo grado tiene siete raíces, no todas diferentes. Es decir, 5 es una raíz de multiplicidad 3, o raíz triple; -1 es una raíz de multiplicidad 2, o raíz doble; e i y $-i$ son raíces de multiplicidad 1, o raíces simples. De manera que, este polinomio de séptimo grado tiene exactamente siete raíces tomando en cuenta al 5 y -1 con sus respectivas multiplicidades.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Si r es una raíz real de un polinomio $P(x)$ con coeficientes reales, entonces r también es una intersección con el eje x para la gráfica de $P(x)$. Analice la diferencia entre la gráfica de $P(x)$ en una raíz real de multiplicidad impar y una raíz real de multiplicidad par.

EJEMPLO 2 **Factorización de un polinomio**

Si -2 es una raíz doble de $P(x) = x^4 - 7x^2 + 4x + 20$, escriba $P(x)$ como un producto de factores de primer grado.

Solución Como -2 es una raíz doble de $P(x)$, se puede escribir

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + 2)^2 Q(x) \\ &= (x^2 + 4x + 4)Q(x) \end{aligned}$$

y encontrar $Q(x)$ dividiendo $P(x)$ entre $x^2 + 4x + 4$. Cuando se efectúa toda la división algebraica larga, se obtiene

$$Q(x) = x^2 - 4x + 5$$

Las raíces de $Q(x)$ se determinan mediante la fórmula cuadrática, y son $2 - i$ y $2 + i$. De esta manera, escribiendo $P(x)$ como un producto de factores lineales resulta

$$P(x) = (x + 2)^2[x - (2 - i)][x - (2 + i)]$$

[*Nota:* Siempre que $Q(x)$ sea un polinomio cuadrático, sus raíces se pueden encontrar mediante la fórmula cuadrática.]

Problema seleccionado 2 Si 3 es una raíz doble de $P(x) = x^4 - 12x^3 + 55x^2 - 114x + 90$, escriba $P(x)$ como un producto de factores de primer grado.

• Raíces imaginarias

Algo interesante sucede si se restringe los coeficientes de un polinomio a números reales. Supóngase que se usa la fórmula cuadrática para encontrar las raíces del polinomio

$$P(x) = x^2 - 6x + 13$$

Para encontrar las raíces de $P(x)$, se resuelve $P(x) = 0$:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= 0 \\ x &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i \end{aligned}$$

Las raíces de $P(x)$ son $3 - 2i$ y $3 + 2i$, que son los números conjugados imaginarios (véase la sección 1-5). Observe también que las raíces imaginarias del ejemplo 1 son los números conjugados imaginarios $2 - i$ y $2 + i$.

Esto se generaliza en el teorema siguiente:

Teorema 4 **Teorema de raíces imaginarias**

Las raíces imaginarias de polinomios con coeficientes reales, si existen, ocurren en pares conjugados.

Como una consecuencia de los teoremas 3 y 4, se sabe también (reflexione sobre esto) lo siguiente:

Teorema 5 **Raíces reales y polinomios de grado impar**

Un polinomio de grado impar con coeficientes reales siempre tiene al menos una raíz real.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2

(A) Sea $P(x)$ un polinomio de tercer grado con coeficientes reales. Indique cuáles de los postulados siguientes son verdaderos y cuáles falsos. Justifique sus conclusiones.

(i) $P(x)$ tiene al menos una raíz real.
(ii) $P(x)$ tiene tres raíces.
(iii) $P(x)$ puede tener dos raíces reales y una raíz imaginaria.

(B) Sea $P(x)$ un polinomio de cuarto grado con coeficientes reales. Indique cuáles de los postulados siguientes son verdaderos y cuáles falsos. Justifique sus conclusiones.

(i) $P(x)$ tiene cuatro raíces.
(ii) $P(x)$ tiene al menos dos raíces reales.
(iii) Si se sabe que $P(x)$ tiene tres raíces reales, entonces la cuarta raíz debe ser real.

Raíces racionales

Observe primero que un polinomio con coeficientes racionales puede siempre escribirse como una constante por un polinomio con coeficientes enteros. Por ejemplo,

$$P(x) = \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{7}{4}x + 5$$
$$= \tfrac{1}{12}(6x^3 - 8x^2 + 21x + 60)$$

Así, es suficiente confinar nuestra atención a polinomios con coeficientes enteros.

Se introduce el teorema de raíz racional examinando el siguiente polinomio cuadrático cuyas raíces se pueden encontrar fácilmente por factorización:

$$P(x) = 6x^2 - 13x - 5 = (2x - 5)(3x + 1)$$

Raíces de $P(x)$: $\quad \frac{5}{2} \quad$ y $\quad -\frac{1}{3} = \frac{-1}{3}$

Note que los numeradores, 5 y -1, de las raíces son factores enteros de -5, el término constante en $P(x)$. Los denominadores 2 y 3 de las raíces son factores enteros de 6, el coeficiente del término de mayor grado en $P(x)$. En el teorema 6 se generalizan estas observaciones.

Teorema 6 **Teorema de las raíces racionales**

Si el número racional b/c, totalmente simplificado, es una raíz del polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad a_n \neq 0$$

con coeficientes enteros, entonces b debe ser un factor entero de a_0 y c debe ser un factor entero de a_n.

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$\frac{b}{c}$ — b debe ser un factor de a_0; c debe ser un factor de a_n

La prueba del teorema 6 no es difícil y es instructiva, de manera que la ilustramos aquí.

Prueba Como b/c es una raíz de $P(x)$,

$$a_n\left(\frac{b}{c}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{b}{c}\right) + a_0 = 0 \tag{1}$$

Si se multiplican ambos lados de la ecuación (1) por c^n, se obtiene

$$a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1}c + \cdots + a_1 bc^{n-1} + a_0 c^n = 0 \tag{2}$$

que se puede escribir en la forma

$$a_n b^n = c(-a_{n-1}b^{n-1} - \cdots - a_0 c^{n-1}) \tag{3}$$

Como ambos lados de la ecuación (3) son enteros, c debe ser un factor de $a_n b^n$. Y como el número racional b/c está totalmente simplificado, b y c no pueden tener factores diferentes de ± 1. Es decir, b y c son **primos relativos**. Esto implica que b^n y c son también primos relativos. Por lo tanto, c debe ser un factor de a_n.

Ahora, si se resuelve la ecuación (2) para $a_0 c^n$ y se factoriza b en el lado derecho, se tiene

$$a_0 c^n = b(-a_n b^{n-1} - \cdots - a_1 c^{n-1})$$

Se observa que b es un factor de $a_0 c^n$ y, por lo tanto, un factor de a_0, ya que b y c son relativamente primos.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3 Sea $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, donde a_3, a_2, a_1 y a_0 son enteros.

1. Si $P(2) = 0$, hay un coeficiente que debe ser un entero par. Identifique este coeficiente y explique por qué debe ser par.
2. Si $P(\frac{1}{2}) = 0$, hay un coeficiente que debe ser un entero par. Identifique este coeficiente y explique por qué debe ser par.
3. Si $a_3 = a_0 = 1$, $P(-1) \neq 0$, y $P(1) \neq 0$, ¿tiene $P(x)$ algunas raíces racionales? Apoye su conclusión con argumentos verbales y/o ejemplos.

Simplemente se establece que si $P(x)$ no tiene una raíz racional, entonces el numerador de la raíz debe ser un factor entero de a_0 y el denominador de la raíz debe ser un factor entero de a_n. Como cada entero tiene un número finito de factores enteros, el teorema 6 permite construir una lista finita de posibles raíces racionales, lo que convierte a la determinación de cualquier raíz racional en una rutina, algunas veces tediosa, en el proceso de eliminación.

EJEMPLO 3 **Determinación de raíces racionales**

Encuentre todas las raíces racionales para $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$.

Solución Si b/c (totalmente simplificada) es una raíz racional de $P(x)$, entonces b debe ser un factor de 6 y c debe ser un factor de 2.

Los valores posibles de b son los factores enteros de 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ (4)

Los valores posibles de c son los factores enteros de 2: $\pm 1, \pm 2$ (5)

Al escribir todas las fracciones posibles b/c en las que b es de (4) y c es de (5), se tiene

Raíces racionales posibles para $P(x)$: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ (6)

[*Nota:* Todas las fracciones están totalmente simplificadas, y duplicadas como $\pm 6/\pm 2 = \pm 3$ no están repetidas]. Si $P(x)$ tiene algunas raíces racionales, deben estar en la lista (6). Se usa una tabla de división sintética para probar los números en esta lista hasta que se encuentra una raíz. Si se finaliza la lista sin encontrar una raíz, se puede concluir que $P(x)$ no tiene ninguna raíz racional.

	2	−9	7	6	
$\frac{1}{2}$	2	−8	3	$\frac{15}{2}$	
1	2	−7	0	6	
$\frac{3}{2}$	2	−6	−2	3	
2	2	−5	−3	0	$P(2) = 0$

¡Se encontró una raíz! Se podría continuar probando los ocho números restantes en la lista (6) para ver si hay más raíces racionales. Sin embargo, por lo general es más eficiente factorizar el polinomio original en este punto, produciendo un polinomio de grado menor que se denomina **polinomio reducido** de $P(x)$. Con el uso de la última línea en la tabla de la división sintética, se tiene

$$P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = (x - 2)(2x^2 - 5x - 3)$$

El polinomio reducido $Q(x) = 2x^2 - 5x - 3$ es un polinomio de segundo grado cuyas raíces restantes se pueden encontrar por factorización o, si es necesario, con la fórmula cuadrática. De esta manera,

$$P(x) = (x - 2)(2x^2 - 5x - 3) = (x - 2)(x - 3)(2x + 1)$$

y las raíces racionales de $P(x)$ son 2, 3 y $-\frac{1}{2}$. Como $P(x)$ es un polinomio cúbico, se puede concluir que se han encontrado todas las raíces de $P(x)$, sin probar los números restantes en la lista (6).

Encuentre todas las raíces racionales para $P(x) = 2x^3 + x^2 - 11x - 10$.

Estrategia para encontrar raíces racionales

Suponga que $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y es de grado mayor que 2.

Paso 1. Enliste las posibles raíces racionales de $P(x)$ usando el teorema de raíz racional (teorema 6)

Paso 2. Construya una tabla de división sintética. Si se encuentra una raíz racional r, deténgase y escriba

$$P(x) = (x - r)Q(x)$$

y proceda inmediatamente a encontrar las raíces racionales para $Q(x)$, el polinomio reducido relativo a $P(x)$. Si el grado de $Q(x)$ es mayor que 2, regrese al paso 1, usando $Q(x)$ en lugar de $P(x)$. Si $Q(x)$ es cuadrática, encuentre todas sus raíces, usando métodos estándar para resolver ecuaciones cuadráticas.

Determinación de raíces racionales e irracionales

Encuentre todas las raíces de manera exacta para $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 3$.

Solución *Paso 1.* $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}$ Raíces racionales posibles

Paso 2.

	2	−7	4	3
$\frac{1}{2}$	2	−6	1	$\frac{7}{2}$
1	2	−5	−1	2
$\frac{3}{2}$	2	−4	−2	0

Se observa que $x = \frac{3}{2}$ es una raíz. En consecuencia,

$$P(x) = (x - \tfrac{3}{2})(2x^2 - 4x - 2)$$

El polinomio reducido $Q(x) = 2x^2 - 4x - 2$ es cuadrático, de modo que sus raíces se pueden encontrar por los métodos estándar. Esta vez $Q(x)$ no se factoriza por inspección, así que con el uso de la fórmula cuadrática:

$$2x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Las raíces exactas de $P(x)$ son $\frac{3}{2}$ y $1 \pm \sqrt{2}$.

Problema seleccionado 4 Encuentre todas las raíces de manera exacta para $P(x) = 3x^3 - 10x^2 + 5x + 4$.



Comentario. Un dispositivo de graficación puede acelerar el proceso de búsqueda de raices racionales. La figura 2 muestra la gráfica del polinomio $P(x)$ analizado en el ejemplo 4. Un vistazo a la gráfica muestra que no se necesita probar $x = \frac{1}{2}$ o $x = 1$. También se puede usar un dispositivo de graficación para evaluar el polinomio para probar las posibles raíces (véase la figura 2); sin embargo, es necesaria la división sintética para factorizar $P(x)$. En la sección siguiente se analizará el uso de los dispositivos de graficación para aproximar a las raíces irracionales, tales como $1 \pm \sqrt{2}$, y se verá que una tabla de división sintética es una herramienta útil cuando se buscan las raíces de un polinomio.

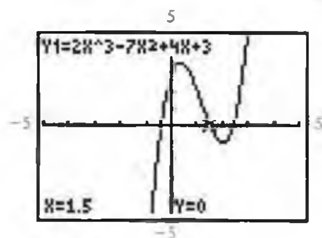


FIGURA 2

EJEMPLO 5 Determinación de raíces racionales e imaginarias

Encuentre todas las raíces de manera exacta para $P(x) = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 14x + 5$.

Solución *Paso 1.* ± 1 y ± 5 Raíces racionales posibles

Paso 2.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -6 & 14 & -14 & 5 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 9 & -5 & 0 \end{array}$$

De esta manera, 1 es una raíz de $P(x)$, y se puede escribir

$$P(x) = (x - 1)(x^3 - 5x^2 + 9x - 5)$$

Esta vez el polinomio reducido es un cúbico, así que se repiten los pasos 1 y 2 usando $Q(x)$.

$$Q(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5 \quad \text{Polinomio reducido}$$

Paso 1. ± 1 y ± 5 Raíces racionales posibles

Paso 2.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -5 & 9 & -5 \\ \hline 1 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}$$

$$Q(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 5)$$

Se encuentran las raíces del polinomio cuadrático reducido $Q_1(x) = (x^2 - 4x + 5)$ usando la fórmula cuadrática:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(5)}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = 2 \pm i$$

Las raíces exactas de $P(x)$ son 1 (multiplicidad 2), $2 - i$, y $2 + i$.

Problema seleccionado 5 Encuentre todas las raíces de manera exacta para $P(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 5$.

Comentario. El ejemplo 5 ilustra la importancia de usar el polinomio reducido siempre que se encuentre una raíz. Probando las posibles raíces racionales en el polinomio original nunca se revelarán ningunas raíces múltiples.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $P(1) = 1^{54} - 1 = 0$ implica que $x - 1$ es un factor de $P(x)$
(B) $-3, -7, 8, -1$ (C) $-2i, 2i$ (D) No hay intersecciones en x.
2. $p(x) = (x - 3)^2[x - (3 - i)][x - (3 + i)]$.
3. $-2, -1, \frac{5}{2}$
4. $\frac{4}{3}, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$
5. -1 (multiplicidad 2), $-1 - 2i, -1 + 2i$

EJERCICIO 3-2

A

Escriba las raíces de cada polinomio en los problemas del 1 al 4, e indique la multiplicidad de cada uno. ¿Cuál es el grado de cada polinomio?

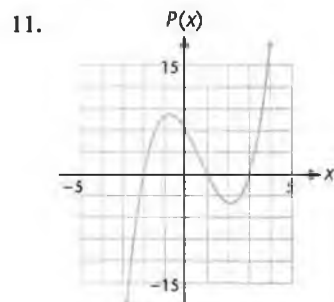
1. $P(x) = (x + 8)^3(x - 6)^2$
2. $P(x) = (x - 5)(x + 7)^2$
3. $P(x) = 3(x + 4)^3(x - 3)^2(x + 1)$
4. $P(x) = 5(x - 2)^3(x + 3)^2(x - 1)$

En los problemas del 5 al 10, encuentre un polinomio P(x) de menor grado, con coeficiente principal 1, que tenga el conjunto indicado de raíces. Escriba la respuesta en una forma factorizada. Indique el grado del polinomio.

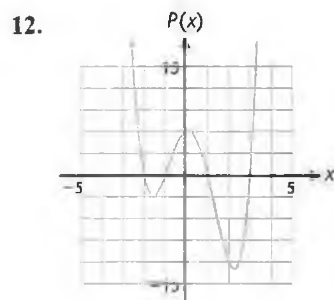
5. 3 (multiplicidad 2) y -4
6. -2 (multiplicidad 3) y 1 (multiplicidad 2)
7. -7 (multiplicidad 3), $-3 + \sqrt{2}$, $-3 - \sqrt{2}$
8. $\frac{1}{3}$ (multiplicidad 2), $5 + \sqrt{7}$, $5 - \sqrt{7}$
9. $(2 - 3i)$, $(2 + 3i)$, -4 (multiplicidad 2)
10. $i\sqrt{3}$ (multiplicidad 2), $-i\sqrt{3}$ (multiplicidad 2), y 4 (multiplicidad 3)

En los problemas del 11 al 16, encuentre un polinomio de grado menor, con coeficiente principal 1, que tenga la gráfica indicada. Suponga que las raíces son enteras. Escriba la respuesta en forma factorizada. Indique el grado de cada polinomio

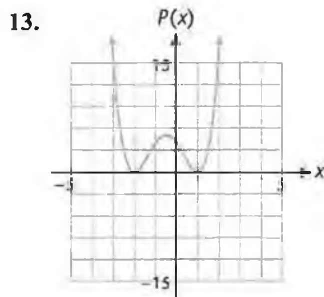
11.



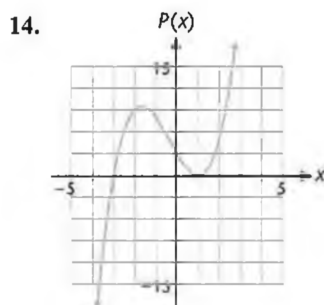
12.



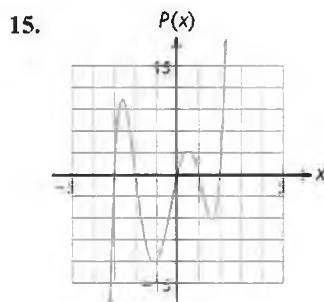
13.



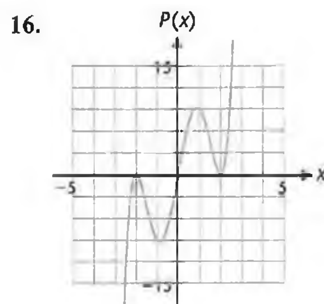
14.



15.



16.



En los problemas del 17 al 20, determine si el segundo polinomio es un factor del primer polinomio sin dividir o sin usar la división sintética. [Sugerencia: Evalúe directamente y use el teorema de factorización.]

17. $x^{18} - 1$; $x - 1$
18. $x^{18} - 1$; $x + 1$

19. $3x^3 - 7x^2 - 8x + 2; x + 1$

20. $3x^4 - 2x^3 + 5x - 6; x - 1$

B

Para cada polinomio de los problemas del 21 al 26, enumere todas las posibles raíces racionales (teorema 6).

21. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

22. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 8$

23. $P(x) = 3x^3 - 11x^2 + 8x + 4$

24. $P(x) = 2x^3 + x^2 - 4x - 3$

25. $P(x) = 12x^3 - 16x^2 - 5x + 3$

26. $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 14x - 5$

En los problemas del 27 al 34, encuentre todas las raíces de manera exacta (racionales, irracionales e imaginarias) para cada ecuación del polinomio.

27. $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$

28. $2x^3 - 10x^2 + 12x - 4 = 0$

29. $x^4 + 4x^3 - x^2 - 20x - 20 = 0$

30. $x^4 - 4x^2 - 4x - 1 = 0$

31. $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$

32. $x^4 - 2x^2 - 16x - 15 = 0$

33. $2x^5 - 3x^4 - 2x + 3 = 0$

34. $2x^5 + x^4 - 6x^3 - 3x^2 - 8x - 4 = 0$

En los problemas del 35 al 42, encuentre todas las raíces de manera exacta (racionales, irracionales e imaginarias) para cada polinomio.

35. $P(x) = x^3 - 19x + 30$

36. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 36$

37. $P(x) = x^4 - \frac{21}{10}x^3 + \frac{2}{5}x$

38. $P(x) = x^4 + \frac{7}{6}x^3 - \frac{7}{3}x^2 - \frac{5}{2}x$

39. $P(x) = x^4 - 5x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 2x - 2$

40. $P(x) = x^4 - \frac{13}{4}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4}$

41. $P(x) = 3x^5 - 5x^4 - 8x^3 + 16x^2 + 21x + 5$

42. $P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 23x^2 - 26x + 10$

En los problemas del 43 al 48, escriba cada polinomio como un producto de factores lineales.

43. $P(x) = 6x^3 + 13x^2 - 4$

44. $P(x) = 6x^3 - 17x^2 - 4x + 3$

45. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 4$

46. $P(x) = x^3 - 8x^2 + 17x - 4$

47. $P(x) = 4x^4 - 4x^3 - 9x^2 + x + 2$

48. $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

En los problemas del 49 al 54, resuelva cada desigualdad (véase la sección 2-8).

49. $x^2 \le 4x - 1$

50. $x^2 > 2x + 1$

51. $x^3 + 3 \le 3x^2 + x$

52. $9x + 9 \le x^3 + x^2$

53. $2x^3 + 6 \ge 13x - x^2$

54. $5x^3 - 3x^2 < 10x - 6$

En los problemas del 55 al 60, multiplique.

55. $[x - (4 - 5i)][x - (4 + 5i)]$

56. $[x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)]$

57. $[x - (3 + 4i)][x - (3 - 4i)]$

58. $[x - (5 + 2i)][x - (5 - 2i)]$

59. $[x - (a + bi)][x - (a - bi)]$

60. $(x - bi)(x + bi)$

C

En los problemas del 61 al 66, encuentre todas las otras raíces de P(x), dadas las raíces indicadas.

61. $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 10$; $3 - i$ es una raíz

62. $P(x) = x^3 + x^2 + 4x + 6$; $1 + i$ es una raíz

63. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 25x - 75$; $-5i$ es una raíz

64. $P(x) = x^3 + 2x^2 + 16x + 32$; $4i$ es una raíz

65. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 8x - 10$; $2 + i$ es una raíz

66. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 18x - 18$; $-3i$ es una raíz

En los problemas del 67 al 70, resuelva cada desigualdad (vea la sección 2-8).

67. $\dfrac{4}{2x^3 + 5x^2 - 2x - 5} \ge 0$

68. $\dfrac{7}{2x^3 - x^2 - 8x + 4} \le 0$

69. $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^3 - 4x^2 + x + 6} \le 0$

70. $\dfrac{x^2 + 4x - 21}{x^3 + 7x^2 + 7x - 15} \ge 0$

Pruebe que cada uno de los números reales en los problemas del 71 al 74 es no racional formulando el polinomio adecuado y usando el teorema 6.

71. $\sqrt{6}$

72. $\sqrt{12}$

73. $\sqrt[3]{5}$

74. $\sqrt[5]{8}$

Los problemas del 75 al 80 requieren del uso de un dispositivo de graficación. Grafique el polinomio y use la gráfica para ayudar a localizar las raíces reales. Después encuentre todas las raíces (racional, irracional e imaginaria) de manera exacta.

75. $P(x) = 3x^3 - 37x^2 + 84x - 24$

76. $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 2x + 30$

77. $P(x) = 4x^4 + 4x^3 + 49x^2 + 64x - 240$

78. $P(x) = 6x^4 + 35x^3 + 2x^2 - 233x - 360$

79. $P(x) = 4x^4 - 44x^3 + 145x^2 - 192x + 90$

80. $P(x) = x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 28x^2 - 72x + 48$

81. Las soluciones de la ecuación $x^3 - 1 = 0$ son todas las raíces cúbicas de 1.

(A) ¿Cuántas son las raíces cúbicas de 1?
(B) 1 es obviamente una raíz cúbica de 1; encuentre las otras.

82. Las soluciones de la ecuación $x^3 - 8 = 0$ son todas las raíces cúbicas de 8.

(A) ¿Cuántas son las raíces cúbicas de 8?
(B) 2 es obviamente una raíz cúbica de 8; encuentre las otras.

83. Si P es una función polinomial con coeficientes reales de grado n, con n impar, entonces ¿cuál es el número máximo de veces que la gráfica de $y = P(x)$ puede cruzar el eje x? ¿Cuál es el número mínimo de veces?

84. Resuelva las preguntas del problema 83 para n par.

85. Dada $P(x) = x^2 + 2ix - 5$ con $2 - i$ como raíz, demuestre que $2 + i$ no es una raíz de $P(x)$. ¿Esto contradice al teorema 4? Explique.

86. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son dos polinomios de grado n, y si $P(x) = Q(x)$ para más de n valores de x, entonces ¿cómo se relacionan $P(x)$ y $Q(x)$?

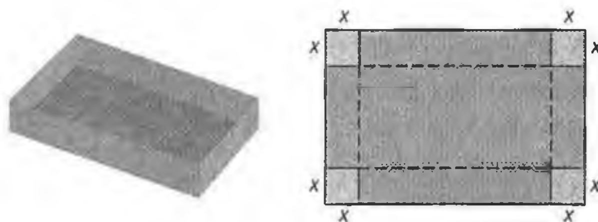
APLICACIONES 

Encuentre todas las soluciones racionales de manera exacta, y encuentre todas las soluciones irracionales con dos cifras decimales.

87. Almacenamiento. Una unidad de almacenamiento rectangular tiene dimensiones de 1 por 2 por 3 pies. Si cada dimensión se aumenta en la misma cantidad, ¿qué cantidad se debe tener para crear una nueva unidad de almacenamiento que tenga 10 veces el volumen del anterior?

88. Construcción. Una caja rectangular tiene dimensiones de 1 por 1 por 2 pies. Si cada dimensión se aumenta en la misma cantidad, ¿qué cantidad se debe tener para crear una nueva caja que tenga seis veces el volumen del anterior?

89. Empaque. Se va a hacer una caja abierta con un pedazo rectangular de cartón que mide 8 por 5 pulgadas, quitando partes del mismo tamaño en las esquinas y doblando los lados hacia arriba (véase figura). Si el volumen de la caja debe ser de 14 pulgadas cúbicas, ¿cuál debe ser la longitud de cada una de las esquinas que se van a quitar? [*Sugerencia:* Determine el dominio de x con las consideraciones físicas antes de empezar.]



90. Fabricación. Se va a fabricar un tanque metálico abierto para químicos, con una pieza rectangular de acero inoxidable que mide 10 por 8 pies, quitando partes del mismo tamaño en las esquinas y doblando los lados hacia arriba (véase figura). Si el volumen del tanque debe ser de 48 pies cúbicos, ¿de qué tamaño debe ser el cuadro que se va a quitar en cada una de las esquinas?

SECCIÓN 3-3 Aproximación de raíces reales de polinomios

- Localización de raíces reales
- Método de bisección

- Aproximación de raíces reales utilizando un dispositivo de graficación
- Aplicación

La estrategia para encontrar raíces, que se analizó en la sección anterior, está diseñada para encontrar tantas raíces reales e imaginarias como sea posible. Pero existen raíces que no se pueden encontrar mediante esta estrategia. Por ejemplo, el polinomio

$$P(x) = x^5 + x - 1$$

debe tener al menos una raiz real (teorema 5 en la sección 3-2). Como las únicas raíces racionales posibles son ± 1 y ninguna de ellas es una raíz, $P(x)$ debe tener al menos una raíz irracional. No se puede encontrar el valor exacto de esta raíz, pero se puede hallar un valor aproximado usando varios métodos que son bien conocidos.

En esta sección se desarrollarán dos herramientas importantes para localizar zonas reales, el *teorema de localización* y el *teorema del límite superior e inferior*. Después se analizará cómo el teorema de localización forma la base para el *método de bisección*, un método popular que se usa en la mayoría de los dispositivos de graficación para aproximar raíces reales. Por último, se estudiará cómo puede ayudar el teorema del límite superior e inferior en la aproximación de raíces reales con un dispositivo de graficación. Nuestra atención se restringirá a las raíces reales de polinomios con coeficientes reales.

• Localización de raíces reales

Regresemos a la función polinomial

$$P(x) = x^5 + x - 1$$

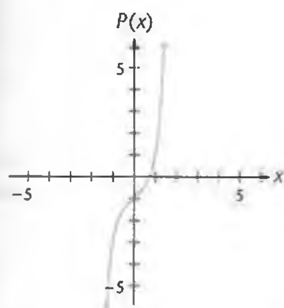


FIGURA 1 $P(x) = x^5 + x - 1$.

Como antes se mencionó, $P(x)$ no tiene raíces racionales y al menos una raíz irracional. La gráfica de $P(x)$ se muestra en la figura 1.

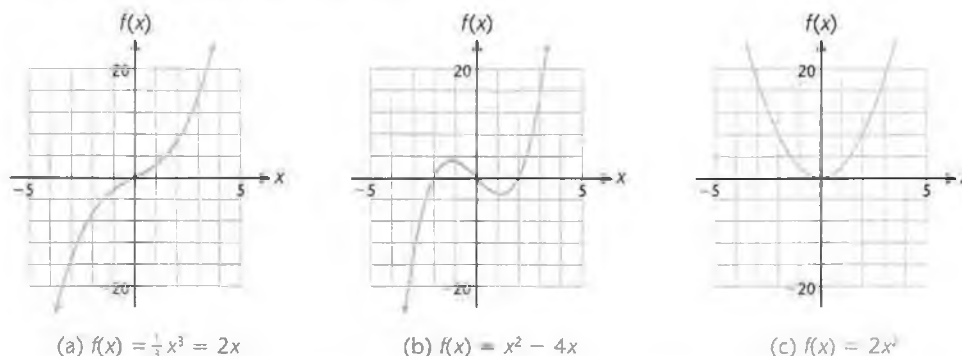
Note que $P(0) = -1$ y $P(1) = 1$. Como la gráfica de una función polinomial es continua, la gráfica de P(x) debe cruzar el eje x al menos una vez entre $x = 0$ y $x = 1$. Esta observación es la base del teorema 1 y nos conduce a un método efectivo para localizar raíces.

Teorema 1 **Teorema de localización**

Si f es continua en un intervalo I, a y b son dos números en I, y $f(a)$ y $f(b)$ son de signo opuesto, entonces existe al menos una intersección con el eje x entre a y b.

Se encontrará que el teorema 1 es muy útil cuando se están buscando raíces reales, de aquí el nombre de *teorema de localización*. Es importante recordar que "al menos", en el teorema 1, significa "uno o más". Observe en la figura 2(a) que $f(-3) = -15 < 0$, $f(3) = 15 > 0$ y f tiene una raíz entre -3 y 3. En la figura 2(b), $f(-3) = -15$ y $f(3) = 15$, pero esta vez hay tres raíces entre -3 y 3.

FIGURA 2 Teorema de localización.



(a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 = 2x$ (b) $f(x) = x^2 - 4x$ (c) $f(x) = 2x^2$

La inversa para la localización del teorema (teorema 1) es falsa; es decir, si c es una raíz de f, entonces f puede o no cambiar de signo en c. Compare la figura 2(a) y (c). Ambas funciones tienen una raíz en $x = 0$, pero la primera cambia de signo en 0 y la segunda no.

EJEMPLO 1

Localización de raíces reales

Sea $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$. Use una tabla de división sintética para localizar las raíces de $P(x)$ entre enteros sucesivos.

Solución Se construye una tabla de división sintética y se busca el cambio de signo.

	1	−6	9	−3	
0	1	−6	9	−3	
					Cambio de signo
1	1	−5	4	1	
					Cambio de signo
2	1	−4	1	−1	
3	1	−3	0	−3	
					Cambio de signo
4	1	−2	1	1	

De acuerdo con el teorema 1, $P(x)$ debe tener una raíz real en cada uno de los intervalos (0, 1), (1, 2) y (3, 4). Como $P(x)$ es un polinomio cúbico, se han localizado todas sus raíces.

Problema seleccionado 1 Sea $P(x) = x^3 - 8x^2 + 15x - 2$. Use una tabla de división sintética para localizar las raíces de $P(x)$ entre enteros sucesivos.

En la solución del ejemplo 1, se encontraron tres raíces en relativamente pocos pasos, ahí se podría detener la búsqueda, ya que se sabe que un polinomio cúbico no puede tener más de tres raíces. Pero, ¿qué pasaría si no se hubieran encontrado tres raíces? Algunos polinomios cúbicos tienen sólo una raíz real. ¿Cómo se puede saber si ya se buscó lo suficiente? El teorema siguiente indica cómo encontrar los *límites superior e inferior* para las raíces reales de un polinomio. Cualquier número que sea mayor que o igual a la raíz más grande de un polinomio, se denomina **límite superior** de las raíces del polinomio. De manera similar, cualquier número que sea menor que o igual a la raíz más pequeña del polinomio se denomina **límite inferior** de las raíces del polinomio. El teorema 2, basado en el proceso de división sintética, permite determinar los límites superior e inferior de las raíces reales de cualquier polinomio con coeficientes reales.

Teorema 2 Límites superior e inferior de raíces reales

Dado un polinomio $P(x)$ de n ésimo grado con coeficientes reales, $n > 0$, $a_n > 0$ y $P(x)$ dividido entre $x - r$ usando división sintética:

1. **Límite superior.** Si $r > 0$ y todos los números en el renglón cociente de la división sintética, incluyendo el residuo, son no negativos, entonces r es un límite superior de raíces reales de $P(x)$.
2. **Límite inferior.** Si $r < 0$ y todos los números en el renglón cociente de la división sintética, incluyendo el residuo, alternan en signo, entonces r es un límite inferior de las raíces reales de $P(x)$.

[*Nota:* En la prueba del límite inferior, si 0 aparece en uno o más lugares en el renglón cociente, incluyendo el residuo, el signo enfrente de él se puede considerar positivo o negativo, pero no ambos. Por ejemplo, se puede considerar que los números 1, 0, 1 se alternan en signo, mientras que no ocurre lo mismo con 1, 0, -1.]

Se esboza una prueba de la parte 1 del teorema 2. La prueba de la parte 2 es similar, sólo que un poco más difícil.

Prueba

Si todos los números en el renglón cociente de la división sintética son no negativos después de dividir $P(x)$ entre $x - r$, entonces

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R$$

donde los coeficientes de $Q(x)$ son no negativos y R es no negativo. Si $x > r > 0$, entonces $x - r > 0$ y $Q(x) > 0$; de aquí que,

$$P(x) = (x - r)Q(x) + R > 0$$

De esta manera, $P(x)$ no puede ser 0 para cualquier x mayor que r, y r es un límite superior para las raíces reales de $P(x)$.

EJEMPLO 2

Limitación de raíces reales

Sea $P(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 40x - 90$. Encuentre los enteros positivos más pequeños y los enteros negativos más grandes que, mediante el teorema 2, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para las raíces reales de $P(x)$. Note también la localización de cualesquiera de las raíces encontradas en el proceso de construir la tabla de división sintética.

Solución

Una forma fácil para localizar los límites superior e inferior es probar $r = 1, 2, 3, \ldots$ hasta que el renglón cociente resulte no negativo; después pruebe $r = -1, -2, -3, \ldots$ hasta que el renglón cociente alterne en signo. También es útil incluir $r = 0$ en la tabla para detectar cualquier cambio de signo entre $r = 0$ y $r = \pm 1$.

		1	−2	−10	40	−90	
	0	1	−2	−10	40	−90	
	1	1	−1	−11	29	−61	
	2	1	0	−10	20	−50	
	3	1	1	−7	19	−33	
	4	1	2	−2	32	38	
LS	5	1	3	5	65	235	Este renglón cociente es no negativo; por lo tanto, 5 es un límite superior (LS).
	−1	1	−3	−7	47	−137	
	−2	1	−4	−2	44	−178	
	−3	1	−5	5	25	−165	
	−4	1	−6	14	−16	−26	
LI	−5	1	−7	25	−85	335	Este renglón cociente alterna en signo; por lo tanto, −5 es un límite inferior (LI).

Con base en el teorema 2, se concluye que todas las raíces reales de $P(x)$ $x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 40x - 90$ deben estar entre -5 y 5. También se nota que debe haber al menos una raíz en (3, 4) y al menos una en $(-5, -4)$.

Problema seleccionado 2

Sea $P(x) = x^4 - 5x^3 - x^2 + 40x - 70$. Encuentre el entero positivo más pequeño y el entero negativo más grande que, por el teorema 2, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para las raíces reales de $P(x)$. Note también la localización de las raíces descubiertas en el proceso de construcción de la tabla de división sintética.

Método de bisección

Ahora que se sabe cómo localizar las raíces reales de un polinomio, se puede volver al problema de aproximar realmente una raíz real. En la sección de exploración y análisis 1 se proporciona una introducción a la repetida aplicación sistemática del teorema de localización (teorema 1) llamado *método de bisección*. Éste es el método para aproximar raíces reales que se programan en muchos dispositivos de graficación.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

Sea $P(x) = x^3 + x - 1$. Como $P(0) = -1$ y $P(1) = 1$, el teorema de localización implica que $P(x)$ debe tener al menos una raíz en (0, 1).

(A) ¿Es $P(0.5)$ positiva o negativa? ¿Existe una raíz en (0, 0.5) o en (0.5, 1)?

(B) Sea m el punto medio del intervalo del inciso (A) que contiene a la raíz. ¿Es $P(m)$ positivo o negativo? ¿Qué le indica respecto de la localización de la raíz?

(C) Explique cómo podría usarse este proceso de manera repetida para aproximar una raíz a cualquier exactitud deseada.

El **método de bisección** usado para aproximar raíces reales es directo: Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Si $P(x)$ tiene signos opuestos en los puntos extremos del intervalo (a, b), entonces una raíz real r se encuentra en este intervalo. Se bisecta este intervalo [encuentre el punto medio $m = (a + b)/2$], compruebe el signo de $P(m)$ y elija el intervalo (a, m) o (m, b) sobre el cual $P(x)$ tiene signos opuestos en los puntos extremo. Se repite este proceso de bisección (produciendo un conjunto de intervalos "anidados", cada uno de la mitad del tamaño del anterior y cada uno conteniendo la raíz real r) hasta que se obtiene la exactitud decimal deseada para la aproximación de la raíz. En cualquier punto en el proceso si $P(m) = 0$, hay que detenerse, ya que m es una raíz real. Un ejemplo ayudará a clarificar el proceso.

EJEMPLO 3

Aproximación de raíces reales por bisección

Para el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 40x - 90$ en el ejemplo 2, se encontró que todas las raíces reales están entre -5 y 5, y que cada uno de los intervalos $(-5, -4)$ y (3, 4) contienen al menos una raíz. Use el método de bisección para aproximar una raíz real sobre el intervalo (3, 4) con una cifra decimal de exactitud.

Solución Se comienza el proceso con la tabla de división sintética:

	1	−2	−10	40	−90	
3	1	1	−7	19	−33	$= P(3)$
4	1	2	−2	32	38	$= P(4)$

TABLA 1 Aproximación por bisección

Cambio de signo en el intervalo (a, b)	Punto medio m	Signo de P: $P(a)$	$P(m)$	$P(b)$
(3, 4)	3.5	−	−	+
(3.5, 4)	3.75	−	+	+
(3.5, 3.75)	3.625	−	+	+
(3.5, 3.625)	3.563	−	−	+
(3.563, 3.625)	Deténgase aquí	−		+

Como el signo de $P(x)$ cambia en los puntos extremo del intervalo (3.563, 3.625), se concluye que una raíz real se encuentra en este intervalo y está dada por $r = 3.6$ con una cifra decimal de exactitud (cada punto extremo se redondea a 3.6).

La figura 3 ilustra los intervalos anidados producidos por el método de bisección de la tabla 1. Relacione cada paso de la tabla 1 con un intervalo en la figura 3. Note cómo cada intervalo que contiene una raíz se hace más y más pequeño y queda contenido en el intervalo precedente que contiene la raíz.

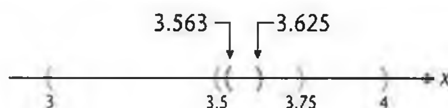


FIGURA 3 Intervalos anidados producidos por el método de bisección con la tabla 1.

Si se hubiera deseado una exactitud con dos cifras decimales, se podría usar cuatro cifras decimales para los valores de x y continuar el proceso en la tabla 1 hasta que los puntos extremos de un intervalo redondeado con dos cifras decimales cambien su signo.

Problema seleccionado 3 Use el método de bisección para aproximar a una cifra decimal de exactitud una raíz en el intervalo $(-5, -4)$ para el polinomio en el ejemplo 3.



• Aproximación de raíces reales utilizando un dispositivo de graficación

El método de bisección es fácil de entender, pero es tedioso efectuarlo, en especial si la aproximación debe ser exacta con más de dos cifras decimales. Afortunadamente, éste es el tipo de cálculos repetitivos que se puede programar en un dispositivo de graficación para realizarlo. De hecho, algunas veces se ha usado un dispositivo de graficación para encontrar las raíces de una función (véase la sección 2-4). Ahora se verá cómo se puede usar el teorema del límite superior e inferior junto con la rutina de aproximación en un dispositivo de graficación para aproximar todas las raíces reales de un polinomio.

EJEMPLO 4 **Aproximación de raíces reales usando un dispositivo de graficación**

Dado el polinomio $P(x) = x^5 + x - 1$:

(A) Forme una tabla de división sintética para encontrar los límites superior e inferior para cualquier raíz real, y localice las raíces reales entre enteros sucesivos.
(B) Grafique $P(x)$ con un dispositivo de graficación, y aproxime cualquier raíz real con cuatro cifras decimales usando una rutina de aproximación de raíces preconstruida.

Solución (A) Forme una tabla de división sintética:

		1	0	0	0	1	−1	
	0	1	0	0	0	1	−1	Raíz real
LS	1	1	1	1	1	2	1	
LI	−1	1	−1	1	−1	2	−3	

En la tabla se observa que todas las raíces reales de $P(x)$ están entre -1 y 1, y una raíz real se encuentra en el intervalo (0, 1).

(B) Introduzca $P(x)$ en un dispositivo de graficación y ajuste las dimensiones de la ventana con la tabla de división sintética del inciso (A) como guía. La figura 4(a) muestra la gráfica de $P(x)$, y la figura 4(b) muestra la aproximación de la raíz usando una rutina preconstruida.

FIGURA 4



Queda claro de la gráfica y de los límites superior e inferior, y de las raíces encontradas en el inciso (A), que $P(x)$ tiene sólo una raíz real, la cual es, con cuatro cifras decimales, $x = 0.7549$.

Problema seleccionado 4 Dado el polinomio $P(x) = x^5 - x^2 + 1$:

(A) Forme una tabla de división sintética para encontrar los límites superior e inferior para cualquier raíz real y localice las raíces reales entre enteros sucesivos.
(B) Grafique $P(x)$ con un dispositivo de graficación y aproxime cualquier raíz real con cuatro cifras decimales usando una rutina preconstruida de aproximación.

Al inicio de esta sección y en la sección 3-1 se vio que una calculadora es una herramienta útil para construir una tabla de división sintética. Un dispositivo de graficación que puede almacenar y correr programas es todavía más útil. La tabla 2 muestra también los resultados generados cuando se usa este programa para construir la tabla de división sintética en el ejemplo 2.

TABLA 2 División sintética en un dispositivo de graficación

Programa SNYDIV

TI-82/TI-83

```
Lbl A
Prompt R
2→I
dim(L1)→N
{0}→L2
N→dim(L2)
L1(1)→L2(1)
Lbl B
L2(I−1)*R+L1(I)→L2(I)
1+I→I
If I≤N
Goto B
Pause L2
Goto A
```

TI-85/TI-86

```
Lbl A
Prompt R
2→I
dimL L1→N
{0}→L2
N→dimL L2
L1(1)→L2(1)
Lbl B
L2 (I−1)*R+L1(I)→L2(I)
1+I→I
If I≤N
Goto B
Pause L2
Goto A
```

Resultados

```
{1,-2,-10,40,-90}→L1
        {1 -2 -10 40 -90}
SNYDIV
R=?1
        {1 -1 -11 29 -61}
R=?2
         {1 0 -10 20 -50}
R=?3
           {1 1 -7 19 -33}
R=?4
           {1 2 -2 32 38}
R=?5
           {1 3 5 65 235}
R=?-1
        {1 -3 -7 47 -137}
R=?-2
        {1 -4 -2 44 -178}
R=?-3
         {1 -5 5 25 -165}
R=?-4
        {1 -6 14 -16 -26}
R=?-5
        {1 -7 25 -85 335}
R=?
```

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Si tiene una calculadora gráfica TI-82, TI-83, TI-85 o TI-86, introduzca la versión adecuada del programa SYNDIV en su calculadora exactamente como se muestra en la tabla 2. Para usar el programa, guarde los coeficientes del polinomio en L1 (véase la primera línea de los resultados en la tabla 2) y corra el programa. Presione ENTER para continuar después de cada línea que se despliega. Presione QUIT en el cursor "R=?" para terminar el programa.

Si tiene algún otro dispositivo de graficación que pueda guardar y correr programas, consulte su manual y modifique las instrucciones en el programa SYNDIV de manera que funcione en su dispositivo de graficación.



EJEMPLO 5 Aproximación de raíces reales con un dispositivo de graficación

Sea $P(x) = x^3 - 30x^2 + 275x - 720$:

(A) Encuentre el entero positivo más pequeño en múltiplos de 10 y el entero negativo más grande en múltiplos de 10 que, por el teorema 2, sean los límites superior e inferior, respectivamente. para las raíces reales de $P(x)$.

(B) Use un dispositivo de graficación para aproximar las raíces reales de $P(x)$ a dos cifras decimales.

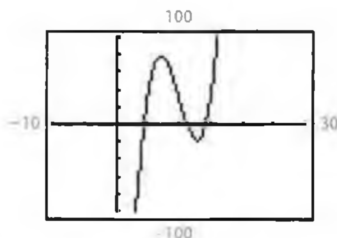
Solución (A) Se construye una tabla de división sintética para buscar los límites de las raíces de $P(x)$. El tamaño de los coeficientes en $P(x)$ indica que se puede acelerar esta búsqueda seleccionando incrementos más grandes entre los valores de prueba.

		1	−30	275	−720
	10	1	−20	75	30
	20	1	−10	75	780
LS	30	1	0	275	7 530
LI	−10	1	−40	675	−7 470

De esta manera, todas las raíces reales de $P(x) = x^3 - 30x^2 + 275x - 720$ se deben encontrar entre −10 y 30.

(B) La gráfica $P(x)$ para $-10 \leq x \leq 30$ (figura 5) muestra que $P(x)$ tiene tres raíces. Los valores aproximados de estas raíces (se omiten los detalles) son 4.48, 11.28 y 14.23.

FIGURA 5 $P(x) = x^3 - 30x^2 + 275x - 720$.





Problema seleccionado 5 Sea $P(x) = x^3 - 25x^2 + 170x - 170$.

(A) Encuentre el entero positivo más pequeño en múltiplos de 10 y el entero negativo más grande en múltiplos de 10 que, por el teorema 2, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para las raíces reales de $P(x)$.

(B) Use un dispositivo de graficación para aproximar las raíces reales de $P(x)$ con dos cifras decimales.

Comentario: Una de las preguntas concernientes a los dispositivos de graficación que se hacen con más frecuencia es: ¿cómo determinar la ventana correcta de visión? El teorema del límite superior e inferior proporciona una respuesta a esta pregunta para las funciones polinomiales. Como lo ilustra el ejemplo 5, el teorema de los límites superior e inferior y la rutina de aproximación de raíces en un dispositivo de graficación son dos herramientas matemáticas importantes que funcionan muy bien.

• Aplicación

EJEMPLO 6 Construcción

Se tiene un tanque con aceite en forma de cilindro circular recto con tapas hemisféricas en cada extremo (véase figura 8). El cilindro tiene 55 pulgadas de largo, y su volumen es de $11\,000\pi$ pulgadas cúbicas (aproximadamente 20 pies cúbicos). Sea x el radio común de los hemisferios y el cilindro.

(A) Encuentre una ecuación polinomial que satisfaga x.
(B) Aproxime x a una cifra decimal.

FIGURA 6



Solución (A) Si x es el radio común de los hemisferios y del cilindro en pulgadas, entonces

$$\begin{pmatrix}\text{Volumen}\\ \text{del}\\ \text{tanque}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Volumen}\\ \text{de los dos}\\ \text{hemisferios}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Volumen}\\ \text{del}\\ \text{cilindro}\end{pmatrix}$$

$$11\,000\pi = \tfrac{4}{3}\pi x^3 + 55\pi x^2 \qquad \text{Multiplique por } 3/\pi.$$

$$33\,000 = 4x^3 + 165x^2$$

$$0 = 4x^3 + 165x^2 - 33\,000$$

Así, x debe ser una raíz positiva de

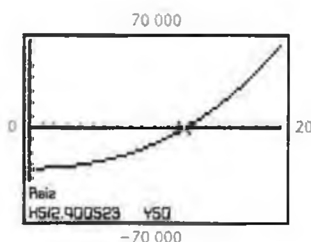
$$P(x) = 4x^3 + 165x^2 - 33\,000$$

(B) Como los coeficientes de $P(x)$ son grandes, se usan incrementos mayores en la tabla de división sintética:

		4	165	0	−33 000
	10	4	205	2 050	−12 500
LS	20	4	245	4 900	65 000

Graficando $y = P(x)$ para $0 \leq x \leq 20$ (figura 7), se observa que $x = 12.4$ pulgadas (con una cifra decimal). [Si no tiene un dispositivo de graficación, construya una tabla como la tabla 1 para aproximar la raíz de $P(x)$.]

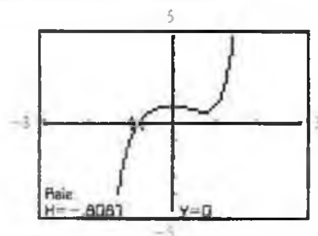
FIGURA 7 $P(x) = 4x^3 + 165x^2 - 33\,000$.



Problema seleccionado 6 Repita el ejemplo 6 si el volumen del tanque es de 44 000π pulgadas cúbicas.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. Intervalos que contienen raíces: (0, 1), (2, 3), (5, 6)
2. Límite inferior: −3; Límite superior: 6
   Intervalos que contienen raíces: (−3, −2), (3, 4)
3. $x = -4.1$
4. (A) Límite inferior: −1; Límite superior: 1
   Intervalos que contienen raíces: (−1, 0)
   (B) Raíz real: $x = -0.8087$



5. (A) Límite inferior: −10; Límite superior: 30
   (B) Raíces reales: 1.20, 11.46, 12.34
6. (A) $P(x) = 4x^3 + 165x^2 - 132\ 000 = 0$ (B) 22.7 pulg.

EJERCICIO 3-3

A

En los problemas del 1 al 4, use la tabla de valores de la función polinomial P para analizar las posibles localizaciones de las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = P(x)$.

1.

x	−7	−5	−1	3	5	8
$P(x)$	9	4	−3	6	4	−2

2.

x	−8	−2	0	2	4	9
$P(x)$	−3	4	5	2	−5	6

3.

x	−6	−4	0	2	4	7
$P(x)$	−5	3	−4	−6	3	−5

4.

x	−5	−3	−1	0	2	5
$P(x)$	7	4	2	−1	3	−6

En los problemas del 5 al 8, use una tabla de división sintética y el teorema 1 para localizar cada raíz real entre enteros sucesivos.

5. $P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 14$
6. $P(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 49$
7. $P(x) = x^3 + 3x^2 - x - 5$
8. $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 3$

Encuentre el entero positivo más pequeño y el entero negativo más grande que, por el teorema 2, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para las raíces reales de cada uno de los polinomios que se dan en los problemas del 9 al 14.

9. $P(x) = x^3 - 3x + 1$
10. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4$
11. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 9$
12. $P(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 7$
13. $P(x) = x^5 - 3x^3 + 3x^2 + 2x - 2$
14. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^2 + 2x - 1$

B

En los problemas del 15 al 22:

(A) Encuentre el entero positivo más pequeño y el entero negativo más grande que, por el teorema 2, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para las raíces reales de P(x). También observe la localización de cualquier raíz entre los enteros sucesivos.

(B) Aproxime con una cifra decimal la raíz real más grande de P(x) usando el método de bisección.

15. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 4$
16. $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$
17. $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$
18. $P(x) = x^3 - 3x^2 - x - 2$
19. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 9x + 7$
20. $P(x) = x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x + 4$
21. $P(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 3$
22. $P(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x + 3$

En los problemas del 23 al 30:

(A) Encuentre el entero positivo más pequeño y el entero negativo más grande que, por el teorema 2, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para las raíces reales de P(x).

(B) Aproxime las raíces reales de cada polinomio con dos cifras decimales.

23. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 8$

24. $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

25. $P(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + 7x - 22$

26. $P(x) = x^4 - x^3 - 8x^2 - 12x - 25$

27. $P(x) = x^5 - 3x^3 - 4x + 4$

28. $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^2 - 4x - 5$

29. $P(x) = x^5 + x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x - 5$

30. $P(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^2 - 9x + 10$

C

En los problemas del 31 al 34:

(A) Encuentre el entero positivo más pequeño y el entero negativo más grande que, por el teorema 2, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para las raíces reales de P(x). Observe también la localización de cualquier raíz entre los enteros sucesivos.

(B) Aproxime con dos cifras decimales a la raíz real más grande de P(x) usando el método de bisección.

31. $P(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 10x + 5$

32. $P(x) = x^5 - 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 12x - 5$

33. $P(x) = x^5 - 10x^3 + 9x + 10$

34. $P(x) = x^5 - 9x^3 + 4x^2 + 12x - 15$

En los problemas del 35 al 44:

(A) Encuentre los enteros positivos más pequeños en múltiplos de 10 y los negativos más grandes en múltiplos de 10 que, por el teorema 2, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para las raíces reales de cada polinomio.

(B) Aproxime las raíces reales de cada polinomio con dos cifras decimales.

35. $P(x) = x^3 - 24x^2 - 25x + 10$

36. $P(x) = x^3 - 37x^2 + 70x - 20$

37. $P(x) = x^4 + 12x^3 - 900x^2 + 5\,000$

38. $P(x) = x^4 - 12x^3 - 425x^2 + 7\,000$

39. $P(x) = x^4 - 100x^2 - 1\,000x - 5\,000$

40. $P(x) = x^4 - 5x^3 - 50x^2 - 500x + 7\,000$

41. $P(x) = 4x^4 - 40x^3 - 1\,475x^2 + 7\,875x - 10\,000$

42. $P(x) = 9x^4 + 120x^3 - 3\,083x^2 - 25\,674x - 48\,400$

43. $P(x) = 0.01x^5 - 0.1x^4 - 12x^3 + 9\,000$

44. $P(x) = 0.1x^5 + 0.7x^4 - 18.775x^3 - 340x^2 - 1\,645x - 2\,450$

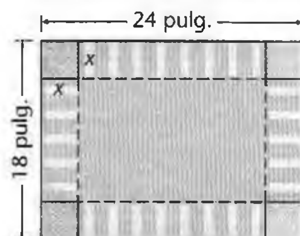
APLICACIONES

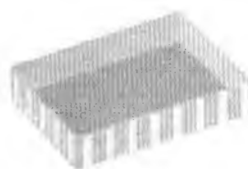
Exprese las soluciones de los problemas del 45 al 50 como las raíces de una ecuación polinomial de la forma P(x) = 0 y aproxime esas soluciones con una cifra decimal. Use un dispositivo de graficación, si lo tiene; si no cuenta con uno use el método de bisección.

45. Geometría. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = x^2$ que estén a una unidad del punto (1, 2). [*Sugerencia:* Use la fórmula de la distancia entre dos puntos de la sección 2-1.]

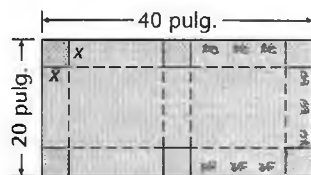
46. Geometría. Encuentre todos los puntos en la gráfica de $y = x^2$ que estén a una unidad del punto (2, 1).

47. Fabricación. Se va a formar una caja con una pieza de cartón que mide 18 por 24 pulgadas. En cada esquina se cortarán cuadrados de x pulgadas por lado, en seguida se doblarán hacia arriba los extremos y los lados (véase figura). Encuentre el valor de x que debería resultar en una caja con 600 pulgadas cúbicas de volumen.



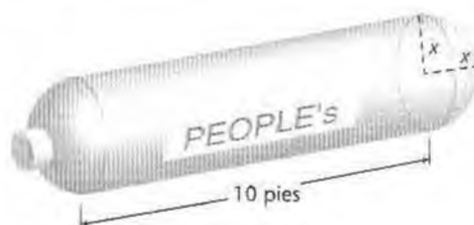


48. Fabricación. Se va a hacer una caja con tapadera articulada con una pieza de cartón que mide 20 por 40 pulgadas. Se cortarán seis cuadrados, de x pulgadas por lado, en cada esquina y en la parte de enmedio, y después se doblarán hacia arriba los extremos y los lados para formar la caja y su tapadera (véase figura). Encuentre el valor de x que podría resultar en una caja con un volumen de 500 pulgadas cúbicas.

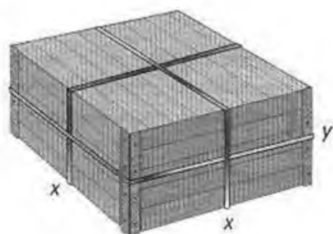




49. Construcción. Un tanque de gas propano tiene la forma de un cilindro circular recto con un hemisferio en cada extremo (véase la figura). Si la longitud global del tanque es de 10 pies y el volumen de 20π pies cúbicos, encuentre el radio común de los hemisferios y el cilindro.



50. Embarque. Una caja para embarque se refuerza con cinta de acero en las tres direcciones (véase figura). Se utiliza un total de 20.5 pies de cinta de acero, 6 pulgadas se desperdicia debido a un traslape de 2 pulgadas en cada dirección. Si la caja tiene una base cuadrada y un volumen de 2 pies cúbicos, encuentre sus dimensiones.



SECCIÓN 3-4 Funciones racionales



- Funciones racionales
- Asíntotas vertical y horizontal
- Graficación de funciones racionales

Funciones racionales

Así como los números racionales se definen en términos de cocientes de enteros, las funciones racionales se definen en términos de los cocientes de polinomios. Las ecuaciones siguientes definen las funciones racionales:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-x-6} \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad h(x) = \frac{x^3-1}{x}$$

$$p(x) = 2x^2 - 3 \qquad q(x) = 3 \qquad r(x) = 0$$

En general, una función f es una **función racional** si

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} \qquad d(x) \neq 0$$

donde $n(x)$ y $d(x)$ son polinomios. El **dominio de** f es el conjunto de todos los números reales x tal que $d(x) \neq 0$.

Si $x = a$ y $d(a) = 0$, entonces f no está definida en $x = a$ y ahí puede no haber ningún punto en la gráfica de f con abscisa $x = a$. Recuerde que no se permite la división entre 0. Esto puede demostrar que

> Si $f(x) = n(x)/d(x)$ y $d(a) = 0$, entonces f es discontinua en $x = a$, y la gráfica de f tiene un hueco o corte en $x = a$.

Si $x = a$ está en el dominio de $f(x)$ y $n(a) = 0$, entonces la gráfica de f cruza el eje x en $x = a$. Así que:

> Si $f(x) = n(x)/d(x)$, $n(a) = 0$, y $d(a) \neq 0$, entonces $x = a$ es una intersección con el eje x para la gráfica de f.

¿Qué sucede si $n(a) = 0$ y $d(a) = 0$? En este caso, se sabe que $x - a$ es un factor de $n(x)$ y $d(x)$ y por consiguiente, $f(x)$ no está en los términos inferiores (véase la sección A-4).

> A menos que se especifique lo contrario, suponga que todas las funciones racionales consideradas se reducen a términos inferiores.

EJEMPLO 1

Determinación del dominio e intersecciones con el eje x para una función racional

Encuentre el dominio e intersecciones con el eje x para $f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 9}$

Solución

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 9} = \frac{2(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+3)}$$

Como $d(3) = 0$ y $d(-3) = 0$, el dominio de f es

$$x \neq \pm 3 \qquad \text{o} \qquad (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$$

Como $n(2) = 0$ y $n(-1) = 0$, la gráfica de f cruza al eje x en $x = 2$ y $x = -1$.

Problema seleccionado 1

Encuentre el dominio e intersecciones con el eje x para: $f(x) = \dfrac{3x^2 - 12}{x^2 + 2x - 3}$

Asíntotas vertical y horizontal

Aunque una función racional f puede ser discontinua en $x = a$ (no hay gráfica para $x = a$), todavía es útil saber qué sucede con la gráfica de f cuando x está cerca de a. Por ejemplo, considere la muy simple función racional f definida por

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Es evidente que la función f es discontinua en $x = 0$. Pero, ¿qué pasa con $f(x)$ cuando x se aproxima a 0 desde cualquier lado de 0? Un procedimiento numérico nos dará una idea de qué sucede con $f(x)$ cuando x se acerca a 0. En la tabla 1, se observa que conforme x se aproxima a 0 desde la derecha, $1/x$ se hace más y más grande; es decir, $1/x$ aumenta sin límite. Esto se escribe de manera simbólica* como

$$\frac{1}{x} \to \infty \qquad \text{conforme} \qquad x \to 0^+$$

TABLA 1 Comportamiento de $1/x$ como $x \to 0^+$

x	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0 000 01	0.000 001	... x se aproxima a 0 desde la izquierda ($x \to 0^-$)
$1/x$	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	... $1/x$ incrementa sin límite ($1/x \to \infty$)

* Recuerde que el símbolo ∞ no representa un número real. En este contexto ∞ se usa para indicar que los valores de $1/x$ aumentan sin límite. Es decir, $1/x$ excede cualquier número dado N sin importar qué tan grande sea el número de N que se haya elegido.

Si x se aproxima a 0 desde la izquierda, entonces x y $1/x$ son negativos y los valores de $1/x$ disminuyen sin límite (véase la tabla 2). Esto se denota como

$$\frac{1}{x} \to -\infty \qquad \text{conforme} \qquad x \to 0^-$$

TABLA 2 Comportamiento de $1/x$ conforme $x \to 0^-$

x	-1	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	$-0.000\ 01$	$-0.000\ 001$	x se aproxima a 0 desde la derecha ($x \to 0^-$)
$1/x$	-1	-10	-100	$-1\ 000$	$-10\ 000$	$-100\ 000$	$-1\ 000\ 000$	$1/x$ aumenta sin límite ($1/x \to -\infty$)

La gráfica de $f(x) = 1/x$ para $-1 \leq x \leq 1$, $x \neq 0$, se muestra en la figura 1. El comportamiento de f conforme x se aproxima a 0 desde la derecha se ilustra en la gráfica dibujando una curva que casi se vuelve vertical y se coloca sobre ella una flecha para indicar que los valores de $1/x$ continúan aumentando sin límite conforme x se aproxima a 0 desde la derecha. El comportamiento conforme x se aproxima a 0 desde la izquierda se ilustra de manera similar.

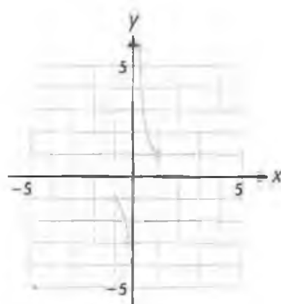


FIGURA 1 $f(x) = \frac{1}{2}$ cerca $x = 0$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Construya tablas similares a la 1 y 2 para $g(x) = 1/x^2$, y analice el comportamiento de la gráfica de $g(x)$ cercana a $x = 0$.

El procedimiento de análisis sugiere que las asíntotas verticales están asociadas con las raíces del denominador de una función racional. Usando el mismo tipo de razonamiento, se establece el siguiente método general de localización de asíntotas verticales para funciones racionales.

Teorema 1 Asíntotas verticales y funciones racionales

Sea f una función racional definida por

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$$

donde $n(x)$ y $d(x)$ son polinomios. Si a es un número real, que $d(a) = 0$ y $n(a) \neq 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la gráfica de $y = f(x)$.

Ahora se observa el comportamiento de $f(x) = 1/x$ conforme $|x|$ se hace muy grande; es decir, conforme $x \to \infty$ y conforme $x \to -\infty$. Considere las tablas 3 y 4. Conforme x aumenta sin límite, $1/x$ es positivo y se aproxima a 0 desde arriba. Conforme x disminuye sin límite, $1/x$ es negativa y se aproxima a 0 desde abajo. Para nuestros propósitos, no es necesario distinguir entre $1/x$ aproximándose a 0 desde arriba y desde abajo. Por consiguiente, se describirá este comportamiento escribiendo

$$\frac{1}{x} \to 0 \qquad \text{conforme} \qquad x \to \infty \text{ y como } x \to -\infty$$

TABLA 3 Comportamiento de $1/x$ conforme $x \to \infty$

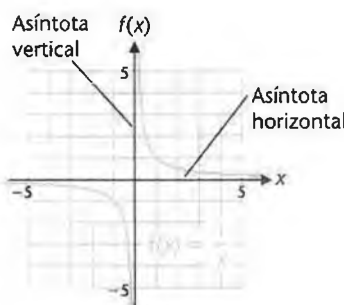
x	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	. . .	x tiende a 0 por la derecha ($x \to \infty$)
$1/x$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.000 01	0.000 001	. . .	$1/x$ aumenta sin límite 0 ($1/x \to 0$)

TABLA 4 Comportamiento de $1/x$ as $x \to -\infty$

x	−1	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000	−1 000 000	. . .	x disminuye sin límite ($x \to -\infty$)
$1/x$	−1	−0.1	−0.01	−0.001	−0.0001	−0.000 01	−0.000 001	. . .	$1/x$ se aproxima a 0 ($1/x \to 0$)

La gráfica completa de $f(x) = 1/x$ se muestra en la figura 2. Observe que el comportamiento conforme $x \to \infty$ y conforme $x \to -\infty$ se ilustra dibujando una curva que es casi horizontal y agregando flechas en los extremos. La curva en la figura 2 es un ejemplo de una curva plana llamada **hipérbola**, y los ejes coordenados para esta curva se llaman **asíntotas**. El eje y es una *asíntota vertical* para $1/x$, y el eje x es una *asíntota horizontal* para $1/x$.

FIGURA 2 $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0.$



DEFINICIÓN 1 **Asíntotas horizontales y verticales**

La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de $y = f(x)$, si $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite conforme x se aproxima a a desde la derecha o desde la izquierda. De manera simbólica,

$$f(x) \to \infty \quad \text{o} \quad f(x) \to -\infty \quad \text{conforme} \quad x \to a^{+} \quad \text{o} \quad x \to a^{-}$$

La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de $y = f(x)$ si $f(x)$ se aproxima a b conforme x aumenta sin límite o conforme x disminuye sin límite. De manera simbólica,

$$f(x) \to b \quad \text{conforme} \quad x \to \infty \quad \text{o} \quad x \to -\infty$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Construya tablas similares a las tablas 3 y 4 para cada una de las siguientes funciones y analice el comportamiento de cada una conforme $x \to \infty$ y conforme $x \to -\infty$:

(A) $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ (B) $g(x) = \dfrac{3x^2}{x^2 + 1}$ (C) $h(x) = \dfrac{3x^3}{x^2 + 1}$

En la sección 3-1 se vio que el comportamiento de un polinomio

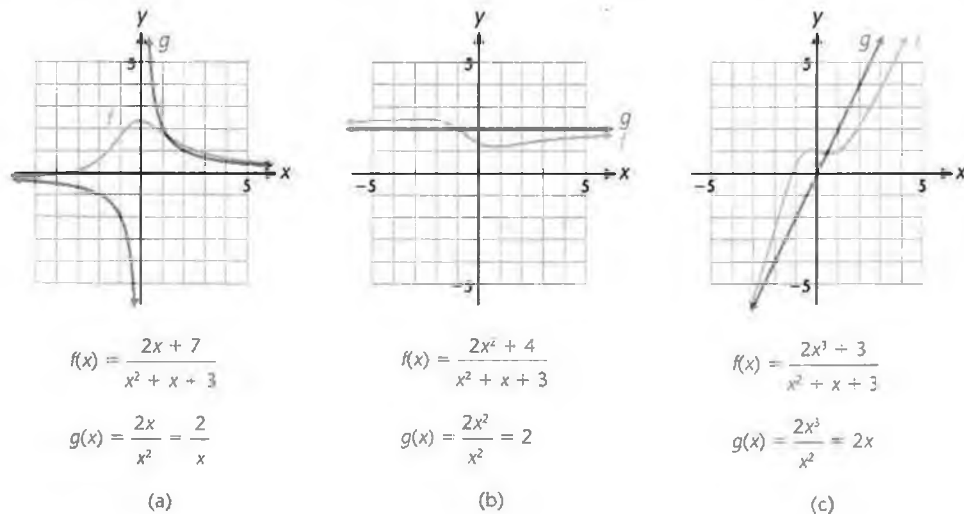
$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

conforme $x \to \pm\infty$ se determina por su término principal, $a_n x^n$. De manera similar, el comportamiento de una función racional se determina por la relación de los términos principales de su numerador y denominador; es decir, las gráficas de

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{a_m x^m}{b_n x^n}$$

exhiben el mismo comportamiento conforme $x \to \infty$ y conforme $x \to -\infty$ (véase figura 3).

FIGURA 3 Gráficas de funciones racionales conforme $x \to \pm\infty$.



En la figura 3(a), el grado del numerador es menor que el grado del denominador y el eje x es una asíntota horizontal. En la figura 3(b), el grado del numerador es igual al grado del denominador y la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal. En la figura 3(c), el grado del numerador es mayor que el grado del denominador y no hay asíntotas horizontales. Estas ideas se generalizan en el teorema 2 para proporcionar una forma simple para localizar asíntotas horizontales de cualquier función racional.

Teorema 2 **Asíntotas horizontales y funciones racionales**

Sea f una función racional definida por el cociente de los dos polinomios como sigue:

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. Para $m < n$, la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal.
2. Para $m = n$, la recta $y = a_m/b_n$ es una asíntota horizontal.
3. Para $m > n$, la gráfica aumentará o disminuirá sin límite, dependiendo de m, n, a_m y b_n, y no hay asíntotas horizontales.

EJEMPLO 2 **Determinación de asíntotas verticales y horizontales para una función racional**

Encuentre todas las asíntotas horizontales para

$$f(x) = \frac{n(x)}{d(x)} = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 9}$$

Solución Como $d(x) = x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, la gráfica de $f(x)$ tiene asíntotas verticales en $x = 3$ y $x = -3$ (teorema 1). Como $n(x)$ y $d(x)$ tienen el mismo grado, la recta

$$y = \boxed{\frac{a_2}{b_2}} = \frac{2}{1} = 2 \qquad a_2 = 2,\ b_2 = 1$$

es una asíntota horizontal (teorema 2, parte 2).

Problema seleccionado 2 Encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales para

$$f(x) = \frac{3x^2 - 12}{x^2 + 2x - 3}$$

Graficación de funciones racionales

Ahora se usarán las técnicas para localizar asíntotas, junto con otras ayudas de graficación analizadas en el texto, para graficar diversas funciones racionales. Primero, se esboza un procedimiento sistemático para el problema de graficación de funciones racionales:

Graficación de funciones racionales $f(x) = n(x)/d(x)$

Paso 1. *Intersecciones.* Encuentre las soluciones reales de la ecuación $n(x) = 0$ y úselas para trazar cualquier intersección con el eje x de la gráfica de f. Evalúe $f(0)$, si existe, y trace la intersección con el eje y.

Paso 2. *Asíntotas verticales.* Encuentre las soluciones reales de la ecuación $d(x) = 0$ y úselas para determinar el dominio de f, los puntos de discontinuidad y las asíntotas verticales. Trace cualquier asíntota vertical como líneas discontinuas.

Paso 3. *Cuadro de signos.* Construya un cuadro de signos para f y úselo para determinar el comportamiento de la gráfica cerca de cada asíntota vertical.

Paso 4. *Asíntotas horizontales.* Determine si existe una asíntota horizontal y si es así, trácela como una línea discontinua.

Paso 5. *Complete el trazo.* Complete el trazo de la gráfica dibujando puntos adicionales y uniéndolos con una curva continua y suave sobre cada intervalo en el dominio de f. No cruce ningún punto de discontinuidad.

EJEMPLO 3 **Graficación de funciones racionales**

Grafique: $y = f(x) = \dfrac{2x}{x - 3}$

Solución

$$f(x) = \frac{2x}{x-3} = \frac{n(x)}{d(x)}$$

Paso 1. *Intersecciones.* Encuentre las raices reales de $n(x) = 2x$ y encuentre $f(0)$:

$$2x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{Intersección con } x$$

$$f(0) = 0 \quad \text{Intersección con } y$$

La gráfica cruza el eje coordenado sólo en el origen. Dibuje esta intersección como se muestra en la figura 4.

FIGURA 4



Intersecciones y asíntotas

Paso 2. *Asíntotas verticales.* Encuentre las raíces reales de $d(x) = x - 3$:

$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

El dominio de f es $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, f es discontinua en $x = 3$ y la gráfica tiene una asíntota vertical en $x = 3$. Trace esta asíntota como se muestra en la figura 4.

Prueba núm.	-1	1	4
Valor de f	$\frac{1}{2}$	-1	8
Signo de f	$+$	$-$	$+$

Paso 3. *Cuadro de signos.* Construya un cuadro de signos para $f(x)$ (repase la sección 1-8), como se muestra en el margen. Como $x = 3$ es una asíntota vertical, y $f(x) < 0$ para $0 < x < 3$,

$$f(x) \to -\infty \qquad \text{conforme} \qquad x \to 3^-$$

Como $x = 3$ es una asíntota vertical y $f(x) > 0$ para $x > 3$,

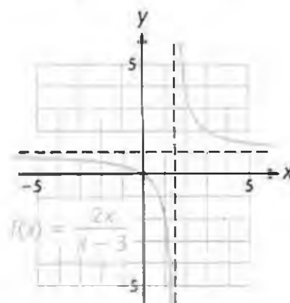
$$f(x) \to \infty \qquad \text{conforme} \qquad x \to 3^+$$

Note cuánta información está contenida en el cuadro de signos para f. El punto sólido determina la intersección con el eje x; el punto abierto determina el dominio, el punto de discontinuidad y la asíntota vertical; y los signos de $f(x)$ determinan el comportamiento de la gráfica en la asíntota vertical.

Paso 4. *Asíntota horizontal.* Como $n(x)$ y $d(x)$ tienen el mismo grado, la recta $y = 2$ es una asíntota horizontal. Trace esta asíntota como se muestra en la figura 4.

Paso 5. *Complete el trazo.* Dibujando algunos puntos adicionales, se obtiene la gráfica de la figura 5. Note que la gráfica es una curva continua suave en el intervalo $(-\infty, 3)$ y sobre el intervalo $(3, \infty)$. Como se esperaba, hay una separación en la gráfica en $x = 3$.

FIGURA 5

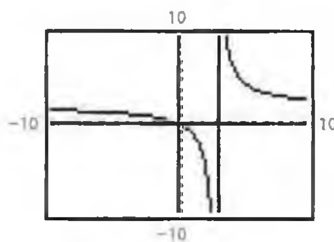


Conforme adquiera experiencia en la graficación, muchos de los pasos del ejemplo 3 se pueden hacer mentalmente (o en una hoja de papel) lo que acelera el proceso en forma considerable.

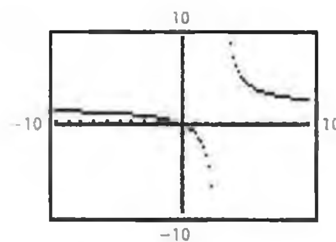
Problema seleccionado 3 Proceda como en el ejemplo 3 y grafique: $y = f(x) = \dfrac{3x}{x+2}$

Comentario: Refiérase al ejemplo 3. Cuando grafique $f(x) = 2x/(x - 3)$ con un dispositivo de graficación [figura 6(a)], parecerá que éste también dibuja la asíntota vertical, pero éste no es el caso. La mayoría de los dispositivos de graficación, cuando se seleccionan en el *modo conectado*, calculan los puntos en una gráfica y conectan esos puntos con segmentos de recta. El último punto dibujado a la izquierda de la asíntota y el primer punto dibujado a la derecha de la asíntota, con frecuencia tiene coordenadas muy grandes en el eje y. Si esas coordenadas en el eje y tienen signo opuesto, entonces el dispositivo de graficación puede unir los dos puntos con un segmento de recta casi vertical, que da la apariencia de una asíntota. Si lo desea, puede seleccionar su calculadora en *modo de puntos* para dibujar los puntos sin que se unan los segmentos de recta [(figura 6(b)].

FIGURA 6 Graficación mediante dispositivos de graficación de $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$.



(a) Modo conectado



(b) Modo de puntos

En los ejemplos restantes sólo se listarán los resultados de cada paso en la estrategia de graficación y se omitirán los detalles referentes a la computación.

EJEMPLO 4

Graficación de una función racional

Grafique: $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + x - 2}$

Solución

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-3)^2}{(x+2)(x-1)}$$

Prueba núm.	-3	0	2	4
Valor de f	9	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$
Signo de f	$+$	$-$	$+$	$+$



Intersección con el eje x: $x = 3$

Intersección con el eje y: $y = f(0) = -\frac{9}{2} = -4.5$

Dominio: $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$

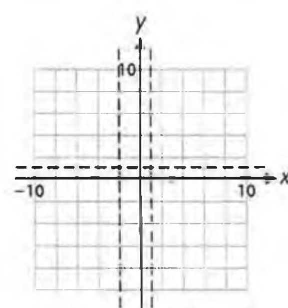
Puntos de discontinuidad: $x = -2$ y $x = 1$

Asíntotas verticales: $x = -2$ y $x = 1$

$$f(x) \to \infty \quad \text{conforme} \quad x \to -2^-$$
$$f(x) \to -\infty \quad \text{conforme} \quad x \to -2^+$$
$$f(x) \to -\infty \quad \text{conforme} \quad x \to 1^-$$
$$f(x) \to \infty \quad \text{conforme} \quad x \to 2^+$$

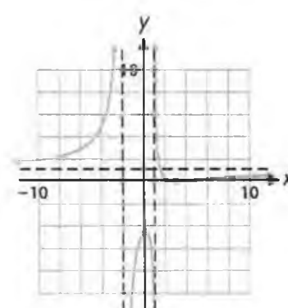
Asíntota horizontal: $y = 1$

Dibuje las intersecciones y asíntotas (figura 7), después trace la gráfica de f (figura 8).



Intersecciones y asíntotas

FIGURA 7



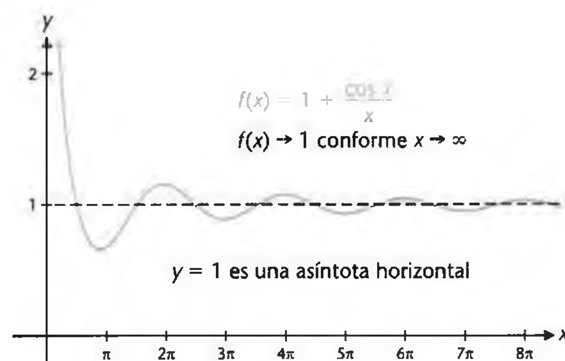
$f(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 9}{x^2 + x - 2}$

FIGURA 8

Problema seleccionado 4 Grafique: $y = f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 7x + 10}$

PRECAUCIÓN La gráfica de una función no puede cruzar una asíntota vertical, pero el mismo postulado no es verdadero para asíntotas horizontales. La gráfica en el ejemplo 4 muestra claramente que **la gráfica de una función puede cruzar una asíntota horizontal**. La definición de una asíntota horizontal requiere que $f(x)$ se aproxime a b conforme x aumente o disminuya sin límite, pero no excluye la posibilidad de que $f(x) = b$ para uno o más valores de x. De hecho, usando la función coseno de trigonometría, es posible construir una función cuya gráfica cruce una asíntota horizontal un número infinito de veces (véase la figura 9).

FIGURA 9 Intersecciones múltiples de una gráfica y una asíntota horizontal.



EJEMPLO 5 **Graficación de una función racional**

Grafique: $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$

Solución

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2} = \frac{(x + 1)(x - 4)}{x - 2}$$

Prueba núm.	−2	0	3	5
Valor de f	$-\frac{3}{2}$	2	−4	2
Signo de f	−	+	−	+



Intersecciones con el eje x: $x = -1$ y $x = 4$

Intersecciones con y: $y = f(0) = 2$

Dominio: $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$

Puntos de discontinuidad: $x = 2$

Asíntota vertical: $x = 2$

$f(x) \to \infty$ conforme $x \to 2^-$

$f(x) \to -\infty$ conforme $x \to 2^+$

No hay asíntota horizontal

Aunque la gráfica de f no tiene asíntota horizontal, todavía se puede obtener alguna información importante sobre el comportamiento de la gráfica conforme $x \to -\infty$ y conforme $x \to \infty$ si primero se realiza la división larga:

$$\begin{array}{r l}
 x - 1 & \text{Cociente} \\
x - 2\overline{)x^2 - 3x - 4} & \\
\underline{x^2 - 2x} & \\
-x - 4 & \\
\underline{-x + 2} & \\
-6 & \text{Residuo}
\end{array}$$

En consecuencia,

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2} = x - 1 - \frac{6}{x - 2}$$

Conforme $x \to -\infty$ o $x \to \infty$, $6/(x - 2) \to 0$ y la gráfica de f se aproxima a la recta $y = x - 1$. Esta recta se denomina **asíntota oblicua** de la gráfica de f. Las asíntotas e intersecciones están trazadas en la figura 10, y la gráfica de f está trazada en la figura 11.

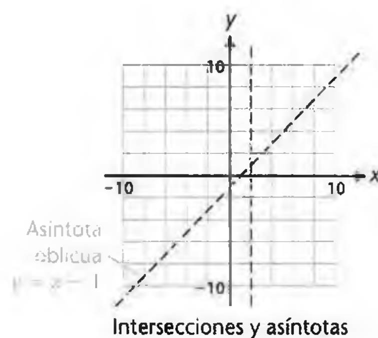


FIGURA 10

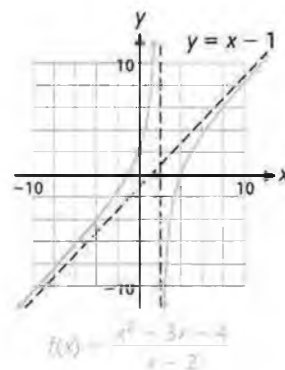


FIGURA 11

Generalizando los resultados del ejemplo 5, se obtiene el teorema 3.

Teorema 3 **Asíntotas oblicuas y funciones racionales**

Si $f(x) = n(x)/d(x)$, donde $n(x)$ y $d(x)$ son polinomios y el grado de $n(x)$ es 1 más que el grado de $d(x)$, entonces $f(x)$ se puede expresar en la forma

$$f(x) = mx + b + \frac{r(x)}{d(x)}$$

donde el grado de $r(x)$ es menor que el grado de $d(x)$. La recta

$$y = mx + b$$

es una asíntota oblicua para la gráfica de f. Esto es,

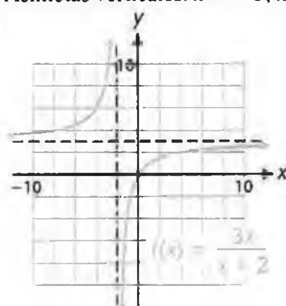
$$[f(x) - (mx + b)] \to 0 \qquad \text{conforme} \qquad x \to -\infty \qquad \text{o} \qquad x \to \infty$$

Problema seleccionado 5 Grafique, incluyendo cualquier asíntota oblicua: $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x + 1}$

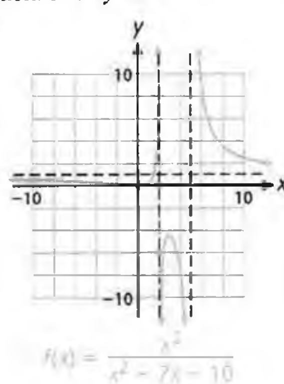
Respuestas a los problemas seleccionados

1. Dominio: $(-\infty, -3) \cup (-3, 1) \cup (1, \infty)$; intersecciones con el eje x: $x = -2, x = 2$
2. Asíntotas verticales: $x = -3$, $x = 1$; asíntota horizontal: $y = 3$

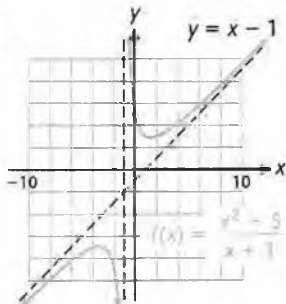
3.



4.



5.



EJERCICIO 3-4

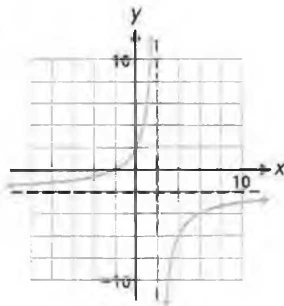
A

En los problemas del 1 al 4, relacione cada gráfica con una de las funciones siguientes:

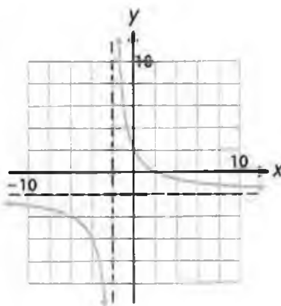
$$f(x) = \frac{2x - 4}{x + 2} \qquad g(x) = \frac{2x + 4}{2 - x}$$

$$h(x) = \frac{2x + 4}{x - 2} \qquad k(x) = \frac{4 - 2x}{x + 2}$$

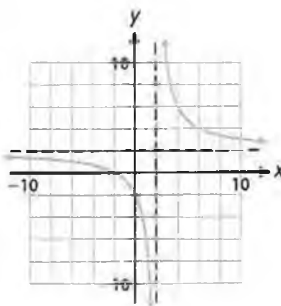
1.



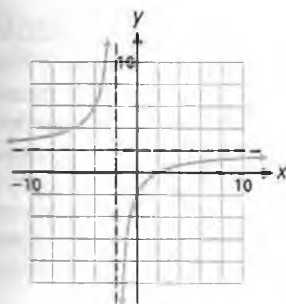
2.



3.



4.



En los problemas del 5 al 12, encuentre el dominio e intersecciones en x. No grafique.

5. $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x + 1}$

6. $g(x) = \dfrac{3x + 6}{x - 1}$

7. $h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 16}$

8. $k(x) = \dfrac{x^2 - 36}{x^2 - 25}$

9. $r(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - x - 12}$

10. $s(x) = \dfrac{x^2 + x - 12}{x^2 + x - 6}$

11. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}$

12. $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 16}$

En los problemas del 13 al 20, encuentre todas las asíntotas verticales y horizontales. No grafique.

13. $f(x) = \dfrac{2x}{x - 4}$

14. $h(x) = \dfrac{3x}{x + 5}$

15. $s(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{3x^2 - 48}$

16. $r(x) = \dfrac{5x^2 - 7x}{2x^2 - 50}$

17. $p(x) = \dfrac{2x}{x^4 + 1}$

18. $q(x) = \dfrac{5x^4}{2x^2 + 3x - 2}$

19. $t(x) = \dfrac{6x^4}{3x^2 - 2x - 5}$

20. $g(x) = \dfrac{3x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

B

En los problemas del 21 al 40, use la estrategia de graficación esbozada en el texto para trazar la gráfica de cada función.

Compruebe los problemas del 21 al 40 en un dispositivo de graficación.

21. $f(x) = \dfrac{1}{x - 4}$

22. $g(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

23. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

24. $f(x) = \dfrac{3x}{x - 3}$

25. $h(x) = \dfrac{x}{2x - 2}$

26. $p(x) = \dfrac{3x}{4x + 4}$

27. $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x + 3}$

28. $f(x) = \dfrac{3x + 3}{2 - x}$

29. $g(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$

30. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

31. $f(x) = \dfrac{9}{x^2 - 9}$

32. $g(x) = \dfrac{6}{x^2 - x - 6}$

33. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

34. $p(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$

35. $g(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$

36. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

37. $f(x) = \dfrac{12x^2}{(3x + 5)^2}$

38. $f(x) = \dfrac{7x^2}{(2x - 3)^2}$

39. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 7x + 10}$

40. $f(x) = \dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^2 - x - 2}$

41. Si $f(x) = n(x)/d(x)$, donde $n(x)$ y $d(x)$ son funciones cuadráticas, ¿cuál es el máximo número de intersecciones con x que puede tener $f(x)$? ¿Cuál es el número mínimo? Ilustre ambos casos con ejemplos.

42. Si $f(x) = n(x)/d(x)$, donde $n(x)$ y $d(x)$ son funciones cuadráticas, ¿cuál es el máximo número de asíntotas verticales que puede tener $f(x)$? ¿Cuál es el número mínimo? Ilustre ambos casos con ejemplos.

En los problemas del 43 al 48, encuentre todas las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas. No grafique.

43. $f(x) = \dfrac{2x^2}{x - 1}$

44. $g(x) = \dfrac{3x^2}{x + 2}$

45. $p(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$

46. $q(x) = \dfrac{x^5}{x^3 - 8}$

47. $r(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x}$

48. $s(x) = \dfrac{-3x^2 + 5x + 9}{x}$

En los problemas del 49 al 52, use un dispositivo de graficación para investigar el comportamiento de cada función conforme $x \to \infty$ y conforme $x \to -\infty$, y encuentre cualquier asíntota horizontal.

49. $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

50. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

51. $f(x) = \dfrac{4\sqrt{x^2 - 4}}{x}$

52. $f(x) = \dfrac{3\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$

C

En los problemas del 53 al 58, use la estrategia de graficación esbozada en el texto para trazar la gráfica de cada función. Incluya cualquier asíntota oblicua.

Compruebe los problemas del 53 al 58 con un dispositivo de graficación.

53. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

54. $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

55. $k(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{2x - 4}$

56. $h(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{2x - 4}$

57. $F(x) = \dfrac{8 - x^3}{4x^2}$

58. $G(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^3}$

Si $f(x) = n(x)/d(x)$, donde él grado de $n(x)$ es mayor que el grado de $d(x)$, se puede usar entonces la división larga para escribir $f(x) = p(x) + q(x)/d(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios con grado $q(x)$ menor que el grado de $d(x)$. En los problemas del 59 al 62, realice la división larga y analice la relación entre las gráficas de $f(x)$ y $p(x)$ conforme $x \to \infty$ y conforme $x \to -\infty$.

59. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2 + 1}$

60. $f(x) = \dfrac{x^5}{x^2 + 1}$

61. $f(x) = \dfrac{x^5}{x^2 - 1}$

62. $f(x) = \dfrac{x^5}{x^3 - 1}$

En cálculo, a menudo es necesario considerar funciones racionales que no están totalmente simplificadas, tales como las funciones dadas en los problemas del 63 al 66. Para cada función establezca el dominio, simplifique la función a los términos inferiores y trace su gráfica. Recuerde excluir de la gráfica cualquier punto con valores en x que no estén en el dominio.

63. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

64. $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

65. $r(x) = \dfrac{x + 2}{x^2 - 4}$

66. $s(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$

APLICACIONES

67. **Capacitación laboral.** Una compañía produce componentes electrónicos para televisores. Según sus registros un nuevo empleado puede ensamblar en promedio $N(t)$ componentes por día, después de t días de capacitación, como está dada por

$$N(t) = \frac{50t}{t + 4} \qquad t \geq 0$$

Trace la gráfica de N, incluyendo cualquier asíntota vertical u horizontal. ¿A qué valor tiende N conforme $t \to \infty$?

68. **Psicología.** En un estudio sobre la rapidez de la contracción muscular en ranas sometidas a diferentes descargas eléctricas, los investigadores W. O. Fems y J. Marsh encontraron que la velocidad de contracción disminuye con el aumento en las cargas. De forma más precisa, encontraron que la relación entre la velocidad de contracción S (en centímetros por segundo) y la descarga w (en gramos) está dada de manera aproximada por

$$S(w) = \frac{26 + 0.06w}{w} \qquad w \geq 5$$

Trace la gráfica de S, incluyendo cualquier asíntota vertical u horizontal. ¿A qué valor tiende S conforme $w \to \infty$?

69. **Retención.** En una clase de psicología se realizó un experimento sobre capacidad de retención. Durante 20 días se le pidió a cada estudiante memorizar una lista diferente cada día de 40 caracteres especiales. Al terminar el día debían regresar la lista, y anotar en cada día sucesivo del periodo que duró la prueba una lista con tantos símbolos como pudieran recordar. Al final se sacaron promedios y se encontró que una buena aproximación del promedio del número de símbolos, $N(t)$, retenidos después de t días está dado por

$$N(t) = \frac{5t + 30}{t} \qquad t \geq 1$$

Trace la gráfica de N, incluyendo cualquier asíntota vertical u horizontal. ¿A qué valor tiende N conforme $t \to \infty$?

70. **Teoría del aprendizaje.** En 1917, L. L. Thurstone, un pionero en la teoría del aprendizaje cuantitativo, propuso la función

$$f(x) = \frac{a(x + c)}{(x + c) + b}$$

para describir el número de tareas exitosas por unidad de tiempo que una persona puede terminar después de x sesiones de práctica. Suponga que para una persona en particular inscrita en una clase de mecanografía,

$$f(x) = \frac{50(x + 1)}{x + 5} \qquad x \geq 0$$

donde $f(x)$ es el número de palabras por minuto que la persona puede teclear después de x semanas de lecciones. Trace la gráfica de f, incluyendo cualquier asíntota horizontal o vertical. ¿A qué valor tiende f conforme $x \to \infty$?

Usando las técnicas de cálculo, se puede demostrar que el valor mínimo de una función de la forma

$$g(x) = ax + b + \frac{c}{x} \qquad a > 0, c > 0, x > 0$$

es min $g(x) = (g\sqrt{c/a})$. Use este hecho en los problemas del 71 al 74.

* 71. **Tiempo de reemplazo.** Una fotocopiadora tiene un precio inicial de \$2 500. Un contrato por servicio y mantenimiento cuesta \$200 el primer año y aumenta \$50 por cada año subsecuente. Se puede demostrar que el costo total de la fotocopiadora después de n años está dado por

$$C(n) = 2\,500 + 175n + 25n^2$$

El costo promedio por año para n años es $\overline{C}(n) = C(n)/n$.

(A) Encuentre la función racional $\overline{C}$.

(B) ¿Cuándo es mínimo el costo promedio por año? (Esto con frecuencia se denomina tiempo de reemplazo para este equipo.)

(C) Trace la gráfica $\overline{C}$, incluyendo cualquier asíntota.

• **72. Costo promedio.** El costo total de producción de x unidades de cierto producto está dado por

$$C(x) = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 2\,000$$

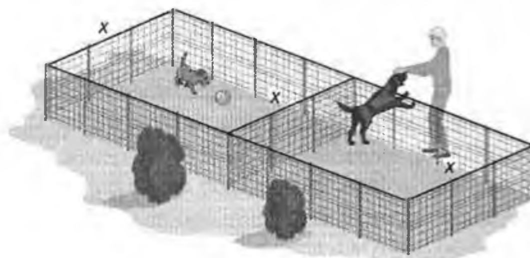
El costo promedio por unidad para producir x unidades es $\overline{C}(x) = C(x)/x$.

(A) Encuentre la función racional $\overline{C}$.
(B) ¿A qué nivel de producción el costo promedio por unidad será mínimo?
(C) Dibuje la gráfica de $\overline{C}$, incluyendo cualquier asíntota.

• **73. Construcción.** Se va a construir una perrera rectangular que delimitará un área de 225 pies cuadrados.

(A) Si x representa el ancho de la perrera, exprese la longitud total $L(x)$ del material de cerca necesario para la perrera en términos de x.
(B) Considerando las limitaciones físicas, ¿cuál es el dominio de la función L?
(C) Encuentre las dimensiones de la perrera para la que necesitará la mínima cantidad de material de cerca.
(D) Grafique la función L, incluyendo cualquier asíntota.

* **74. Construcción.** Vuelva a trabajar en el problema 73, pero ahora suponiendo que la perrera se va a dividir en dos secciones, como se muestra en la figura.



SECCIÓN 3-5 Fracciones parciales

- Teoremas básicos
- Descomposición de fracciones parciales

Ahora ya tiene considerable experiencia en combinar dos o más expresiones racionales en una sola expresión racional. Por ejemplo, problemas como

$$\frac{2}{x+5} + \frac{3}{x-4} = \frac{2(x-4) + 3(x+5)}{(x+5)(x-4)} = \frac{5x+7}{(x+5)(x-4)}$$

deben parecer de rutina. Es frecuente que en cursos más avanzados, en particular en el cálculo, sea conveniente poder invertir este proceso; es decir, ser capaz de expresar una expresión racional como la suma de dos o más expresiones racionales más simples denominadas **fracciones parciales**. Como ocurre a menudo en el caso de procesos inversos, el de descomposición de una expresión racional en fracciones parciales es más difícil que combinar expresiones racionales. Lo básico en el proceso es la factorización de polinomios, de manera que los temas antes analizados en este capítulo se puedan usar de manera efectiva.

Enfoquemos nuestra atención hacia expresiones racionales de la forma $P(x)/D(x)$, donde $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios con coeficientes reales. Además, se supone que el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $D(x)$. Si el grado de $P(x)$ es mayor que o igual al de $D(x)$, sólo se tiene que dividir $P(x)$ entre $D(x)$ para obtener

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

donde el grado de $R(x)$ es menor que el de $D(x)$. Por ejemplo,

$$\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x + 1} = x^2 - x - 1 + \frac{-6x + 2}{x^2 - 2x + 1}$$

Si el grado de $P(x)$ es menor que el de $D(x)$, entonces $P(x)/D(x)$ se denomina **fracción propia**.

• Teoremas básicos

Nuestra tarea ahora es establecer una forma sistemática para descomponer una fracción propia en la suma de dos o más fracciones parciales. Los tres teoremas siguientes toman en cuenta el problema de forma completa. Los teoremas 1 y 3 se establecen sin prueba.

Teorema 1 Polinomios iguales

Dos polinomios son iguales si y sólo si los coeficientes de los términos de grado semejante son iguales.

Por ejemplo, si

Iguale los términos constantes.

$$(A + -B)x + B = 5x - 3$$

Iguale los coeficientes de x.

entonces

$$B = -3 \quad \text{Sustituya } B = -3 \text{ en la segunda ecuación para despejar } A.$$

$$A + 2B = 5$$

$$A + 2(-3) = 5$$

$$A = 11$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Si

$$x + 5 = A(x + 1) + B(x - 3) \qquad (1)$$

es una identidad polinomial (es decir, ambos lados representan el mismo polinomio), entonces, igualando los coeficientes se produce el sistema

$$1 = A + B \qquad \text{Igualando coeficientes de } x$$

$$5 = A - 3B \qquad \text{Igualando términos constantes}$$

(A) Resuelva este sistema (véase la sección 1-2).
(B) Para un método de solución alterno, sustituya $x = 3$ en (1) para encontrar A y después sustituya $x = -1$ en (1) para encontrar B. Explique por qué es válido el método B.

Teorema 2

Teorema de factores lineales y cuadráticos

Para un polinomio con coeficientes reales, siempre existe una factorización completa que sólo involucra factores lineales y/o cuadráticos con coeficientes reales, donde los factores lineales y cuadráticos son primos relativos de los números reales.

Que el teorema 2 es verdadero puede verse como sigue: De los teoremas anteriores en este capítulo, se sabe que un polinomio de n ésimo grado $P(x)$ tiene n raíces y n factores lineales. Las raíces reales de $P(x)$ corresponden a factores lineales de la forma $(x - r)$, donde r es un número real. Como $P(x)$ tiene coeficientes reales, las raíces imaginarias ocurren en pares conjugados. Así, las raíces imaginarias corresponden a pares de factores de la forma $[x - (a + bi)]$ y $[x - (a - bi)]$, donde a y b son números reales. Multiplicando esos dos factores imaginarios, se tiene

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

Este polinomio cuadrático con coeficientes reales es un factor de $P(x)$. Así, $P(x)$ se puede factorizar en un producto de factores lineales y factores cuadráticos, todos con coeficientes reales.

• Descomposición de fracciones parciales

Ahora se está listo para establecer el teorema 3, que forma la base para la descomposición de las fracciones parciales.

Teorema 3

Descomposición de fracciones parciales

Cualquier fracción propia $P(x)/D(x)$ totalmente simplificada, se puede descomponer en la suma de fracciones parciales como sigue:

1. Si $D(x)$ tiene un factor lineal no repetido de la forma $ax + b$, entonces la descomposición de la fracción parcial de $P(x)/D(x)$ contiene un término de la forma

$$\frac{A}{ax + b} \qquad A \text{ es una constante}$$

2. Si $D(x)$ tiene un factor lineal k que se repite, de la forma $(ax + b)^k$, entonces la descomposición de la fracción parcial de $P(x)/D(x)$ contiene k términos de la forma

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax + b)^k} \qquad A_1, A_2, \ldots, A_k \text{ constantes}$$

3. Si $D(x)$ tiene un factor cuadrático no repetido de la forma $ax^2 + bx + c$, que es primo relativo de los números reales, entonces la descomposición de la fracción parcial de $P(x)/D(x)$ contiene un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} \quad A, B \text{ constantes}$$

4. Si $D(x)$ tiene un factor cuadrático k, repetido, de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $ax^2 + bx + c$ es primo relativo de los números reales, entonces la descomposición de la fracción parcial de $P(x)/D(x)$ contiene k términos de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

$$A_1,\ldots,A_k, \quad B_1,\ldots,B_k \quad \text{constantes}$$

Veamos cómo se usa el teorema para obtener las descomposiciones de las fracciones parciales en varios ejemplos.

EJEMPLO 1 **Factores lineales que no se repiten**

Descomponga en fracciones parciales: $\dfrac{5x + 7}{x^2 + 2x - 3}$

Solución Intente primero factorizar el denominador. Si no es posible hacerlo en los números reales, entonces no se puede continuar. En este ejemplo, resultan ser los factores del denominador, de manera que se aplica la parte 1 del teorema 3:

$$\frac{5x + 7}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3} \qquad (2)$$

Para encontrar las constantes A y B, se combinan las fracciones en el lado derecho de la ecuación (2) para obtener

$$\frac{5x + 7}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A(x + 3) + B(x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}$$

Como estas fracciones tienen el mismo denominador, sus numeradores deber ser iguales. En consecuencia,

$$5x + 7 = A(x + 3) + B(x - 1) \qquad (3)$$

Se podría multiplicar el lado derecho y encontrar A y B mediante el teorema 1, pero en este caso es más fácil tomar ventaja del hecho que la ecuación (3) es una identidad; es decir, se debe cumplir para todos los valores de x. En particular, se observa que si se hace $x = 1$, entonces el segundo término de la derecha se elimina y se puede despejar A:

$$5 \cdot 1 + 7 = A(1 + 3) + B(1 - 1)$$
$$12 = 4A$$
$$A = 3$$

De manera similar, si se hace $x = -3$, entonces el primer término se elimina y se encuentra que

$$-8 = -4B$$
$$B = 2$$

Por lo tanto,

$$\frac{5x + 7}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{x - 1} + \frac{2}{x + 3} \qquad (4)$$

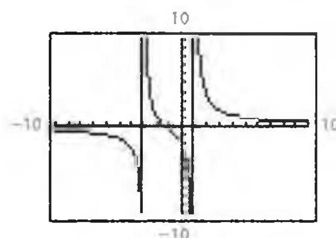
que se puede comprobar fácilmente sumando las dos fracciones de la derecha.

Problema seleccionado 1 Descomponga en fracciones parciales: $\dfrac{7x + 6}{x^2 + x - 6}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Se puede también usar un dispositivo de graficación para comprobar la descomposición de una fracción parcial. Para comprobar el ejemplo 1, se grafican los lados izquierdo y derecho de la ecuación (4) con un dispositivo de graficación (figura 1). Analice cómo se puede usar la característica de trazo con un dispositivo de graficación para comprobar que el dispositivo está desplegando dos gráficas idénticas.

FIGURA 1

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■(5X+7)/(X²+2
X-3)
\Y2■3/(X-1)+2/(X
+3)
\Y3=
\Y4=
\Y5=
```



EJEMPLO 2 **Factores lineales que se repiten**

Descomponga en fracciones parciales: $\dfrac{6x^2 - 14x - 27}{(x + 2)(x - 3)^2}$

Solución Usando las partes 1 y 2 del teorema 3, se escribe

$$\frac{6x^2 - 14x - 27}{(x + 2)(x - 3)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2}$$
$$= \frac{A(x - 3)^2 + B(x + 2)(x - 3) + C(x + 2)}{(x + 2)(x - 3)^2}$$

De manera que, para toda x,

$$6x^2 - 14x - 27 = A(x - 3)^2 + B(x + 2)(x - 3) + C(x + 2)$$

Si $x = 3$, entonces

$$-15 = 5C$$
$$C = -3$$

Si $x = -2$, entonces

$$25 = 25A$$
$$A = 1$$

No hay otros valores de x con los que se pueda eliminar los términos de la derecha. Como cualquier valor de x se puede sustituir para producir una ecuación que relacione A, B y C, x se iguala 0 y se obtiene

$$-27 = 9A - 6B + 2C \quad \text{Sustituya } A = 1 \text{ y } C = -3.$$
$$-27 = 9 - 6B - 6$$
$$B = 5$$

De manera que,

$$\frac{6x^2 - 14x - 27}{(x + 2)(x - 3)^2} = \frac{1}{x + 2} + \frac{5}{x - 3} - \frac{3}{(x - 3)^2}$$

Problema seleccionado 2 Descomponga en fracciones parciales: $\dfrac{x^2 + 11x + 15}{(x - 1)(x + 2)^2}$

EJEMPLO 3 **Factores lineales y cuadráticos que no se repiten**

Descomponga en fracciones parciales: $\dfrac{5x^2 - 8x + 5}{(x - 2)(x^2 - x + 1)}$

Solución Primero, se observa que la cuadrática en el denominador ya no puede factorizarse en los números reales. Entonces, se usan las partes 1 y 3 del teorema 3 para escribir

$$\frac{5x^2 - 8x + 5}{(x - 2)(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}$$
$$= \frac{A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x - 2)}{(x - 2)(x^2 - x + 1)}$$

Así, para toda x,

$$5x^2 - 8x + 5 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x - 2)$$

Si $x = 2$, entonces

$$9 = 3A$$
$$A = 3$$

Si $x = 0$, entonces, usando $A = 3$, se tiene

$$5 = 3 - 2C$$
$$C = -1$$

Si $x = 1$, entonces, usando $A = 3$ y $C = -1$, se tiene

$$2 = 3 + (B - 1)(-1)$$
$$B = 2$$

Por lo tanto,

$$\frac{5x^2 - 8x + 5}{(x - 2)(x^2 - x + 1)} = \frac{3}{x - 2} + \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$$

Problema seleccionado 3 Descomponga en fracciones parciales: $\dfrac{7x^2 - 11x + 6}{(x - 1)(2x^2 - 3x + 2)}$

EJEMPLO 4 **Factores cuadráticos que se repiten**

Descomponga en fracciones parciales: $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{(x^2 - 2x + 3)^2}$

Solución Como $x^2 - 2x + 3$ ya no puede factorizarse en los números reales, se procede a usar la parte 4 del teorema 3 para escribir

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 2x + 3} + \frac{Cx + D}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$
$$= \frac{(Ax + B)(x^2 - 2x + 3) + Cx + D}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

Así, para toda x,

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 5 = (Ax + B)(x^2 - 2x + 3) + Cx + D$$

Como la sustitución cuidadosa de los valores seleccionados de x no nos lleva a la inmediata determinación de A, B, C o D, se multiplica y se reordena el lado derecho para obtener

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 5 = Ax^3 + (B - 2A)x^2 + (3A - 2B + C)x + (3B + D)$$

Ahora se usa el teorema 1 para igualar coeficientes de los términos de grado semejante:

$$A = 1$$
$$B - 2A = -4$$
$$3A - 2B + C = 9$$
$$3B + D = -5$$

$1x^3 \quad -4x^2 \quad -9x \quad -5$

$Ax^3 + (B - 2A)x^2 + (3A - 2B + C)x + (3B + D)$

En estas ecuaciones se encuentra fácilmente que $A = 1, B = -2, C = 2$ y $D = 1$. Ahora se puede escribir

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 9x - 5}{(x^2 - 2x + 3)^2} = \frac{x - 2}{x^2 - 2x + 3} + \frac{2x + 1}{(x^2 - 2x + 3)^2}$$

Problema seleccionado 4 Descomponga en fracciones parciales: $\frac{3x^3 - 6x^2 + 7x - 2}{(x^2 - 2x + 2)^2}$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $\frac{4}{x-2} + \frac{3}{x+3}$ 2. $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ 3. $\frac{2}{x-1} + \frac{3x-2}{2x^2-3x+2}$
4. $\frac{3x}{x^2-2x+2} + \frac{x-2}{(x^2-2x+2)^2}$

EJERCICIO 3-5

A

En los problemas del 1 al 10, encuentre las constantes A, B, C y D de manera que el lado derecho sea igual al izquierdo.

1. $\frac{7x - 14}{(x-4)(x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3}$
2. $\frac{9x + 21}{(x+5)(x-3)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-3}$
3. $\frac{17x - 1}{(2x-3)(3x-1)} = \frac{A}{2x-3} + \frac{B}{3x-1}$
4. $\frac{x - 11}{(3x+2)(2x-1)} = \frac{A}{3x+2} + \frac{B}{2x-1}$
5. $\frac{3x^2 + 7x + 1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$
6. $\frac{x^2 - 6x + 11}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$
7. $\frac{3x^2 + x}{(x-2)(x^2+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+3}$
8. $\frac{5x^2 - 9x + 19}{(x-4)(x^2+5)} = \frac{A}{x-4} + \frac{Bx + C}{x^2+5}$
9. $\frac{2x^2 + 4x - 1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2+x+1} + \frac{Cx + D}{(x^2+x+1)^2}$
10. $\frac{3x^3 - 3x^2 + 10x - 4}{(x^2-x+3)^2} = \frac{Ax + B}{x^2-x+3} + \frac{Cx + D}{(x^2-x+3)^2}$

B

En los problemas del 11 al 22, descomponga en fracciones parciales.

11. $\frac{-x + 22}{x^2 - 2x - 8}$
12. $\frac{-x - 21}{x^2 + 2x - 15}$
13. $\frac{3x - 13}{6x^2 - x - 12}$
14. $\frac{11x - 11}{6x^2 + 7x - 3}$
15. $\frac{x^2 - 12x + 18}{x^3 - 6x^2 + 9x}$
16. $\frac{5x^2 - 36x + 48}{x(x-4)^2}$
17. $\frac{5x^2 + 3x + 6}{x^3 + 2x^2 + 3x}$
18. $\frac{6x^2 - 15x + 16}{x^3 - 3x^2 + 4x}$
19. $\frac{2x^3 + 7x + 5}{x^4 + 4x^2 + 4}$
20. $\frac{-5x^2 + 7x - 18}{x^4 + 6x^2 + 9}$
21. $\frac{x^3 - 7x^2 + 17x - 17}{x^2 - 5x + 6}$
22. $\frac{x^3 + x^2 - 13x + 11}{x^2 + 2x - 15}$

C

En los problemas del 23 al 30, descomponga en fracciones parciales.

23. $\frac{4x^2 + 5x - 9}{x^3 - 6x - 9}$
24. $\frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6}$
25. $\frac{x^2 + 16x + 18}{x^3 + 2x^2 - 15x - 36}$
26. $\frac{5x^2 - 18x + 1}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

27. $\dfrac{-x^2 + x - 7}{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 8x + 4}$

28. $\dfrac{-2x^3 + 12x^2 - 20x - 10}{x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 21x + 18}$

29. $\dfrac{4x^5 + 12x^4 - x^3 + 7x^2 - 4x + 2}{4x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 5x - 2}$

30. $\dfrac{6x^5 - 13x^4 + x^3 - 8x^2 + 2x}{6x^4 - 7x^3 + x^2 + x - 1}$

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 3 Interpolación de polinomios

Dados dos puntos en el plano, se puede usar la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta para encontrar un polinomio cuya gráfica pase por esos dos puntos. ¿Cómo se puede proceder si se dan más de dos puntos? Por ejemplo, ¿cómo se puede encontrar la ecuación de un polinomio $P(x)$ cuya gráfica, ilustrada en la figura 1, pase por los puntos indicados en la tabla 1 y graficados en la figura 1?

TABLA 1

x	1	2	3	4
$P(x)$	1	3	−3	1

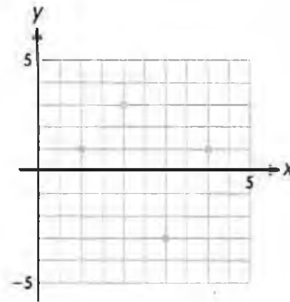


FIGURA 1

La clave para resolver este problema es escribir el polinomio desconocido $P(x)$ en la forma especial siguiente:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)(x - 2) + a_3(x - 1)(x - 2)(x - 3) \qquad (1)$$

Como la gráfica de $P(x)$ va a pasar por cada punto de la tabla 1, se puede sustituir cada valor de x en (1) para determinar los coeficientes a_0, a_1, a_2 y a_3. Primero se evalúa (1) en $x = 1$ para determinar a_0:

$$\begin{aligned} 1 &= P(1) \\ &= a_0 \qquad \text{Todos los otros términos en (1) son 0 cuando } x = 1. \end{aligned}$$

Usando este valor para a_0 en (1) y evaluando en $x = 2$, se tiene

$$\begin{aligned} 3 &= P(2) = 1 + a_1(1) \qquad \text{Todos los otros términos son 0.} \\ 2 &= a_1 \end{aligned}$$

Continuando de esta manera, se tiene

$$\begin{aligned} -3 &= P(3) = 1 + 2(2) + a_2(2)(1) \\ -8 &= 2a_2 \\ -4 &= a_2 \end{aligned}$$

$$1 = P(4) = 1 + 2(3) - 4(3)(2) + a_3(3)(2)(1)$$
$$18 = 6a_3$$
$$3 = a_3$$

Se tiene ahora evaluados todos los coeficientes en (1) y se puede escribir

$$P(x) = 1 + 2(x - 1) - 4(x - 1)(x - 2) + 3(x - 1)(x - 2)(x - 3) \quad (2)$$

Si se desarrollan los productos en (2) y se agrupan los términos semejantes, se puede expresar $P(x)$ en la forma más convencional (verifique esto)

$$P(x) = 3x^3 - 22x^2 + 47x - 27$$

(A) Para comprobar estos cálculos, evalúe $P(x)$ en $x = 1, 2, 3$ y 4 y compare los resultados con la tabla 1. Después agregue la gráfica de $P(x)$ a la figura 1.
(B) Escriba una descripción de la forma especial de $P(x)$ en (1).

En general, dado un conjunto de $n + 1$ puntos:

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

el **polinomio de interpolación** para estos puntos es el polinomio $P(x)$ de grado menor que o igual a n que satisfaga $P(x_k) = y_k$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. La **forma general** del polinomio de interpolación es

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \cdots\cdots (x - x_{n-1})$$

(C) Resuma el procedimiento para usar los puntos en la tabla y encuentre los coeficientes en la forma general.
(D) Dé un ejemplo para demostrar que el polinomio de interpolación puede tener estrictamente un grado menor que n.
(E) ¿Podrían ser diferentes dos polinomios de grado menor que o igual a n cuya gráfica pase por los $n + 1$ puntos dados? Justifique su respuesta.
(F) Encuentre el polinomio de interpolación para las tablas 2 y 3. Compruebe sus respuestas evaluando el polinomio, e ilústrelas graficando los puntos en la tabla y el polinomio en los mismos ejes.

TABLA 2

x	−1	0	1	2
y	5	3	3	11

TABLA 3

x	−2	−1	0	1	2
y	−3	0	5	0	−3

Se puede usar un sorprendente programa corto en un dispositivo de graficación para calcular los coeficientes en la forma general de un polinomio de interpolación. La tabla 4 muestra este programa realizado en una calculadora gráfica Texas Instruments y los resultados generados cuando se utiliza para encontrar los coeficientes del polinomio de interpolación para la tabla 1.

TABLA 4 Interpolación de los coeficientes de un polinomio en un dispositivo de graficación

Programa INTERP	Resultados
L2→L3 dimL L3→M For (I,2,M,1) For(J,M,I,−1) (L3(J)−L3(J−1))/(L1(J)−L1(J-I+1))→L3(J) End End Disp L3	{1,2,3,4}→L1 {1 2 3 4} {1,3,-3,1}→L2 {1 3 -3 1} INTERP {1 2 -4 3} Done

(G) Si usted tiene una calculadora gráfica TI-85 o TI-86, teclee el programa INTERP en su calculadora exactamente como se muestra en la tabla 4. Para usar este programa, introduzca los valores de x en L1 y los valores correspondientes y en L2 (véase los resultados en la tabla 4) y después corra el programa. Si cuenta con otro dispositivo de graficación que pueda guardar y correr programas, consulte su manual y modifique las instrucciones en el programa INTERP, de manera que el programa funcione en su dispositivo de graficación. Use INTERP para comprobar sus respuestas del inciso (F).

Repaso del capítulo 3

En este capítulo, a menos que se indique otra cosa, los coeficientes de la **función polinomial de *n* ésimo grado** $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ son números complejos y el dominio es el conjunto de números complejos. Se dice que el número r es una **raíz de la función *P*,** o **una raíz del polinomio *P*(*x*),** o **una solución o raíz de la ecuación $P(x) = 0$,** si $P(r) = 0$. Si los coeficientes de $P(x)$ son números reales, entonces las intersecciones con el eje x de la gráfica de $y = P(x)$ son **raíces** reales de P y $P(x)$ y **soluciones** o **raíces reales** para la ecuación $P(x) = 0$.

3-1 FUNCIONES POLINOMIALES Y GRÁFICAS

La división sintética es un método eficiente para dividir polinomios entre términos lineales de la forma $x - r$ que es muy adecuada para usarse en calculadora.

Sea $P(x)$ un polinomio de grado mayor que 0 y sea r un número real. Entonces se tienen los siguientes teoremas importantes:

Algoritmo de división. $P(x) = (x - r)Q(x) + R$, donde $x - r$ es el divisor; $Q(x)$, un polinomio único de grado 1 menor que $P(x)$, es el **cociente**; y R, un único número real, es el **residuo**.

Teorema del residuo. $P(r) = R$.

El comportamiento del lado izquierdo y derecho de un polinomio de n ésimo grado $P(x)$ con coeficientes reales se determina por su grado más grande o **término principal**. Conforme $x \to \pm\infty$, a_nx^n y $P(x)$ tienden a $\pm\infty$, dependiendo de n y del signo de a_n. Un **punto de retorno** en una gráfica continua es un punto que separa una parte creciente de una decreciente. Las propiedades importantes de las gráficas son:

1. P es continua para todos los números reales.
2. La gráfica de P es una curva suave.
3. La gráfica de P tiene a lo más n intersecciones con el eje x.
4. P tiene a lo más $n - 1$ puntos de retorno.

3-2 DETERMINACIÓN DE RAÍCES RACIONALES DE POLINOMIOS

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n > 0$, entonces se tienen los siguientes teoremas importantes:

Teorema de factorización. El número r es una raíz de $P(x)$ si y sólo si $(x - r)$ es un factor de $P(x)$.

Teorema fundamental del álgebra. $P(x)$ tiene al menos una raíz.

Teorema de *n* raíces. $P(x)$ se puede expresar como un producto de n factores lineales y tiene n raíces, no necesariamente diferentes.

Si $P(x)$ se representa como el producto de factores lineales y $x - r$ ocurre m veces, entonces r se denomina **raíz de multiplicidad *m*.**

Teorema de las raíces imaginarias. Si $P(x)$ tiene coeficientes reales, entonces las raíces imaginarias de $P(x)$, si existen, deben ocurrir en pares conjugados.

Raíces reales y polinomios de grado impar. Si $P(x)$ tiene coeficientes reales y es de grado impar, entonces $P(x)$ siempre tiene al menos una raíz real.

Teorema de raíces racionales. Si el número racional b/c, totalmente simplificado, es una raíz del polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

$a_n \neq 0$ con coeficientes enteros, entonces b debe ser un factor entero de a_0 y c debe ser un factor entero de a_n.

Estrategia para encontrar raíces racionales

Suponga que $P(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y es de grado mayor que 2.

Paso 1. Enumere las raíces racionales posibles de $P(x)$ mediante el teorema de raíces racionales (teorema 6).

Paso 2. Construya una tabla de división sintética. Si se determina una raíz racional, deténgase y escriba

$$P(x) = (x - r)Q(x)$$

e inmediatamente proceda a encontrar las raíces racionales para $Q(x)$, el **polinomio reducido** respecto a $P(x)$. Si el grado de $q(x)$ es mayor que 2, regrese al paso 1 usando $Q(x)$ en lugar de $P(x)$. Si $Q(x)$ es cuadrática, encuentre todas sus raíces usando métodos estándar para resolver ecuaciones cuadráticas.

3-3 APROXIMACIÓN DE RAÍCES REALES DE POLINOMIOS

Los teoremas siguientes son herramientas útiles para localizar las raíces reales de un polinomio con coeficientes reales. Una vez localizadas, se puede usar un dispositivo de graficación para aproximar las raíces.

Teorema de localización. Si f es continua en un intervalo I, a y b son dos números en I, y $f(a)$ y $f(b)$ son de signo opuesto, entonces hay al menos una intersección con el eje x entre a y b.

Límites superior e inferior de raíces reales. Si $a_n > 0$ y $P(x)$ se divide entre $x - r$ usando división sintética:

1. Si $r > 0$ y todos los números en el renglón cociente de la división sintética, incluyendo el residuo, son no negativos, entonces r es mayor que o igual a la raíz más grande de $P(x)$ y se le conoce como **límite superior** de las raíces reales de $P(x)$.
2. Si $r < 0$ y todos los números en el renglón cociente de la división sintética, incluyendo el residuo, alternan en signo, entonces r es menor que o igual a la raíz más pequeña de $P(x)$ y se denomina **límite inferior** de las raíces reales de $P(x)$.

3-4 FUNCIONES RACIONALES

Una función de la forma $f(x) = n(x)/d(x)$, donde $n(x)$ y $d(x)$ son polinomios, es una **función racional**. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de $y = f(x)$ si $f(x) \to \infty$ o $f(x) \to -\infty$ conforme $x \to a^+$ o $x \to a^-$. Si $d(a) = 0$ y $n(a) \neq 0$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de $y = f(x)$ si $f(x) \to b$ conforme $x \to \infty$ o $x \to -\infty$. La recta $y = mx + b$ es una **asíntota oblicua** si $[f(x) - (mx + b)] \to 0$ conforme $x \to \infty$ o $x \to -\infty$.

Sea

$$f(x) = \frac{a_m x^m + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0}, \qquad a_m, b_n \neq 0$$

El comportamiento de la gráfica de f conforme $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ se determina por la relación de los términos principales del numerador y del denominador, $a_m x^m / b_n x^n$.

1. Si $m < n$, entonces el eje x es una asíntota horizontal.
2. Si $m = n$, entonces la recta $y = a_m/b_n$ es una asíntota horizontal.
3. Si $m > n$, entonces no hay asíntotas horizontales.

Graficación de una función racional: $f(x) = n(x)/d(x)$

Paso 1. *Intersecciones.* Encuentre las soluciones reales de la ecuación $n(x) = 0$ y úselas para dibujar cualquier intersección con el eje x de la gráfica de f. Evalúe $f(0)$, si existe, y dibuje la intersección con el eje y.

Paso 2. *Asíntotas verticales.* Encuentre las soluciones reales de la ecuación $d(x) = 0$ y úselas para determinar el dominio de f, los puntos de discontinuidad y las asíntotas verticales. Trace cualquier asíntota vertical con líneas discontinuas.

Paso 3. *Cuadro de signos.* Construya un cuadro de signos para f y úselo para determinar el comportamiento de la gráfica cerca de cada asíntota vertical.

Paso 4. *Asíntotas horizontales.* Determine si existe una asíntota horizontal y, si es así, trácela como una recta discontinua.

Paso 5. *Termine el trazo.* Termine el trazo de la gráfica dibujando puntos adicionales y únalos con una curva continua y suave en cada intervalo del dominio de f. (No cruce ninguno de los puntos de discontinuidad.)

3-5 FRACCIONES PARCIALES

Una función racional $P(x)/D(x)$ a menudo se puede descomponer en una suma de funciones racionales más simples denominadas **fracciones parciales**. Si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $D(x)$, entonces $P(x)/D(x)$ se denomina **fracción propia**. Se tienen los siguientes teoremas importantes:

Polinomios iguales. Dos polinomios son iguales, si y sólo si los coeficientes de los términos de grado semejantes son iguales.

Teorema de factores lineales y cuadráticos. Un polinomio con coeficientes reales se puede factorizar en un producto de factores lineales y/o cuadráticos con coeficientes reales donde los factores lineales y cuadráticos son primos relativos de los números reales.

Descomposición de fracciones parciales. Cualquier fracción propia $P(x)/D(x)$ totalmente simplificada se puede descomponer en la suma de fracciones parciales como sigue:

1. Si $D(x)$ tiene un factor lineal de la forma $ax + b$ que no se repite, entonces la descomposición de la fracción parcial de $P(x)/D(x)$ contiene un término de la forma

$$\frac{A}{ax+b} \qquad A \text{ es una constante.}$$

2. Si $D(x)$ tiene un factor lineal k que se repite de la forma $(ax + b)^k$, entonces la descomposición de la fracción parcial de $P(x)/D(x)$ contiene k términos de la forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \text{ constantes}$$

3. Si $D(x)$ tiene un factor cuadrático, que no se repite, de la forma $ax^2 + bx + c$, que es primo relativo de los números reales, entonces la descomposición de la fracción parcial de $P(x)/D(x)$ contiene un término de la forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \qquad A, B \text{ son constantes}$$

4. Si $D(x)$ tiene un factor cuadrático k, que se repite, de la forma $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $ax^2 + bx + c$ es primo relativo de los números reales, entonces la descomposición fracción parcial de $P(x)/D(x)$ contiene k términos de la forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

$$A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k \text{ constantes}$$

Ejercicios de repaso del capítulo 3

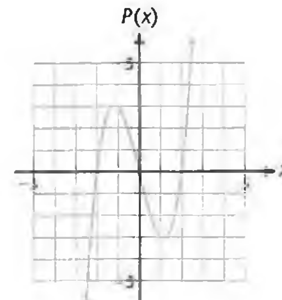
Al trabajar con todos los problemas de este capítulo revise y compruebe las soluciones al final del libro. Ahí están las respuestas a todos los problemas de revisión. Después de cada respuesta está un número en tipo itálico que indica la sección de la cual se tomó el problema que se está analizando. Si se le presentan dudas, repase la sección correspondiente en el texto.

A

1. Use división sintética para dividir $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ entre $D(x) = x + 2$, y escriba la respuesta en la forma $P(x) = D(x)Q(x) + R$.
2. Si $P(x) = x^5 - 4x^4 + 9x^2 - 8$, encuentre $P(3)$ usando el teorema del residuo y la división sintética.
3. ¿Cuáles son las raíces de $P(x) = 3(x - 2)(x + 4)(x + 1)$?
4. Si $P(x) = x^2 - 2x + 2$ y $P(1 + i) = 0$, encuentre otra raíz de $P(x)$.
5. Sea $P(x)$ el polinomio cuya gráfica se muestra en la figura.

   (A) Suponga que $P(x)$ tiene raíces enteras y coeficiente principal 1, encuentre la ecuación con el grado más bajo que pudiera producir esta gráfica.

   (B) Describa el comportamiento a la izquierda y a la derecha de $P(x)$.



6. De acuerdo con el teorema de los límites superior e inferior, cuáles de los números siguientes son los límites de las raíces de $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2$?

$$-2, -1, 3, 4$$

7. ¿Cómo sabe usted que $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 5$ tiene al menos una raíz real entre 1 y 2?
8. Escriba las posibles raíces racionales de $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

9. Encuentre las raíces racionales de $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

10. Encuentre el dominio y la(s) intersección(es) de x para:

(A) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 4}$ (B) $g(x) = \dfrac{3x}{x^2 - x - 6}$

11. Encuentre la asíntota vertical y horizontal para las funciones del problema 10.

12. Descomponga en fracciones parciales: $\dfrac{7x - 11}{(x - 3)(x + 2)}$

B

13. Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 4$.

(A) Grafique $P(x)$ y describa la gráfica, incluyendo el número de intersecciones en x, el número de puntos de retorno y el comportamiento a la izquierda y a la derecha.
(B) Use el método de bisección para aproximar la intersección más grande con una cifra decimal.

14. Si $P(x) = 8x^4 - 14x^3 - 13x^2 - 4x + 7$, encuentre $Q(x)$ y R tal que $P(x) = (x - \frac{1}{4})Q(x) + R$. ¿Qué es $P(\frac{1}{4})$?

15. Si $P(x) = 4x^3 - 8x^2 - 3x - 3$, encuentre $P(-\frac{1}{2})$ usando el teorema del residuo y la división sintética.

16. Use la fórmula cuadrática y el teorema de factorización para factorizar $P(x) = x^2 - 2x - 1$.

17. ¿Es $x + 1$ un factor de $P(x) = 9x^{26} - 11x^{17} + 8x^{11} - 5x^4 - 7$? Explique, sin dividir o usar la división sintética.

18. Determine todas las raíces racionales de $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x - 8$.

19. Factorice el polinomio del problema 18 en factores lineales.

20. Encuentre todas las raíces racionales de $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5$.

21. Encuentre todas las raíces (racionales, irracionales e imaginarias) de manera exacta para $P(x) = 2x^4 - x^3 + 2x - 1$.

22. Factorice el polinomio del problema 21 en factores lineales.

23. Resuelva $2x^3 + 3x^2 \leq 11x + 6$. Escriba la respuesta en notación de desigualdad y de intervalo.

24. Sea $P(x) = x^4 - 2x^3 - 30x^2 - 25$.

(A) Encuentre los enteros positivos más pequeños y los enteros negativos más grandes que, por el teorema 2 en la sección 4-3, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para todas las raíces reales de $P(x)$.
(B) Use el método de bisección para aproximar la raíz real más grande de $P(x)$ con dos cifras decimales.
(C) Use un dispositivo de graficación para aproximar las raíces reales de $P(x)$ a dos cifras decimales.

25. Sea $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 2}$

(A) Encuentre el dominio e intersecciones para f.
(B) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales para f.
(C) Trace la gráfica de f. Dibuje las asíntotas verticales y horizontales con líneas discontinuas.

26. Descomponga en fracciones parciales: $\dfrac{-x^2 + 3x + 4}{x(x - 2)^2}$

27. Descomponga en fracciones parciales: $\dfrac{8x^2 - 10x + 9}{2x^3 - 3x^2 + 3x}$

C

28. Use la división sintética para dividir $P(x) = x^3 + 3x + 2$ entre $[x - (1 + i)]$, y escriba la respuesta en la forma $P(x) = D(x)Q(x) + R$.

29. Encuentre el polinomio de menor grado con coeficiente principal 1 que tenga raíces $-\frac{1}{2}$ (multiplicidad 2), -3, y 1 (multiplicidad 3). (Escriba la respuesta en forma factorizada.) ¿Cuál es el grado del polinomio?

30. Repita el problema 29 para un polinomio $P(x)$ con raíces -5, $2 - 3i$ y $2 + 3i$.

31. Encuentre todas las raíces (racionales, irracionales e imaginarias) de manera exacta para $P(x) = 2x^5 - 5x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 4$.

32. Factorice el polinomio del problema 31 en factores lineales.

33. Resuelva

$$\frac{4x^2 + 4x - 3}{2x^3 + 3x^2 - 11x - 6} \geq 0$$

Escriba la respuesta en notación de desigualdad y de intervalo.

34. ¿Cuál es el grado mínimo de un polinomio $P(x)$, dado que $P(-1) = -4$, $P(0) = 2$, $P(1) = -5$ y $P(2) = 3$? Justifique su conclusión.

35. Si $P(x)$ es un polinomio cúbico con coeficientes enteros y si $1 + 2i$ es una raíz de $P(x)$, ¿puede $P(x)$ tener una raíz irracional? Explique.

36. Las soluciones de la ecuación $x^3 - 27 = 0$ son las raíces cúbicas de 27.

(A) ¿Cuántas son las raíces cúbicas de 27?
(B) 3 es obviamente la raíz cúbica de 27; encuentre las demás.

37. Sea $P(x) = x^4 + 2x^3 - 500x^2 - 4\,000$.

(A) Encuentre el entero positivo más pequeño en múltiplos de 10 y el entero negativo más grande en múltiplos de 10 que, por el teorema 2 de la sección 4-3, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para todas las raíces reales de $P(x)$.
(B) Aproxime las raíces reales de $P(x)$ con dos cifras decimales.

38. Grafique

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1}$$

Indique cualquier asíntota vertical, horizontal u oblicua con líneas discontinuas.

39. Use un dispositivo de graficación para encontrar cualquier asíntota horizontal en

$$f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}$$

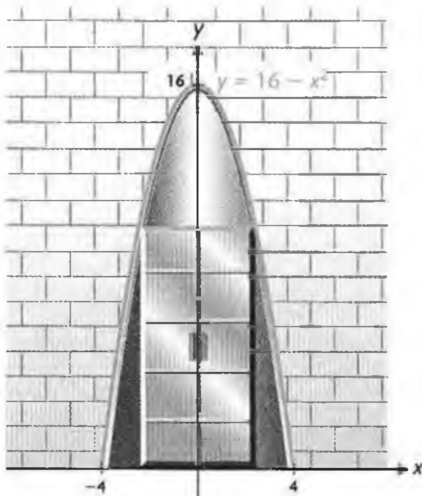
40. Descomponga en fracciones parciales:

$$\frac{5x^2 + 2x + 9}{x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x}$$

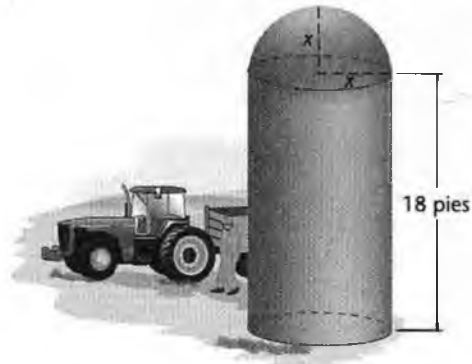
APLICACIONES 

Exprese las soluciones de cada problema como las raíces de una ecuación polinomial de la forma $P(x) = 0$. Encuentre las soluciones racionales de manera exacta y las soluciones irracionales aproximadas con una cifra decimal. Use un dispositivo de graficación o el método de bisección sólo si es necesario.

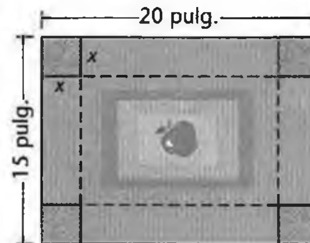
41. Arquitectura. Se forma una entrada colocando una puerta rectangular dentro de un arco en forma de parábola con la gráfica $y = 16 - x^2$, x y y en pies (véase figura). Si el área de la puerta es de 48 pies cuadrados, encuentre sus dimensiones.



42. Construcción. Se construye un silo para granos uniendo un hemisferio a la parte superior de un cilindro circular recto (véase figura). Si el cilindro tiene 18 pies de altura y el volumen del silo es de 486π pies cúbicos, encuentre el radio común del cilindro y del hemisferio.



43. Manufactura. Se va a formar una caja con una pieza de cartón que mide 15 por 20 pulgadas. En cada esquina se van a cortar cuadrados, de x pulgadas de lado, y después se van a doblar los extremos y lados hacia arriba (véase figura). Encuentre el valor de x que debería resultar en una caja con un volumen de 300 pulgadas cúbicas.

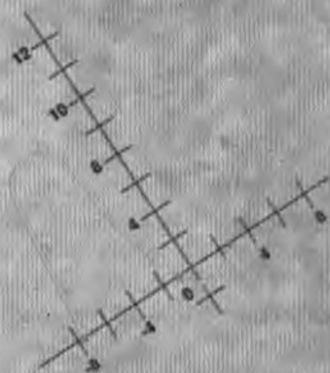




44. Geometría. Encuentre todos los puntos en la gráfica $y = x^2$ que estén a 3 unidades del punto $(1, 4)$.

CAPÍTULO 4

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS





$y = -x, x > 0$

La mayoría de las funciones que se ha considerado hasta ahora han sido funciones polinomiales y racionales, y algunas que implican las raíces o potencias de este mismo tipo de funciones. La clase general de funciones definidas por medio de operaciones algebraicas como la suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces con variables y constantes se llaman *funciones algebraicas*.

En este capítulo se definirán y estudiarán las propiedades de dos nuevos tipos importantes de funciones, las *exponenciales* y las *logarítmicas*. Estas funciones no son algebraicas, pero forman parte de otra clase de funciones, las *trascendentales*. Las funciones exponenciales y logarítmicas se utilizan en la descripción y solución de una amplia variedad de problemas de la vida cotidiana, incluyendo el crecimiento de poblaciones, animales y bacterias; el decaimiento radiactivo; el incremento del dinero con intereses compuestos; la absorción de la luz al atravesar el aire, agua o vidrio, y las magnitudes del sonido y de los terremotos. Además de las aplicaciones en estas áreas se consideran muchas otras en las siguientes secciones.

SECCIÓN 4-1 Funciones exponenciales



- Funciones exponenciales
- Gráficas de funciones exponenciales básicas
- Otras propiedades exponenciales
- Aplicaciones

En esta sección se definirán las funciones exponenciales, algunas de sus propiedades, incluyendo sus gráficas, y se considerarán sus numerosas e importantes aplicaciones.

• Funciones exponenciales

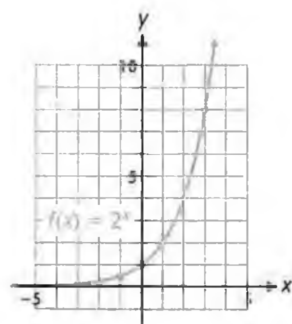
Se empezará por observar que las funciones f y g dadas por

$$f(x) = 2^x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2$$

no son la misma función. En la primera se tiene una base constante elevada a una variable, y en la segunda se tiene una variable elevada a un exponente constante, entre las cuales, como es evidente, hay una gran diferencia. La función g es una función cuadrática que ya fue analizada, la función f es un nuevo tipo de función llamada *función exponencial*.

Si se le preguntara a varios estudiantes cómo graficarían una función exponencial como $f(x) = 2^x$, no vacilarían en hacerlo. Lo más probable es que harían una tabla asignando valores enteros a x, después graficarían los puntos resultantes y al final unirían estos puntos con una curva suave, como se muestra en la figura 1.

FIGURA 1 $f(x) = 2^x$.



x	$f(x)$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

La única trampa es que 2^x no se definió para todos los números reales x. Se sabe lo que significa 2^5, 2^{-3}, $2^{2/3}$, $2^{-3/5}$, $2^{1.4}$ y $2^{-3.15}$ porque 2^p se definió para cualquier número p racional, pero ¿qué significa?

$$2^{\sqrt{2}}$$

Por el momento la pregunta no es fácil de contestar. De hecho, para llegar a una definición precisa de $2^{\sqrt{2}}$ sólo se obtendrá en cursos más avanzados, en donde se pueda mostrar que, si b es un número real positivo y x cualquier número real, entonces

$$b^x$$

se refiere a un número real, y la gráfica de $f(x) = 2^x$ es como se indica en la figura 1. Se puede mostrar también que para alguna x irracional, b^x se puede aproximar tanto como se deseé usando aproximaciones a los números racionales para x. Puesto que $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$, por ejemplo, la sucesión

$$2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, \ldots$$

aproxima $2^{\sqrt{2}}$, y cuando se usan más decimales mejora la aproximación.

DEFINICIÓN 1

La función exponencial

La ecuación

$$f(x) = b^x \qquad b > 0, b \neq 1$$

define una **función exponencial** para cada b constante diferente, llamada **base**. La variable independiente x puede asumir cualquier valor real.

Así, el **dominio de** f es el conjunto de todos los números reales positivos, se puede mostrar que el **rango de** f es el conjunto de todos los números reales positivos. Se requiere que la base b sea positiva para evitar números imaginarios tales como $(-2)^{1/2}$.

Propiedades de la función exponencial

Para a y b positivos, $a \neq 1$, $b \neq 1$ y x y y reales:

1. Leyes de los exponentes:

$$a^x a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{xy} \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x} \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

2. $a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$.
3. Para $x \neq 0$, entonces $a^x = b^x$ si y sólo si $a = b$.

EJEMPLO 2 **Uso de las propiedades de la función exponencial**

Despeje x de $4^{x-3} = 8$.

Solución Exprese ambos lados en términos de la misma base, y use la propiedad 2 para igualar los exponentes.

$$4^{x-3} = 8$$

$$(2^2)^{x-3} = 2^3 \quad \text{Exprese 4 y 8 como potencias de 2.}$$

$$2^{2x-6} = 2^3 \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$2x - 6 = 3 \quad \text{Propiedad 2}$$

$$2x = 9$$

$$x = \tfrac{9}{2}$$

Comprobación $4^{(9/2)-3} = 4^{3/2} = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8$

Problema seleccionado 2 Despeje x de $27^{x+1} = 9$.

Aplicaciones Se considerarán ahora tres aplicaciones de las funciones exponenciales: crecimiento demográfico, decaimiento radiactivo e interés compuesto. El crecimiento demográfico y el interés compuesto son ejemplos de crecimiento exponencial, mientras que el decaimiento radiactivo es un ejemplo del crecimiento exponencial negativo.

Nuestro primer ejemplo implica el crecimiento de poblaciones, de personas, animales, insectos y bacterias. Las poblaciones tienden a crecer exponencialmente y a tasas diferentes. Una manera conveniente y fácil de entender la medida de la tasa de crecimiento es el **tiempo de duplicación** (éste es el tiempo que le toma a una población duplicarse). En periodos cortos, se usa a menudo el **modelo de crecimiento del tiempo de duplicación** para modelar al crecimiento demográfico:

$$P = P_0 2^{t/d}$$

donde P = población en el tiempo t
P_0 = población en el tiempo $t = 0$
d = tiempo de duplicación

Observe que cuando $t = d$,

$$P = P_0 2^{d/d} = P_0 2$$

y la población es el doble de la original, como se espera. Se usará este modelo para resolver un problema de crecimiento demográfico en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 **Crecimiento demográfico**

México tiene una población aproximada de 100 millones de personas, y se estima que habrá aumentado al doble en 21 años. Si sigue creciendo a la misma tasa, ¿cuál será la población:

(A) en 15 años a partir de ahora? (B) en 30 años a partir de ahora?

Calcule sus respuestas con tres dígitos significativos.

Soluciones Se usa el modelo de crecimiento del tiempo de duplicación

$$P = P_0 2^{t/d}$$

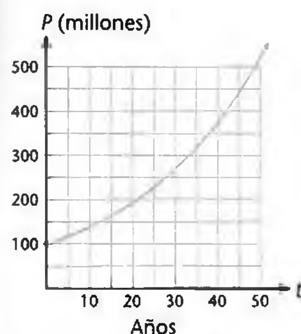


FIGURA 4 $P = 100(2^{t/21})$.

Sustituyendo $P_0 = 100$ y $d = 21$, se obtiene

$$P = 100(2^{t/21}) \qquad \text{Véase figura 4.}$$

(A) Encuentre P cuando $t = 15$ años:

$$P = 100(2^{15/21})$$
$$\approx 164 \text{ millones de personas} \qquad \text{Use calculadora.}$$

(B) Encuentre P cuando $t = 30$ años:

$$P = 100(2^{30/21})$$
$$P \approx 269 \text{ millones de personas} \qquad \text{Use calculadora.}$$

Problema seleccionado 3 La bacteria *Escherichia coli* (*E. coli*) se encuentra naturalmente en los intestinos de muchos mamíferos. En un experimento de laboratorio, se encuentra que el tiempo de duplicación para la *E. coli* es de 25 minutos. Si el experimento comienza con una población de 1 000 *E. coli* y no hay ningún cambio en el tiempo de duplicación, ¿cuántas bacterias estarán presentes:

(A) en 10 minutos? (B) en 5 horas?

Escriba sus respuestas con tres dígitos significativos.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Con el modelo de crecimiento del tiempo de duplicación *no* se esperan resultados exactos para periodos largos. Según el modelo de crecimiento del tiempo de duplicación del ejemplo 3, ¿cuál era la población de México durante el auge de la civilización azteca; es decir, hace 500 años? ¿Cuál será la población de México en 200 años? Explique por qué estos resultados no son realistas. Analice el resultado para encontrar los factores de la población que no se han tomado en cuenta en el modelo de crecimiento del tiempo de duplicación.

La segunda aplicación implica el decaimiento radiactivo, al que a menudo se hace referencia como crecimiento negativo. Los materiales radiactivos se usan extensamente en diagnósticos y en terapias médicas, como fuentes de potencia en satélites y como fuentes de potencia en muchos países. Si comenzamos con una cantidad A_0 de un cierto isótopo radiactivo, la cantidad decaerá exponencialmente en el tiempo. La tasa de decaimiento varía de isótopo a isótopo. Una medida conveniente y fácil de entender de la tasa de decaimiento es la **vida media** del isótopo (es decir, el tiempo que le toma decaer a la mitad de cierta materia). En esta sección se usará el siguiente **modelo de decaimiento de vida media**:

$$A = A_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t/h} = A_0 2^{-t/h}$$

donde A = Cantidad al tiempo t
A_0 = Cantidad al tiempo $t = 0$
h = Vida media

Observe que cuando $t = h$,

$$A = A_0 2^{-h/h} = A_0 2^{-1} = \frac{A_0}{2}$$

y la cantidad de isótopo es la mitad de la original, como se espera.

EJEMPLO 4 **Decaimiento radiactivo**

El isótopo radiactivo del galio 67(^{67}Ga) usado en el diagnóstico de tumores malignos, tiene una vida media de 46.5 horas. Si se empieza con 100 miligramos del isótopo, ¿cuántos miligramos quedarán después de:

(A) 24 horas? (B) una semana?

Calcule sus respuestas con tres dígitos significativos.

Soluciones Se usa el modelo de decaimiento de vida media:

$$A = A_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^{t/h} = A_0 2^{-t/h}$$

Tomando $A_0 = 100$ y $h = 46.5$, se obtiene

$$A = 100(2^{-t/46.5})$$ Véase figura 5

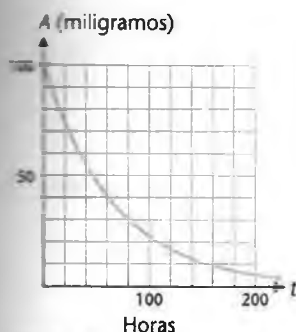


FIGURA 5 $A = 100(2^{-t/46.5})$.

(A) Encuentre A cuando $t = 24$ horas:

$$A = 100(2^{-24/46.5})$$
$$= 69.9 \text{ miligramos} \quad \text{Use calculadora.}$$

(B) Encuentre A cuando $t = 168$ horas (una semana = 168 horas):

$$A = 100(2^{-168/46.5})$$
$$= 8.17 \text{ miligramos} \quad \text{Use calculadora.}$$

Problema seleccionado 4

El oro radiactivo 198(^{198}Au) que se usa en las radiografías del hígado tiene una vida media de 2.67 días. Si se empieza con 50 miligramos del isótopo, ¿cuántos miligramos quedarán después de:

(A) $\frac{1}{2}$ día? (B) una semana?

Calcule sus respuestas con tres dígitos significativos.

La tercera aplicación es en la ganancia de dinero por interés compuesto. Este tema le importa a la mayoría de las personas y es fundamental para la materia de matemáticas financieras.

Al rédito que se paga por usar dinero de otra persona se le llama **interés**. Éste por lo general se calcula como un porcentaje llamado **tasa de interés** de un capital en un periodo dado. Si al final del periodo de pago el interés obtenido se invierte nuevamente a la misma tasa, entonces, tanto el interés ganado como el capital, ganarán intereses durante el siguiente periodo de pago. El interés pagado al interés reinvertido se llama **interés compuesto**.

Suponga que se depositan $1 000 en una cuenta de ahorros y préstamos que paga el 8% de interés compuesto semestralmente. ¿Cuánto dinero tendrá ahorrado y cuánto deberá después de 2 años? Los intereses compuestos semestralmente son los intereses que se depositan en su cuenta después de un periodo semestral y que volverán a ganar intereses. La **tasa de interés por periodo** es la anual, 8% = 0.08, dividido entre el número de periodos compuestos por año. Si A_1, A_2, A_3 y A_4 representan las nuevas cantidades que se deben al final del primero, segundo, tercero y cuarto periodos, respectivamente, entonces

$$A_1 = \$1\,000 + \$1\,000\left(\frac{0.08}{2}\right)$$
$$= \$1\,000(1 + 0.04) \qquad P\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$
$$A_2 = A_1(1 + 0.04)$$
$$= [\$1\,000(1 + 0.04)](1 + 0.04)$$
$$= \$1\,000(1 + 0.04)^2 \qquad P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^2$$
$$A_3 = A_2(1 + 0.04)$$
$$= [\$1\,000(1 + 0.04)^2](1 + 0.04)$$
$$= \$1\,000(1 + 0.04)^3 \qquad P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^3$$

$$\begin{aligned} A_4 &= A_3(1 + 0.04) \\ &= [\$1\,000(1 + 0.04)^3](1 + 0.04) \\ &= \$1\,000(1 + 0.04)^4 \end{aligned}$$

¿Cuánto cree que serían los ahorros y préstamos que deberá después de 6 años? Si se supone

$$A = \$1\,000(1 + 0.04)^{12}$$

se observa un patrón que está generalizado en la siguiente fórmula de interés compuesto:

Interés compuesto

Si un **capital** P se invierte a una **tasa** anual r de interés compuesto, n veces al año, entonces la **cantidad** A en la cuenta al final del año t está dada por

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

La tasa anual r se expresa en forma decimal.

Como el capital P representa la cantidad inicial de la cuenta y A representa la cantidad t años después, también se le llama P al **valor actual** de la cuenta y A al **valor futuro** de la cuenta.

EJEMPLO 5 **Interés compuesto**

Si se depositan $5 000 en una cuenta que paga el 9% de interés compuesto diariamente, ¿cuánto tendrá en su cuenta en 5 años? Aproxime su respuesta al centésimo más cercano.

Solución Se usa la fórmula del interés compuesto como se muestra:

$$\begin{aligned} A &= P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \\ &= 5\,000\left(1 + \frac{0.09}{365}\right)^{(365)(5)} \\ &= \$7\,841.12 \end{aligned}$$

Use calculadora.

La gráfica de

$$A = 5\,000\left(1 + \frac{0.09}{365}\right)^{365t}$$

como se muestra en la figura 6.

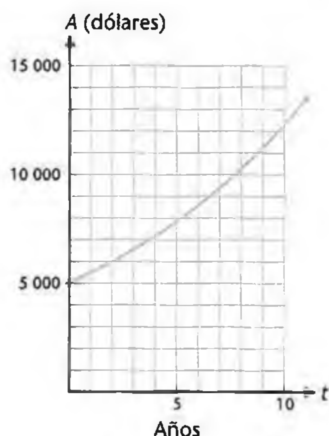


FIGURA 6



Problema seleccionado 5

Si se invierten \$1 000 en una cuenta que paga el 10% de interés compuesto mensualmente, ¿cuánto habrá en la cuenta después de 10 años? Aproxime su respuesta al centésimo más cercano.

EJEMPLO 6

Visualización de inversiones con un dispositivo de graficación

Use un dispositivo de graficación para comparar el crecimiento de una inversión de \$1 000 al 10% de interés compuesto mensualmente con una inversión de \$2 000 al 5% de interés compuesto mensualmente. ¿Cuándo tendrán las dos inversiones el mismo valor?

Solución

Se usa la fórmula de interés compuesto para expresar el valor futuro y_1 de la primera inversión por $y_1 = 1\,000(1 + 0.10/12)^{12x}$, y el valor futuro y^2 de la segunda inversión por $y_2 = 2\,000(1 + 0.05/12)^{12x}$, donde x es el tiempo en años. Se grafican ambas funciones y se utiliza la rutina de intersección de un dispositivo de graficación para concluir que las inversiones tienen el mismo valor cuando $x \approx 14$ años como se muestra en la figura 7. Después de ese tiempo la inversión de \$1 000 tendrá un valor mayor.

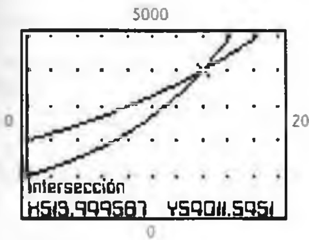


FIGURA 7



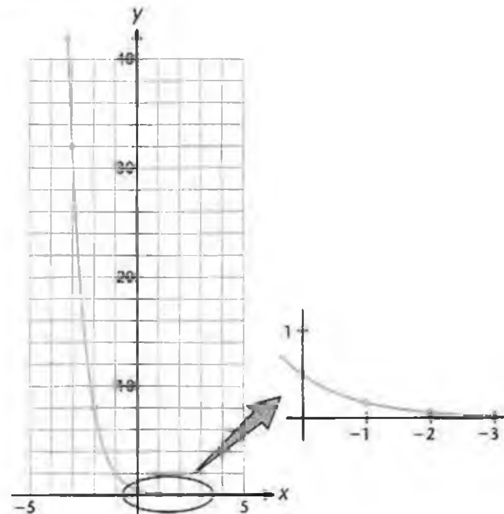
Problema seleccionado 6

Use un dispositivo de graficación para determinar si una inversión de \$5 000 al 6% de interés compuesto trimestralmente tiene el mismo valor que una inversión de \$4 000 al 10% de interés compuesto diariamente.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $y = \frac{1}{2}(4^{-x})$

x	y
−3	32.00
−2	8.00
−1	2.00
0	0.50
1	0.13
2	0.03
3	0.01



2. $x = -\frac{1}{3}$

3. (A) 1 320 (B) $4\,100\,000 = 4.10 \times 10^6$

4. (A) 43.9 mg (B) 8.12 mg

5. \$2 707.04

6. 5 años, 6 meses

EJERCICIO 4-1

A

En los problemas del 1 al 10 construya una tabla para valores enteros de x sobre el intervalo indicado y grafique la función.

1. $y = 3^x; [-3, 3]$
2. $y = 5^x; [-2, 2]$
3. $y = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}; [-3, 3]$
4. $y = (\frac{1}{5})^x = 5^{-x}; [-2, 2]$
5. $g(x) = -3^{-x}; [-3, 3]$
6. $f(x) = -5^x; [-2, 2]$
7. $h(x) = 5(3^x); [-3, 3]$
8. $f(x) = 4(5^x); [-2, 2]$
9. $y = 3^{x+3} - 5; [-6, 0]$
10. $y = 5^{x-2} + 4; [-4, 0]$

En los problemas del 11 al 16, simplifique.

11. $10^{3x-1}10^{4-x}$
12. $(4^{3x})^{2y}$
13. $\dfrac{3^x}{3^{1-x}}$
14. $\dfrac{5^{x-3}}{5^{x-4}}$
15. $\left(\dfrac{4^x}{5^y}\right)^{3z}$
16. $(2^x3^y)^z$

B

En los problemas del 17 al 28 despeje x.

17. $5^{3x} = 5^{4x-2}$
18. $10^{2-3x} = 10^{5x-6}$
19. $7^{x^2} = 7^{2x+3}$
20. $4^{5x-x^2} = 4^{-6}$
21. $(1 - x)^5 = (2x - 1)^5$
22. $5^3 = (x + 2)^3$
23. $2^x = 4^{x+1}$
24. $9^{x-1} = 3^x$
25. $25^{x+1} = 125^{2x}$
26. $100^{x-1} = 1\,000^{2x}$
27. $9^{x^2} = 3^{3x-1}$
28. $4^{x^2} = 2^{x+3}$
29. Encuentre todos los números reales a tales que $a^2 = a^{-2}$. Explique por qué esto no viola la segunda propiedaddc las funciones exponenciales del cuadro de la página 358.
30. Encuentre todos los números reales a y b tales que $a \neq b$, pero $a^4 = b^4$. Explique por qué esto no viola la tercera propiedad de las funciones exponenciales del cuadro de la página 358.

Grafique cada función de los problemas del 31 al 40 construyendo una tabla de valores.

Compruebe los problemas del 31 al 40 con un dispositivo de graficación.

31. $G(t) = 3^{t/100}$
32. $f(t) = 2^{t/10}$
33. $y = 11(3^{-x/2})$
34. $y = 7(2^{-2x})$
35. $g(x) = 2^{-|x|}$
36. $f(x) = 2^{|x|}$
37. $y = 1\,000(1.08)^x$
38. $y = 100(1.03)^x$
39. $y = 2^{-x^2}$
40. $y = 3^{-x^2}$

* Observe por favor que es necesario usar un dispositivo de graficación para realizar estos ejercicios. Es opcional comprobarlos con un dispositivo de graficación.

En los problemas del 41 al 46, use una calculadora y calcule sus respuestas con cuatro dígitos significativos.

41. $5^{\sqrt{3}}$
42. $3^{-\sqrt{2}}$
43. $\pi^{\sqrt{2}}$
44. $\pi^{-\sqrt{3}}$
45. $\dfrac{2^\pi + 2^{-\pi}}{2}$
46. $\dfrac{3^\pi - 3^{-\pi}}{2}$

C

En los problemas del 47 al 50, simplifique

47. $(6^x + 6^{-x})(6^x - 6^{-x})$
48. $(3^x - 3^{-x})(3^x + 3^{-x})$
49. $(6^x + 6^{-x})^2 - (6^x - 6^{-x})^2$
50. $(3^x - 3^{-x})^2 + (3^x + 3^{-x})^2$

Grafique cada función de los problemas del 51 al 54 construyendo una tabla de valores.



Compruebe los problemas del 51 al 54 con un dispositivo de graficación.

51. $m(x) = x(3^{-x})$
52. $h(x) = x(2^x)$
53. $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{2}$
54. $g(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$



En los problemas del 55 al 58:

(A) Aproxime las raíces reales de cada función con dos cifras decimales.

(B) Investigue la conducta de cada función cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$ y encuentre alguna asíntota horizontal.

55. $f(x) = 3^x - 5$
56. $f(x) = 4 + 2^{-x}$
57. $f(x) = 1 + x + 10^x$
58. $f(x) = 8 - x^2 + 2^{-x}$

APLICACIONES

59. **Juego.** Una persona apuesta en la ruleta al rojo y al negro usando la **estrategia Martingale**. Es decir, coloca una apuesta de \$2 al rojo, y la duplica una y otra vez hasta que gana. Entonces repite el proceso. Si el negro ocurre n veces en una fila, entonces $L = 2^n$ dólares perdidos en la n-ésima apuesta. Grafique esta función para $1 \leq n \leq 10$. Aunque la función está definida sólo para números positivos, los puntos en este tipo de gráfica usualmente se unen con una curva suave como una ayuda visual.
60. **Crecimiento bacteriano.** Si una colonia de bacterias se duplica cada media hora, escriba una ecuación que dé el número de bacterias N de la colonia después de t horas, suponga que la colonia tiene 100 bacterias en el inicio. Grafique la ecuación para $0 \leq t \leq 5$.
61. **Crecimiento demográfico.** Debido a su corto tiempo de vida y a su rápida reproducción, la mosca de fruta *Drosophila* se usa en algunos estudios genéticos. Raymond Pearl,

de la Universidad Johns Hopkins, por ejemplo, estudió 300 generaciones sucesivas de descendientes de un solo par de moscas *Drosophila*. En un laboratorio, con comida y espacio suficientes, el tiempo de duplicación para cierta población es de 2.4 días. Si se empieza con cinco moscas machos y cinco hembras, ¿cuántas moscas se espera que habrá en:

(A) una semana? (B) dos semanas?

62. Crecimiento demográfico. Si Kenia tiene una población aproximada de 30 000 000 de personas y el tiempo de duplicación es de 19 años, y si el crecimiento continúa a la misma tasa, encuentre el número de personas que habrá en:

(A) 10 años. (B) 30 años.

Calcule sus repuestas con dos dígitos significativos.

63. Insecticidas. El uso del DDT está prohibido en muchos países debido a que sus efectos adversos duran mucho tiempo. Suponiendo que la vida media del DDT es de 12 años, y un granjero usa 25 libras, ¿después de cuánto tiempo permanecerá aún activo

(A) 5 años? (B) 20 años?

Calcule sus repuestas con dos dígitos significativos.

64. Trazas radiactivas. El isótopo radiactivo del tecnecio 99m(^{99m}Tc) se usa en las imágenes del cerebro. Este isótopo tiene una vida media de seis horas. Si se usan 12 miligramos, ¿cuántos quedarán después de:

(A) 3 horas? (B) 24 horas?

Calcule sus repuestas con tres dígitos significativos.

65. Finanzas. Suponga que se inviertcn $4 000 en una cuenta al 11% de interés compuesto semanalmente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta en:

(A) $\frac{1}{2}$ año? (B) 10 años?

Calcule sus respuestas al centésimo más cercano.

66. Finanzas. Suponga que se inviertcn $2 500 en una cuenta al 7% de interés compuesto trimestralmente. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta en:

(A) $\frac{3}{4}$ año? (B) 15 años?

Calcule sus respuestas al centésimo más cercano.

* **67. Finanzas.** Una pareja acaba de tener un bebé. ¿Cuánto tendrán que invertir ahora al 8.25% de interés compuesto diariamente, con el fin de tener dentro de 17 años $40 000 para la educación del niño? Aproxime su repuesta al dólar más próximo.

* **68. Finanzas.** Una persona desea reunir $15 000 en efectivo para comprarse un carro dentro de cinco años. ¿Cuánto debe tener en la cuenta si ésta paga el 9.75% de interés compuesto semanalmente? Aproxime su respuesta al dólar más cercano.

* **69. Finanzas.** ¿Una inversión de $10 000 al 8.9% de interés compuesto diariamente dará mayor rendimiento al final de un trimestre, que una inversión de $10 000 al 9% de interés compuesto trimestralmente? Explique.

* **70.** Una cantidad de $5 000 se invierte al 13% de interés compuesto semestralmente. Suponga que una segunda inversión de $5 000 obtiene una tasa de interés *r* compuesto diariamente. ¿Para qué valores de *r*, aproximados al decimal más cercano de un porcentaje, es mejor la segunda inversión que la primera? Analice.

SECCIÓN 4-2 La función exponencial de base *e*



- Función exponencial de base *e*
- Repaso de las aplicaciones de crecimiento y decaimiento
- Interés compuesto continuo
- Una comparación del fenómeno del crecimiento exponencial

Hasta ahora el número π ha sido probablemente el número irracional más importante que se ha encontrado. En esta sección se presentará otro número irracional, *e*, que también es muy importante tanto para las matemáticas como para sus aplicaciones.

• Función exponencial de base *e*

La siguiente expresión es importante en el estudio del cálculo y, como se verá después, también está relacionada estrechamente con la fórmula del interés compuesto analizada en la sección anterior:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) Calcule el valor de $[1 + (1/m)]^m$ para $m = 1, 2, 3, 4, 5$. ¿Están aumentando o disminuyendo estos valores conforme aumenta m?

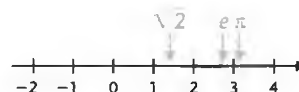
(B) ¿Cuál es el entero positivo más pequeño m tal que $[1 + (1/m)]^m$ es mayor que 2.5? ¿Es mayor que 2.7? ¿Es mayor que 2.9?

TABLA 1

m	$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$
1	2
10	2.59374 . . .
100	2.70481 . . .
1 000	2.71692 . . .
10 000	2.71814 . . .
100 000	2.71827 . . .
1 000 000	2.71828 . . .
⋮	⋮

Curiosamente, calculando el valor de la expresión para valores muy grandes de m (véase tabla 1), parece que $[1 + (1/m)]^m$ tiende a un número cercano a 2.7183. En un curso de cálculo se muestra que cuando m aumenta sin límite, el valor de $[1 + (1/m)]^m$ tiende a un número irracional llamado e. Del mismo modo que un número irracional como π y $\sqrt{2}$ que no tienen final, ni una representación decimal repetitiva (véase sección 1-1), tampoco e tiene un final ni una representación decimal repetitiva. Para 12 cifras decimales,

$$e = 2.718\ 281\ 828\ 459$$



Quién descubrió exactamente al número e sigue siendo un tema de discusión. Se dice que fue el gran suizo matemático Leonhard Euler (1707-1783), quien calculó e con 23 cifras decimales usando $[1 + (1/m)]^m$.

La constante e parece ser una base ideal para una función exponencial, ya que en cálculo y algunas operaciones de matemáticas avanzadas aparecen en su forma más simple usando esta base. A esto se debe que, como en seguida se verá, se usa e extensamente en expresiones y fórmulas de modelos de fenómenos del mundo real.

DEFINICIÓN 1 **Función exponencial de base e**

Para un número real x, la ecuación

$$f(x) = e^x$$

define a la **función exponencial de base e.**

La función exponencial de base e se usa con tanta frecuencia que a menudo se hace referencia a ella como la función exponencial. Las gráficas de $y = e^x$ y $y = e^{-x}$ se muestran en la figura 1.

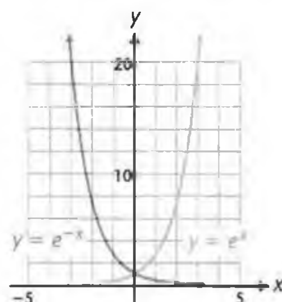
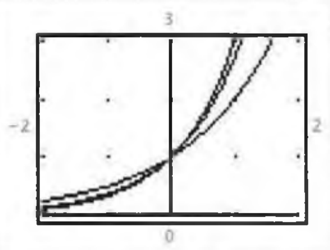


FIGURA 1 Funciones exponenciales de base e.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Se usó un dispositivo de graficación para graficar las funciones $f(x) = 3^x$, $g(x) = 2^x$ y $h(x) = e^x$ en la figura 2. ¿Dónde se intersectan las gráficas? ¿Cuál gráfica está entre las otras? ¿Cuál gráfica está sobre las otras cuando $x > 0$? ¿Cuándo $x < 0$? Analice el comportamiento de las tres funciones cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

FIGURA 2

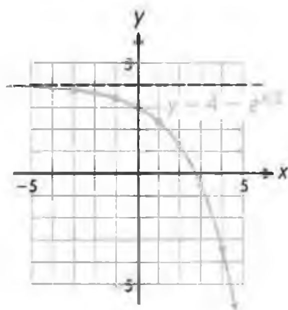


EJEMPLO 1 **Graficación de las funciones exponenciales**

Grafique $y = 4 - e^{x/2}$.

Solución Utilice una calculadora para construir una tabla para valores enteros de x. Después trace y una los puntos con una curva suave (véase figura 3).

FIGURA 3 $y = 4 - e^{x/2}$.



x	y
−4	3.86
−3	3.78
−2	3.63
−1	3.39
0	3
1	2.35
2	1.28
3	−0.48
4	−3.39

Observe que como x tiende a $-\infty$, los valores de $e^{x/2}$ tienden a 0 y los valores de $4 - e^{x/2}$ tienden a 4. La recta $y = 4$ es una asíntota horizontal de la gráfica.

Problema seleccionado 1 Grafique $y = 2e^{x/2} - 5$.

• Repaso de las aplicaciones de crecimiento y decaimiento

La mayoría de los problemas de crecimiento y decaimiento exponencial se modelan usando funciones exponenciales de base *e*. Aquí se muestran dos aplicaciones y en el ejercicio 4-2 se muestran algunas otras.

EJEMPLO 2 **Medicina-Crecimiento bacteriano**

El cólera es una enfermedad intestinal causada por la bacteria del cólera que se multiplica exponencialmente por la división de células modelada por

$$N = N_0e^{1.386t}$$

donde N es el número de bacterias presentes después de t horas y N_0 es el número de bacterias presentes cuando $t = 0$. Si se empieza con una bacteria, ¿cuántas bacterias habrá en:

(A) 5 horas? (B) 12 horas?

Calcule sus respuestas con tres dígitos significativos.

Soluciones (A) Utilice $N_0 = 1$ y $t = 5$:

$$\begin{aligned} N &= N_0e^{1.386t} \\ &= e^{1.386(5)} \\ &= 1\,020 \end{aligned}$$

(B) Utilice $N_0 = 1$ y $t = 12$:

$$\begin{aligned} N &= N_0e^{1.386t} \\ &= e^{1.386(12)} \\ &= 16\,700\,000 \end{aligned}$$

Problema seleccionado 2 Grafique el modelo del crecimiento exponencial para la bacteria del cólera sobre el intervalo indicado:

$$N = e^{1.386t} \qquad 0 \le t \le 5$$

EJEMPLO 3 **Cálculo de fechas con el carbono 14**

El bombardeo de rayos-cósmicos de la atmósfera produce neutrones, los que al regresar reaccionan con el nitrógeno y producen carbono 14 radiactivo. El carbono 14 radiactivo penetra en los tejidos de todos los seres vivos a través del dióxido de carbono, el cual es absorbido primero por las plantas. Mientras que la planta o el animal esté vivo, el nivel de carbono 14 en el organismo se mantiene constante. Una vez que el organismo muere, el carbono 14 disminuye de acuerdo con la ecuación.

$$A = A_0e^{-0.000124t}$$

donde A es la cantidad de carbono 14 presente después de t años y A_0 es la cantidad presente en el tiempo $t = 0$. Si 1 000 miligramos de carbono 14 están presentes en un inicio, ¿cuántos miligramos estarán presentes en:

(A) 10 000 años? (B) 50 000 años?

Calcule sus respuestas con tres dígitos significativos.

Soluciones

Sustituyendo $A_0 = 1\,000$ en la ecuación de decaimiento, se tiene

$$A = 1\,000e^{-0.000124t} \quad \text{Véase figura 4.}$$

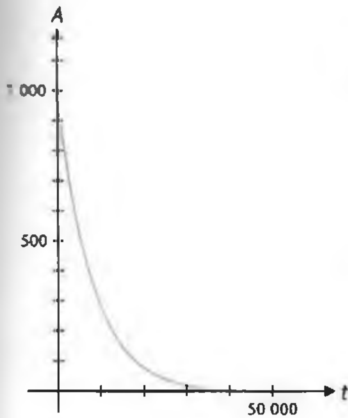


FIGURA 4

(A) Encuentre A cuando $t = 10\,000$:

$$\begin{aligned} A &= 1\,000e^{-0.000124(10\,000)} \\ &= 289 \text{ miligramos} \end{aligned}$$

(B) Encuentre A cuando $t = 50\,000$:

$$\begin{aligned} A &= 1\,000e^{-0.000124(50\,000)} \\ &= 2.03 \text{ miligramos} \end{aligned}$$

En los ejercicios 4-5 se dará mayor información acerca del cálculo de fechas con carbono 14, ya que aquí se dará mayor importancia a encontrar t después de haber obtenido información sobre A y A_0.

Problema seleccionado 3

Con relación al ejemplo 3, ¿cuántos miligramos de carbono 14 deben estar presentes en un inicio para tener 10 miligramos después de 20 000 años? Calcule sus respuestas con cuatro dígitos significativos.

• Interés compuesto continuo

La constante e aparece naturalmente en el estudio del interés compuesto. Regresando a la fórmula del interés compuesto analizada en la sección 4-1,

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \quad \text{Interés compuesto}$$

recuerde que P es el capital inicial invertido a una tasa anual r compuesta de n periodos en un año, y A es la cantidad en la cuenta después de t años. Suponga que P, r y t son constantes y n se incrementa sin límite. ¿Aumentará la cantidad A sin límite o tenderá a algún valor limitante? Se efectuará un experimento con calculadora antes de abordar el problema general. Si $P = \$100$, $r = 0.08$ y $t = 2$ años, entonces

$$A = 100\left(1 + \frac{0.08}{n}\right)^{2n}$$

La cantidad A se calculó para diversos valores de n en la tabla 2. Observe que la ganancia más grande parece encontrarse entre el periodo anual y el semestral. En consecuencia, la ganancia disminuye conforme aumenta n. De hecho, parece que A tiende a aproximarse algo a $117.35 cuando n es muy grande.

TABLA 2 Efecto de la frecuencia compuesta

Frecuencia compuesta	n	$A = 100\left(1 + \frac{0.08}{n}\right)^{2n}$
Anualmente	1	$116.6400
Semestralmente	2	116.9859
Trimestralmente	4	117.1659
Semanalmente	52	117.3367
Diariamente	365	117.3490
Cada hora	8 760	117.3501

$4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$
$2^{2x} + 2^{x+1} - 3 = 0$
$2x \log 2 + (x+1) \log 2 = 3$
$\log 2\,(2x + (x+1)) = 3$
$\log_2 (3x + 1) = 3$
$\log (6x + 2) = 3$
$10^3 = 6x + 2$
$1000 - 2 = 6x$
$\frac{1000 - 2}{6} = x$
$X = \frac{10^3 - 2}{6}$

Ahora se retomará el problema general para ver si se puede determinar qué pasa con $A = P[1 + (r/n)]^{nt}$ cuando n aumenta sin límite. Una pequeña manipulación algebraica de la fórmula del interés compuesto proporcionará una respuesta y un resultado importante en matemáticas financieras.

$x = b^y$

$\log_b x = y$

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

$$= P\left(1 + \frac{1}{n/r}\right)^{(n/r)rt} \quad \text{Cambio algebraico.}$$

$$= P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt} \quad \text{Sea } m = n/r.$$

La expresión dentro del corchete parece familiar. Recuerde de la primera parte de esta sección que

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m} \text{ tiende a } e \qquad \text{conforme} \qquad m \text{ tiende a } \infty$$

Puesto que r es constante, $m = n/r$ tiende a ∞ conforme n tiende a ∞. Así,

$$P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \text{ tiende a } Pe^{rt} \qquad \text{conforme} \qquad n \text{ tiende a } \infty$$

y se ha llegado a la **fórmula del interés continuo compuesto**, una fórmula importante muy usada en negocios, bancos y economía.

Fórmula del interés continuo compuesto

Si el capital P se invierte a una tasa anual r compuesta continuamente, entonces la cantidad A en la cuenta en t años está dada por

$$A = Pe^{rt}$$

La tasa anual r está expresada en forma decimal.

EJEMPLO 4 **Interés compuesto continuo**

Si se invierten $100 a una tasa anual del 8% de interés compuesto continuamente, ¿qué cantidad, aproximada al centésimo más cercano, estará en la cuenta después de 2 años?

Solución Use la fórmula del interés compuesto continuo para encontrar A cuando $P = \$100$, $r = 0.08$ y $t = 2$:

$$\begin{aligned} A &= Pe^{rt} \\ &= \$100e^{(0.08)(2)} \quad \text{8\% es equivalente a } r = 0.08. \\ &= \$117.35 \end{aligned}$$

Compare este resultado con los valores calculados en la tabla 2.

Problema seleccionado 4 ¿Qué cantidad tendrá una cuenta después de 5 años si se invierten $100 a una tasa anual del 12% de interés compuesto anualmente? ¿Trimestralmente? ¿Continuamente? Aproxime sus respuestas al centésimo más cercano.

La fórmula del interés compuesto continuo se puede utilizar para modelar el crecimiento demográfico a corto plazo. Si se supone que la población P crece continuamente a una tasa anual r, entonces la población A después de t años está dada por $A = Pe^{rt}$.

• Una comparación del fenómeno del crecimiento exponencial

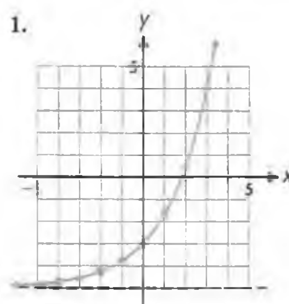
Las ecuaciones y gráficas dadas en la tabla 3 comparan algunos modelos de crecimiento muy usados. Éstos se dividen básicamente en dos grupos: el crecimiento sin límite y el crecimiento limitado. Después de cada ecuación y gráfica se indica una breve e incompleta lista de áreas en las que se usan los modelos. Sólo se señaló aquellos casos que se han desarrollado extensamente y en los que se quisiera profundizar en el futuro.

TABLA 3 Crecimiento y decaimiento exponencial

Descripción	Ecuación	Gráfica	Usos
Crecimiento sin límite	$y = ce^{kt}$ $c, k > 0$		Crecimiento de la población a corto plazo (personas, bacterias, etcétera); crecimiento de dinero a un interés compuesto continuo.
Decaimiento exponencial	$y = ce^{-kt}$ $c, k > 0$		Decaimiento radiactivo; absorción de luz en agua, vidrio, etcétera; presión atmosférica.
Crecimiento limitado	$y = c(1 - e^{-kt})$ $c, k > 0$		Habilidades de aprendizaje, últimas ventas: crecimiento de la compañía; circuitos eléctricos.
Crecimiento logístico	$y = \dfrac{M}{1 + ce^{-kt}}$ $c, k, M > 0$		Crecimiento de la población a largo plazo; epidemias; ventas de nuevos productos; crecimiento de una compañía.

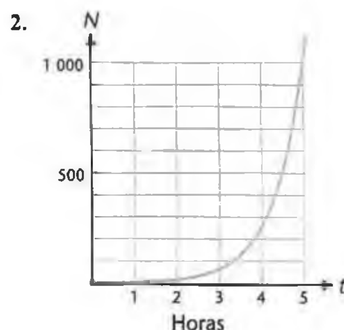
Respuestas a los problemas seleccionados

1.



x	y
−4	−4.73
−3	−4.55
−2	−4.26
−1	−3.79
0	−3
1	−1.7
2	0.44
3	3.96

2.



3. 119.4 mg
4. Anualmente \$176.23; trimestralmente \$180.61; continuamente: \$182.21

EJERCICIO 4-2

A

En los problemas del 1 al 6, construya una tabla para valores enteros de x sobre el intervalo indicado y grafique la función.

Compruebe los problemas del 1 al 6 con un dispositivo de graficación.

1. $y = -e^x$; $[-3, 3]$
2. $y = -e^{-x}$; $[-3, 3]$
3. $y = 10e^{0.2x}$; $[-5, 5]$
4. $y = 100e^{0.1x}$; $[-5, 5]$
5. $f(t) = 100e^{-0.1t}$; $[-5, 5]$
6. $g(t) = 10e^{-0.2t}$; $[-5, 5]$

En los problemas del 7 al 12, simplifique.

7. $e^{2x}e^{-3x}$
8. $(e^{-x})^4$
9. $(e^x)^3$
10. $e^{-4x}e^{6x}$
11. $\dfrac{e^{5x}}{e^{2x+1}}$
12. $\dfrac{e^{4-3x}}{e^{2-5x}}$

13. (A) Explique cuál es el error del razonamiento siguiente acerca de la expresión $[1 + (1/m)]^m$: Cuando m es muy grande, $1 + (1/m)$ tiende a 1, ya que $1/m$ tiende a 0 y 1 elevado a cualquier potencia es 1, así $[1 + (1/m)]^m$ tiende a 1.
(B) ¿Qué número es $[1 + (1/m)]^m$ cuando $m \to \infty$? e

14. (A) Explique cuál es el error en el siguiente razonamiento sobre la expresión $[1 + (1/m)]^m$: Si $b > 1$, entonces la función exponencial $b^x \to \infty$ conforme $x \to \infty$ y $1 + (1/m)$ es más grande que 1, de manera que $[1 + (1/m)]^m$ tiende a infinito conforme $m \to \infty$.
(B) ¿A qué número tiende $[1 + (1/m)]^m$ cuando $m \to \infty$?

B

En los problemas del 15 al 22, grafique cada función construyendo una tabla de valores.

Compruebe los problemas del 15 al 22 con un dispositivo de graficación.

15. $y = 2 + e^{x-2}$
16. $y = -3 + e^{1+x}$
17. $y = e^{-|x|}$
18. $y = e^{|x|}$
19. $M(x) = e^{x/2} + e^{-x/2}$
20. $C(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
21. $N = \dfrac{200}{1 + 3e^{-t}}$
22. $N = \dfrac{100}{1 + e^{-t}}$

En los problemas del 23 al 28, simplifique.

23. $\dfrac{-2x^3e^{-2x} - 3x^2e^{-2x}}{x^6}$
24. $\dfrac{5x^4e^{5x} - 4x^3e^{5x}}{x^8}$
25. $(e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2$
26. $e^x(e^{-x} + 1) - e^{-x}(e^x + 1)$
27. $\dfrac{e^{-x}(e^x - e^{-x}) + e^{-x}(e^x + e^{-x})}{e^{-2x}}$
28. $\dfrac{e^x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})e^x}{e^{2x}}$

En los problemas del 29 al 32, resuelva cada ecuación [Recuerde: $e^x \neq 0$.]

29. $2xe^{-x} = 0$
30. $(x - 3)e^x = 0$
31. $x^2e^x - 5xe^x = 0$
32. $3xe^{-x} + x^2e^{-x} = 0$

C

Una de las funciones más importantes en estadística es la ***función de densidad normal de probabilidad***

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

donde μ es el ***promedio*** *y σ es la* ***desviación estándar****. La gráfica de esta función es la curva en "forma de campana" a la que se refieren los instructores cuando dicen estar ajustando a una curva.*

Grafique las funciones relacionadas que se dan en los problemas 33 y 34.

33. $f(x) = e^{-x^2}$
34. $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/2}$

35. Dada $f(s) = (1 + s)^{1/s}$, $s \neq 0$:

(A) Termine las tablas siguientes con cuatro cifras decimales.

(B) ¿A qué tiende $(1 + s)^{1/s}$ conforme s tiende a 0?

s	f(s)	s	f(s)
−0.5	4.0000	0.5	2.2500
−0.2	3.0518	0.2	2.4883
−0.1		0.1	
−0.01		0.01	
−0.001		0.001	
−0.0001		0.0001	

36. Remítase al problema 35. Grafique $f(s) = (1 + s)^{1/s}$ para s en $[-0.5, 0) \cup (0, 0.5]$.

Los problemas del 37 al 40 requieren del uso de un dispositivo de graficación.

Es una práctica común en muchas aplicaciones de matemáticas para aproximar apropiadamente a las funciones no polinomiales con los polinomios seleccionados. Por ejemplo, los polinomios en los problemas del 37 al 40, llamados ***polinomios de Taylor****, se pueden usar para aproximar a la función exponencial $f(x) = e^x$. Para ilustrar en forma gráfica esta aproximación, grafique $f(x) = e^x$ en cada problema y al polinomio indicado en la misma ventana de visión, $-4 \leq x \leq 4$ y $-5 \leq y \leq 50$.*

37. $P_1(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

38. $P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

39. $P_3(x) = 1 + \quad x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$

40. $P_4(x) = 1 + x \quad {}^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$

41. Investigue el comportamiento de las funciones $f_1(x) = x/e^x$, $f_2(x) = x^2/e^x$ y $f_3(x) = x^3/e^x$ conforme $x \to \infty$ y $x \to -\infty$, y encuentre alguna asíntota horizontal. Generalice a funciones de la forma, $f_n(x) = x^n/e^x$ donde n es cualquier entero positivo.

42. Investigue el comportamiento de las funciones $g_1(x) = xe^x$, $g_2(x) = x^2e^x$ y $g_3(x) = x^3e^x$ cuando $x \to \infty$ y $x \to -\infty$, y encuentre alguna asíntota horizontal. Generalice a funciones de la forma $g_n(x) = x^ne^x$, donde n es cualquier entero positivo.

APLICACIONES

43. **Crecimiento demográfico.** ¿Si la población mundial en la actualidad es de aproximadamente 6 mil millones de personas, y si la población crece en forma continua a una tasa anual del 1.7%, ¿cuál será la población en 10 años? Calcule la respuesta con dos dígitos significativos.

44. **Crecimiento demográfico.** ¿Si la población actual de México es de alrededor de 100 millones de personas, y si la población crece continuamente a una tasa anual del 2.3%, ¿cuál será su población en 8 años? Calcule la respuesta con dos dígitos significativos.

45. **Crecimiento demográfico.** En 1996 la población de Rusia era de 148 millones de personas, y la de Nigeria de 104 millones. Si las poblaciones de Rusia y Nigeria crecen continuamente a tasas anuales de −0.62% y 3.0%, respectivamente, ¿cuándo tendrá Nigeria una población mayor que la de Rusia?

46. **Crecimiento demográfico.** En 1996 la población de Alemania era de 84 millones de personas y la de Egipto de 64 millones. Si las poblaciones de Alemania y Egipto crecen en forma continua a tasas anuales de −0.15% y 1.9%, respectivamente, ¿cuándo tendrá Egipto una población mayor a la de Alemania?

47. **Ciencia espacial.** Los isótopos radiactivos, así como las celdas solares, se utilizan para suministrar energía a vehículos espaciales. Los isótopos pierden potencia gradualmente debido al decaimiento radiactivo. En cierto vehículo espacial la fuente de energía nuclear tenía una potencia de salida de P watts después de t días de uso, dada por

$$P = 75e^{-0.0035t}$$

Grafique esta función para $0 \leq t \leq 100$.

48. **Ciencias de la Tierra.** La presión atmosférica P, en libras por pulgada cuadrada, disminuye exponencialmente con respecto a la altitud h, en millas sobre el nivel del mar, dada por

$$P = 14.7e^{-0.21h}$$

Grafique esta función para $0 \leq h \leq 10$.

49. **Biología marina.** La vida marina depende de las plantas microscópicas que existen en la zona fótica, una zona que está a una profundidad en donde es visible aproximadamente el 1% de la luz de la superficie. La intensidad de la luz I respecto de la profundidad d, en pies, para uno de los mares más claros en el mundo, el Mar Sargasso en Las Antillas, se puede aproximar por

$$I = I_0e^{-0.00942d}$$

donde I_0 es la intensidad de luz en la superficie. ¿Qué porcentaje de la luz apreciable en la superficie se distingue a la profundidad de:

(A) 50 pies? (B) 100 pies?

50. **Biología marina.** Remítase al problema 49. En ciertas aguas con gran cantidad de sedimento, la zona fótica puede estar a sólo 15 a 20 pies de profundidad. En ciertas bahías oscuras, la intensidad de la luz d pies bajo la superficie está dada aproximadamente por

$$I = I_0e^{-0.23d}$$

¿Qué porcentaje de la luz de la superficie es visible a una profundidad de:

(A) 10 pies? (B) 20 pies?

51. **Crecimiento del dinero.** Si se invierten $5 250 en una cuenta que paga el 11.38% de interés compuesto conti-

nuamente, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta después de:

(A) 6.25 años? (B) 17 años?

52. Crecimiento del dinero. Si se invierten \$7 500 en una cuenta que paga el 8.35% de interés compuesto continuamente, ¿cuánto dinero habrá en la cuenta después de:

(A) 5.5 años? (B) 12 años?

53. Crecimiento del dinero. Barron's, un negocio nacional y de finanzas semanales, publicó lo siguiente "los depósitos ahorrados rinden" para certificados de cuentas de depósito a $2\frac{1}{2}$ años:

Ahorros Gill	8.30% (CC)
Ahorros y préstamos Richardson	8.40% (CQ)
Ahorros de Estados Unidos	8.25% (CD)

donde CC representa el interés compuesto en forma continua, CQ el interés compuesto trimestral y CD el interés compuesto diariamente. Calcule el valor de \$1 000 invertidos en cada cuenta después de $2\frac{1}{2}$ años.

54. Crecimiento del dinero. Remítase al problema 53. Otra emisión de Barron, de certificados de depósitos a un año incluyen:

Ahorros Álamo	8.25% (CQ)
Ahorros Lamar	8.05% (CC)

Calcule el valor de \$10 000 invertidos en cada cuenta después de un año.

55. Valor actualizado. Un prometedor pagaré pagará \$30 000 al vencimiento después de 10 años a partir de ahora. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por el pagaré ahora si éste gana valor a una tasa del 9% de interés compuesto continuamente?

56. Valor actualizado. Un prometedor pagaré pagará \$50 000 al vencimiento después de $5\frac{1}{2}$ años a partir de ahora. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por el pagaré ahora si éste gana valor a una tasa del 10% de interés compuesto continuamente?

57. La epidemia de SIDA. En junio de 1996 la Organización Mundial de la Salud estimó que en todo el mundo se han presentado 7.7 millones de casos de SIDA (Síndrome de Inmunodeficiencia Adquirida) desde el comienzo de la epidemia. Suponiendo que la enfermedad se expande en forma continua a una tasa anual del 17%, calcule el número total de casos de SIDA que se presentarán en junio del año:

(A) 2000 (B) 2004

58. La epidemia de SIDA. En junio de 1996 la Organización Mundial de la Salud estimó que 28 millones de personas en el mundo habían sido infectadas por el VIH (virus de inmunodeficiencia humana) desde que comenzó la epidemia del SIDA. Suponiendo que la infección del VIH se expande continuamente a una tasa anual del 19%, calcule el número total de personas que se habrán infectado con el VIH en junio del año:

(A) 2000 (B) 2004

59. Curva de aprendizaje. Con el fin de entrenar trabajadores para armar tableros de circuitos se envió un grupo a una compañía de capacitación de personal. En una experiencia pasada se encontró que la curva de aprendizaje para el empleado medio está dada por

$$N = 40(1 - e^{-0.12t})$$

donde N es el número de tableros armados por día después de t días de entrenamiento. Grafique esta función para $0 \leq t \leq 30$. ¿Cuál es, en promedio, el máximo número de tableros que se espera produzca un empleado en un día?

60. Publicidad. Una compañía está intentando dar a conocer un nuevo producto a tantas personas como sea posible mediante comerciales de televisión en una gran área metropolitana con 2 millones de posibles espectadores. Un modelo del número de personas N, en millones, que conocen el producto después de t días de publicidad se encuentra con

$$N = 2(1 - e^{-0.037t})$$

Grafique esta función para $0 \leq t \leq 50$. ¿Qué valor tiene N cuando t aumenta sin límite?

61. Ley de enfriamiento de Newton. Esta ley establece que la razón a la cual un objeto se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y su medio circundante. La temperatura T del objeto después de t horas está dada por

$$T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

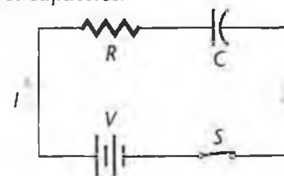
donde T_m es la temperatura del medio circundante y T_0 es la temperatura del objeto en $t = 0$. Imagine una botella de vino que está a la temperatura ambiente de 72°F y se coloca en el refrigerador para enfriarla antes de una fiesta. Si la temperatura en el refrigerador se mantiene a 40°F y $k = 0.4$, encuentre la temperatura del vino, al grado más cercano, después de 3 horas. (En el ejercicio 4-5 se encuentra cómo determinar k.)

62. Ley de enfriamiento de Newton. Remítase al problema 61. ¿Cuál es la temperatura del vino, al grado más cercano, después de haber estado 5 horas en el refrigerador?

63. Fotografía. Una unidad de flash electrónico para una cámara fotográfica se activa cuando se descarga un capacitor mediante un filamento de alambre. Después de que se utiliza el flash y se descarga el capacitor, el circuito (véase la figura) está conectado y las baterías generan una corriente para recargar el capacitor. Al tiempo que tarda el capacitor en recargarse se le conoce como *tiempo de reciclamiento*. Para una unidad de flash que utiliza una batería de 12 volts, la carga q, en coulombs, en el capacitor, t segundos después de que se ha iniciado el recargado está dada por

$$q = 0.0009(1 - e^{-0.2t})$$

Grafique esta función para $0 \leq t \leq 10$. Calcule la carga máxima en el capacitor.



64. Medicina. Un marcapasos electrónico utiliza el mismo tipo de circuito que el flash del problema 63, pero está diseñado para que el capacitor se descargue 72 veces en un minuto. Para cierto marcapasos, la carga en el capacitor, t segundos después de que empieza a recargarse está dada por

$$q = 0.000\,008(1 - e^{-2t})$$

Grafique esta función para $0 \leq t \leq \frac{5}{6}$. Calcule la carga máxima en el capacitor.

65. Administración de la fauna. Una manada de 20 venados cola blanca se introdujo a una isla en donde nunca había habido venados. Se estima que la población crecerá de acuerdo con la curva logística

$$N = \frac{100}{1 + 4e^{-0.14t}}$$

donde N es el número de venados que se espera habrá en la manada después de t años. Grafique la ecuación para $0 \leq t \leq 30$. Calcule el tamaño de la manada que puede caber en la isla.

66. Capacitación laboral. Una compañía que fabrica computadoras contrató a un aprendiz para enseñarle a evaluar cierto modelo de computadora personal después de que sale de la ensambladora. La curva de aprendizaje para un aprendiz promedio está dada por

$$N = \frac{200}{4 + 21e^{-0.1t}}$$

donde N es el número de computadoras evaluadas por día después de t días en el trabajo. Grafique la ecuación para $0 \leq t \leq 50$. ¿Cuál es el máximo número de computadoras que se espera puede evaluar un probador por día, en promedio, después del entrenamiento?

67. Catenaria. Una línea de fuerza cuelga libre entre dos torres de apoyo parece ser una parábola, pero en realidad es una curva llamada **catenaria**. Una catenaria tiene una ecuación de la forma

$$y = \frac{e^{mx} + e^{-mx}}{2m}$$

donde m es una constante. Grafique la ecuación para $m = 0.25$.

68. Catenaria. Grafique la ecuación del problema 67 para $m = 0.4$.

SECCIÓN 4-3 Funciones logarítmicas



- Definición de una función logarítmica
- De la forma logarítmica a la forma exponencial, y viceversa
- Propiedades de las funciones logarítmicas

• Definición de una función logarítmica

Ahora se definirá a un nuevo tipo de funciones, las llamadas **funciones logarítmicas**, como inversas de las funciones exponenciales. Debido a que las funciones exponenciales son uno a uno, existen sus inversas. Ahora se verá por qué se puso especial interés en el concepto general de las funciones inversas de la sección 2-6. Si ya se conoce bastante respecto de una función, entonces, con base en el conocimiento de inversas, en general, de manera automática se sabrá lo suficiente sobre la inversa. Por ejemplo, la gráfica de f^{-1} es la gráfica de f reflejada con respecto a la recta $y = x$, y el dominio y el rango de f^{-1} son, respectivamente, el rango y dominio de f.

Si se empieza con la función exponencial,

$$f\colon \quad y = 2^x$$

y se intercambian las variables x y y, se obtiene la inversa de f:

$$f^{-1}\colon \quad x = 2^y$$

Las gráficas de f, f^{-1} y la línea $y = x$ se muestran en la figura 1. Esta nueva función se llama **función logarítmica de base 2**. Como no se puede resolver la ecuación $x = 2^y$ para y usando las propiedades algebraicas analizadas hasta ahora, se usa un nuevo símbolo para representar a esta función inversa.

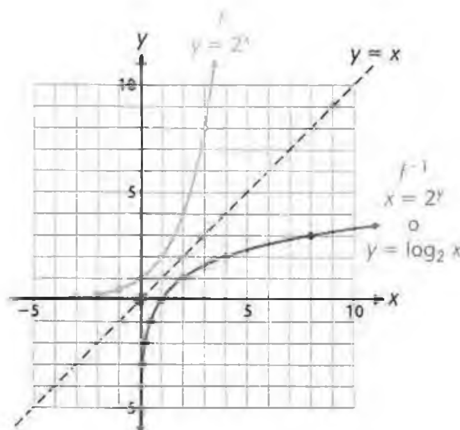
$$y = \log_2 x \quad \text{Que se lee como "log de la base 2 de } x\text{".}$$

Así,

$$y = \log_2 x \qquad \text{es equivalente a} \qquad x = 2^y$$

esto es, $\log_2 x$ es el exponente al cual se debe elevar 2 para obtener x. Simbólicamente, $x = 2^y = 2^{\log_2 x}$.

FIGURA 1 Función logarítmica de base 2.



DOMINIO de $f = (-\infty, \infty)$ = RANGO de f^{-1}
RANGO de $f = (0, \infty)$ = DOMINIO de f^{-1}

f		f^{-1}	
x	$y = 2^x$	$x = 2^y$	y
-3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	-3
-2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	-2
-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3

Pares ordenados invertidos

En general, se define a la **función logarítmica de base b** como la inversa de la función exponencial de base b ($b > 0$, $b \neq 1$).

DEFINICIÓN 1 **Definición de una función logarítmica**

Para $b > 0$ y $b \neq 1$,

Forma logarítmica		Forma exponencial
$y = \log_b x$	es equivalente a	$x = b^y$

El logaritmo de base b de x es el exponente al cual se debe elevar b para obtener x.

$$y = \log_{10} x \qquad \text{es equivalente a} \qquad x = 10^y$$

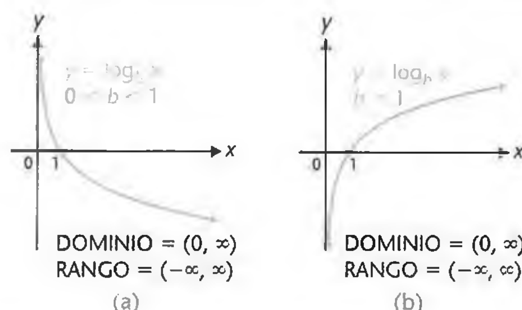
$$y = \log_e x \qquad \text{es equivalente a} \qquad x = e^y$$

Recuerde: Un logaritmo es un exponente.

Es muy importante recordar que $y = \log_b x$ y $x = b^y$ definen la misma función y, por lo tanto, se pueden usar alternativamente.

Puesto que el dominio de una función exponencial incluye todos los números reales y su rango es el conjunto de todos los números reales positivos, el **dominio** de una función logarítmica es el conjunto de todos los números reales positivos y su **rango** el conjunto de todos los números reales. Así, $\log_{10} 3$ está definido, pero $\log_{10} 0$ y $\log_{10} (-5)$ no lo están. Esto es, 3 es un valor del dominio logarítmico, pero 0 y -5 no lo son. En la figura 2 se muestran las típicas curvas logarítmicas.

FIGURA 2 Gráficas logarítmicas típicas.



EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Para la función exponencial $f = \{(x, y) \mid y = (\frac{2}{3})^x\}$, grafique f, f^{-1} y $y = x$ en el mismo sistema coordenado. Analice los dominios y rangos de f y su inversa. ¿Por qué otro nombre se conoce a f^{-1}?

De la forma logarítmica a la forma exponencial, y viceversa

Aquí se verá cómo convertir formas logarítmicas a formas exponenciales equivalentes y viceversa.

EJEMPLO 1 **Conversiones logarítmicas a exponenciales**

Cambie cada forma logarítmica a una forma exponencial equivalente:

(A) $\log_2 8 = 3$ (B) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ (C) $\log_2 (\frac{1}{4}) = -2$

Soluciones

(A) $\log_2 8 = 3$ es equivalente a $8 = 2^3$

(B) $\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$ es equivalente a $5 = 25^{1/2}$

(C) $\log_2 (\frac{1}{4}) = -2$ es equivalente a $\frac{1}{4} = 2^{-2}$

Problema seleccionado 1 Cambie cada forma logarítmica a una forma exponencial equivalente:

(A) $\log_3 27 = 3$ (B) $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$ (C) $\log_3 (\frac{1}{9}) = -2$

EJEMPLO 2 **Conversiones logarítmicas exponenciales**

Cambie cada forma exponencial a una forma logarítmica equivalente:

(A) $49 = 7^2$ (B) $3 = \sqrt{9}$ (C) $\frac{1}{5} = 5^{-1}$

Soluciones

(A) $49 = 7^2$ es equivalente a $\log_7 49 = 2$
(B) $3 = \sqrt{9}$ es equivalente a $\log_9 3 = \frac{1}{2}$
(C) $\frac{1}{5} = 5^{-1}$ es equivalente a $\log_5 (\frac{1}{5}) = -1$

Problema seleccionado 2

Cambie cada forma exponencial a una forma logarítmica equivalente:

(A) $64 = 4^3$ (B) $2 = \sqrt[3]{8}$ (C) $\frac{1}{16} = 4^{-2}$

Para comprender un poco mejor las funciones logarítmicas y su relación con las funciones exponenciales, se consideran algunos problemas en los que se quiere encontrar x, b o y en $y = \log_b x$, dando los otros dos valores. Todos los valores se eligieron de tal manera que se puedan resolver sin el uso de tablas o calculadora.

EJEMPLO 3 Soluciones de la ecuación $y = \log_b x$

Encuentre x, b o y según se indique:

(A) Encuentre y: $y = \log_4 8$ (B) Encuentre x: $\log_3 x = -2$
(C) Encuentre b: $\log_b 1\,000 = 3$

Soluciones

(A) Escriba $y = \log_4 8$ en una forma exponencial equivalente:

$$8 = 4^y$$
$$2^3 = 2^{2y} \quad \text{Escriba cada número con la misma base 2}$$
$$2y = 3 \quad \text{Recuerde que } b^m = b^n \text{ si y sólo si } m = n.$$
$$y = \frac{3}{2}$$

Así, $\frac{3}{2} = \log_4 8$.

(B) Escriba $\log_3 x = -2$ en forma exponencial equivalente:

$$x = 3^{-2}$$
$$= \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Así, $\log_3 (\frac{1}{9}) = -2$.

(C) Escriba $\log_b 1\,000 = 3$ en forma exponencial equivalente:

$$1\,000 = b^3$$
$$10^3 = b^3 \quad \text{Escriba 1 000 como un número elevado a la tercera potencia.}$$
$$b = 10$$

Así, $\log_{10} 1\,000 = 3$.

Problema seleccionado 3 Encuentre x, b o y como se indica:

(A) Encuentre y: $y = \log_9 27$ (B) Encuentre x: $\log_2 x = -3$

(C) Encuentre b: $\log_b 100 = 2$

• Propiedades de las funciones logarítmicas

Las propiedades conocidas de las funciones exponenciales implican propiedades correspondientes de las funciones logarítmicas.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Analice la conexión entre la ecuación exponencial y la ecuación logarítmica, y explique por qué cada ecuación es válida.

(A) $2^4 2^7 = 2^{11}$; $\log_2 2^4 + \log_2 2^7 = \log_2 2^{11}$

(B) $2^{13}/2^5 = 2^8$; $\log_2 2^{13} - \log_2 2^5 = \log_2 2^8$

(C) $(2^6)^9 = 2^{54}$; $9 \log_2 2^6 = \log_2 2^{54}$

Varias de las útiles y convincentes propiedades de las funciones logarítmicas están enumeradas en el teorema 1.

Teorema 1 **Propiedades de las funciones logarítmicas**

Si b, M y N son números reales positivos, $b \neq 1$, y p y x son números reales, entonces:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b b^x = x$
4. $b^{\log_b x} = x, x > 0$
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
6. $\log_b \dfrac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
7. $\log_b M^p = p \log_b M$
8. $\log_b M = \log_b N$ si y sólo si $M = N$

Las primeras dos propiedades del teorema 1 se deducen directamente de la definición de función logarítmica:

$$\log_b 1 = 0 \quad \text{puesto que} \quad b^0 = 1$$

$$\log_b b = 1 \quad \text{puesto que} \quad b^1 = b$$

La tercera y cuarta propiedades parecen mucho más complicadas de lo que son en realidad. Se deducen directamente del hecho de que las funciones exponenciales y

logarítmicas son inversas unas de las otras. Recuerde de la sección 3-8, que si f es uno a uno, entonces f^{-1} es una función uno a uno que satisface

$$f^{-1}[f(x)] = x \qquad \text{y} \qquad f[f^{-1}(x)] = x$$

Aplicando estas propiedades generales a $f(x) = b^x$ y $f^{-1}(x) = \log_b x$, se ve que

$$\begin{aligned} f^{-1}[f(x)] &= x & f[f^{-1}(x)] &= x \\ \log_b [f(x)] &= x & b^{f^{-1}(x)} &= x \\ \log_b b^x &= x & b^{\log_b x} &= x \end{aligned}$$

Las propiedades 5 a 7 permiten convertir la multiplicación en suma, la división en resta y los problemas de potencias y raíces en multiplicaciones. Las pruebas de estas propiedades se basan en las propiedades de los exponentes. Un esquema de prueba de la quinta propiedad consiste en lo siguiente: Introduciendo exponentes en la prueba, se tiene

$$u = \log_b M \qquad \text{y} \qquad v = \log_b N$$

y éstas se convierten en las formas exponenciales equivalentes

$$M = b^u \qquad \text{y} \qquad N = b^v$$

Ahora, vea si se puede proporcionar las razones para cada uno de los pasos siguientes:

$$\log_b MN = \log_b b^u b^v = \log_b b^{u+v} = u + v = \log_b M + \log_b N$$

Las otras propiedades se establecen de manera semejante (véase los problemas 111 y 112 en los ejercicios 4-3).

Finalmente, la octava propiedad se deduce del hecho de que las funciones logarítmicas son uno a uno.

Ahora se ilustrará el uso de estas propiedades en varios ejemplos.

EJEMPLO 4 **Uso de las propiedades de los logaritmos**

Simplifique usando las propiedades del teorema 1:

(A) $\log_e 1$ (B) $\log_{10} 10$ (C) $\log_e e^{2x+1}$
(D) $\log_{10} 0.01$ (E) $10^{\log_{10} 7}$ (F) $e^{\log_e x^2}$

Soluciones

(A) $\log_e 1 = 0$ (B) $\log_{10} 10 = 1$
(C) $\log_e e^{2x+1} = 2x + 1$ (D) $\log_{10} 0.01 = \log_{10} 10^{-2} = -2$
(E) $10^{\log_{10} 7} = 7$ (F) $e^{\log_e x^2} = x^2$

Problema seleccionado 4

Simplifique usando las propiedades del teorema 1:

(A) $\log_{10} 10^{-5}$ (B) $\log_5 25$ (C) $\log_{10} 1$
(D) $\log_e e^{m+n}$ (E) $10^{\log_{10} 4}$ (F) $e^{\log_e (x^4+1)}$

EJEMPLO 5 **Uso de las propiedades de los logaritmos**

Escriba en términos de formas logarítmicas más simples:

(A) $\log_b 3x$ (B) $\log_b \frac{x}{5}$ (C) $\log_b x^7$

(D) $\log_b \frac{mn}{pq}$ (E) $\log_b (mn)^{2/3}$ (F) $\log_b \frac{x^8}{y^{1/5}}$

Soluciones

(A) $\log_b 3x = \log_b 3 + \log_b x$ — $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

(B) $\log_b \frac{x}{5} = \log_b x - \log_b 5$ — $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

(C) $\log_b x^7 = 7 \log_b x$ — $\log_b M^p = p \log_b M$

(D) $\log_b \frac{mn}{pq} = \log_b mn - \log_b pq$ — $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

$= \log_b m + \log_b n - (\log_b p + \log_b q)$ — $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

$= \log_b m + \log_b n - \log_b p - \log_b q$

(E) $\log_b (mn)^{2/3} = \frac{2}{3} \log_b mn$ — $\log_b M^p = p \log_b M$

$= \frac{2}{3}(\log_b m + \log_b n)$ — $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

(F) $\log_b \frac{x^8}{y^{1/5}} = \log_b x^8 - \log_b y^{1/5}$ — $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

$= 8 \log_b x - \frac{1}{5} \log_b y$ — $\log_b M^p = p \log_b M$

Problema seleccionado 5 Escriba en términos de formas logarítmicas más simples, como en el ejemplo 5.

(A) $\log_b \frac{r}{uv}$ (B) $\log_b \left(\frac{m}{n}\right)^{3/5}$ (C) $\log_b \frac{u^{1/3}}{v^5}$

EJEMPLO 6 **Uso de las propiedades de los logaritmos**

Si $\log_e 3 = 1.10$ y $\log_e 7 = 1.95$, encuentre:

(A) $\log_e (\frac{7}{3})$ (B) $\log_e \sqrt[3]{21}$

Soluciones

(A) $\log_e (\frac{7}{3}) = \log_e 7 - \log_e 3 = 1.95 - 1.10 = 0.85$

(B) $\log_e \sqrt[3]{21} = \log_e (21)^{1/3} = \frac{1}{3} \log_e (3 \cdot 7) = \frac{1}{3}(\log_e 3 + \log_e 7)$

$= \frac{1}{3}(1.10 + 1.95) = 1.02$

Problema seleccionado 6 Si $\log_e 5 = 1.609$ y $\log_e 8 = 2.079$, encuentre:

(A) $\log_e \frac{5^{10}}{8}$ (B) $\log_e \sqrt[4]{\frac{8}{5}}$

El ejemplo y el problema siguientes, aunque artificiales de alguna manera, proporcionan una práctica extra en el uso de las propiedades del teorema 1.

EJEMPLO 7 Uso de las propiedades de los logaritmos

Encuentre x tal que $\log_b x = \frac{2}{3} \log_b 27 + 2 \log_b 2 - \log_b 3$ sin usar una calculadora o una tabla.

Solución Primero se usan las propiedades del teorema 1 para expresar el lado derecho como el logaritmo de un solo número.

$$\log_b x = \tfrac{2}{3} \log_b 27 + 2 \log_b 2 - \log_b 3$$
$$= \log_b 27^{2/3} + \log_b 2^2 - \log_b 3$$
$$= \log_b 9 + \log_b 4 - \log_b 3 \qquad 27^{2/3} = 9;\ 2^2 = 4$$
$$= \log_b \frac{9 \cdot 4}{3} = \log_b 12 \qquad \text{Propiedades 5 y 6 del teorema 1}$$

Así,

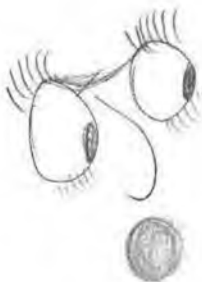
$$\log_b x = \log_b 12$$

Ahora se usa la propiedad 8 del teorema 1 para encontrar x:

$$x = 12$$

Problema seleccionado 7 Encuentre x, tal que $\log_b x = \frac{2}{3} \log_b 8 + \frac{1}{2} \log_b 9 - \log_b 6$ sin usar una calculadora o una tabla.

PRECAUCIÓN



Se concluye esta sección observando dos errores comunes:

1. $\dfrac{\log_b M}{\log_b N} \neq \log_b M - \log_b N$ $\qquad \log_b M - \log_b N = \log_b \frac{M}{N}$; $\frac{\log_b M}{\log_b N}$ no se puede simplificar.

2. $\log_b (M + N) \neq \log_b M + \log_b N$ $\qquad \log_b M + \log_b N = \log_b MN$; $\log_b (M + N)$ no se puede simplificar.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $27 = 3^3$ (B) $6 = 36^{1/2}$ (C) $\frac{1}{9} = 3^{-2}$
2. (A) $\log_4 64 = 3$ (B) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ (C) $\log_4 (\frac{1}{16}) = -2$
3. (A) $y = \frac{3}{2}$ (B) $x = \frac{1}{8}$ (C) $b = 10$
4. (A) -5 (B) 2 (C) 0 (D) $m + n$ (E) 4 (F) $x^4 + 1$
5. (A) $\log_b r - \log_b u - \log_b v$ (B) $\frac{3}{5}(\log_b m - \log_b n)$ (C) $\frac{1}{3}\log_b u - 5\log_b v$
6. (A) 14.01 (con cuatro dígitos significativos) (B) 0.1175 (con cuatro dígitos significativos).
7. $x = 2$

EJERCICIO 4-3

A

Reescriba los problemas del 1 al 8 en forma exponencial equivalente.

1. $\log_3 81 = 4$
2. $\log_5 125 = 3$
3. $\log_{10} 0.001 = -3$
4. $\log_{10} 1\,000 = 3$
5. $\log_{81} 3 = \frac{1}{4}$
6. $\log_4 2 = \frac{1}{2}$
7. $\log_{1/2} 16 = -4$
8. $\log_{1/3} 27 = -3$

Reescriba los problemas del 9 al 16 en forma logarítmica equivalente.

9. $0.0001 = 10^{-4}$
10. $10\,000 = 10^4$
11. $8 = 4^{3/2}$
12. $9 = 27^{2/3}$
13. $\frac{1}{2} = 32^{-1/5}$
14. $\frac{1}{8} = 2^{-3}$
15. $7 = \sqrt{49}$
16. $4 = \sqrt[3]{64}$

En los problemas del 17 al 30, simplifique cada expresión usando el teorema 1.

17. $\log_{16} 1$
18. $\log_{25} 1$
19. $\log_{0.5} 0.5$
20. $\log_7 7$
21. $\log_e e^4$
22. $\log_{10} 10^5$
23. $\log_{10} 0.01$
24. $\log_{10} 100$
25. $\log_5 \sqrt[3]{5}$
26. $\log_2 \sqrt{8}$
27. $e^{\log_e \sqrt{x}}$
28. $e^{\log_e (x-1)}$
29. $e^{2\log_e x}$
30. $10^{-3\log_{10} u}$

B

Encuentre x, y o b, como se indica en los problemas del 31 al 44.

31. $\log_2 x = 2$
32. $\log_3 x = 3$
33. $\log_4 16 = y$
34. $\log_8 64 = y$
35. $\log_b 16 = 2$
36. $\log_b 10^{-3} = -3$
37. $\log_b 1 = 0$
38. $\log_b b = 1$
39. $\log_4 x = \frac{1}{2}$
40. $\log_8 x = \frac{1}{3}$
41. $\log_{1/3} 9 = y$
42. $\log_{49} (\frac{1}{7}) = y$
43. $\log_b 1\,000 = \frac{3}{2}$
44. $\log_b 4 = \frac{2}{3}$

Escriba los problemas del 45 al 58 en términos de formas logarítmicas más simples (véase el ejemplo 5).

45. $\log_b u^2v^7$
46. $\log_b u^{1/2}v^{1/3}$
47. $\log_b = \frac{m^{2/3}}{n^{1/2}}$
48. $\log_b = \frac{u^3}{v^5}$
49. $\log_b = \frac{u}{vw}$
50. $\log_b = \frac{uv}{w}$
51. $\log_b = \frac{1}{a^3}$
52. $\log_b = \frac{1}{M^5}$
53. $\log_b \sqrt[3]{x^2 - y^2}$
54. $\log_b \sqrt{u^2 + 1}$
55. $\log_b \frac{\sqrt[3]{N}}{p^2q^3}$
56. $\log_b \frac{m^5n^3}{\sqrt{p}}$
57. $\log_b \sqrt[4]{\frac{x^2y^3}{\sqrt{z}}}$
58. $\log_b \sqrt[5]{\left(\frac{x}{y^4z^9}\right)^3}$

En los problemas del 59 al 68, escriba cada expresión en términos de un solo logaritmo con un coeficiente de 1. Ejemplo: $\log_b u^2 - \log_b v = \log_b (u^2/v)$.

59. $2\log_b x - \log_b y$
60. $\log_b m - \frac{1}{2}\log_b n$
61. $\log_b w - \log_b x - \log_b y$
62. $\log_b w + \log_b x - \log_b y$
63. $3\log_b x + 2\log_b y - \frac{1}{4}\log_b z$
64. $\frac{1}{3}\log_b w - 3\log_b x - 5\log_b y$
65. $5(\frac{1}{2}\log_b u - 2\log_b v)$
66. $7(4\log_b m + \frac{1}{3}\log_b n)$
67. $\frac{1}{5}(2\log_b x + 3\log_b y)$
68. $\frac{1}{3}(4\log_b x - 2\log_b y)$

En los problemas del 69 al 76 escriba cada expresión en términos de logaritmos de polinomios de primer grado. Ejemplo:

$$\log_b \frac{(2x+1)^3}{(3x-5)^4} = 3\log_b (2x+1) - 4\log_b (3x-5)$$

69. $\log_b [(x+3)^5(2x-7)^2]$
70. $\log_b [(5x-4)^3(3x+2)^4]$
71. $\log_b \frac{(x+10)^7}{(1+10x)^2}$
72. $\log_b \frac{(x-3)^5}{(5+x)^3}$

73. $\log_b \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

74. $\log_b \frac{\sqrt{x-1}}{x^3}$

75. $\log_b (x^4 + x^3 - 20x^2)$

76. $\log_b (x^5 + 5x^4 - 14x^3)$

En los problemas del 77 al 86, despeje x sin usar una calculadora o una tabla.

77. $\log_2 (x + 5) = 2 \log_2 3$

78. $\log_{10} (5 - x) = 3 \log_{10} 2$

79. $2 \log_5 x = \log_5 (x^2 - 6x + 2)$

80. $\log_{10} (x^2 - 2x - 2) = 2 \log_{10} (x - 2)$

81. $\log_e (x + 8) - \log_e x = 3 \log_e 2$

82. $\log_7 4x - \log_7 (x + 1) = \frac{1}{2} \log_7 4$

83. $2 \log_3 x = \log_3 2 + \log_3 (4 - x)$

84. $\log_4 x + \log_4 (x + 2) = \frac{1}{2} \log_4 9$

85. $3 \log_b 2 + \frac{1}{2} \log_b 25 - \log_b 20 = \log_b x$

86. $\frac{3}{2} \log_b 4 - \frac{2}{3} \log_b 8 + 2 \log_b 2 = \log_b x$

Si $\log_b 2 = 0.69$, $\log_b 3 = 1.10$ y $\log_b 5 = 1.61$, encuentre el valor de cada expresión en los problemas del 87 al 96.

87. $\log_b 30$

88. $\log_b 12$

89. $\log_b \frac{2}{5}$

90. $\log_b \frac{5}{3}$

91. $\log_b 27$

92. $\log_b 16$

93. $\log_b \sqrt[3]{2}$

94. $\log_b \sqrt{3}$

95. $\log_b \sqrt{0.9}$

96. $\log_b \sqrt[3]{1.5}$

C

Grafique los problemas del 97 al 100.

Compruebe los problemas del 97 al 100 con un dispositivo de graficación, graficando la inversa de cada función.

97. $y = \log_2 (x - 2)$

98. $y = \log_2 (x + 3)$

99. $y = \log_2 x - 2$

100. $y = \log_2 x + 3$

101. (A) Para $f = \{(x, y) \mid y = (\frac{1}{2})^x = 2^{-x}\}$, grafique f, f^{-1} y $y = x$ en el mismo sistema coordenado.
(B) Indique el dominio y el rango de f y f^{-1}.
(C) ¿Qué otro nombre se puede usar para la inversa de f?

102. (A) Para $f = \{(x, y) \mid y = (\frac{1}{3})^x = 3^{-x}\}$, grafique f, f^{-1} y $y = x$ en el mismo sistema coordenado.
(B) Indique el dominio y el rango de f y f^{-1}.
(C) ¿Qué otro nombre se puede usar para la inversa de f?

Encuentre la inversa de cada función en los problemas del 103 al 106.

103. $f(x) = 5^{3x-1} + 4$

104. $g(x) = 3^{2x-3} - 2$

105. $g(x) = 3 \log_e (5x - 2)$

106. $f(x) = 2 + \log_e (5x - 3)$

107. Explique por qué la gráfica de la reflexión de la función $y = 3^x$ con respecto a la recta $y = x$ no es la gráfica de una función.

108. Explique por qué la gráfica de la reflexión de la función $y = 2^{|x|}$ con respecto a la recta $y = x$ no es la gráfica de una función.

109. Escriba $\log_e x - \log_e 100 = -0.08t$ en una forma exponencial que no contenga logaritmos.

110. Escriba $\log_e x - \log_e C + kt = 0$ en una forma exponencial que no contenga logaritmos.

111. Pruebe que $\log_b (M/N) = \log_b M - \log_b N$ con base en las hipótesis del teorema 1.

112. Pruebe que $\log_b M^p = p \log_b M$ con base en las hipótesis del teorema 1.

SECCIÓN 4-4 Logaritmos comunes y naturales

- Logaritmos comunes y naturales (definición y evaluación)
- Aplicaciones

A John Napier (1550-1617) se le acredita la invención de los logaritmos, cuyo origen se debe a su interés por reducir el esfuerzo en los cálculos en la investigación astronómica. Esta nueva herramienta de cálculo fue aceptada de inmediato por el mundo científico. Ahora, con la disponibilidad de calculadoras económicas, los logaritmos han perdido gran parte de su importancia como dispositivos de cálculo. Sin embargo, el concepto de logaritmos se ha generalizado debido a que su concepción y las funciones logarítmicas se han usado ampliamente en ciencias teóricas y aplicadas.

De todas las bases logarítmicas posibles, la base e y la base 10 se usan casi en forma exclusiva. Antes de poder usar logaritmos en ciertos problemas prácticos, es necesario ser capaz de aproximar el logaritmo de cualquier número positivo, ya sea de base 10 o de base e. E inversamente, si se da el logaritmo de un número de base 10 o de base e, se necesita poder aproximar el número. Históricamente, se han usado tablas para este propósito, pero ahora se usan calculadoras, ya que son más rápidas y se puede encontrar un mayor número de valores del que se podría incluir en cualquier tabla.

• Logaritmos comunes y naturales (definición y evaluación)

Los **logaritmos comunes** también llamados **logaritmos de Briggsian**, son los logaritmos de base 10. Los **logaritmos naturales** se conocen también como **logaritmos neperianos**, éstos son los logaritmos de base e. La mayoría de las calculadoras tienen una función clave etiquetada como "log" y otra etiquetada como "ln". La primera representa un logaritmo común y la segunda un logaritmo natural. De hecho, "log" y "ln" se usan extensamente en la literatura matemática, y en todo momento se verá que se usa una u otra en el libro sin indicar una base, esto se debe interpretar de la manera siguiente:

Notación logarítmica

$\log x = \log_{10} x$ **Logaritmo común**

$\ln x = \log_e x$ **Logaritmo natural**

EJEMPLO 1 **Uso de una calculadora para la evaluación de logaritmos**

Use una calculadora para evaluar cada una con seis cifras decimales:

(A) log 3 184 (B) ln 0.000 349 (C) log (−3.24)

Soluciones

(A) log 3 184 = 3.502973
(B) ln 0.000349 = −7.960439
(C) log (−3.24) = Error

¿Por qué se indica un error en el inciso C? Se debe a que −3.24 no está en el dominio de la función log. [*Nota:* Las calculadoras despliegan mensajes de error de varias maneras. Algunas usan una definición más avanzada de las funciones logarítmicas que implican números complejos. Una de ellas despliega un par ordenado que representa un número complejo, como el valor de log (−3.24), en vez de un mensaje de error. Este mensaje se debe interpretar como una indicación de que el número introducido no está en el dominio de la función logarítmica como se le ha definido.]

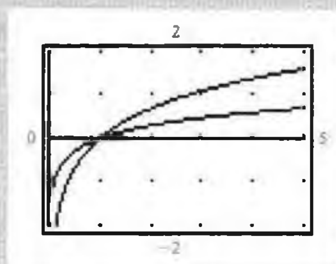
Problema seleccionado 1 Use una calculadora para evaluar cada una con seis cifras decimales:

(A) log 0.013 529 (B) ln 28.693 28 (C) ln (−0.438)

Cuando se trabaja con logaritmos comunes y naturales la práctica común es usar el signo igual "=" donde quizás lo más apropiado sea utilizar el signo aproximadamente

igual "≈". Esto no es perjudicial siempre que se tenga en mente que en un enunciado tal como log 3.184 = 0.503, el número en el lado derecho sólo supone una precisión de hasta tres cifras decimales y no es exacto.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Las gráficas de las funciones $f(x) = \log x$ y $g(x) = \ln x$ se muestran en el despliegue del dispositivo de graficación de la figura 1. ¿Cuál gráfica pertenece a cuál función? Si en el despliegue parece que una de las funciones puede ser un múltiplo constante de la otra, compruebe si es así. Encuentre y analice la evidencia para su respuesta.



EJEMPLO 2 **Evaluación de logaritmos con calculadora**

Use una calculadora para evaluar cada expresión hasta con tres cifras decimales:

(A) $\dfrac{\log 2}{\log 1.1}$ (B) $\log \dfrac{2}{1.1}$ (C) $\log 2 - \log 1.1$

Soluciones (A) $\dfrac{\log 2}{\log 1.1} = 7.273$

(B) $\log \dfrac{2}{1.1} = 0.260$

(C) $\log 2 - \log 1.1 = 0.260$ Observe que $\dfrac{\log 2}{\log 1.1} \neq \log 2 - \log 1.1$, pero $\log \dfrac{2}{1.1} =$ $\log 2 - \log 1.1$ (véase el teorema 1, de la sección 4−3).

Problema seleccionado 2 Use una calculadora para evaluar cada una hasta con tres cifras decimales:

(A) $\dfrac{\ln 3}{\ln 1.08}$ (B) $\ln \dfrac{3}{1.08}$ (C) $\ln 3 - \ln 1.08$

Ahora se abordará el segundo problema: Dado el logaritmo de un número, encuentre el número. Para resolver este problema, se usan directamente de las relaciones logarítmicas y exponenciales analizadas en la sección 4-3.

Relaciones logarítmicas y exponenciales

$\log x = y$	es equivalente a	$x = 10^y$
$\ln x = y$	es equivalente a	$x = e^y$

EJEMPLO 3 **Despeje a x de $\log_b x = y$**

Encuentre x con tres dígitos significativos, dados los logaritmos indicados.

(A) $\log x = -9.315$ (B) $\ln x = 2.386$

Soluciones (A) $\log x = -9.315$

$x = 10^{-9.315}$ Cambio a una forma exponencial equivalente.

$= 4.84 \times 10^{-10}$

Observe que la respuesta se despliega en notación científica en la calculadora.

(B) $\ln x = 2.386$

$x = e^{2.386}$ Cambio a una forma exponencial equivalente.

$= 10.9$

Problema seleccionado 3 Encuentre x para cuatro dígitos significativos, dados los logaritmos indicados.

(A) $\ln x = -5.062$ (B) $\log x = 12.0821$

Aplicaciones

Se considerarán ahora tres aplicaciones que se resolvieron usando logaritmos comunes y naturales. La primera aplicación se relaciona con la intensidad del sonido; la segunda con la intensidad de un terremoto; y la tercera, con la teoría del vuelo de un cohete.

Intensidad del sonido

El oído humano es capaz de oír el sonido en un rango increíble de intensidades. El sonido más fuerte que una persona saludable puede oír sin daño en el tímpano tiene una intensidad de un billón (1 000 000 000 000) de veces la del sonido más suave que puede percibir. Trabajar directamente con números con un rango tan amplio como éste es muy incómodo. Puesto que el logaritmo de base más grande que 1, de un número aumenta mucho más lentamente que el número mismo, con frecuencia se usan los logaritmos para crear escalas comprimidas más convenientes. La escala de decibeles para la intensidad del sonido es un ejemplo de tal escala. El **decibel**, llamado así por el inventor del teléfono, Alexander Graham Bell (1847-1922), se define como sigue:

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0} \qquad \text{Escala de decibeles} \qquad (1)$$

donde D es el **nivel de decibeles** del sonido, I es la **intensidad** del sonido medida en watts por metro cuadrado (W/m^2) e I_0 es la intensidad del sonido más pequeño audible que una persona promedio, joven y saludable puede escuchar. Este último se estandariza a $I_0 = 10^{-12}$ watts sobre metro cuadrado. En la tabla 1 se enumera algunas intensidades de sonidos típicos de fuentes familiares.

TABLA 1 Intensidades típicas del sonido

Intensidad del sonido, W/m^2	Sonido
1.0×10^{-12}	Umbral del oído
5.2×10^{-10}	Cuchicheo
3.2×10^{-6}	Conversación normal
8.5×10^{-4}	Tráfico pesado
3.2×10^{-3}	Taladro
1.0×10^{0}	Umbral del dolor
8.3×10^{2}	Avión de reacción con posquemador

EJEMPLO 4 **Intensidad del sonido**

Encuentre el número de decibeles de un cuchicheo con intensidad de sonido de 5.20×10^{-10} watt por metro cuadrado. Calcule la respuesta hasta dos cifras decimales.

Solución Se usa la fórmula de decibeles (1):

$$\begin{aligned} D &= 10 \log \frac{I}{I_0} \\ &= 10 \log \frac{5.2 \times 10^{-10}}{10^{-12}} \\ &= 10 \log (5.2 \times 10^{2}) \\ &= 10(\log 5.2 + \log 10^{2}) \\ &= 10(0.716 + 2) \qquad \log 5.2 = 0.716 \\ &= 27.16 \text{ decibeles} \end{aligned}$$

Problema seleccionado 4 Encuentre el número de decibeles de un taladro con intensidad de sonido de 3.2×10^{-3} watt por metro cuadrado. Calcule la respuesta hasta dos cifras decimales.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Imagine que usa una hoja de cuadrícula grande, con líneas horizontales y verticales separadas por $\frac{1}{8}$ de pulgada, para graficar las intensidades de sonido de la tabla 1 en el eje x y el decibel correspondiente en el eje y. Suponga que cada $\frac{1}{8}$ de pulgada en el eje x representa la intensidad del menor sonido audible (10^{-12} W/m^2), y que cada unidad de $\frac{1}{8}$ de pulgada en el eje y representa un decibel. Si el punto correspondiente a un avión de reacción con posquemador está graficado en una hoja cuadriculada, ¿a qué distancia está éste del eje x? ¿Y del eje y? (¡Dé la primera respuesta en pulgadas y la segunda en millas!) Analice.

Intensidad de un terremoto

La energía liberada por un terremoto, medida en joules, es aproximadamente de 100 mil millones (100 000 000 000) de veces la energía liberada por un terremoto de poca intensidad. En los pasados 150 años muchas personas de diversos países han desarrollado diferentes escalas para medir las magnitudes de los terremotos, de tal manera que su severidad pueda ser comparada fácilmente. En 1935, el sismólogo de California Charles Richter desarrolló una escala logarítmica que lleva su nombre y se usa ampliamente en Estados Unidos. La **magnitud** M en la **escala de Richter*** está dada como sigue:

$$M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0} \qquad \text{Escala de Richter} \qquad (2)$$

donde E es la energía liberada por el terremoto, medida en joules, y E_0 es la energía liberada por un terremoto de muy leve intensidad que se ha estandarizado como:

$$E_0 = 10^{4.40} \text{ joules}$$

El poder destructivo de los terremotos de acuerdo con las magnitudes de la escala de Richter está indicado en la tabla 2.

TABLA 2
La escala de Richter

Magnitud en la escala de Richter	Poder de destrucción
$M < 4.5$	Pequeña
$4.5 < M < 5.5$	Moderada
$5.5 < M < 6.5$	Grande
$6.5 < M < 7.5$	Mayor
$7.5 < M$	Máxima

EJEMPLO 5 **Intensidad de un terremoto**

El terremoto de San Francisco en 1906 liberó aproximadamente 5.96×10^{16} joules de energía. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter? Calcule su respuesta hasta dos cifras decimales.

Solución Se usa la fórmula de la magnitud (2):

$$M = \frac{2}{3}\log\frac{E}{E_0}$$

$$= \frac{2}{3}\log\frac{5.96 \times 10^{16}}{10^{4.40}}$$

* Originalmente, Richter definió la magnitud de un terremoto en términos de logaritmos de la amplitud de onda sísmica máxima, en milésimas de milímetro, medidas en un sismógrafo estándar. La fórmula 2 da esencialmente la misma magnitud que obtuvo Richter para un terremoto dado, pero en términos de los logaritmos de la energía liberada por éste.

$$= \frac{2}{3}\log(5.96 \times 10^{11.6})$$

$$= \frac{2}{3}(\log 5.96 + \log 10^{11.6})$$

$$= \frac{2}{3}(0.775 + 11.6)$$

$$= 8.25$$

Problema seleccionado 5 El terremoto de 1985 en Chile liberó aproximadamente 1.26×10^{16} joules de energía. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter? Calcule su respuesta con dos cifras decimales.

EJEMPLO 6 **Intensidad de un terremoto**

Si la energía liberada por un terremoto es 1 000 veces la de otro, ¿cuánto más grande es en la escala de Richter la lectura del más grande comparada con la del más pequeño?

Solución Sean

$$M_1 = \frac{2}{3}\log\frac{E_1}{E_0} \quad \text{y} \quad M_2 = \frac{2}{3}\log\frac{E_2}{E_0}$$

las ecuaciones de Richter para los terremotos pequeño y grande, respectivamente. Sustituyendo $E_2 = 1\,000E_1$, en la segunda ecuación, se obtiene

$$M_2 = \frac{2}{3}\log\frac{1\,000E_1}{E_0}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\log 10^3 + \log\frac{E_1}{E_0}\right)$$

$$= \frac{2}{3}(3) + \frac{2}{3}\log\frac{E_1}{E_0}$$

$$= 2 + M_1$$

Así, un terremoto con 1 000 veces la energía de otro tiene en la escala de Richter una lectura de dos veces mayor que la del otro.

Problema seleccionado 6 Si la energía liberada por un terremoto es 10 000 veces la de otro, ¿cuánto más grande es la lectura en la escala de Richter del más grande comparado con el más pequeño?

Teoría de vuelo de un cohete

La teoría de vuelo de un cohete se utiliza en matemáticas y física avanzada para mostrar que la velocidad v de un cohete al apagarse (cuando se le agota el combustible) está dada por

$$v = c \ln \frac{W_t}{W_b} \quad \text{Ecuación del cohete} \tag{3}$$

donde c es la velocidad de escape del motor del cohete, W_t es el peso de partida (el combustible, la estructura y la carga útil), y W_b es el peso consumido (la estructura y la carga útil).

Debido a la resistencia atmosférica de la Tierra, la velocidad de un vehículo de lanzamiento debe ser de al menos 9.0 kilómetros por segundo con el fin de lograr la altitud mínima necesaria para alcanzar una órbita fija. Es evidente que para aumentar la velocidad v, se debe incrementar la razón del peso W_t/W_b o se debe aumentar la velocidad de escape c. La razón del peso se puede aumentar por el uso de combustibles sólidos, y la velocidad de escape mejorando los combustibles, sólidos o líquidos.

EJEMPLO 7 Teoría de vuelo de un cohete

En una etapa típica, el combustible sólido de un cohete puede tener una razón de peso $W_t/W_b = 18.7$ y una velocidad de escape $c = 2.38$ kilómetros por segundo. ¿Alcanzaría este cohete una velocidad de lanzamiento de 9.0 kilómetros por segundo?

Solución Usando la ecuación de cohete (3):

$$\begin{aligned} v &= c \ln \frac{W_t}{W_b} \\ &= 2.38 \ln 18.7 \\ &= 6.97 \text{ kilómetros por segundo} \end{aligned}$$

La velocidad de lanzamiento del vehiculo es mucho menor que los 9.0 kilómetros por segundo necesarios para llegar a la órbita. A esto se debe la utilización de etapas múltiples de lanzamiento (el peso muerto de la etapa anterior se puede tirar al océano cuando se inicia la siguiente etapa).

Problema seleccionado 7 Un vehículo de lanzamiento que usa combustible líquido, como una mezcla de hidrógeno líquido y de oxígeno líquido, puede producir una velocidad de escape de $c = 4.7$ kilómetros por segundo. Sin embargo, la razón del peso W_t/W_b debe ser pequeña, de alrededor de 5.5 km/s para algunos vehículos y debida al incremento del peso estructural por el combustible líquido. ¿Cuánto más o cuánto menos que los 9.0 kilómetros por segundo se necesitan para que el vehículo logre alcanzar la órbita?

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $-1.868\,734$ (B) $3.356\,663$ (C) No es posible
2. (A) 14.275 (B) 1.022 (C) 1.022
3. (A) $x = 0.006\,333$ (B) $x = 1.21 \times 10^{12}$ **4.** 95.05 decibeles **5.** 7.80 **6.** 2.67
7. Menor de 1 km/s

EJERCICIO 4-4

A

En los problemas del 1 al 8, evalúe con cuatro cifras decimales.

1. log 82 734 **2.** log 843 250

3. log 0.001 439 **4.** log 0.035 604

5. ln 43.046 **6.** ln 2 843 100

7. ln 0.081 043 **8.** ln 0.000 032 4

En los problemas del 9 al 16, evalúe x con cuatro dígitos significativos, dado que:

9. $\log x = 5.3027$ **10.** $\log x = 1.9168$

11. $\log x = -3.1773$ **12.** $\log x = -2.0411$

13. $\ln x = 3.8655$ **14.** $\ln x = 5.0884$

15. $\ln x = -0.3916$ **16.** $\ln x = -4.1083$

B

En los problemas del 17 al 24, evalúe con tres cifras decimales.

17. $n = \dfrac{\log 2}{\log 1.15}$ **18.** $n = \dfrac{\log 2}{\log 1.12}$

19. $n = \dfrac{\ln 3}{\ln 1.15}$ **20.** $n = \dfrac{\ln 4}{\ln 1.2}$

21. $x = \dfrac{\ln 0.5}{-0.21}$ **22.** $x = \dfrac{\ln 0.1}{-0.0025}$

23. $t = \dfrac{\ln 150}{\ln 3}$ **24.** $t = \dfrac{\log 200}{\log 2}$

En los problemas del 25 al 32, evalúe x con cinco dígitos significativos.

25. $x = \log(5.3147 \times 10^{12})$

26. $x = \log(2.0991 \times 10^{17})$

27. $x = \ln(6.7917 \times 10^{-12})$

28. $x = \ln(4.0304 \times 10^{-8})$

29. $\log x = 32.068\,523$ **30.** $\log x = -12.731\,64$

31. $\ln x = -14.667\,13$ **32.** $\ln x = 18.891\,143$

Grafique cada función de los problemas del 33 al 40.

Compruebe los problemas del 33 al 40 con un dispositivo de graficación.

33. $y = \ln x$ **34.** $y = -\ln x$

35. $y = |\ln x|$ **36.** $y = \ln |x|$

37. $y = 2\ln(x + 2)$ **38.** $y = 2\ln x + 2$

39. $y = 4\ln x - 3$ **40.** $y = 4\ln(x - 3)$

C

41. Encuentre el error:

$$1 < 3$$
$$\tfrac{1}{27} < \tfrac{3}{27} \quad \text{Divida ambos lados entre 27.}$$
$$\tfrac{1}{27} < \tfrac{1}{9}$$
$$(\tfrac{1}{3})^3 < (\tfrac{1}{3})^2$$
$$\log(\tfrac{1}{3})^3 < \log(\tfrac{1}{3})^2$$
$$3\log\tfrac{1}{3} < 2\log\tfrac{1}{3}$$
$$3 < 2 \quad \text{Divida ambos lados entre } \log\tfrac{1}{3}.$$

42. Encuentre el error:

$$3 > 2$$
$$3\log\tfrac{1}{2} > 2\log\tfrac{1}{2} \quad \text{Multiplique ambos lados por } \log\tfrac{1}{2}.$$
$$\log(\tfrac{1}{2})^3 > \log(\tfrac{1}{2})^2$$
$$(\tfrac{1}{2})^3 > (\tfrac{1}{2})^2$$
$$\tfrac{1}{8} > \tfrac{1}{4}$$
$$1 > 2 \quad \text{Multiplique ambos lados por 8.}$$

43. La función $f(x) = \log x$ aumenta muy lentamente cuando $x \to \infty$, pero la función compuesta $g(x) = \log(\log x)$ aumenta aun más lentamente.

(A) Ilustre este hecho calculando los valores de ambas funciones para diversos valores grandes de x.
(B) Determine el dominio y el rango de la función g.
(C) Analice las gráficas de ambas funciones.

44. La función $f(x) = \ln x$ aumenta muy lentamente cuando $x \to \infty$, pero la función compuesta $g(x) = \ln(\ln x)$ aumenta aún más lentamente.

(A) Ilustre este hecho calculando los valores de ambas funciones para diversos valores grandes de x.
(B) Determine el dominio y el rango de la función g.
(C) Analice las gráficas de ambas funciones.

En los problemas del 45 al 48, use un dispositivo de graficación para encontrar las coordenadas de todos los puntos de intersección con dos cifras decimales.

45. $f(x) = \ln x$, $g(x) = 0.1x - 0.2$

46. $f(x) = \log x$, $g(x) = 4 - x^2$

47. $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^{1/3}$

48. $f(x) = 3\ln(x-2)$, $g(x) = 4e^{-x}$

Los problemas del 49 al 52 requieren del uso de un dispositivo de graficación.

Los polinomios en los problemas del 49 al 52, se llaman ***polinomios de Taylor****, se puede usar para aproximar la función $g(x) = \ln(1 + x)$. Para ilustrar gráficamente esta aproximación, grafique en cada problema a $g(x) = \ln(1 + x)$ y al polinomio indicado en la misma ventana de visión, $-1 \le x \le 3$ y $-2 \le y \le 2$.*

49. $P_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2$

50. $P_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$

51. $P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

52. $P_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$

APLICACIONES

53. Sonido. ¿Cuál es el nivel de decibeles de:

(A) el umbral del oído, 1.0×10^{-12} watt por metro cuadrado?
(B) el umbral del dolor, 1.0 watts por metro cuadrado?

Calcule las respuestas con dos dígitos significativos.

54. Sonido. ¿Cuál es el nivel de decibeles de:

(A) una conversación normal, 3.2×10^{-6} watts por metro cuadrado?

(B) un avión de propulsión con un posquemador de 8.3×10^2 watts por metro cuadrado?

Calcule sus respuestas con dos dígitos significativos.

55. Sonido. ¿Si la intensidad de sonido de una fuente es 1 000 veces la de otro, cuánto mayor es el nivel de decibeles del sonido más fuerte comparado con el del sonido más bajo?

56. Sonido. ¿Si la intensidad de sonido de una fuente es 10 000 veces la de otro, cuanto mayor es el nivel de decibeles del sonido más fuerte comparado con el del sonido más bajo?

57. Terremotos. El terremoto más intenso registrado hasta la fecha ocurrió en Colombia en 1906, liberó una energía de 1.99×10^{17} joules. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter? Calcule la respuesta con una cifra decimal.

58. Terremotos. En 1964, en Anchorage, Alaska, ocurrió un gran terremoto que liberó 7.08×10^{16} joules de energía. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter? Calcule la respuesta hasta una cifra decimal.

59. Terremotos. En 1933, en Long Beach, California, hubo un terremoto de 6.3 grados de intensidad en la escala de Richter, y en 1964 en Anchorage, Alaska, ocurrió otro de 8.3 grados de intensidad en la misma escala. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Anchorage que el de Long Beach?

60. Terremotos. Generalmente, la intensidad de un terremoto debe ser superior a los 5.6 grados en la escala de Richter para causar un daño grave. ¿Cuántas veces más intenso fue que el gran terremoto de Colombia ocurrido en 1906, que registró una magnitud de 8.6 grados en la escala de Richter?

61. Vehículos espaciales. Un cohete nuevo de combustible sólido tiene una razón de peso de $W_t/W_b = 19.8$ y una velocidad de escape $c = 2.57$ kilómetros por segundo. ¿Cuál es su velocidad de agotamiento? Calcule la respuesta con dos cifras decimales.

62. Vehículos espaciales. Un cohete de combustible líquido tiene una razón de peso de $W_t/W_b = 6.2$ y una velocidad de escape $c = 5.2$ kilómetros por segundo. ¿Cuál es su velocidad de agotamiento? Calcule la respuesta con dos cifras decimales.

63. Química. La concentración del ion de hidrógeno de una sustancia se relaciona con su acidez y basicidad. Debido a que las concentraciones del ion de hidrógeno varían en un rango muy amplio, se usan los logaritmos para crear una **escala de pH** comprimida, que se define como sigue:

$$\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$$

donde $[\text{H}^+]$ es la concentración del ion de hidrógeno, en moles por litro. El agua pura tiene un pH de 7, lo cual significa que es neutra. Las sustancias con un pH menor de 7 son ácidas, y las que tienen un pH mayor que 7 son básicas. Calcule el pH de cada una de las sustancias siguientes, dada la concentración indicada del ion de hidrógeno.

(A) Agua de mar, 4.63×10^{-9}
(B) Vinagre, 9.32×10^{-4}

Indique también si es ácido o básico. Calcule sus respuestas hasta una cifra decimal.

64. Química. Refiriéndose al problema 63, calcule el pH de cada una de las substancias siguientes, dada la concentración indicada del ion de hidrógeno. Indique también si es ácido o básico. Calcule las respuestas con una cifra decimal.

(A) Leche, 2.83×10^{-7}
(B) La paja del cultivo, 3.78×10^{-6}

65. Ecología. Refiérase al problema 63. En muchos lagos de Canadá y Estados Unidos se extinguieron algunas formas de fauna debido al aumento en la acidez del agua de lluvia y de la nieve causadas por las emisiones de bióxido de azufre de la industria. Si el pH de una muestra de agua de lluvia es 5.2, ¿cuál es su concentración de iones de hidrógeno en moles por litro? Calcule la respuesta hasta una cifra decimal.

66. Ecología. Refiérase al problema 63. Si el agua de lluvia normal tiene un pH de 5.7, ¿cuál es su concentración de iones de hidrógeno en moles por litro? Calcule la respuesta con una cifra decimal.

SECCIÓN 4-5 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

- Ecuaciones exponenciales
- Ecuaciones logarítmicas
- Cambio de base

Las ecuaciones que implican funciones exponenciales y logarítmicas, tales como

$$2^{3x-2} = 5 \qquad \text{y} \qquad \log(x+3) + \log x = 1$$

se llaman **ecuaciones exponenciales** y **logarítmicas**, respectivamente. Las propiedades de los logaritmos desempeñan un papel central en su solución.

Ecuaciones exponenciales

Los ejemplos siguientes ilustran el uso de las propiedades de los logaritmos en la solución de las ecuaciones exponenciales.

EJEMPLO 1 Solución de una ecuación exponencial

Despeje x de $2^{3x-2} = 5$ con cuatro cifras decimales.

Solución ¿Cómo se puede despejar x del exponente? ¡Usando logaritmos! Puesto que la función logaritmo es uno a uno, si dos cantidades positivas son iguales, sus logaritmos son iguales. Véase el teorema 1 en la sección 4-3.

$$2^{3x-2} = 5$$

$$\log 2^{3x-2} = \log 5 \qquad \text{Tome el logaritmo común o natural de ambos lados.}$$

$$(3x-2)\log 2 = \log 5 \qquad \text{Use } \log_b N^p = p \log_b N \text{ para sacar } 3x-2 \text{ de la posición del exponente.}$$

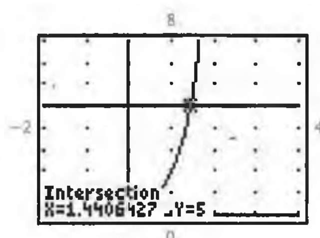
$$3x - 2 = \frac{\log 5}{\log 2}$$

$$x = \frac{1}{3}\left(2 + \frac{\log 5}{\log 2}\right) \qquad \textit{Recuerde: } \frac{\log 5}{\log 2} \neq \log 5 - \log 2.$$

$$= 1.4406 \qquad \text{Con cuatro cifras decimales}$$

Un dispositivo de graficación proporciona un enfoque alternativo. Se grafican las funciones $y_1 = 2^{3x-2}$ y $y_2 = 5$ y se usa la rutina de intersección, como se indica en la figura 1.

FIGURA 1



Problema seleccionado 1 Despeje x de $35^{1-2x} = 7$ con cuatro cifras decimales.

EJEMPLO 2 **Interés compuesto**

Una cierta cantidad de dinero P (capital) se invierte a una tasa anual r de interés compuesto anualmente. La cantidad de dinero A en la cuenta después de t años, suponiendo que no hay retiros, está dada por

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P(1 + r)^t \quad n = 1 \text{ para interés compuesto anual}$$

¿Calcule cuántos años aproximando al año más cercano pasarán para que se duplique si se invirtió a un 6% de interés compuesto anualmente?

Solución Para encontrar el tiempo de duplicación, se reemplaza A por $2P$ en la ecuación $A = P(1.06)^t$ y se despeja t.

$$2P = P(1.06)^t$$

$$2 = 1.06^t \quad \text{Divida ambos lados entre } P.$$

$$\log 2 = \log 1.06^t \quad \text{Tome el logaritmo común o natural de ambos lados.}$$

$$= t \log 1.06 \quad \text{Observe cómo se han usado las propiedades de los logaritmos para sacar } t \text{ del exponente.}$$

$$t = \frac{\log 2}{\log 1.06}$$

$$= 12 \text{ años} \quad \text{Aproxime al año más cercano}$$

Problema seleccionado 2 Repita el ejemplo 2, cambiando la tasa de interés al 9% compuesto anualmente.

EJEMPLO 3 **Presión atmosférica**

La presión atmosférica P, en libras por pulgada cuadrada, para x millas sobre nivel del mar está dada aproximadamente por

$$P = 14.7e^{-0.21x}$$

¿A qué altura la presión atmosférica será la mitad de la presión al nivel del mar? Calcule la respuesta con dos dígitos significativos.

Solución La presión al nivel del mar es la presión en $x = 0$. Así,

$$P = 14.7e^0 = 14.7$$

La mitad de la presión al nivel del mar es de $14.7/2 = 7.35$. El problema consiste ahora en encontrar a x tal que $P = 7.35$; es decir, se despeja x de $7.35 = 14.7e^{-0.21x}$:

$$7.35 = 14.7e^{-0.21x}$$

$$0.5 = e^{-0.21x}$$ Divida ambos lados entre 14.7 y simplifique.

$$\ln 0.5 = \ln e^{-0.21x}$$ Debido a que la base es e, se toma el logaritmo natural de ambos lados.

$$= -0.21x$$ $\ln e = 1$

$$x = \frac{\ln 0.5}{-0.21}$$

$$= 3.3 \text{ millas}$$ Con dos dígitos significativos

Problema seleccionado 3 Usando la fórmula del ejemplo 3, encuentre la altitud en millas de manera que la presión atmosférica sea un octavo de la presión al nivel del mar. Calcule la respuesta con dos dígitos significativos.

La gráfica de

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{1}$$

es una curva llamada **catenaria** (figura 2). Un cable uniforme suspendido entre dos puntos fijos es un ejemplo físico de esta curva.

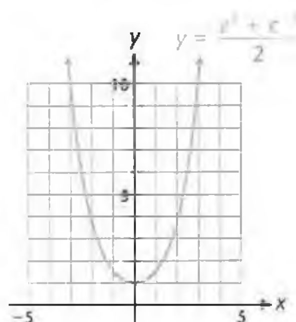


FIGURA 2 Catenaria.

EJEMPLO 4 **Solución de una ecuación exponencial**

De la ecuación dada (1), encuentre x para $y = 2.5$. Calcule la respuesta con cuatro cifras decimales.

Solución

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$2.5 = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$5 = e^x + e^{-x}$$

$$5e^x = e^{2x} + 1$$ Multiplique ambos lados por e^x.

$$e^{2x} - 5e^x + 1 = 0$$ Ésta es una ecuación cuadrática en e^x.

Sea $u = e^x$; entonces

$$u^2 - 5u + 1 = 0$$

$$u = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4(1)(1)}}{2}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

$$e^x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$ Reemplace a u con e^x y despeje x.

$$\ln e^x = \ln \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$ Tome el logaritmo natural de ambos lados (ambos valores del lado derecho son positivos).

$$x = \ln \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$ $\log_b b^x = x$.

$$= -1.5668, 1.5668$$

Problema seleccionado 4

Dado $y = (e^x - e^{-x})/2$, encuentre x para $y = 1.5$. Calcule la respuesta con tres cifras decimales.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Sea $y = e^{2x} + 3e^x + e^{-x}$

(A) Intente encontrar x cuando $y = 7$ con el método usado en el ejemplo 4. Explique la dificultad que surge.

(B) Use un dispositivo de graficación para encontrar a x cuando $y = 7$.

Ecuaciones logarítmicas

En seguida se ilustrará la solución de diversos tipos de ecuaciones logarítmicas.

EJEMPLO 5 Solución de una ecuación logarítmica

Resuelva $\log(x + 3) + \log x = 1$, y compruebe.

Solución Use primero las propiedades de los logaritmos para expresar el lado izquierdo como un solo logaritmo, después convierta a la forma exponencial y despeje x.

$$\log(x + 3) + \log x = 1$$

$$\log[x(x + 3)] = 1$$ Combine el lado izquierdo usando $\log M + \log N = \log MN$.

$$x(x + 3) = 10^1$$ Cambie a la forma exponencial equivalente.

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \text{Escriba en la forma } ax^2 + bx + c = 0 \text{ y resuelva.}$$
$$(x + 5)(x - 2) = 0$$
$$x = -5, 2$$

Comprobación $x = -5$: $\log(-5 + 3) + \log(-5)$ no está definido porque el dominio de la función log es $(0, \infty)$.

$x = 2$: $\log(2 + 3) + \log 2 = \log 5 + \log 2$
$$= \log(5 \cdot 2) = \log 10 \stackrel{\checkmark}{=} 1$$

Así, la única solución para la ecuación original es $x = 2$. Recuerde, se deben verificar las respuestas en la ecuación original para ver si se debe descartar alguna de éstas.

Problema seleccionado 5 Resuelva $\log(x - 15) = 2 - \log x$, y compruebe.

EJEMPLO 6 **Solución de una ecuación logarítmica**

Resuelva $(\ln x)^2 = \ln x^2$.

Solución No hay propiedades logarítmicas para simplificar $(\ln x)^2$. Sin embargo, se puede simplificar $\ln x^2$, obteniendo una ecuación que involucre a $\ln x$ y a $(\ln x)^2$.

$$(\ln x)^2 = \ln x^2$$
$$= 2 \ln x \quad \text{Ésta es una ecuación cuadrática en } \ln x$$
Cambie todos los términos diferentes de cero al lado izquierdo y factorice.
$$(\ln x)^2 - 2\ln x = 0$$
$$(\ln x)(\ln x - 2) = 0$$
$$\ln x = 0 \quad \text{o} \quad \ln x - 2 = 0$$
$$x = e^0 \qquad \ln x = 2$$
$$= 1 \qquad x = e^2$$

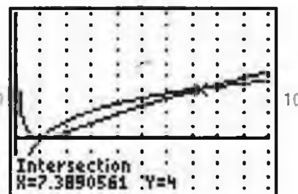


FIGURA 3

Verificar que $x = 1$ y $x = e^2$ son soluciones de la ecuación original se le deja al lector.

Un dispositivo de graficación proporciona un enfoque alternativo. Se grafican las funciones $y_1 = (\ln x)^2$ y $y_2 = \ln x^2$ y se usa la rutina de intersección como se indica en la figura 3. Observe que $x = 7.389$ es una aproximación del valor de e^2, que es una de las soluciones de la ecuación original. De manera que se pueda usar un dispositivo de graficación para resolver muchas ecuaciones complicadas que involucran a las funciones exponencial y logarítmica y que no se pueden resolver por los métodos algebraicos de los ejemplos 1-6. Véase el ejercicio 4-5.

Problema seleccionado 6 Resuelva $\log x^2 = (\log x)^2$.

PRECAUCIÓN Observe que

$$(\log_b x)^2 \neq \log_b x^2$$

$(\log_b x)^2 = (\log_b x)(\log_b x)$
$\log_b x^2 = 2 \log_b x$

EJEMPLO 7 **Intensidad de un terremoto**

Recuerde de la sección 4-4 que la magnitud de un terremoto en la escala de Richter está dada por

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

Despeje E en términos de los otros símbolos.

Solución

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

$$\log \frac{E}{E_0} = \frac{3M}{2} \qquad \text{Multiplique ambos lados por } \tfrac{3}{2}.$$

$$\frac{E}{E_0} = 10^{3M/2} \qquad \text{Cambie a la forma exponencial.}$$

$$E = E_0 10^{3M/2}$$

Problema seleccionado 7 Resuelva la ecuación de un cohete de la sección 4-4 para W_b en términos de los otros símbolos:

$$v = c \ln \frac{W_t}{W_b}$$

■ **Cambio de base** ¿Cómo se podría encontrar el logaritmo de un número positivo en una base distinta de 10 o e? ¿Por ejemplo, cómo se encontraría $\log_3 5.2$? En el ejemplo 8 se evaluó este logaritmo con un proceso directo. Después se desarrolló una fórmula de cambio de base para encontrar estos logaritmos en general. Por consiguiente, incluso se podrá recordar con más facilidad el proceso de la fórmula.

EJEMPLO 8 **Evaluación de un logaritmo de base 3**

Evalúe $\log_3 5.2$ con cuatro cifras decimales.

Solución Sea $y = \log_3 5.2$ y proceda como sigue:

$$\log_3 5.2 = y$$

$$5.2 = 3^y \qquad \text{Cambie a la forma exponencial.}$$

$$\ln 5.2 = \ln 3^y \qquad \text{Tome el logaritmo natural (o logaritmo común) en ambos lados.}$$

$$= y \ln 3 \qquad \log_b M^p = p \log_b M$$

$$y = \frac{\ln 5.2}{\ln 3} \qquad \text{Despeje } y.$$

Reemplace y con $\log_3 5.2$ del primer paso, y con una calculadora evalúe el lado derecho:

$$\log_3 5.2 = \frac{\ln 5.2}{\ln 3} = 1.5007$$

Problema seleccionado 8 Evalúe $\log_{0.5} 0.0372$ con cuatro cifras decimales.

Para desarrollar una fórmula de cambio de base para bases positivas arbitrarias, con ninguna base igual a 1, se procede como en el ejemplo anterior. Sea $y = \log_b N$, dónde N y b son positivos y $b \neq 1$. Entonces

$$\log_b N = y$$

$$N = b^y \qquad \text{Escriba en la forma exponencial.}$$

$$\log_a N = \log_a b^y \qquad \text{En cada lado tome el logaritmo en otra base positiva } a,\ a \neq 1.$$

$$= y \log_a b \qquad \log_b M^p = p \log_b M$$

$$y = \frac{\log_a N}{\log_a b} \qquad \text{Despeje } y.$$

Reemplazando a y con $\log_b N$ del primer paso, se obtiene una **fórmula de cambio de base**:

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

En palabras, esta fórmula expresa que el logaritmo de un número para una base dada es el logaritmo del número en una base nueva dividido entre el logaritmo de la base vieja en la base nueva. En la práctica, generalmente se elige a e o a 10 como la base nueva para que se pueda evaluar con calculadora los logaritmos necesarios (véase el ejemplo 8).

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Si b es cualquier número real positivo diferente de 1, la fórmula de cambio de base implica que la función $y = \log_b x$ es un múltiplo constante de la función natural logarítmica; es decir, $\log_b x = k \ln x$ para alguna k.

(A) Grafique las funciones $y = \ln x$, $y = 2 \ln x$, $y = 0.5 \ln x$ y $y = -3 \ln x$.

(B) Escriba cada función del inciso A en la forma $y = \log_b x$ encontrando la base b con dos cifras decimales.

(C) ¿Cada función exponencial $y = b^x$ es un múltiplo constante de $y = e^x$? Explique.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $x = 0.2263$ **2.** Es más del doble en 9 años, pero no alcanza a ser el doble en 8 años.
3. 9.9 millas. **4.** $x = 1.195$ **5.** $x = 20$ **6.** $x = 1,100$ **7.** $W_b = W_t e^{-v/c}$
8. 4.7486

EJERCICIO 4-5

A

Resuelva los problemas del 1 al 12 con tres dígitos significativos.

1. $10^{-x} = 0.0347$ **2.** $10^x = 14.3$ **3.** $10^{3x+1} = 92$
4. $10^{5x-2} = 348$ **5.** $e^x = 3.65$ **6.** $e^{-x} = 0.0142$
7. $e^{2x-1} = 405$ **8.** $e^{3x+5} = 23.8$ **9.** $5^x = 18$
10. $3^x = 4$ **11.** $2^{-x} = 0.238$ **12.** $3^{-x} = 0.074$

Resuelva los problemas del 13 al 18 exactamente.

13. $\log 5 + \log x = 2$ **14.** $\log x - \log 8 = 1$
15. $\log x + \log (x - 3) = 1$
16. $\log (x - 9) + \log 100x = 3$
17. $\log (x + 1) - \log (x - 1) = 1$
18. $\log (2x + 1) = 1 + \log (x - 2)$

B

Resuelva los problemas del 19 al 26 con tres dígitos significativos.

19. $2 = 1.05^x$ **20.** $3 = 1.06^x$
21. $e^{-1.4x} = 13$ **22.** $e^{0.32x} = 632$
23. $123 = 500e^{-0.12x}$ **24.** $438 = 200e^{0.25x}$
25. $e^{-x^2} = 0.23$ **26.** $e^{x^2} = 125$

Resuelva los problemas del 27 al 38 exactamente.

27. $\log x - \log 5 = \log 2 - \log (x - 3)$
28. $\log (6x + 5) - \log 3 = \log 2 - \log x$
29. $\ln x = \ln (2x - 1) - \ln (x - 2)$
30. $\ln (x + 1) = \ln (3x + 1) - \ln x$
31. $\log (2x + 1) = 1 - \log (x - 1)$
32. $1 - \log (x - 2) = \log (3x + 1)$
33. $(\ln x)^3 = \ln x^4$ **34.** $(\log x)^3 = \log x^4$
35. $\ln (\ln x) = 1$ **36.** $\log (\log x) = 1$
37. $x^{\log x} = 100x$ **38.** $3^{\log x} = 3x$

En los problemas del 39 al 40:

(A) Explique la dificultad para resolver con exactitud la ecuación.
(B) Determine el número de soluciones graficando las funciones de cada lado de la ecuación.

39. $e^{x/2} = 5 \ln x$ **40.** $\ln(\ln x) + \ln x = 2$

En los problemas del 41 al 42:

(A) Explique la dificultad resolviendo la ecuación exactamente.
(B) Use un dispositivo de graficación para encontrar todas las soluciones hasta tres cifras decimales.

41. $3^x + 2 = 7 + x - e^{-x}$ **42.** $e^{x/4} = 5 \log x + 4 \ln x$

Evalúe los problemas del 43 al 48 con cuatro cifras decimales.

43. $\log_5 372$ **44.** $\log_4 23$ **45.** $\log_8 0.0352$
46. $\log_2 0.005\,439$ **47.** $\log_3 0.1483$ **48.** $\log_{12} 435.62$

C

En los problemas del 49 al 56 para la variable indicada en términos de los símbolos restantes. Use el log natural para resolver las ecuaciones exponenciales.

49. $A = Pe^{rt}$ despeje a r (finanzas)

50. $A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$ despeje a t (finanzas)

51. $D = 10 \log \frac{I}{I_0}$ despeje a I (sonido)

52. $t = \frac{-1}{k}(\ln A - \ln A_0)$ despeje a A (decaimiento)

53. $M = 6 - 2.5 \log \frac{I}{I_0}$ despeje I (astronomía)

54. $L = 8.8 + 5.1 \log D$ despeje D (astronomía)

55. $I = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L})$ despeje t (circuitos)

56. $S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ despeje n (anualidad)

Las siguientes combinaciones de funciones exponenciales definen cuatro de las seis ***funciones hiperbólicas****, una clase importante de funciones en cálculo y matemáticas avanzadas. Resuelva los problemas del 57 al 60 para x en términos de y. Estos resultados se usan para definir las* ***funciones hiperbólicas inversas****, otra clase también importante de funciones en cálculo y matemáticas avanzadas.*

57. $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ **58.** $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

59. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **60.** $y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Los problemas del 61 al 76 requieren del uso de un dispositivo de graficación.

En los problemas del 61 al 64, se usa un dispositivo de graficación para graficar cada función. [Sugerencia: Comienza usando la fórmula de cambio de base.]

61. $y = 3 + \log_2(2 - x)$ **62.** $y = \log_3(4 + x) - 5$

63. $y = \log_3 x - \log_2 x$ **64.** $y = \log_3 x + \log_2 x$

En los problemas del 65 al 76, se usa un dispositivo de graficación para aproximar hasta dos cifras decimales cualquier solución de la ecuación en el intervalo $0 \le x \le 1$. Ninguna de estas ecuaciones se puede resolver exactamente usando el proceso algebraico paso por paso.

65. $2^{-x} - 2x = 0$ **66.** $3^{-x} - 3x = 0$

67. $x3^x - 1 = 0$ **68.** $x2^x - 1 = 0$

69. $e^{-x} - x = 0$ **70.** $xe^{2x} - 1 = 0$

71. $xe^x - 2 = 0$ **72.** $e^{-x} - 2x = 0$

73. $\ln x + 2x = 0$ **74.** $\ln x + x^2 = 0$

75. $\ln x + e^x = 0$ **76.** $\ln x + x = 0$

APLICACIONES

77. Interés compuesto. ¿Cuántos años, aproxime al más cercano, pasarán para que se duplique una suma de dinero si se invierte al 15% de interés compuesto anualmente? Use la fórmula $A = P[1 + (r/n)]^{nt}$.

78. Interés compuesto. ¿Cuántos años, aproxime al más cercano, pasarán para que se cuadruplique una suma de dinero si se invierte al 20% de interés compuesto anualmente? Use la fórmula $A = P[1 + (r/n)]^{nt}$.

79. Interés compuesto. ¿A qué tasa de interés anual compuesto continuamente se tendrán que invertir $1 000 para que se incrementen a $2 500 en 10 años? Use la fórmula $A = Pe^{rt}$. Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.

80. Interés compuesto. ¿Cuántos años tendrán que pasar para que $5 000 se incrementen a $8 000 si se invierte a una tasa de interés compuesto continuamente del 9% anual? Use la fórmula $A = Pe^{rt}$. Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.

81. Astronomía. El brillo de las estrellas se expresa en términos de magnitudes en una escala numérica que aumenta conforme disminuye el brillo. La magnitud m está dada por la fórmula

$$m = 6 - 2.5 \log \frac{L}{L_0}$$

donde L es el flujo de luz de la estrella y L_0 es el flujo de luz de las estrellas más débiles visibles al ojo desnudo.

(A) ¿Cuál es la magnitud de las estrellas más débiles visibles a simple vista?
(B) ¿Cuánto tiempo más brilla una estrella de magnitud 1 que una estrella de magnitud 6?

82. Astronomía. Es necesario un instrumento óptico para observar las estrellas más allá de la sexta magnitud, el límite de visión ordinario. Sin embargo, los instrumentos ópticos aún tienen sus limitaciones. La magnitud L, límite de cualquier telescopio óptico con lentes de diámetro D, en pulgadas, está dada por

$$L = 8.8 + 5.1 \log D$$

(A) Encuentre la magnitud límite para un telescopio reflector casero de 6 pulgadas.
(B) Encuentre el diámetro de un lente que tendría una magnitud límite de 20.6.

Calcule sus respuestas con tres dígitos significativos.

83. Población. Un modelo matemático para el crecimiento demográfico mundial sobre periodos cortos de tiempo está dado por

$$P = P_0 e^{rt}$$

donde P es la población después de t años, P_0 es la población en $t = 0$, y se supone que la población crece continuamente a una tasa anual r. ¿Cuántos años, aproxime al más cercano, pasarán para que la población mundial se duplique si crece continuamente a una tasa anual del 2%?

84. Población. Refiérase al problema 83. Iniciando con una población mundial de 4 mil millones de personas y suponiendo que la población crece continuamente a una tasa anual del 2%, ¿cuántos años, aproxime al más cercano, pasarán para que la población crezca de manera que cada persona sólo pueda disponer de 1 yarda cuadrada de tierra? La tierra está formada por aproximadamente 1.7×10^{14} yardas cuadradas.

• **85. Arqueología: fechamiento con carbono 14.** En tanto una planta o un animal estén vivos, el carbono 14 se mantiene en una cantidad constante en sus tejidos. Sin embargo, una vez que la planta o el animal mueren, la cantidad de carbono 14 comienza a disminuir por el decaimiento radiactivo de acuerdo con la ecuación

$$A = A_0e^{-0.000124t}$$

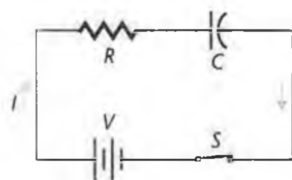
donde A es la cantidad después de t años y A_0 es la cantidad cuando $t = 0$. Calcule la edad de un cráneo descubierto en un sitio arqueológico si aún contiene el 10% de la cantidad original de carbono 14. Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.

• **86. Arqueología: fechamiento con carbono 14.** Refiérase al problema 85. ¿Cuál es la vida media del carbono 14? Es decir, ¿cuánto tiempo tardará en decaer la mitad de una muestra de carbono 14? Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.

• **87. Fotografía.** Un flash electrónico para una cámara se activa cuando se descarga un capacitor por un filamento de alambre. Después que se acciona el flash el capacitor se descarga, el circuito (véase la figura) se conecta y la batería genera una corriente para recargar al capacitor. El tiempo que el capacitor tarda en recargarse se llama tiempo de reciclado. Para un flash en particular se usa una batería de 12 volts, la carga q, en coulombs, t segundos después de que comienza a recargar está dada por

$$q = 0.0009(1 - e^{-0.2t})$$

¿En cuántos segundos alcanzará el capacitor una carga de 0.0007 coulomb? Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.



• **88. Publicidad.** Una compañía trata de dar a conocer un nuevo producto a tantas personas como sea posible mediante publicidad por televisión en un área metropolitana grande con 2 millones de posibles espectadores. Con un modelo para el número de personas N, en millones, que conozcan el producto después de t días de publicidad se encontró que era de

$$N = 2(1 - e^{-0.037t})$$

¿Cuántos días, aproxime al más cercano, debe durar la campaña, para que al menos un 80% de los posibles espectadores conozca el producto?

** **89. Ley de enfriamiento de Newton.** Esta ley establece que la razón a la que un objeto se enfría es proporcional a la diferencia en la temperatura entre el objeto y su medio circundante. La temperatura del objeto T, t horas después está dada por

$$T = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

donde T_m es la temperatura del medio circundante y T_0 es la temperatura del objeto en $t = 0$. Suponga que una botella de vino a una temperatura ambiente de 72°F se pone a enfriar en un refrigerador a 40°F antes de una cena. Después de una hora se encuentra que la temperatura del vino es de 61.5°F. Encuentre la constante k, con cifras decimales, y el tiempo, con una cifra decimal, en que la temperatura del vino descenderá de 72 a 50°F.

* **90. Biología marina.** La vida marina depende de una planta microscópica que existe en la *zona fótica*, una zona que está a una profundidad en la que permanece casi el 1% de la luz de la superficie. La intensidad de la luz se reduce de acuerdo con la función exponencial

$$I = I_0e^{-kd}$$

donde I es la intensidad d en pies bajo la superficie e I_0 es la intensidad en la superficie. La constante k se llama *coeficiente de extinción*. En Lago de Cristal en Wisconsin se encontró que la mitad de la luz de la superficie permanecía a una profundidad de 14.3 pies. Encuentre k y la profundidad de la zona fótica. Calcule las respuestas con tres dígitos significativos.

* **91. Administración de la fauna.** Se lleva una manada de 20 venados cola blanca a una isla costera donde antes no había venados. Se predice que su población aumentará según la curva logística

$$N = \frac{100}{1 + 4e^{-0.14t}}$$

donde N es el número de venados que habrá aumentado la manada después de t años. ¿En cuántos años, aproxime al año más cercano, habrá 50 venados en la manada?

• **92. Capacitación laboral.** Una fábrica de computadoras contrata a un empleado para que aprenda a probar cierto modelo de computadora personal después de que sale de la línea de ensamble. La curva de aprendizaje para un empleado promedio está dada por

$$N = \frac{200}{4 + 21e^{-0.1t}}$$

donde N es el número de computadoras probadas por día después de t días de trabajo. ¿Cuántos días, aproxime al día más cercano, le tomará a un empleado promedio probar 40 computadoras por día?

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 4 El crecimiento de las funciones crecientes

Tanto la función exponencial 2^x como la función logarítmica $\log_2 x$ son funciones crecientes: sus gráficas se elevan conforme aumenta x. Además, éstas aumentan sin límite, pero de diferentes maneras. La función exponencial crece con rapidez, mientras que la función logarítmica aumenta muy lentamente. Calculando los valores de la función, y analizando sus gráficas, se puede conocer la manera en que aumentan varias funciones crecientes.

(A) Las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^3$ son crecientes, pero para valores grandes de x, f aumenta mucho más rápido que g. Ilustre este hecho calculando los valores de ambas funciones para varios valores grandes de x. Grafique ambas funciones y determine el número de puntos de intersección.

(B) Las funciones $h(x) = \ln x$ y $k(x) = x^{1/4}$ son crecientes para $x > 0$, pero para valores grandes de x, h aumenta mucho más lentamente que k. Ilustre este hecho calculando los valores de ambas funciones para varios valores grandes de x. Grafique ambas funciones y determine el número de puntos de intersección.

(C) Las siguientes 12 funciones aumentan sin límite para $x > 1$. Póngalos en orden iniciando con la función que aumenta lentamente y terminando con la función que aumenta con rapidez: $\sqrt{x}$, 2^x, $\log x$, e^{e^x}, x^6, $x \ln x$, e^x, $x^{0.1}$, $\ln(\ln x)$, e^{x^2}, $2x$, $\ln x$.

Repaso del capítulo 4

4-1 FUNCIONES EXPONENCIALES

La ecuación $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$, define una **función exponencial** de base b. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $(0, \infty)$. La **gráfica** de una función exponencial es una curva continua que siempre pasa por el punto $(0, 1)$ y tiene el eje x como una asíntota horizontal. Si $b > 1$, entonces b^x aumenta conforme aumenta x, y si $0 < b < 1$, entonces b^x disminuye conforme aumenta x. La función f es uno a uno y tiene inversa. Se tienen las siguientes **propiedades de la función exponencial:**

1. $a^x a^y = a^{x+y}$ $\quad (a^x)^y = a^{xy}$ $\quad (ab)^x = a^x b^x$

   $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $\quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

2. $a^x = a^y$ si y sólo si $x = y$.
3. Para $x \neq 0$, entonces $a^x = b^x$ si y sólo si $a = b$.

Las funciones exponenciales se usan para describir diversos tipos de **crecimiento**.

1. **El crecimiento demográfico** puede ser modelado con el modelo del crecimiento de tiempo de duplicación $P = P_0 2^{t/d}$, donde P es la población en el tiempo t, P_0 es la población en el tiempo $t = 0$ y d es el **tiempo de duplicación** (el tiempo necesario para que la población se duplique).
2. El **decaimiento radiactivo** se puede modelar con el **modelo del decaimiento de la vida media** $A = A_0(\frac{1}{2})^{t/h} = A_0 2^{-t/h}$, donde A es la cantidad en el tiempo t, A_0 es la cantidad en el tiempo $t = 0$ y h es la vida media (el tiempo que tarda en decaer la mitad de la materia).
3. El aumento de dinero en una cuenta que paga **interés compuesto** está descrito por $A = P(1 + r/n)^{nt}$, donde P es el **capital**, r la **tasa** anual, n el número de periodos en un año, y A es la **cantidad** en una cuenta después de t años. También se le llama P al **valor actual** y A al **valor futuro** de la cuenta.

4-2 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE e

Cuando m se aproxima a ∞, la expresión $(1 + 1/m)^m$ se aproxima al número irracional $e \approx 2.718\ 281\ 828\ 459$. La función $f(x) = e^x$ se llama **función exponencial de base e.** Las funciones de base e se usan para modelar diferentes tipos de crecimiento y decaimiento exponencial, incluyendo el crecimiento de dinero en cuentas que pagan un **interés compuesto continuo**. Si se invierte un capital P a una tasa r anual compuesta continuamente, entonces el capital A en la cuenta después de t años está dada por $A = Pe^{rt}$.

4-3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

La **función logarítmica de base b** se define como la inversa de la función exponencial de base b y se denota por $y = \log_b x$. Así, $y = \log_b x$ si y sólo si $x = b^y$, $b > 0$, $b \neq 1$. El dominio de una función logarítmica es $(0, \infty)$ y el rango es $(-\infty, \infty)$. La gráfica de una función logarítmica es una curva continua que siempre pasa por el punto $(1, 0)$ y tiene al eje y como asíntota

vertical. Se tienen las siguientes **propiedades de las funciones logarítmicas**:

1. $\log_b 1 = 0$
2. $\log_b b = 1$
3. $\log_b b^x = x$
4. $b^{\log_b x} = x, x > 0$
5. $\log_b MN = \log_b M + \log_b N$
6. $\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$
7. $\log_b M^p = p \log_b M$
8. $\log_b M = \log_b N$ si y sólo si $M = N$

4-4 LOGARITMOS COMUNES Y NATURALES

Los logaritmos de base 10 se llaman **logaritmos comunes** y se denotan por $\log x$. Los logaritmos de base e se conocen como **logaritmos naturales** y se denotan por $\ln x$. Así, $\log x = y$ es equivalente a $x = 10^y$ y $\ln x = y$ es equivalente a $x = e^y$.

Las aplicaciones siguientes implican los logaritmos:

1. El **decibel** se define por $D = 10 \log (I/I_0)$, donde D es el **nivel de decibel** del sonido, I es la **intensidad** del sonido e $I_0 = 10^{-12}$ watts por metro cuadrado es un nivel estandarizado del sonido.
2. La **magnitud** M de un terremoto en la **escala de Richter** está dada por $M = \frac{2}{3} \log (E/E_0)$, donde E es la energía liberada por el terremoto y $E_0 = 10^{4.40}$ joules es un nivel estandarizado de la energía.
3. La **velocidad** v de un cohete con posquemador está dada por la **ecuación de cohete** $v = c \ln (W_t/W_b)$, donde c es la velocidad del escape, W_t el peso de la partida y W_b el peso del posquemador.

4-5 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Varias técnicas para resolver **ecuaciones exponenciales**, como $2^{3x-2} = 5$, y **ecuaciones logarítmicas**, como $\log (x + 3) + \log x = 1$, se ilustran con ejemplos. La **fórmula de cambio de base**, $\log_b N = (\log_a N)/(\log_a b)$, relaciona a los logaritmos de dos bases diferentes que se pueden calcular, mediante una calculadora que evalúe logaritmos con bases diferentes de e o 10.

Ejercicio de repaso del capítulo 4

Al resolver los problemas de este capítulo revise y compruebe sus respuestas con las se que dan al final del libro. Ahí están todas las respuestas a los problemas de repaso. Después de cada respuesta hay un número en tipo itálico que indica la sección a la que corresponde el problema que se está analizando. Si se presentan dudas repase las secciones correspondientes en el texto.

A

1. Escriba en forma logarítmica usando la base 10: $m = 10^n$
2. Escriba en forma logarítmica usando la base e: $x = e^y$

Escriba los problemas 3 y 4 en forma exponencial.

3. $\log x = y$
4. $\ln y = x$

En los problemas 5 y 6, simplifique.

5. $\frac{7^{x+2}}{7^{2-x}}$
6. $\left(\frac{e^x}{e^{-x}}\right)^x$

En los problemas del 7 al 9 despeje x exactamente. No use calculadora ni tabla.

7. $\log_2 x = 3$
8. $\log_x 25 = 2$
9. $\log_3 27 = x$

En los problemas del 10 al 13 despeje x con tres dígitos significativos.

10. $10^x = 17.5$
11. $e^x = 143\,000$
12. $\ln x = -0.015\,73$
13. $\log x = 2.013$

B

En los problemas del 14 al 24 despeje x exactamente. No use calculadora ni tabla.

14. $\ln (2x - 1) = \ln (x + 3)$
15. $\log (x^2 - 3) = 2 \log (x - 1)$
16. $e^{x^2-3} = e^{2x}$
17. $4^{x-1} = 2^{1-x}$
18. $2x^2e^{-x} = 18e^{-x}$
19. $\log_{1/4} 16 = x$
20. $\log_x 9 = -2$
21. $\log_{16} x = \frac{3}{2}$
22. $\log_x e^5 = 5$
23. $10^{\log_{10} x} = 33$
24. $\ln x = 0$

Evalúe los problemas del 25 al 28 con cuatro dígitos significativos usando una calculadora.

25. $\ln \pi$
26. $\log (-e)$
27. $\pi^{\ln 2}$
28. $\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{2}$

En los problemas del 29 al 38 despeje x con tres dígitos significativos.

29. $x = 2(10^{1.32})$
30. $x = \log_5 23$
31. $\ln x = -3.218$
32. $x = \log (2.156 \times 10^{-7})$
33. $x = \frac{\ln 4}{\ln 2.31}$
34. $25 = 5(2^x)$

35. $4\,000 = 2\,500(e^{0.12x})$

36. $0.01 = e^{-0.05x}$

37. $5^{2x-3} = 7.08$

38. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = 1$

En los problemas del 39 al 44 despeje x exactamente. No use calculadora ni tabla.

39. $\log 3x^2 - \log 9x = 2$

40. $\log x - \log 3 = \log 4 - \log (x + 4)$

41. $\ln (x + 3) - \ln x = 2 \ln 2$

42. $\ln (2x + 1) - \ln (x - 1) = \ln x$

43. $(\log x)^3 = \log x^9$

44. $\ln (\log x) = 1$

En los problemas 45 y 46, simplifique.

45. $(e^x + 1)(e^{-x} - 1) - e^x(e^{-x} - 1)$

46. $(e^x + e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x - e^{-x})^2$

Grafique cada función de los problemas del 47 al 50.

Compruebe los problemas del 47 al 50 con un dispositivo de graficación.

47. $y = 2^{x-1}$

48. $f(t) = 10e^{-0.08t}$

49. $y = \ln (x + 1)$

50. $N = \dfrac{100}{1 + 3e^{-t}}$

51. Si la gráfica de $y = e^x$ se refleja con respecto a la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de la función $y = \ln x$. Analice las funciones que se obtienen reflejando la gráfica de $y = e^x$ en el eje x y en el eje y.

52. (A) Explique por qué la ecuación $e^{-x/3} = 4 \ln (x + 1)$ tiene exactamente una solución.
    (B) Encuentre la solución de la ecuación con tres cifras decimales.

53. Aproxime todas las raíces reales de $f(x) = 4 - x^2 + \ln x$ con tres cifras decimales.

54. Encuentre las coordenadas de los puntos de intersección de $f(x) = 10^{x-3}$ y $g(x) = 8 \log x$ con tres cifras decimales.

C

En los problemas del 55 al 58 despeje la variable que se indica en términos de los símbolos restantes.

55. $D = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$ despeje I (intensidad del sonido)

56. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ despeje x (probabilidad)

57. $x = -\dfrac{1}{k} \ln \dfrac{I}{I_0}$ despeje I (intensidad de los rayos X).

58. $r = P \dfrac{i}{1 - (1 + i)^{-n}}$ despeje n (finanzas)

Encuentre la inversa de cada función en los problemas 59 y 60.

59. $f(x) = 2 \ln (x - 1)$

60. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

61. Escriba $\ln y = -5t + \ln c$ en forma exponencial libre de logaritmos; después despeje y en términos de los símbolos restantes.

62. Para $f = \{(x, y) \mid y = \log_2 x\}$, grafique f y f^{-1} en el mismo sistema coordenado. ¿Cuáles son los dominios y los rangos de f y f^{-1}?

63. Explique por qué no se puede usar 1 como base logarítmica.

64. Pruebe que $\log_b (M/N) = \log_b M - \log_b N$.

APLICACIONES

65. **Crecimiento demográfico.** Muchos países tienen una tasa de crecimiento demográfico de 3% (o más) por año. ¿A esta tasa, cuántos años tardará en duplicarse una población? Use el modelo de crecimiento compuesto anual $P = P_0(1 + r)^t$. Calcule la respuesta hasta tres dígitos significativos.

66. **Crecimiento demográfico.** Repita el problema 65 que usa el modelo de crecimiento compuesto continuamente $P = P_0e^{rt}$.

67. **Fechamiento con carbono 14.** ¿Cuántos años tardará el carbono 14 en disminuir a 1% de la cantidad original después de la muerte de una planta o animal? Use la fórmula $A = A_0e^{-0.000124t}$. Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.

68. **Medicina.** Una célula de leucemia que se inyecta en un ratón saludable, se dividirá en dos células en aproximadamente $\frac{1}{2}$ día. Al finalizar el día estas dos células se dividirán en cuatro. La duplicación continuará hasta que se hayan formado mil millones de células; después el animal muere con el cuerpo invadido de células leucémicas.
    (A) Escriba una ecuación que dé el número N de células leucémicas después de t días.
    (B) ¿Cuándo, aproxime al día más cercano, morirá el ratón?

69. **Crecimiento del dinero.** Suponga que se invierte $1 a una tasa anual del 3% de interés compuesto continuamente desde el nacimiento de Cristo. ¿Qué cantidad habría en la cuenta en el año 2000? Calcule la respuesta con dos dígitos significativos.

70. **Valor actual.** Despejando a P de $A = Pe^{rt}$ se obtiene $P = Ae^{-rt}$, que es el **valor actual** de la cantidad A obtenido después de t años si el dinero se invierte a una tasa r de interés compuesto continuamente.
    (A) Grafique $P = 1\,000(e^{-0.08t})$, $0 \le t \le 30$.
    (B) ¿A qué tiende P cuando t tiende a infinito? [*Conclusión:* El mayor tiempo es hasta que la cantidad A se alcanza; el menor tiempo es su valor presente, como se espera.]

71. Terremotos. El terremoto que ocurrió en 1971 en San Fernando, California, liberó 1.99×10^{14} joules de energía. Calcule su magnitud en la escala de Richter con la fórmula $M = \frac{2}{3} \log (E/E_0)$, donde $E_0 = 10^{4.40}$ joules. Calcule la respuesta con una cifra decimal.

72. Terremotos. Refiérase al problema 71. ¿Si la magnitud del terremoto ocurrido en San Francisco en 1906 hubiera sido de 8.3 en la escala de Richter, ¿cuánta energía hubiera liberado? Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.

73. Sonido. ¿Si la intensidad de una fuente de sonido es 100 000 veces la de otro, ¿cuánto más grande es el nivel de decibeles del sonido más fuerte comparado con el del más suave? Use la fórmula $D = 10 \log (I/I_0)$.

74. Biología marina. La intensidad de la luz al entrar al agua se reduce de acuerdo con la función exponencial

$$I = I_0 e^{-kd}$$

donde I es la intensidad, d en pies bajo la superficie, I_0 la intensidad en la superficie y k el coeficiente de extinción. Las medidas en el Mar de Sargasso en Las Antillas han indicado que esa mitad de la luz de la superficie alcanza una profundidad de 73.6 pies. Encuentre la luz k y la profundidad a la cual permanece el 1% de la luz de la superficie. Calcule las respuestas con tres dígitos significativos.

75. Administración de la fauna. Un lago formado por un dique contiene 1 000 peces. Se espera que su población aumente según la curva logística

$$N = \frac{30}{1 + 29e^{-1.35t}}$$

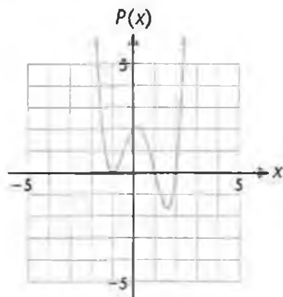
donde N es el número de peces, en miles, que se espera habrá después de t años. El lago estará abierto a la pesca cuando el número de peces sea de 20 000. ¿Cuántos años, aproxime al año más cercano, pasarán para que se alcance esta cifra?

Ejercicio de repaso acumulativo de los capítulos 3 y 4

Resuelva los problemas de este repaso acumulativo y compruebe sus respuestas comparándolas con las que se incluyen al final del libro. Ahí están las respuestas a los problemas de repaso. Después de cada respuesta hay un número en tipo itálico que indica la sección a la cual pertenece el problema que se está analizando. Si tiene dificultad para resolver algún ejercicio, repase la sección correspondiente en el texto.

A

1. Sea $P(x)$ el polinomio cuya gráfica se muestra en la figura:
   (A) Suponga que $P(x)$ tiene raíces de enteros y coeficiente delantero 1, encuentre la ecuación de grado más bajo que podría producir esta gráfica.
   (B) Describa el comportamiento a la izquierda y a la derecha de $P(x)$.



2. En $P(x) = 3x^3 + 5x^2 - 18x - 3$ y $D(x) = x + 3$, use división sintética para dividir $P(x)$ entre $D(x)$ y escriba la respuesta en la forma $P(x) = D(x)Q(x) + R$.

3. Sea $P(x) = 2(x + 2)(x - 3)(x - 5)$. ¿Cuáles son las raíces de $P(x)$?

4. Sea $P(x) = 4x^3 - 5x^2 - 3x - 1$. ¿Cómo se puede saber si $P(x)$ tiene por lo menos una raíz real entre 1 y 2?

5. Sea $P(x) = x^3 + x^2 - 10x + 8$. Encuentre todas las raíces racionales para $P(x)$.

6. Descomponga en fracciones parciales:

$$\frac{5x - 4}{(x - 2)(x + 1)}$$

7. Despeje x:
   (A) $y = 10^x$ (B) $y = \ln x$

8. Simplifique:
   (A) $(2e^x)^3$ (B) $\frac{e^{3x}}{e^{-2x}}$

9. Despeje x exactamente. No use calculadora.
   (A) $\log_3 x = 2$ (B) $\log_3 81 = x$
   (C) $\log_x 4 = -2$

10. Despeje x con tres dígitos significativos.
   (A) $10^x = 2.35$ (B) $e^x = 87\ 500$
   (C) $\log x = -1.25$ (D) $\ln x = 2.75$

B

11. La función f resta la raíz cuadrada del elemento del dominio de tres veces, el logaritmo del elemento del dominio. Escriba una definición algebraica de f.

12. Describa en forma verbal de función $f(x) = 100e^{0.5x} - 50$.

13. Si $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 2$, encuentre $P(\frac{1}{2})$ usando el teorema del residuo y la división sintética.

14. Cuál de los siguientes es un factor de

$$P(x) = x^{25} - x^{20} + x^{15} + x^{10} - x^5 + 1$$

(A) $x - 1$ (B) $x + 1$

15. Sea $P(x) = x^4 - 8x^2 + 3$
   (A) Grafique $P(x)$ y describa verbalmente la gráfica, incluyendo el número de intersecciones con el eje x, el número de puntos de retorno y su comportamiento a la izquierda y a la derecha.
   (B) Use el método de bisección para aproximar la intersección con el eje x más grande con una cifra decimal.

16. Sea $P(x) = x^4 + 2x^3 - 20x^2 - 30$.
   (A) Encuentre el número positivo más pequeño y el entero negativo más grande que, por el teorema 2 de la sección 4-3, son sus límites superior e inferior, respectivamente, para las raíces reales de $P(x)$.
   (B) Use el método de bisección para aproximarse a la raíz real más grande de $P(x)$ con dos cifras decimales.
   (C) Use un dispositivo de graficación para aproximar las raíces reales de $P(x)$ con dos cifras decimales.

17. Permita $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 10x^2 + x - 4$. Encuentre $Q(x)$ y R tales que $P(x) = (x - 2)\,Q(x) + R$. ¿Qué valor tiene $P(2)$?

18. Encuentre las raíces: racional, irracional e imaginaria, exactamente para $P(x) = 4x^3 - 20x^2 + 29x - 15$.

19. Encuentre todas las raíces: racional, irracional e imaginaria, exactamente para $P(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 15x - 12$, y factorice a $P(x)$ en factores lineales.

20. Resuelva $x^3 + 36 \leq 7x^2$. Escriba las respuestas en la notación de desigualdad y del intervalo.

21. Aproxime todas las soluciones reales con dos cifras decimales: $x^3 + 4x - 20 = 0$

22. Descomponga en fracciones parciales:

$$\frac{3x^2 - x + 1}{x(x + 1)^2}$$

23. Descomponga en fracciones parciales:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 + x}$$

24. Sea $f(x) = \dfrac{2x + 8}{x + 2}$
   (A) Encuentre el dominio y las intersecciones para f.
   (B) Encuentre las asíntotas verticales y horizontales para f.
   (C) Trace la gráfica de f. Dibuje las asíntotas verticales y horizontales con líneas discontinuas.

Resuelva los problemas del 25 al 34 para x exactamente. No use calculadora.

25. $2^{x^2} = 4^{x+4}$

26. $2x^2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}$

27. $e^{\ln x} = 2.5$

28. $\log_x 10^4 = 4$

29. $\log_9 x = -\frac{3}{2}$

30. $\ln(x + 4) - \ln(x - 4) = 2 \ln 3$

31. $\ln(2x^2 + 2) = 2 \ln(2x - 4)$

32. $\log x + \log(x + 15) = 2$

33. $\log(\ln x) = -1$

34. $4(\ln x)^2 = \ln x^2$

En los problemas del 35 al 39 despeje x con tres dígitos significativos.

35. $x = \log_3 41$

36. $\ln x = 1.45$

37. $4(2^x) = 20$

38. $10e^{-0.5x} = 1.6$

39. $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1}{2}$

Grafique cada función de los problemas del 40 al 43.

Compruebe los problemas del 40 al 43 con un dispositivo de graficación.

40. $y = 3^{1-x}$

41. $f(x) = \ln(2 - x)$

42. $A(t) = 100e^{-0.3t}$

43. $y = -2e^{-x} + 3$

44. Si la gráfica de $y = \ln x$ se refleja con respecto a la recta $y = x$, se obtiene la gráfica de la función $y = e^x$. Analice las funciones que se obtienen reflejando la gráfica de $y = \ln x$ en el eje x y en el eje y.

45. (A) Explique por qué la ecuación $e^{-x} = \ln x$ tiene exactamente una solución.
   (B) Use un dispositivo de graficación para aproximar la solución de la ecuación con dos cifras decimales.

C

46. Si $P(x)$ es un polinomio de cuarto grado con coeficientes enteros, y si i es una raíz de $P(x)$, ¿puede $P(x)$ tener raíces irracionales? Explique.

47. Sea $P(x) = x^4 + 9x^3 - 500x^2 + 20\,000$.
   (A) Encuentre el múltiplo entero positivo más pequeño de 10 y el múltiplo entero negativo más grande de 10 que, por el teorema 2 de la sección 4-3, sean los límites superior e inferior, respectivamente, para las raíces reales de $P(x)$.
   (B) Aproxime las raíces reales de $P(x)$ con dos cifras decimales.

48. Grafique f e indique cualquier asíntota horizontal, vertical u oblicua con líneas discontinuas:

$$f(x) = \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2}$$

49. Encuentre un polinomio de grado inferior con coeficiente principal 1 que tenga raíces -1 (multiplicidad 2), 0 (multiplicidad 3), $3 + 5i$ y $3 - 5i$. Exprese la respuesta en forma factorizada. ¿Cuál es el grado del polinomio?

50. Encuentre todas las raíces: la racional, irracional e imaginaria, exactamente para

$$P(x) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 + 10x^2 - 10x - 12$$

y factorice $P(x)$ en factores lineales.

51. Encuentre las raíces racionales exactamente y las raíces irracionales con dos cifras decimales para

$$P(x) = x^5 + 4x^4 + x^3 - 11x^2 - 8x + 4$$

52. Descomponga en fracciones parciales:

$$\frac{x^2 - 4x + 11}{x^4 - x^3 + x^2 - 3x + 2}$$

53. Sea $f(x) = 3 \ln (x - 2)$.

(A) Encuentre $f^{-1}(x)$.
(B) Encuentre el dominio y el rango de f y f^{-1}.
(C) Grafique f, f^{-1} y $y = x$ en el mismo sistema coordenado.

Verifique por graficación f, f^{-1} y $y = x$ en una ventana de visión cuadrada con un dispositivo de graficación.

54. Use logaritmos naturales para resolver n:

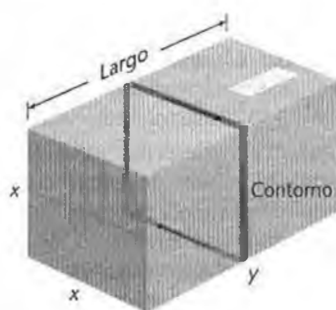
$$A = P\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

55. Resuelva $\ln (y = 5x + \ln A$ para $y)$. Exprese la respuesta en una forma que no contenga logaritmos.

56. Resuelva $y = \dfrac{e^x - 2e^{-x}}{2}$ para x:

APLICACIONES

57. Mensajería. Un servicio de mensajería proporciona a sus clientes cajas de embarque rectangulares. El largo de la caja más la medida de su contorno es de 10 pies (véase figura). Encuentre las dimensiones si los extremos de la caja son cuadrados y su volumen es de 8 pies cúbicos. Encuentre las soluciones racionales exactamente y las soluciones irracionales con una cifra decimal.



58. Geometría. La diagonal de un rectángulo tiene 2 pies más de largo que uno de sus lados, y su área es de 6 pies cuadrados. Encuentre las dimensiones del rectángulo. Encuentre las soluciones racionales exactamente y las soluciones irracionales con una cifra decimal.

59. Crecimiento demográfico. Si Zaire tiene una población de casi 40 millones de personas y el tiempo que tarda en duplicarse es de 22 años, encuentre la población en:

(A) 5 años (B) 30 años

Calcule las respuestas con tres dígitos significativos.

60. Interés compuesto. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse una cantidad de dinero invertido que gana 7% de interés compuesto anualmente? Use el modelo de crecimiento compuesto anual $P = P_0(1 + r)^t$, y calcule la respuesta con tres dígitos significativos.

61. Interés compuesto. Repita el problema 60 usando el modelo de interés compuesto continuo $P = P_0e^{rt}$.

62. Los terremotos. Si los terremotos ocurridos en 1906 y 1989, en San Francisco, registraron 8.3 y 7.1 grados respectivamente, en la escala de Richter, ¿cuántas veces más intenso fue el terremoto de 1906 que el de 1989? Use la fórmula $M = \frac{2}{3} \log (E/E_0)$, donde $E_0 = 10^{4.40}$ joules y calcule la respuesta con una cifra decimal.

63. Sonido. Si el nivel de decibeles en un concierto de rock es de 88, encuentre la intensidad del sonido en el concierto. Use la fórmula $D = 10 \log (I/I_0)$, donde $I_0 = 10^{-12}$ watts por metro cuadrado y calcule la respuesta con dos dígitos significativos.

CAPÍTULO 5

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS





$f(x)=|3x + 4| + 1$

Al parecer, las funciones trigonométricas tuvieron sus orígenes en el estudio de la medición indirecta de ángulos de distancias y de la "esfera celeste" así como en las mediciones de las tierras inundadas por el Nilo realizadas por los griegos. La "trigonometría" se basa en la palabra griega con que se denomina la medida de un triángulo, y fue usada por primera vez como título de un texto escrito por el matemático alemán Pitiscus en el 1600 d.C.

Originalmente, la aplicación de las funciones trigonométricas estaba restringida a los ángulos y a la medición indirecta de distancias entre éstos. Las restricciones fueron desapareciendo de manera gradual, y ahora se cuenta con funciones trigonométricas de números reales. En la actualidad, las aplicaciones modernas abarcan muchos tipos de problemas que tienen poco o nada que ver con ángulos o triángulos (aplicaciones que implican fenómenos periódicos tales como el sonido, la luz y las ondas eléctricas; los ciclos de un negocio y el movimiento planetario).

En este libro no se seguirá el enfoque tradicional, ya que se comenzará con una introducción a las funciones trigonométricas (funciones circulares) cuyos dominios son números reales; y después se definirán las funciones trigonométricas cuyos dominios son ángulos.

SECCIÓN 5-1 La función generadora

- Definición de la función generadora
- Valores reales para números reales particulares
- La función generadora no es uno a uno

• Definición de la función generadora

Las importantes definiciones de las *funciones circulares* que se presentan en la próxima sección se basan en una función W, llamada *función generadora*, cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales y cuyo rango es el conjunto de puntos del **círculo unitario**; es decir, un círculo de radio 1 con el centro en el origen de un sistema coordenado rectangular. Su ecuación es $u^2 + v^2 = 1$ (véase figura 1).*

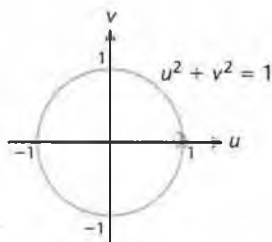


FIGURA 1 Círculo unitario.

Una **función generadora** significa, "enrollar" una recta numérica real con origen en (1, 0) alrededor del círculo unitario, el eje real positivo se enrolla en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el eje real negativo se enrolla en el sentido de las manecillas del reloj. De esta manera, cada número real de la recta real se relaciona con un solo punto, llamado **punto circular** del círculo unitario, como se muestra en la figura 2.

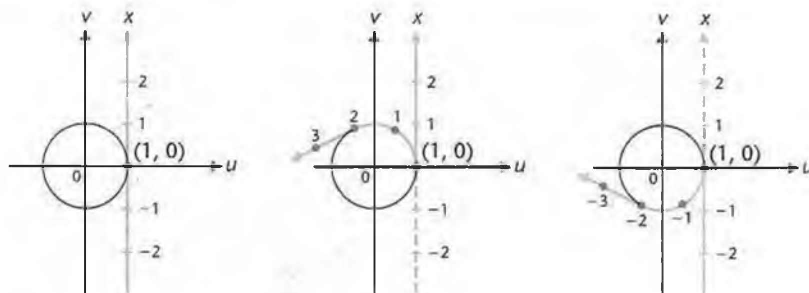


FIGURA 2 Función generadora.

* Ahora se usa a las variables u y v en lugar de x y y de tal manera que x pueda ser usada sin ambigüedad como una variable independiente al definir las funciones generadora y circular. Ambas funciones usan al círculo unidad en sus definiciones.

Para localizar un punto circular asociado con un número como 37 o -105, la recta numérica se enrolla muchas veces alrededor del círculo.

Una manera equivalente de relacionar los números reales con puntos en el círculo unitario es pensar en términos de la *longitud de arco*, suponiendo que se sabe cuál es la longitud de arco. Para encontrar el punto circular P que está asociado con el número real x, se empieza en $A(1, 0)$ y se mueve $|x|$ unidades a lo largo del círculo unitario, en sentido contrario al de las manecillas del reloj si x es positiva y en el sentido de las manecillas del reloj si es negativa. La longitud de arco AP es $|x|$ (véase figura 3).

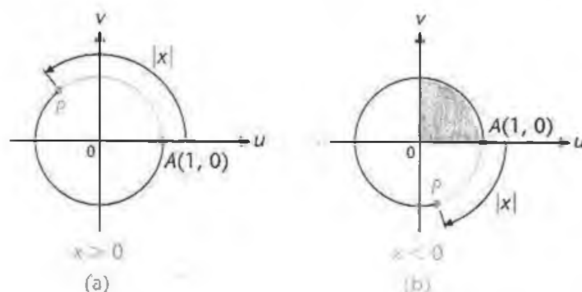


FIGURA 3 La función generadora y la longitud de arco.

Es importante poder encontrar las coordenadas (a, b) del punto circular P asociado con un número real x dado, así que se puede escribir $W(x) = (a, b)$. En general, esto es difícil y requiere del uso de una calculadora. Sin embargo, para números reales dados, con múltiplos enteros de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$, se puede encontrar las coordenadas exactas de los puntos circulares correspondientes usando las sencillas propiedades geométricas de un círculo.

• Valores reales para números reales particulares

Se comenzará la investigación encontrando la circunferencia del círculo unitario. Puesto que el radio $r = 1$, la circunferencia es

$$2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi \quad \text{Circunferencia del círculo unitario}$$

Un cuarto, una mitad y tres cuartos de la circunferencia son, respectivamente, $\pi/2$, π y $3\pi/2$. Los puntos circulares correspondientes a estos números reales en los ejes coordenados y, por consiguiente, sus coordenadas se determinan fácilmente (véase figura 4).

$$W(0) = (1, 0)$$
$$W\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$$
$$W(\pi) = (-1, 0)$$
$$W\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$$
$$W(2\pi) = (1, 0)$$

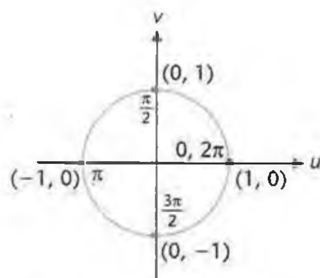


FIGURA 4 Puntos circulares en los ejes coordenados.

Siguiendo el mismo procedimiento, se puede encontrar las coordenadas de cualquier punto circular en los ejes coordenados; es decir, de *cualquier* punto circular que corresponda a un número real que sea un múltiplo entero de $\pi/2$.

EJEMPLO 1 **Determinación de las coordenadas de los puntos circulares**

Encuentre las coordenadas de los puntos circulares:

(A) $W(-\pi/2)$ (B) $W(5\pi/2)$

Solución (A) Empezando en el punto $(1, 0)$, se hace un cuarto de vuelta del círculo en el sentido de las manecillas del reloj (véase figura 4). En consecuencia,

$$W\left(\frac{-\pi}{2}\right) = (0, -1)$$

(B) Empezando en el punto $(1, 0)$ y en el sentido de las manecillas del reloj, se cuentan pasos de un cuarto del círculo, $\pi/2, 2\pi/2, 3\pi/2, 4\pi/2$, hasta llegar a $5\pi/2$. Así, el punto circular está en el eje vertical positivo, y se tiene

$$W\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

Problema seleccionado 1 Encuentre las coordenadas de los puntos circulares:

(A) $W(-\pi)$ (B) $W(3\pi)$

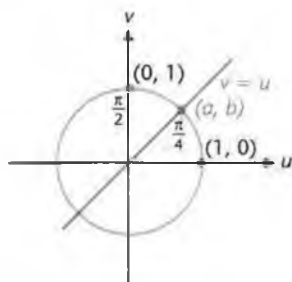


FIGURA 5 Punto circular $W(\pi/4)$.

Ahora se encuentran las coordenadas del punto circular $W(\pi/4)$. Puesto que $\pi/4$ es la mitad del arco que une a $(1, 0)$ y $(0, 1)$, el punto circular $W(\pi/4)$ debe estar en la recta $v = u$, como se muestra en la figura 5. Puesto que $W(\pi/4)$ está en la recta $v = u$ y en el círculo $u^2 + v^2 = 1$, sus coordenadas (a, b) deben satisfacer ambas ecuaciones. Esto es,

$$a = b \qquad \text{y} \qquad a^2 + b^2 = 1$$

Sustituyendo a por b en la segunda ecuación, se tiene

$$a^2 + a^2 = 1$$

$$2a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$a = -1/\sqrt{2}$ se debe descartar, ya que $W(\pi/4)$ está en el primer cuadrante.

Al usar la primera ecuación, se ve que

$$b = a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto,

$$W\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Usando las propiedades de simetría de un círculo (el círculo unitario es simétrico con respecto a ambos ejes y al origen) se pueden encontrar fácilmente las coordenadas de cualquier punto circular que se refleja a través del eje vertical, el eje horizontal o el origen de $W(\pi/4)$.

EJEMPLO 2 **Determinación de las coordenadas de puntos circulares**

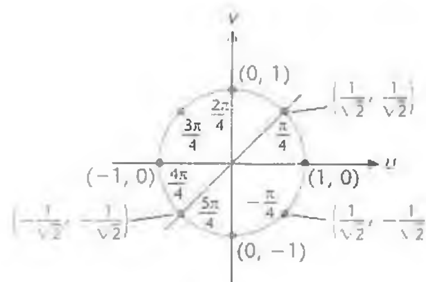
Encuentre las coordenadas de los puntos circulares:

(A) $W(5\pi/4)$ (B) $W(-\pi/4)$

Soluciones (A) Empezando en (1, 0) y contando pasos de un octavo de círculo en el sentido de las manecillas del reloj ($\pi/4$, $2\pi/4$, $3\pi/4$, $4\pi/4$), $5\pi/4$), se encuentra que está en el tercer cuadrante en el punto medio del círculo que está entre $(-1, 0)$ y $(0, -1)$, como se indica en la figura 6. Usando simetría con respecto al origen, se obtiene

$$W\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

FIGURA 6



(B) Empezando en (1, 0), se continúa un octavo del camino alrededor del círculo unitario en el sentido de las manecillas del reloj y se termina sobre el cuarto cuadrante en el punto medio del círculo que está entre $(0, -1)$ y $(1, 0)$, como se indica en la figura 6. Usando simetría con respecto al eje horizontal, se observa que

$$W\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Problema seleccionado 2 Encuentre las coordenadas de los puntos circulares:

(A) $W(3\pi/4)$ (B) $W(-7\pi/4)$

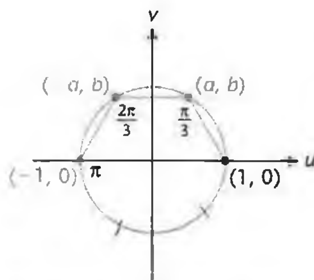


FIGURA 7 Punto circular $W(\pi/3)$.

Se continúa con la investigación buscando las coordenadas del punto circular $W(\pi/3)$. Refiriéndose a la figura 7, se divide al semicírculo superior de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$ en tres partes. Los puntos circulares $W(\pi/3)$ y $W(2\pi/3)$ son simétricos con respecto al eje v; por consiguiente, si $W(\pi/3)$ está dada por las coordenadas (a, b), entonces $W(2\pi/3)$ debe tener las coordenadas $(-a, b)$. La cuerda que une a $W(2\pi/3)$ con $W(\pi/3)$ tiene $2a$ unidades de longitud. Usando la fórmula de la distancia (véase la sección 2-1), se encuentra que la longitud de la cuerda que une a $W(0)$ con $W(\pi/3)$ está dada por $\sqrt{(a-1)^2 + b^2}$. Las dos cuerdas tienen la misma longitud, puesto que los arcos congruentes son cuerdas congruentes opuestas en el mismo círculo. Así,

$$\sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 2a$$

Elevando al cuadrando ambos lados, se obtiene

$$(a-1)^2 + b^2 = 4a^2$$
$$a^2 - 2a + 1 + b^2 = 4a^2$$
$$a^2 + b^2 - 2a + 1 = 4a^2$$
$$1 - 2a + 1 = 4a^2 \qquad a^2 + b^2 = 1 \text{ (¿Por qué?)}$$
$$4a^2 + 2a - 2 = 0$$
$$2a^2 + a - 1 = 0$$
$$(2a-1)(a+1) = 0$$
$$a = \tfrac{1}{2} \qquad \text{o} \qquad a = -1$$
$$a = \tfrac{1}{2} \qquad \text{Se debe descartar } a = -1. \text{ (¿Por qué?)}$$

Se sustituye a $a = \frac{1}{2}$ en $a^2 + b^2 = 1$ y se despeja b:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = 1$$
$$b^2 = \frac{3}{4}$$
$$b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Se debe descartar } b = -\sqrt{3}/2 \text{ (¿Por qué?)}$$

Así,

$$W\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Procediendo de manera similar, o usando simetría con respecto a la recta $v = u$, se obtiene

$$W\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Los resultados clave del análisis anterior para el primer cuadrante están resumidos en la figura 8.

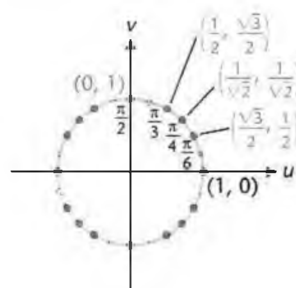


FIGURA 8 Coordenadas de los puntos circulares clave.

Es importante memorizar las relaciones que se muestran en el primer cuadrante.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Una efectiva **ayuda a la memoria** para recordar las coordenadas de los puntos circulares clave de la figura 8 se puede elaborar escribiendo las coordenadas de los puntos circulares $W(0)$, $W(\pi/6)$, $W(\pi/4)$, $W(\pi/3)$ y $W(\pi/2)$, conservando este orden, de manera que cada numerador sea la raíz cuadrada de un número apropiado y cada denominador sea 2. Por ejemplo, $W(0) = (1, 0) = (\sqrt{4}/2, \sqrt{0}/2)$. Describa al patrón resultante.

La razón para memorizar las coordenadas de los puntos circulares clave del primer cuadrante es que usando éstos, junto con la simetría del círculo unitario, se puede encontrar que las coordenadas de cualquier punto circular corresponden a cualquier múltiplo entero de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$.

EJEMPLO 3

Determinación de las coordenadas de los puntos circulares

Encuentre las coordenadas de los puntos circulares:

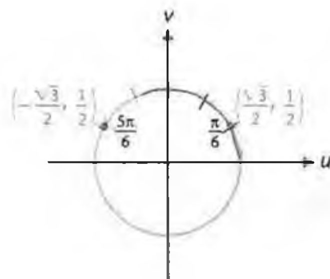
(A) $W(5\pi/6)$ (B) $W(-2\pi/3)$

Soluciones

(A) Observe que $5\pi/6$ es $\pi/6$ menor que $\pi = 6\pi/6$. Localice $5\pi/6$ en el segundo cuadrante, use la figura 8 y la simetría con respecto al eje vertical para encontrar $W(5\pi/6)$. (Véase figura 9.)

$$W\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

FIGURA 9



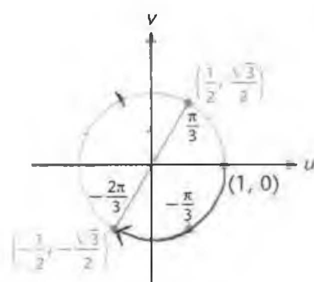


FIGURA 10

(B) Localice $-2\pi/3$ en el tercer cuadrante y use la figura 8 y la simetría con respecto al origen para encontrar $W(-2\pi/3)$. (Véase figura 10.)

$$W\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Problema seleccionado 5

Encuentre las coordenadas de los puntos circulares:

(A) $W(5\pi/3)$ (B) $W(-7\pi/6)$

• La función generadora no es uno a uno

Es fácil ver que la función generadora no es una función uno a uno. A cada valor del dominio, un número real, le corresponde exactamente un valor del rango, un punto en el círculo unitario. Sin embargo, a cada valor del rango, es decir a un punto en el círculo unitario, le corresponde un número infinito de valores del dominio, los números reales. Por ejemplo, se ve que

$$W\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

Es decir, exactamente a cada valor del rango le corresponden $\pi/2$ valores del dominio. ¿Pero a cuántos valores del dominio les corresponde el valor del rango (0, 1)? Cada vez que se da una vuelta alrededor del círculo unitario se recorren 2π unidades en cualquier dirección a partir de (0, 1), hasta regresar al punto de partida. Así, si se quiere resolver

$$W(x) = (0, 1)$$

se tiene que escribir

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \text{ cualquier entero}$$

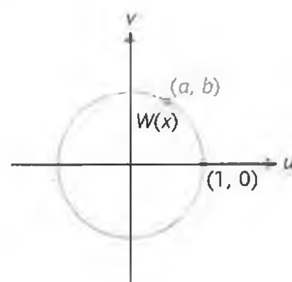
y hay un número infinito de valores del dominio de W que corresponde a los valores del rango (0, 1). En general:

Teorema 1

Una propiedad de la función generadora

Para todos los números reales x,

$W(x) = W(x + 2k\pi)$ k cualquier entero*



---

* Piense en un punto P moviéndose alrededor del círculo unitario en cualquier dirección. P recorre cada vez una distancia de 2π la circunferencia del círculo, hasta que regresa al punto donde comenzó.

En secciones posteriores se hablará más de las implicaciones de esta importante propiedad de la función generadora.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 (A) Resuelva la ecuación del punto circular $W(x) = (0, -1)$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$.

(B) Describa una expresión que represente a todas las soluciones de $W(x) = (0, -1)$.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $(-1, 0)$ (B) $(-1, 0)$
2. (A) $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ (B) $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
3. (A) $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ (B) $(-\sqrt{3}/2, 1/2)$

EJERCICIO 5-1

A

En los problemas del 1 al 12, encuentre las coordenadas para cada punto circular. Trace sus propias figuras (no vea la contraportada del libro).

1. $W(\pi)$ **2.** $W(0)$ **3.** $W(6\pi)$

4. $W(3\pi)$ **5.** $W(-\pi)$ **6.** $W(-5\pi)$

7. $W(3\pi/2)$ **8.** $W(\pi/2)$ **9.** $W(-\pi/2)$

10. $W(-3\pi/2)$ **11.** $W(11\pi/2)$ **12.** $W(-15\pi/2)$

B

En los problemas del 13 al 24, encuentre las coordenadas para cada punto circular. Trace sus propias figuras (no vea la contraportada del libro).

13. $W(\pi/4)$ **14.** $W(\pi/3)$ **15.** $W(\pi/6)$

16. $W(-\pi/6)$ **17.** $W(-\pi/3)$ **18.** $W(-\pi/4)$

19. $W(2\pi/3)$ **20.** $W(11\pi/6)$ **21.** $W(-3\pi/4)$

22. $W(-7\pi/6)$ **23.** $W(13\pi/4)$ **24.** $W(-10\pi/3)$

Determine los signos de a y b para las coordenadas (a, b) de cada punto circular indicado en los problemas del 25 al 34. Determine primero el cuadrante en el que está cada punto circular. (Observación: $\pi/2 \approx 1.57$ $\pi \approx 3.14$, $3\pi/2 \approx 4.71$ y $2\pi \approx 6.28$.]

25. $W(2)$ **26.** $W(1)$ **27.** $W(3)$

28. $W(4)$ **29.** $W(5)$ **30.** $W(7)$

31. $W(-2.5)$ **32.** $W(-4.5)$ **33.** $W(-6.1)$

34. $W(-1.8)$

En los problemas del 35 al 38, encuentre todas las soluciones para cada ecuación con $0 \leq x < 2\pi$, después escriba una expresión que represente a todas las soluciones para la ecuación sin restricciones en x.

35. $W(x) = (1, 0)$ 36. $W(x) = (-1, 0)$

37. $W(x) = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ 38. $W(x) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

39. Describa en palabras por qué $W(x) = W(x + 4\pi)$ para cada número real x.

40. Describa en palabras por qué $W(x) = W(x - 6\pi)$ para cada número real x.

C

Si $W(x) = (a, b)$, indique si las afirmaciones de los problemas del 41 al 46 son verdaderas (V) o falsas (F). Dibujar figuras le ayudará a decidir.

41. $W(x + \pi) = (-a, -b)$ **42.** $W(x + \pi) = (a, b)$

43. $W(-x) = (-a, b)$ **44.** $W(-x) = (a, -b)$

45. $W(x + 2\pi) = (a, b)$ **46.** $W(x + 2\pi) = (-a, -b)$

En los problemas del 47 al 52, encuentre todas las soluciones x, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ tales que:

47. $W(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **48.** $W(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

49. $W(x) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **50.** $W(x) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

51. $W(x) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ **52.** $W(x) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Encuentre todas las soluciones para cada ecuación de los problemas 53 y 54.

53. $W(x) = W(\pi/4)$ **54.** $W(x) = W(2\pi/3)$

SECCIÓN 5-2 Funciones circulares

- Definición de las funciones circulares
- Valores exactos para números reales particulares
- Propiedades del signo
- Identidades básicas
- Evaluación con calculadora

Definición de las funciones circulares

En la sección 5-1 se vio que la función generadora W relaciona cada número real x con un par ordenado de números reales (a, b), las coordenadas del punto circular $W(x)$. Se usa esta asociación para construir las seis **funciones circulares**, también llamadas **funciones trigonométricas:*** **seno, coseno, tangente, cotangente, secante** y **cosecante**. Los valores de estas funciones para un número real x están denotados por **sen x, cos x, tan x, cot x, sec x** y **csc x,** respectivamente. Estos valores se expresan en términos de las coordenadas del punto circular $W(x) = (a, b)$ como se indica en la definición 1.

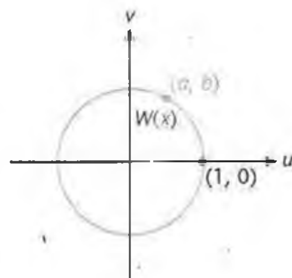
DEFINICIÓN 1 **Funciones circulares**

Si x es un número real y (a, b) son las coordenadas del punto circular $W(x)$, entonces

$$\text{sen}\, x = b \qquad \csc x = \frac{1}{b} \quad b \neq 0$$

$$\cos x = a \qquad \sec x = \frac{1}{a} \quad a \neq 0$$

$$\tan x = \frac{b}{a} \quad a \neq 0 \qquad \cot x = \frac{a}{b} \quad b \neq 0$$



El dominio de las funciones seno y coseno es el conjunto de los números reales R. El rango de las funciones seno y coseno es $[-1, 1]$. Éste es el conjunto de números supuestos b, para el seno, y a, para el coseno, como el punto circular (a, b) que se mueve en el círculo unitario. El dominio de la cosecante es el conjunto de números reales x tales que b que está en $W(x) = (a, b)$ no es 0. Se hacen restricciones similares en los dominios de las otras tres funciones circulares. Se abundará en el tema de los dominios y los rangos de las seis funciones circulares en secciones subsecuentes.

Valores exactos para números reales particulares

Usando los resultados de la sección 5-1, se puede evaluar cualquiera de las seis funciones circulares con exactitud, cuando éstas existen, para múltiplos enteros de los números reales $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. La figura 8 en la sección 5-1, que se debió memorizar, y las propiedades de simetría del círculo unitario son importantes en este proceso. Más

* Estrictamente hablando, la palabra *trigonométrica* se usa cuando se está tratando con dominios de ángulos, y la palabra *circular* cuando se está tratando con dominios de números reales. No se insistirá en esta distinción y, frecuentemente, como establece la convención, se usará trigonométrica en ambos casos.

adelante se mostrará cómo se puede usar una calculadora para evaluar las funciones circulares con ocho o más dígitos significativos para números reales arbitrarios. Usted quizá se pregunte por qué no se usa la calculadora directamente. La respuesta es que hay muchas situaciones en que es más deseable trabajar con formas exactas, si se puede, que con las aproximaciones decimales correspondientes producidas por una calculadora.

EJEMPLO 1

Evaluación exacta de funciones circulares

Evalúe cada función circular exactamente para $x = \pi/3$

Solución De la sección 5-1 se sabe que

$$W\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{[Véase figura 1.]}$$

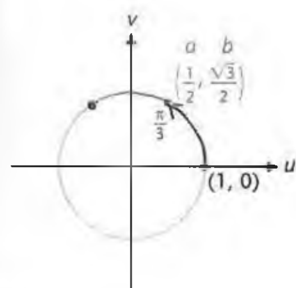


FIGURA 1

Así,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = b = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \csc\frac{\pi}{3} = \frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = a = \frac{1}{2} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}/2}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Problema seleccionado 1 Evalúe cada función circular exactamente para $x = \pi/6$.

EJEMPLO 2

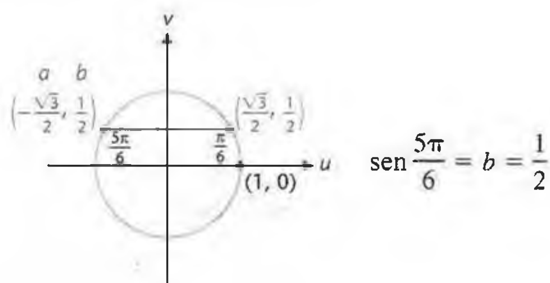
Evaluación exacta de funciones circulares

Evalúe exactamente:

(A) $\operatorname{sen}(5\pi/6)$ (B) $\cot(-\pi)$ (C) $\sec(-2\pi/3)$ (D) $\tan(7\pi/4)$

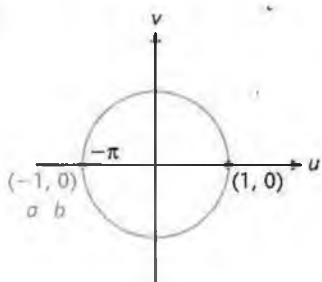
Soluciones Trace una figura para cada parte, después use la figura 8 de la sección 5-1 y las propiedades de simetría del círculo unitario.

(A)



$$\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} = b = \frac{1}{2}$$

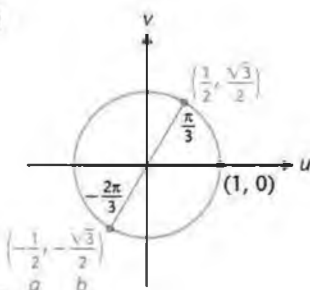
(B)



$$\cot(-\pi) = \frac{a}{b} = \frac{-1}{0}$$

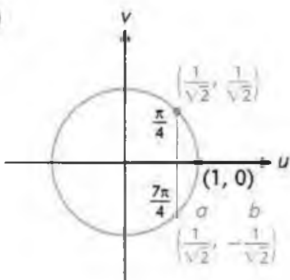
No está definida

(C)



$$\sec\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{a} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

(D)



$$\tan\frac{7\pi}{4} = \frac{b}{a} = \frac{-1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}} = -1$$

Problema seleccionado 2 Evalúe exactamente:

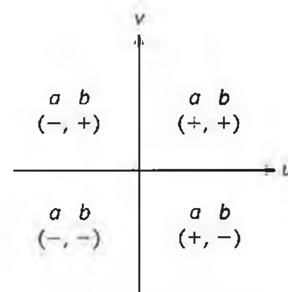
(A) $\cos(5\pi/6)$ (B) $\text{sen}(-3\pi/4)$ (C) $\csc 3\pi$ (D) $\tan(-\pi/3)$

• Propiedades del signo

Conforme un punto circular $W(x)$ se mueve de cuadrante en cuadrante, sus coordenadas (a, b) experimentan cambios de signo. Por consiguiente, las funciones circulares también cambian de signo. Es importante saber el signo de cada función circular en cada cuadrante. La tabla 1 muestra el comportamiento del signo para cada función. No es necesario memorizar la tabla 1, ya que el signo de cada función para cada cuadrante se determina fácilmente a partir de su definición (que se *debe* memorizar).

TABLA 1 Propiedades del signo

Función circular	Signo en el cuadrante I	II	III	IV
$\operatorname{sen} x = b$	+	+	−	−
$\csc x = 1/b$	+	+	−	−
$\cos x = a$	+	−	−	+
$\sec x = 1/a$	+	−	−	+
$\tan x = b/a$	+	−	+	−
$\cot x = a/b$	+	−	+	−



EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) Determine el cuadrante para el cual $\tan x < 0$ y $\operatorname{sen} x > 0$. Dibuje diagramas y explique su razonamiento.

(B) Determine el cuadrante para el cual $\cos x > 0$ y $\cot x < 0$. Dibuje diagramas y explique su razonamiento.

• Identidades básicas

Volviendo a las definiciones de las funciones circulares se observa que

$$\operatorname{sen} x = b \qquad \text{y} \qquad \cos x = a$$

se pueden obtener las siguientes relaciones útiles entre las seis funciones circulares:

$$\csc x = \frac{1}{b} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \tag{1}$$

$$\sec x = \frac{1}{a} = \frac{1}{\cos x} \tag{2}$$

$$\cot x = \frac{a}{b} = \frac{1}{b/a} = \frac{1}{\tan x} \tag{3}$$

$$\tan x = \frac{b}{a} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \tag{4}$$

$$\cot x = \frac{a}{b} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \tag{5}$$

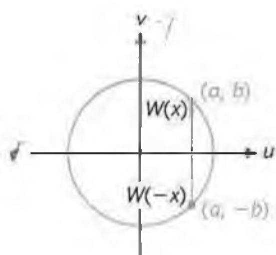


FIGURA 2 Propiedad de simetría.

Debido a que los puntos circulares $W(x)$ y $W(-x)$ son simétricos con respecto al eje horizontal (véase figura 2), se tienen las siguientes propiedades de signo:

$$\operatorname{sen}(-x) = -b = -\operatorname{sen} x \tag{6}$$

$$\cos(-x) = a = \cos x \tag{7}$$

$$\tan(-x) = \frac{-b}{a} = -\frac{b}{a} = -\tan x \tag{8}$$

Finalmente, debido a que $(a, b) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ está en el circulo unitario $u^2 + v^2 = 1$, se sigue que

$$(\cos x)^2 + (\operatorname{sen} x)^2 = 1$$

la cual se escribe generalmente como

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{9}$$

donde $\operatorname{sen}^2 x$ y $\cos^2 x$ son las formas concisas de escribir $(\operatorname{sen} x)^2$ y $(\cos x)^2$ respectivamente.

PRECAUCIÓN

$$(\operatorname{sen} x)^2 \neq \operatorname{sen} x^2$$

$$(\cos x)^2 \neq \cos x^2$$

Las ecuaciones (1) a (9) se llaman **identidades básicas**. Éstas valen para todos los reemplazos de x por números reales para los que están definidos ambos lados de una ecuación. Estas identidades básicas se deben memorizar junto con las definiciones de las seis funciones circulares, ya que el material se usa extensamente en los desarrollos que siguen. Observe que la mayor parte del capítulo 6 está dedicado a las identidades trigonométricas.

Se resumen las identidades básicas para una referencia conveniente en el teorema 1.

Teorema 1 **Identidades trigonométricas básicas**

Para x cualquier número real (en todos los casos se restringe a que ambos lados de una ecuación estén definidos):

Identidades recíprocas

(1) $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ (2) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ (3) $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Identidades del cociente

(4) $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ (5) $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Identidades para negativos

(6) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (7) $\cos(-x) = \cos x$ (8) $\tan(-x) = -\tan x$

Identidad pitagórica

(9) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

EJEMPLO 3 **Uso de las identidades básicas**

Use las identidades básicas para encontrar los valores de las otras cinco funciones circulares, dado que $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ y $\tan x > 0$.

Solución Observe primero que el punto circular $W(x)$ está en el cuadrante III, puesto que es el único cuadrante en el cual $\operatorname{sen} x < 0$ y $\tan x > 0$. Después encontramos $\cos x$ usando la identidad (9):

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{Identidad pitagórica (9)}$$
$$(-\tfrac{1}{2})^2 + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \tfrac{3}{4}$$
$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{Ya que } W(x) \text{ no está en el cuadrante III.}$$

Ahora, a partir de los valores para $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, se pueden encontrar los valores para las otras cuatro funciones circulares usando las identidades (1), (2), (4) y (5):

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \qquad \text{Identidad recíproca (1)}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\sqrt{3}/2} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \text{Identidad recíproca (2)}$$
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{Identidad del cociente (4)}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad \text{Identidad del cociente (5)}$$

[*Nota:* se podría usar también la identidad(3).]

En el ejemplo 3 es importante observar que se puede encontrar los valores de las otras cinco funciones circulares sin encontrar x.

Problema seleccionado 3 Use las identidades básicas para encontrar los valores de las otras cinco funciones circulares dando $\cos x = 1/\sqrt{2}>$ y $\cot x < 0$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Dadas las condiciones de x en el ejemplo 3: $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ y $\tan x > 0$. Encuentre, usando las identidades básicas y los resultados del ejemplo 3, cada una de las siguientes:

(A) $\operatorname{sen}(-x)$ (B) $\sec(-x)$ (C) $\tan(-x)$

Justifique verbalmente cada paso en el proceso de su solución.

• Evaluación con calculadora

La evaluación de funciones circulares para otros números reales además de los múltiplos enteros de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$ es difícil sin una calculadora. Usando matemáticas avanzadas, las calculadoras están programadas internamente para evaluar estas funciones en forma automática con un grado de precisión de ocho o más digitos significativos.

Si se observa las teclas de función de su calculadora, se encontrarán tres teclas marcadas

SEN COS TAN

Estas teclas se usan para evaluar las funciones seno, coseno y tangente directamente. Un examen cuidadoso de las teclas de funciones de su calculadora le permitirán observar también que no hay teclas para la cosecante, secante y cotangente. ¿Por qué no son necesarias estas teclas? Debido a las identidades recíprocas (1) a (3), se pueden usar las teclas de las funciones para el seno, coseno y tangente, y después usar la tecla de la función recíproca



se obtiene csc x, sec x y cot x. No use las teclas marcadas con sen^{-1}, $\cos^{-1}$ y $\tan^{-1}$ para evaluar la csc, sec y cot, respectivamente. Usted verá el porqué en la sección 5-9. Algunos ejemplos pueden ayudar a clarificar el proceso de evaluación de las funciones circulares con calculadora.

PRECAUCIÓN *Estableciendo el modo de la calculadora:* Antes de empezar con los ejemplos y los ejercicios, lea el manual de instrucciones de su calculadora para determinar cómo ponerla en modo de radianes (rad). Es en este modo en el que se puede evaluar las funciones circulares para números reales. (Este proceso se justifica en la sección 5-4 en que se analizan funciones trigonométricas con sus dominios de ángulos.) Una causa de error frecuente cuando se usa una calculadora es olvidar ponerla en el modo correcto antes de empezar a hacer cálculos que involucren funciones circulares o trigonométricas.

EJEMPLO 4 **Evaluación con calculadora**

Evalúe con cuatro dígitos significativos usando una calculadora:

(A) sen 2 (B) tan (-1.612) (C) csc 3.2

Soluciones

(A) sen 2 = 0.9093

(B) tan $(-1.612) = 24.26$

(C) csc $3.2 = -17.13$

Problema seleccionado 4 Evalúe con cuatro dígitos significativos usando calculadora:

(A) cos 4 (B) sec 1.605 (C) cot (-3.133)

ANÁLISIS Y EXPLORACIÓN 3 Use una calculadora para evaluar cada uno de los siguientes enunciados, y explique los resultados que obtenga:

(A) $\tan(\pi/2)$ (B) cot 0 (C) $\sec(-\pi/2)$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $\text{sen}(\pi/6) = \frac{1}{2}$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$, $\csc(\pi/6) = 2$, $\sec(\pi/6) = 2/\sqrt{3}$ $\cot(\pi/6) = \sqrt{3}$
2. (A) $-\sqrt{3}/2$ (B) $-1/\sqrt{2}$ (C) No está definido (D) $-\sqrt{3}$
3. $\text{sen}\, x = -1/\sqrt{2}$, $\csc x = -\sqrt{2}$, $\sec x = \sqrt{2}$, $\tan x = -1$, $\cot x = -1$
4. (A) -0.6536 (B) -29.24 (C) 116.4

EJERCICIO 5-2

En la figura 8 de la sección 5-1 está la definición de las funciones circulares, y las identidades básicas que se deben memorizar. Resuelva los problemas de este ejercicio sin mirar la sección de soluciones del libro. Dibuje la mayoría de las gráficas, si es necesario.

A

1. Escriba el valor de cada función circular en términos de las coordenadas (a, b) del punto circular $W(x)$.

(A) $\cos x$ (B) $\csc x$ (C) $\cot x$
(D) $\sec x$ (E) $\tan x$ (F) $\text{sen}\, x$

2. Dado $W(x) = (a, b)$, identifique cada cantidad usando uno de los valores de las funciones circulares sen x, cos x y así sucesivamente.

(A) b (B) $1/a$ (C) b/a
(D) $1/b$ (E) a (F) a/b

En los problemas del 3 al 20, encuentre el valor exacto de cada expresión (si ésta existe) sin usar calculadora.

3. $\cos 0$ **4.** $\text{sen}\, 0$ **5.** $\text{sen}(\pi/6)$
6. $\cos(\pi/6)$ **7.** $\text{sen}(\pi/2)$ **8.** $\cos(\pi/2)$
9. $\tan(\pi/3)$ **10.** $\cos(\pi/3)$ **11.** $\tan(\pi/2)$
12. $\cot 0$ **13.** $\sec 0$ **14.** $\cot(\pi/4)$
15. $\sec(\pi/4)$ **16.** $\csc(\pi/3)$ **17.** $\tan(\pi/4)$
18. $\tan 0$ **19.** $\csc 0$ **20.** $\cot(\pi/6)$

En los problemas del 21 al 26, en cuáles cuadrantes debe estar $W(x)$ de manera que:

21. $\cos x < 0$ **22.** $\tan x > 0$ **23.** $\text{sen}\, x > 0$
24. $\sec x > 0$ **25.** $\cot x < 0$ **26.** $\csc x < 0$

En los problemas del 27 al 32, evalúe con cuatro dígitos significativos usando una calculadora

27. $\cos 2.288$ **28.** $\text{sen}\, 3.104$ **29.** $\tan(-4.644)$
30. $\sec(-1.555)$ **31.** $\csc 1.571$ **32.** $\cot 0.7854$

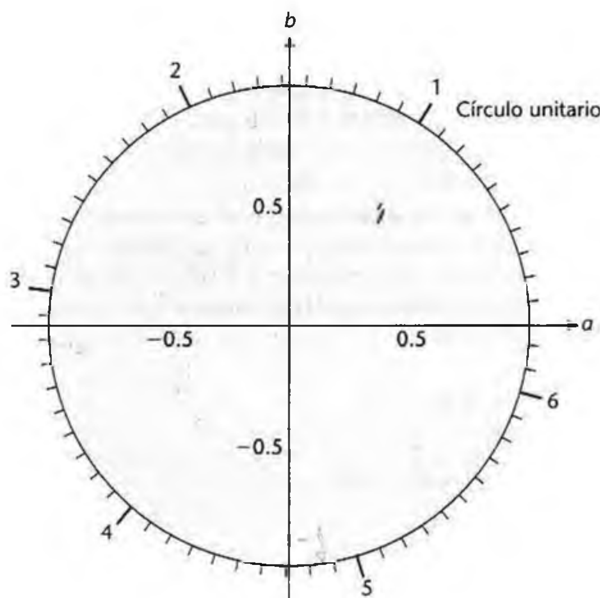
B

En los problemas del 33 al 48, encuentre el valor exacto de cada expresión (si ésta existe) sin usar calculadora.

33. $\cos \pi$ **34.** $\text{sen}(3\pi/2)$ **35.** $\cos(-\pi/2)$
36. $\tan \pi$ **37.** $\text{sen}(3\pi/4)$ **38.** $\cos(2\pi/3)$
39. $\cot 2\pi$ **40.** $\tan(-3\pi/2)$ **41.** $\tan(-\pi/6)$
42. $\cot(-\pi/3)$ **43.** $\cos(-\pi/6)$ **44.** $\text{sen}(-\pi/4)$
45. $\sec(5\pi/3)$ **46.** $\csc(4\pi/3)$ **47.** $\cot(-3\pi/4)$
48. $\tan(5\pi/4)$

En los problemas del 49 al 52, encuentre el valor de cada uno de los dígitos significativos. Use sólo la figura que lo acompaña, la definición 1 y una calculadora si hay necesidad de multiplicar o de dividir. Compruebe sus resultados evaluando directamente cada uno en una calculadora.

49. (A) $\text{sen}\, 0.4$ (B) $\cos 0.4$ (C) $\tan 0.4$
50. (A) $\text{sen}\, 0.8$ (B) $\cos 0.8$ (C) $\cot 0.8$
51. (A) $\sec 2.2$ (B) $\tan 5.9$ (C) $\cot 3.8$
52. (A) $\csc 2.5$ (B) $\cot 5.6$ (C) $\tan 4.3$



En los problemas del 53 al 56, ¿en cuáles cuadrantes son verdaderos los enunciados siguientes y por qué?

53. $\text{sen}\, x < 0$ y $\cot x < 0$

54. $\cos x > 0$ y $\tan x < 0$

55. $\cos x < 0$ y $\sec x > 0$

56. $\text{sen}\, x > 0$ y $\csc x < 0$

¿Para cuáles valores de x, $0 \le x \le 2\pi$, no está definido cada uno de los problemas del 57 al 62?

57. $\cos x$ **58.** $\text{sen}\, x$ **59.** $\tan x$

60. $\cot x$ **61.** $\sec x$ **62.** $\csc x$

¿Cómo hacer para que el valor de la función indicado en los problemas 63 y 64 varíe conforme x varía en el intervalo indicado? [Sugerencia: Dibuje un círculo unitario y observe que $W(x) = (a, b) = (\cos x, \text{sen}\, x)$.]

63. $\text{sen}\, x$:

(A) $[0, \pi/2]$ (B) $[\pi/2, \pi]$
(C) $[\pi, 3\pi/2]$ (D) $[3\pi/2, 2\pi]$

64. $\cos x$:

(A) $[0, \pi/2]$ (B) $[\pi/2, \pi]$
(C) $[\pi, 3\pi/2]$ (D) $[3\pi/2, 2\pi]$

Realice los problemas del 65 al 68 con cuatro dígitos significativos usando una calculadora.

65. $\text{sen}\, (\cos 0.3157)$ **66.** $\cos (\tan 5.183)$

67. $\cos [\csc (-1.408)]$ **68.** $\sec [\cot (-3.566)]$

Use las identidades apropiadas para resolver los problemas del 69 al 74.

69. Encuentre $\text{sen}\, (-x)$ si $\text{sen}\, x = -\frac{1}{2}$.

70. Encuentre $\cos (-x)$ si $\cos x = -\frac{1}{2}$.

71. Encuentre $\tan (-x)$ si $\tan x = -\sqrt{3}$.

72. Encuentre $\sec (-x)$ si $\sec x = 1$.

73. Encuentre $\cot (-x)$ si $\cot x = 5$.

74. Encuentre $\csc (-x)$ si $\csc x = -1$.

C

Use las identidades para encontrar los valores de las otras cinco funciones circulares con la información dada en los problemas del 75 al 80.

75. $\cos x = \frac{1}{2}$ y $\tan x < 0$

76. $\text{sen}\, x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y $\cot x < 0$

77. $\text{sen}\, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\cos x < 0$

78. $\sec x = 2$ y $\text{sen}\, x < 0$

79. $\tan x = \sqrt{3}$ y $\text{sen}\, x < 0$

80. $\cot x = -1$ y $\text{sen}\, x > 0$

En los problemas del 81 al 86, encuentre el número más pequeño positivo x (en términos de π) para el cual:

81. $\cos x = -1$

82. $\text{sen}\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

83. $\cot x = -\sqrt{3}$

84. $\tan x = -1$

85. $\sec x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

86. $\csc x = -\sqrt{2}$

En los problemas 87 y 88, llene los espacios en blanco citando la identidad apropiada (1) a (9).

87.

Enunciado	Razón
$\cot^2 x + 1 = \left(\frac{\cos x}{\text{sen}\, x}\right)^2 + 1$	(A) ______
$= \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} + 1$	Álgebra
$= \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x}$	Álgebra
$= \frac{1}{\text{sen}^2 x}$	(B) ______
$= \left(\frac{1}{\text{sen}\, x}\right)^2$	Álgebra
$= \csc^2 x$	(C) ______

88.

Enunciado	Razón
$\tan^2 x + 1 = \left(\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right)^2 + 1$	(A) ______
$= \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1$	Álgebra
$= \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}$	Álgebra
$= \frac{1}{\cos^2 x}$	(B) ______
$= \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$	Álgebra
$= \sec^2 x$	(C) ______

APLICACIONES

Si un polígono regular de n lados se inscribe en un círculo de radio r, entonces se puede demostrar que el área del polígono está dada por

$$A = \frac{1}{2} nr^2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

Calcule cada área exactamente, y después con cuatro dígitos significativos usando una calculadora si el área no es un entero.

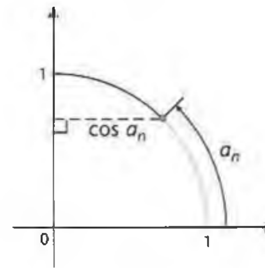
89. $n = 12, r = 5$ metros

90. $n = 4, r = 3$ pulgadas

91. $n = 3, r = 4$ pulgadas

92. $n = 8, r = 10$ centímetros

Aproximación de π. *Los problemas 93 y 94 se refieren a una sucesión de números generados como sigue:*



$$\begin{aligned} &a_1 \\ &a_2 = a_1 + \cos a_1 \\ &a_3 = a_2 + \cos a_2 \\ &\vdots \\ &a_{n+1} = a_n + \cos a_n \end{aligned}$$

93. Sea $a_1 = 0.5$, y calcule los primeros cinco términos de la sucesión con seis cifras decimales, después compare el quinto término con $\pi/2$ calculado hasta con seis cifras decimales.

94. Repita el problema 93, comenzando con $a_1 = 1$.

SECCIÓN 5-3 Ángulos y su medida



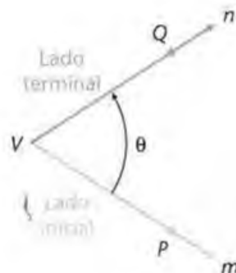
- Ángulos
- Mediciones en radianes y en grados
- De grados a radianes y viceversa

En esta sección se introducirá el concepto de ángulo y las dos unidades con que se miden, los *grados* y los *radianes*.

Ángulos

El estudio de la trigonometría comienza con el concepto de ángulo. Un **ángulo** se forma girando una media recta, llamada **rayo**, alrededor de su punto final. Un rayo m, llamado **lado inicial** del ángulo, permanece fijo; un segundo rayo n, llamado **lado terminal** del ángulo, comienza en la posición del lado inicial y gira alrededor del punto final común V en un plano hasta que alcanza su posición terminal. El punto final común V es el **vértice** (véase figura 1). Una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj produce un ángulo positivo, y una rotación en el sentido de las manecillas del reloj produce un ángulo negativo, como se muestra en las figuras 2(a) y (b). El tamaño de la rotación en cualquier dirección no está restringida. Dos ángulos diferentes pueden tener

FIGURA 1 Ángulo θ, ángulo PVQ o $\angle V$.



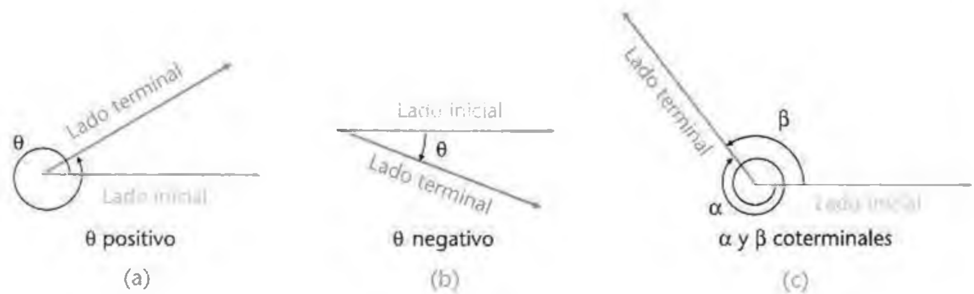


FIGURA 2 Ángulos y rotación.

los mismos lados iniciales y terminales, como se muestra en la figura 2(c). Tales ángulos se llaman **coterminales**.

Se dice que un ángulo en un sistema coordenado rectangular que está en la posición normal (o estándar) si su vértice está en el origen y su lado inicial a lo largo del eje positivo x. Si el lado terminal de un ángulo está en la posición estándar yaciendo sobre un eje coordenado, se dice que es un **ángulo de cuadrantal**. Si el lado terminal no está en un eje coordenado, entonces a menudo se hace referencia en términos del cuadrante en el que está (véase figura 3).

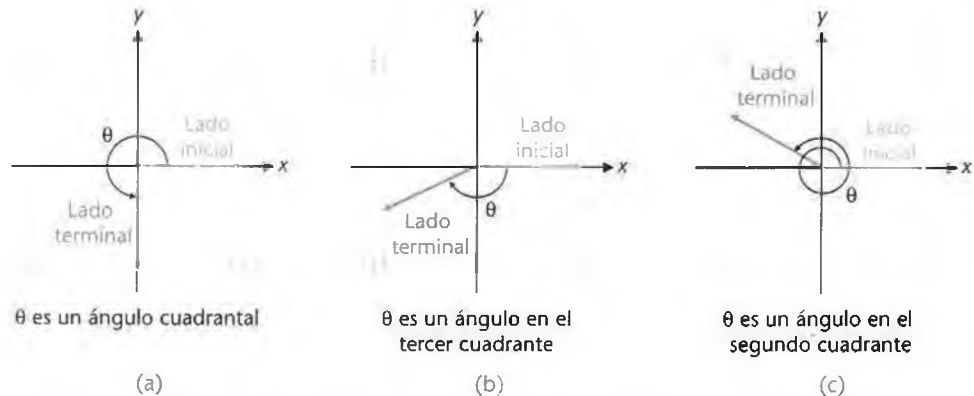


FIGURA 3 Ángulos en posiciones estándar.

Mediciones en radianes y en grados

Así como los segmentos de recta se miden en centímetros, metros, pulgadas o millas, los ángulos se miden en diferentes unidades. Las dos unidades más comúnmente usadas para la medida de los ángulos son los *grados* y los *radianes*.

DEFINICIÓN 1 **Medición en grados**

Se dice que un ángulo formado por una rotación completa tiene una medida de 360 grados (360°). Un ángulo formado por $\frac{1}{360}$ de una rotación completa se dice que tiene una medida de **1 grado** (1°). El símbolo ° denota grados.

Ciertos ángulos tienen nombres especiales. La figura 4 muestra un **ángulo llano**, un **ángulo recto**, un **ángulo agudo** y un **ángulo obtuso**.

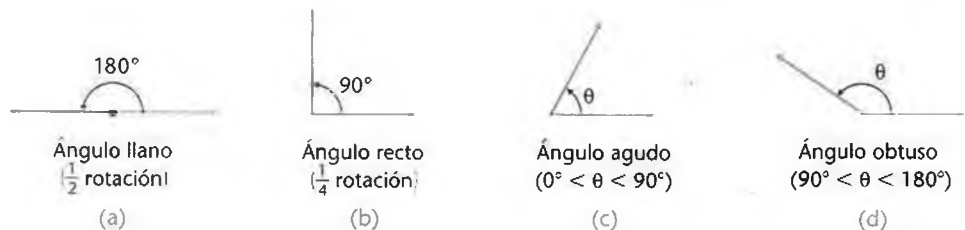


FIGURA 4 Tipos de ángulos.

Dos ángulos positivos son **complementarios** si su suma es de 9°; y **suplementarios** si su suma es de 180°.

Un grado se puede además dividir usando la notación decimal. Por ejemplo, 42.75° representa un ángulo de 42 grados más tres cuartas partes de 1 grado. Un grado también se puede dividir usando minutos y segundos, de la misma manera que una hora se divide en minutos y segundos. Cada grado se divide en 60 partes iguales llamadas **minutos**, y cada minuto se divide en 60 partes iguales llamadas **segundos**. Simbólicamente, los minutos se representan por ' y los segundos por ". Así,

$$12°23'14''$$

es una manera concisa de escribir 12 grados, 23 minutos y 14 segundos.

Los grados decimales (GD) son útiles en algunos casos y los grados-minutos-segundos (GMS) en otros. Usted debe ser capaz de ir de una forma a otra, como se muestra en el ejemplo 1.

Precisión de la conversión

Si un ángulo se mide al segundo más cercano, la forma convertida a decimales no debe incluir más de tres lugares decimales y viceversa.

EJEMPLO 1 **De la forma GMS a la forma GD y a la inversa**

(A) Convierta 21°47'12" a grados decimales.
(B) Convierta 105.183° a la forma grado-minuto-segundo.

Solución

(A) $21°47'12'' = \left(21 + \frac{47}{60} + \frac{12}{3600}\right)^{\circ} = 21.787°$

(B) $105.183°$

$$\begin{aligned} &= 105°(0.183\cdot 60)' \\ &= 105°10.98' \\ &= 105°10'(0.98\cdot 60)'' \\ &= 105°10'59'' \end{aligned}$$

Problema seleccionado 1

(A) Convierta 193°17' 34" a la forma GD.
(B) Convierta 237.615° a la forma GMS.

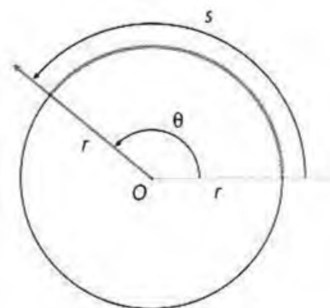
Algunas calculadoras científicas y de graficación pueden convertir a las formas GD y GMS automáticamente, pero el proceso difiere en forma significativa entre los diferentes tipos de calculadoras. Verifique en el manual de su calculadora en particular. Los métodos de conversión delineados en el ejemplo 1 muestran el razonamiento detrás del proceso, el cual, a veces es más fácil de usar que los métodos "automáticos" de algunas calculadoras.

Las medidas de ángulos en grados se usan ampliamente en la ingeniería, levantamiento de planos y en la navegación. Otra unidad de medida de ángulos, llamada *radián*, se ajusta mejor a ciertos desarrollos matemáticos, al trabajo científico y a las aplicaciones de la ingeniería.

DEFINICIÓN 2 **Mediciones en radianes**

Si se coloca el vértice de un ángulo θ en el centro de un círculo de radio $r > 0$, y la longitud del arco opuesto a θ en la circunferencia es s, entonces **θ medido en radianes** está dado por

$$\theta = \frac{s}{r} \text{ radianes}$$

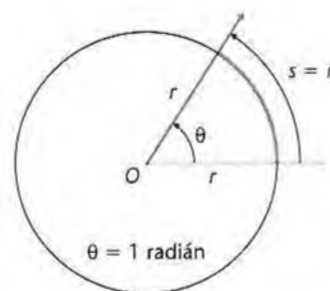


También,

$$s = r\theta$$

Si $s = r$, entonces

$$\theta = \frac{r}{r} = 1 \text{ radián}$$



Así, **un radián** es el tamaño del ángulo central de un círculo que intersecta un arco de la misma longitud que el radio del círculo. [*Nota:* s y r deben estar medidos en las mismas unidades. Observe también que θ se usa de dos maneras: como el nombre de un ángulo y como la medida del ángulo. El contexto determina la elección. Así, cuando se escribe $\theta = s/r$, significa que la medida del ángulo θ en radianes es s/r.]

EJEMPLO 2 **Cálculo de la medida de un ángulo en radianes**

¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo central θ opuesto a un arco de 24 metros en un círculo cuyo radio mide 6 metros?

Solución

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{24 \text{ metros}}{6 \text{ metros}} = 4 \text{ radianes}$$

Problema seleccionado 2

¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo central θ opuesto a un arco de 60 pies en un círculo de radio de 12 pies?

Comentario. *La medida radián es un número sin unidades.* Las unidades en las que se mide la longitud del arco y el radio se cancelan; por consiguiente, se está dejando a un número "sin unidades", o puro. Por esta razón, la palabra "radián" se omite a menudo cuando se trata con la unidad radián como medida de ángulos a menos que se desee hacer un énfasis especial.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Analice por qué la medida en radianes de un ángulo es independiente del tamaño del círculo que tiene al ángulo como un ángulo central.

• De grados a radianes y viceversa

¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo de 180°? Un ángulo central de 180° es subtendido por un arco que es la mitad de la circunferencia de un círculo. En consecuencia, si C es la circunferencia de un círculo, entonces la mitad de la circunferencia está dada por

$$s = \frac{C}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{s}{r} = \frac{\pi r}{r} = \pi \text{ rad}$$

De aquí que, 180° corresponde a π* rad. Es importante recordar esto, ya que las medidas en radianes de algunos ángulos especiales se pueden obtener de esta correspondencia. Por ejemplo, 90° es 180°/2; por lo tanto, 90° corresponde a $\pi/2$ rad.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Termine la tabla 1:

TABLA 1

Radianes	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
Grados	30	45	60	90	180	270	360

* La constante π tiene una larga e interesante historia; en seguida se enumeran algunas fechas importantes:

1650 a.C.	Papiros de Rhind	$\pi \approx \frac{256}{81} = 3.16049\ldots$
370 a.C.	Euclides	$3 < \pi < 4$
240 a.C.	Arquímides	$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ $(3.1408\ldots < \pi < 3.1428\ldots)$
264 d.C.	Liu Hui	$\pi \approx 3.14159$
470 d.C.	Tsu Ch'ung-chih	$\pi \approx \frac{355}{113} = 3.1415929\ldots$
1674 d.C.	Leibniz	$\pi \approx 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots)$ $\approx 3.1415926535897932384626$ (Ésta y otras series se pueden usar para calcular π con la precisión deseada.)
1761 d.C.	Johann Lambert	Mostró que π es un irracional (π tiene una repetición decimal no repetitiva e infinita.)

Los resultados de la tabla 1 están resumidos en la figura 5 para una fácil referencia. Estas correspondencias y sus múltiplos se usarán ampliamente en el trabajo que sigue.

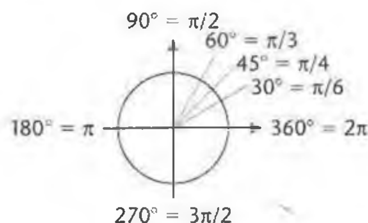


FIGURA 5 Correspondencias entre radián y grado.

En general, se puede usar la siguiente para convertir grados en radianes y viceversa.

Fórmulas de conversión entre grados y radianes

$$\theta_{\text{grad}} = \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}\,\theta_{\text{rad}} \quad \text{Radianes a grados}$$

$$\frac{\theta_{\text{grad}}}{180^\circ} = \frac{\theta_{\text{rad}}}{\pi \text{ rad}} \quad \text{o}$$

$$\theta_{\text{rad}} = \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\,\theta_{\text{grad}} \quad \text{Grados a radianes}$$

[*Nota:* La proporción de la izquierda es generalmente más fácil de recordar. También se omiten las unidades en los cálculos hasta la respuesta final. Si su calculadora no tiene una clave marcada con π, use $\pi \approx 3.14159$.]

Algunas calculadoras científicas y de graficación pueden convertir automáticamente radianes a grados y viceversa. Verifique el manual de su calculadora.

EJEMPLO 3 Conversiones de grados a radianes

(A) Encuentre la medida en radián, exactos y con tres dígitos significativos, de un ángulo de 75°.
(B) Encuentre las medidas en grados, exactos y con cuatro dígitos significativos, de un ángulo de 5 radianes.
(C) Encuentre las medidas en radianes con dos cifras decimales de un ángulo de 41°12'.

Solución

exacta con tres dígitos significativos.

(A) $\theta_{\text{rad}} = \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}\theta_{\text{grad}} = \frac{\pi}{180}(75) = \frac{5\pi}{12} = 1.31$

exacta con cuatro dígitos significativos.

(B) $\theta_{\text{grad}} = \frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}\theta_{\text{rad}} = \frac{180}{\pi}(5) = \frac{900}{\pi} = 286.5^\circ$

75°	
	1.31
5ʳ	
	286.5
41°12'	
	41.20

FIGURA 6 Conversión automática.

(C) $41°12' = \left(41 + \frac{12}{60}\right)^{\circ} = 41.2°$ Primero cambie 41°12' a GD.

$$\theta_{rad} = \frac{\pi \text{ rad}}{180°}\theta_{grad} = \frac{\pi}{180}(41.2) = 0.72$$ Con dos cifras decimales

La figura 6 muestra las tres conversiones anteriores hechas automáticamente con una calculadora de graficación.

Problema seleccionado 3

(A) Encuentre los radianes, exactos y con tres dígitos significativos, de un ángulo de 240°.
(B) Encuentre los grados, exactos y con tres dígitos significativos, de un ángulo de 1 radián.
(C) Encuentre los radianes con tres dígitos significativos de un ángulo de 125°23'.

Comentario. Se escribirá θ en lugar de θ_{grad} y θ_{rad} cuando el contexto indique claramente si se trata con grados o radianes.

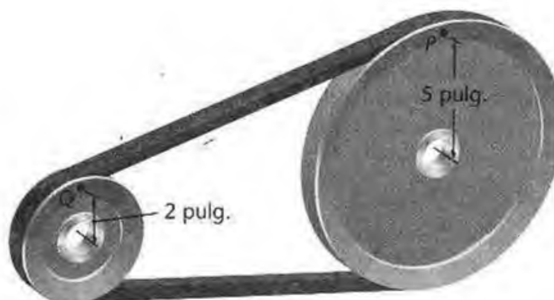
EJEMPLO 4

Ingeniería

Una banda conecta una polea de 2 pulgadas de radio con una polea de 5 pulgadas de radio. Si la polea más grande gira 10 radianes, ¿cuántos radianes gira la polea más pequeña?

Solución Se comienza dibujando la figura 7.

FIGURA 7



Cuando la polea más grande gira 10 radianes, el punto P en esta circunferencia recorrerá la misma distancia (la longitud del arco) que el punto Q en el círculo más pequeño. Para la polea más grande:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

$$s = r\theta = (5)(10) = 50 \text{ pulgadas}$$

Para la polea más pequeña:

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{50}{2} = 25 \text{ radianes}$$

En el ejemplo 4, ¿cuántos radianes gira la polea más grande si la polea más pequeña gira 4 radianes?

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) 193.293° (B) 237°36′54″ **2.** 5 rad

3. (A) $\frac{4\pi}{3} = 4.19$ (B) $\frac{180}{\pi} = 57.3°$ (C) 2.188 **4.** 1.6 rad

5-3

En todos los problemas, si la medida del ángulo se expresa por un número que no está en grados, debe suponerse que está en radianes.

A

Encuentre los grados en cada uno de los ángulos de los problemas del 1 al 6, tenga presente que el ángulo de una rotación completa corresponde a 360°

1. $\frac{1}{9}$ rotación
2. $\frac{1}{5}$ rotación
3. $\frac{3}{4}$ rotación
4. $\frac{3}{8}$ rotación
5. $\frac{9}{8}$ rotaciones
6. $\frac{7}{6}$ rotaciones

Encuentre los radianes de un ángulo central θ opuesto a una longitud de arco s de un círculo de radio r, donde r y s están dados en los problemas 7 al 10.

7. $r = 4$ centímetros, $s = 24$ centímetros
8. $r = 8$ pulgadas, $s = 16$ pulgadas
9. $r = 12$ pies, $s = 30$ pies
10. $r = 18$ metros, $s = 27$ metros

Encuentre los radianes para cada ángulo de los problemas del 11 al 16, tenga presente que el ángulo de una rotación completa corresponde a 2π radianes.

11. $\frac{1}{8}$ rotación
12. $\frac{1}{6}$ rotación
13. $\frac{3}{4}$ rotación
14. $\frac{5}{12}$ rotación
15. $\frac{13}{12}$ rotaciones
16. $\frac{11}{8}$ rotaciones

B

Encuentre los radianes exactamente, en términos de π, de cada ángulo en los problemas del 17 al 20.

17. 30°, 60°, 90°, 120°, 150°, 180°

18. 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°

19. −45°, −90°, −135°, −180°

20. −90°, −180°, −270°, −360°

Encuentre los grados exactos de cada ángulo en los problemas del 21 al 24.

21. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$
22. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi$

23. $-\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}, -2\pi$
24. $-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\pi$

Convierta cada ángulo de los problemas del 25 al 28 a grados decimales con tres cifras decimales.

25. 5°51′33″
26. 14°18′37″
27. 354°8′29″
28. 184°31′7″

Convierta cada ángulo de los problemas del 29 al 32 a la forma grado-minuto-segundo.

29. 3.042°
30. 49.715°
31. 403.223°
32. 156.808°

Encuentre los radianes con tres cifras decimales para cada ángulo de los problemas del 33 al 38.

33. 64°
34. 25°
35. 108.413°
36. 203.097°
37. 13°25′14″
38. 56°11′52″

Encuentre los grados con dos cifras decimales para cada ángulo de los problemas del 39 al 44.

39. 0.93
40. 0.08
41. 1.13
42. 3.07
43. −2.35
44. −1.72

Indique si cada ángulo en los problemas del 45 al 64 es un ángulo que está en el cuadrante I, II, III o IV o es un ángulo cuadrantal. Todos los ángulos están en la posición normal (estándar) en un sistema coordenado rectangular. (Un dibujo puede ser de ayuda en algunos problemas.)

45. 187° **46.** 135° **47.** −200°

48. −60° **49.** 4 **50.** 3

51. 270° **52.** 360° **53.** −1

54. −6 **55.** $\frac{5\pi}{3}$ **56.** $\frac{2\pi}{3}$

57. $-\frac{7\pi}{6}$ **58.** $-\frac{3\pi}{4}$ **59.** $-\pi$

60. $-\frac{3\pi}{2}$ **61.** 820° **62.** −565°

63. $\frac{13\pi}{4}$ **64.** $\frac{23\pi}{3}$

65. Describa verbalmente el significado de un ángulo central de 1 radián en un círculo.

66. Describa verbalmente el significado de un ángulo de 1 grado.

C

¿Cuáles ángulos de los problemas del 67 al 72 son coterminales con 30° si todos están en la posición normal (estándar) en un sistema coordenado rectangular?

67. 390° **68.** 330° **69.** $\frac{\pi}{6}$

70. $-\frac{11\pi}{6}$ **71.** −690° **72.** 750°

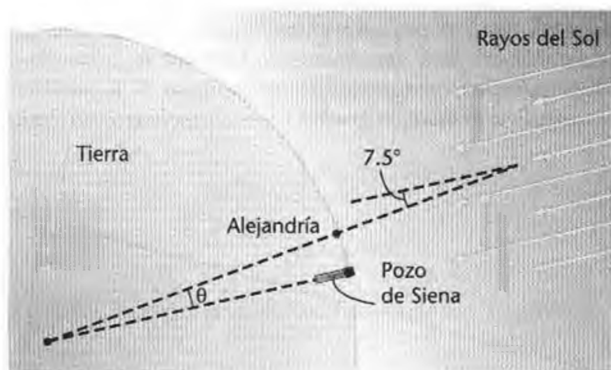
¿Cuáles ángulos en los problemas del 73 al 78 son coterminales con 3π/4 si todos están en la posición normal (estándar) en un sistema coordenado rectangular?

73. $-\frac{3\pi}{4}$ **74.** $-\frac{7\pi}{4}$ **75.** 135°

76. −225° **77.** $\frac{11\pi}{4}$ **78.** $-\frac{5\pi}{4}$

APLICACIONES

79. La circunferencia de la Tierra. Los griegos usaron la proporción $s/C = \theta°/360°$, donde s es una longitud del arco en un círculo, $\theta°$ son los grados del ángulo central correspondiente y C es la circunferencia del círculo ($C = 2\pi r$). Eratóstenes (240 a.C.), para obtener su famoso cálculo de la circunferencia de la Tierra, razonó como sigue: En Siena (ahora Asuán) durante el solsticio de verano el rayo de Sol del mediodía caía directamente sobre su cabeza y se reflejaba en el agua de un pozo profundo en forma vertical. El mismo día, al mismo tiempo, 5 000 estadios (aproximadamente 500 millas) al norte de Alejandría, los rayos del Sol cruzaban un polo vertical en un ángulo de 7.5°, como se indica en la figura. Realice el cálculo de Eratóstenes para la circunferencia de la Tierra aproximando a los miles de millas más cercanas. (El cálculo más reciente de la circunferencia ecuatorial es de 24 902 millas).



80. Circunferencia de la Tierra. Repita el problema 79 cuando el Sol cruza el polo vertical en Alejandría a 7°12'.

81. Circunferencia de la Tierra. En el problema 79, explique verbalmente cómo se determina θ en la figura.

82. Circunferencia de la Tierra. Explique verbalmente cómo el radio, área superficial y el volumen de la Tierra se pueden determinar con el resultado del problema 79.

83. Medición en radianes. ¿Cuál es la medida en radianes del ángulo más grande formado por las manecillas de un reloj a las 4:30? Exprese la respuesta exactamente en términos de π.

84. Medición en radianes. ¿Cuál es la medida en radianes del ángulo más pequeño que forman las manecillas de un reloj a la 1:30? Exprese la respuesta exactamente en términos de π.

85. Ingeniería. ¿Cuántos radianes gira una polea de 10 centímetros de diámetro cuando se jalan 10 metros de la cuerda y no resbala?

86. Ingeniería. ¿Cuántos radianes gira una polea de 6 pulgadas de diámetro cuando se jalan 4 pies de la cuerda y no resbala?

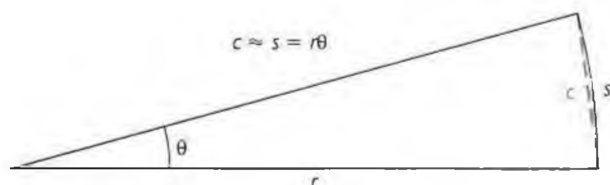
87. Astronomía. ¿Qué ángulo medido en radianes barre una línea del Sol a la Tierra en una semana? Suponga que la órbita de la Tierra es circular y que un año tiene 52 semanas. Exprese la respuesta en términos de π y como un decimal con dos cifras decimales.

88. Astronomía. ¿De cuántos radianes es el ángulo que barre una línea del centro de la Tierra al ecuador en 9 horas? Exprese la respuesta en términos de π y como decimal con dos cifras decimales.

89. **Ingeniería.** La rueda de una bicicleta de rastreo tiene 40 centímetros de diámetro y la trasera 60. ¿Qué ángulo en radianes gira la rueda delantera si la trasera gira 8 radianes?

90. **Ingeniería.** En el problema 89, ¿qué ángulo en radianes gira la rueda trasera si la delantera gira 15 radianes?

Es fácil calcular la longitud del arco en un círculo si el ángulo central correspondiente está dado en radianes y se conoce el radio del círculo ($s = r\theta$). Si el radio del círculo es grande y el ángulo central es pequeño, entonces una longitud de arco se usa a menudo para aproximar a la longitud de la cuerda correspondiente, como se muestra en la figura. Si la medida de un ángulo está dada en grados, convertir primero esa medida en radianes puede ayudar en la solución de ciertos problemas. Esta información será útil en los problemas del 91 al 94.



91. **Astronomía.** El Sol está aproximadamente a 9.3×10^7 millas de la Tierra. Si el ángulo subtendido por el diámetro del Sol a la superficie de la Tierra es de 9.3×10^{-3} rad aproximadamente, ¿cuál es el diámetro del Sol en miles de millas, aproxime a las más cercanas en notación decimal estándar?

92. **Astronomía.** La Luna está aproximadamente a 381 000 kilómetros de la Tierra. Si el ángulo subtendido por el diámetro de la Luna a la superficie de la Tierra es de 0.0092 rad, ¿cuál es el diámetro aproximado de la Luna en la centena de kilómetros más cercana?

93. **Fotografía.** El ángulo de visión de un lente de largo alcance de 1 000 mm es de 2.5°. A 750 pies, ¿cuál es el ancho del campo de visión, aproxime al pie más cercano?

94. **Fotografía.** El ángulo de visión de un lente de 300 mm es de 8°. A 500 pies, ¿cuál es el ancho del campo de visión, aproxime al pie más cercano?

SECCIÓN 5-4 Funciones trigonométricas

- Definición de las funciones trigonométricas
- Evaluación de las funciones trigonométricas con calculadora
- Definición de las funciones trigonométrica forma alternas:
- Valores exactos para ángulos especiales y números reales
- Resumen de valores de ángulos especiales

En esta sección se definen las funciones trigonométricas con dominios de ángulo, donde los ángulos pueden estar medidos en grados o radianes. Se muestra también cómo las funciones circulares están relacionadas con las funciones trigonométricas para que usted pueda moverse fácilmente de uno al otro, cuando sea necesario.

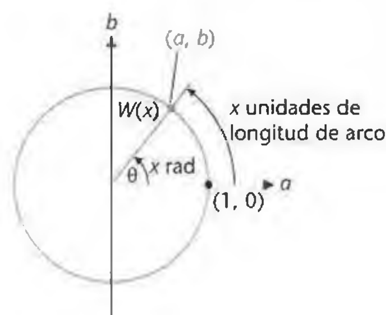
Definición de las funciones trigonométricas

Ahora usted está listo para definir las funciones trigonométricas con dominios de ángulo. Puesto que se ha definido a las funciones circulares con dominios en los números reales, se pueden aprovechar estos resultados y definir las funciones trigonométricas con dominios de ángulo en términos de las funciones circulares. A cada una de las seis funciones circulares se le ha asociado una función trigonométrica del mismo nombre. Si θ es un ángulo, ya sea en radianes o grados, se le asignan valores al sen θ, cos θ, tan θ, csc θ, sec θ y cot θ como se indica en la definición 1.

DEFINICIÓN 1 **Funciones trigonométricas con dominios de ángulo**

Si θ es un ángulo de x radianes, entonces el valor de cada **función trigonométrica** en θ está dado por su valor con el número real x.

Función trigonométrica	**Función circular**
sen θ	= sen x
cos θ	= cos x
tan θ	= tan x
csc θ	= csc x
sec θ	= sec x
cot θ	= cot x



Si θ es un ángulo medido en grados, convierta la medida en radianes y proceda como antes se indicó.

[*Nota:* Para reducir el número de símbolos diferentes en ciertas figuras, se comenzará por etiquetar los ejes u y v como los ejes a y b, respectivamente. Una expresión tal como sen 30° también denota al seno de un ángulo que mide 30°.]

La figura en la definición 1 utiliza el hecho importante de que en un círculo unitario la longitud de arco s opuesta a un ángulo de x radianes tiene una longitud de x unidades, y viceversa:

$$s = r\theta = 1 \cdot x = x$$

EJEMPLO 1 **Evaluación exacta para ángulos especiales**

Evalúe exactamente sin calculadora:

(A) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\text{radianes}\right)$ (B) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\text{radianes}\right)$ (C) $\cos 180°$ (D) $\csc(-150°)$

Solución

(A) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\text{ radianes}\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

(B) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\text{radianes}\right) = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$

(C) $\cos 180° \; \boxed{= \cos(\pi \text{ radianes})} = \cos\pi = -1$

(D) $\csc(-150°) \; \boxed{= \csc\left(-\frac{5\pi}{6}\text{ radianes}\right)} = \csc\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -2$

Problema seleccionado 1

Evalúe exactamente sin calculadora:

(A) $\tan(-\pi/4$ radianes$)$ (B) $\cos(2\pi/3$ radianes$)$
(C) sen $90°$ (D) $\sec(-120°)$

• Evaluación de las funciones trigonométricas con calculadora

¿Cómo se evalúan las funciones trigonométricas para ángulos arbitrarios? Así como se puede usar una calculadora para aproximar las funciones circulares para números reales arbitrarios, también se puede usar una calculadora para aproximar las funciones trigonométricas para ángulos arbitrarios.

La mayoría de las calculadoras tienen tres opciones de modos trigonométricos: el grado (decimal), radián o grados centesimales.

$$\text{Un ángulo recto} = 90° = \frac{\pi}{2} \text{ radianes} = 100 \text{ grados centesimales.}$$

La unidad **grados centesimales** se usa en ciertas aplicaciones de ingeniería y no se usará en este libro. La siguiente es una precaución ya señalada pero que conviene recalcar.

PRECAUCIÓN

Lea el manual de instrucciones de su calculadora para determinar cómo poner su calculadora en el modo de grados o radianes. Una causa frecuente de errores es olvidar poner la calculadora en el modo correcto antes de iniciar los cálculos que implican el uso de funciones trigonométricas.

Usando una calculadora en el modo de grado o de radián, se pueden evaluar las funciones trigonométricas directamente para ángulos medidos en grados o radianes sin tener que convertir primero de grados a radianes. (Algunas calculadoras trabajan sólo con grados decimales, otras trabajan con grados decimales o en forma de grado-minuto-segundo. Consulte su manual.)

Generalizando las identidades recíprocas (expresadas primero en el teorema 1, de la sección 5-2) se puede evaluar la cosecante, la secante y la cotangente.

Teorema 1 **Identidades recíprocas**

Para x cualquier número real o ángulo medido en grados o radianes:

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \operatorname{sen} x \neq 0$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cos x \neq 0$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \qquad \tan x \neq 0$$

EJEMPLO 2 **Evaluación con calculadora**

Evalúe con cuatro dígitos significativos usando una calculadora:

(A) cos 173.42° (B) sen (3 radianes) (C) tan 7.183
(D) cot (−102°51′) (E) sec (−12.59 radianes) (F) csc (−206.3)

Soluciones

(A) cos 173.42° = −0.9934 — Modo grados (Degree en su calculadora)
(B) sen (3 radianes) = 0.1411 — Modo radián
(C) tan 7.183 = 1.260 — Modo radián
(D) cot (−102°51′) = cot (−102.85°) — Modo grados (Algunas calculadoras necesitan grados decimales.)
= 0.2281
(E) sec (12.59 radianes) = 1.000 — Modo radián
(F) csc (−206.3) = 1.156 — Modo radián

Problema seleccionado 2

Evalúe con cuatro dígitos significativos usando calculadora:

(A) sen 239.12° (B) cos (7 radianes) (C) cot 10
(D) tan (−212°33′) (E) sec (−8.09 radianes) (F) csc (−344.5)

• Definición de las funciones trigonométricas: forma alterna

Para muchas aplicaciones que implican el uso de funciones trigonométricas, incluso aplicaciones de los triángulos, es útil escribir la definición 1 en la forma alterna [una forma que utiliza las coordenadas de un punto arbitrario $(a, b) \neq (0, 0)$ en el lado terminal de un ángulo θ (véase figura 1)].

Esta forma alterna de la definición 1 se encuentra fácilmente insertando un círculo unitario en la figura 1, dibujando perpendiculares desde los puntos P y Q al eje horizontal (figura 2), y usando el hecho de que las razones de los lados correspondientes de triángulos semejantes son proporcionales.

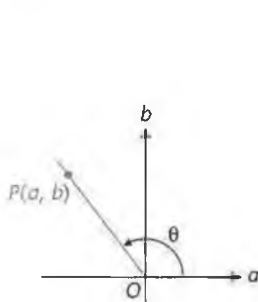


FIGURA 1 Ángulo θ.

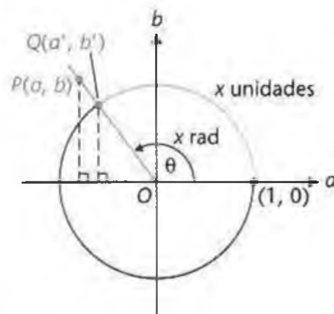


FIGURA 2 Triángulos semejantes.

Haciendo $r = d(O, P)$ y observando que $d(O, Q) = 1$, se tiene

$$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}x = b' = \frac{b'}{1} = \frac{b}{r}$$ b y b' siempre tienen el mismo signo.

$$\cos\theta = \cos x = a' = \frac{a'}{1} = \frac{a}{r}$$ a y a' siempre tienen el mismo signo.

Los valores de las otras cuatro funciones trigonométricas se pueden obtener usando las identidades básicas. Por ejemplo

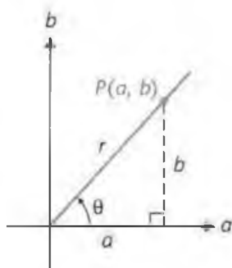
$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{b/r}{a/r} = \frac{b}{a}$$

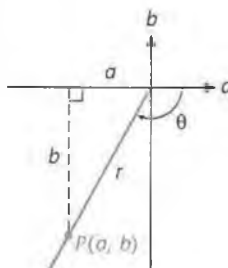
Ahora se tiene una muy útil forma alterna de la definición 1.

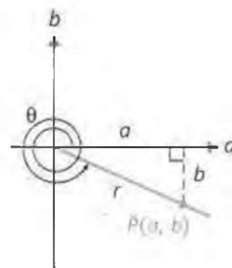
DEFINICIÓN 1 (FORMA ALTERNA)

Funciones trigonométricas con dominios de ángulo

Si θ es un ángulo arbitrario en la posición estándar en un sistema coordenado rectangular y $P(a, b)$ es un punto r unidades del origen en el lado terminal de θ, entonces:







$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b},\ b \neq 0$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a},\ a \neq 0$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a},\ a \neq 0 \qquad \cot\theta = \frac{a}{b},\ b \neq 0$$

$r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$; $P(a, b)$ es un punto arbitrario en el lado terminal de θ, $(a, b) \neq (0, 0)$

Dominios: Conjuntos de todos los ángulos posibles para los que se definen las relaciones.

Rangos: Subconjuntos del conjunto de los números reales.

(Los dominios y los rangos se definirán más precisamente en la siguiente sección.)

[*Nota:* El triángulo rectángulo que se forma al dibujar una perpendicular de $P(a, b)$ al eje horizontal se llama **triángulo de referencia** asociado con el ángulo θ. A menudo se hará referencia a este triángulo.]

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Analice por qué, para un ángulo dado θ, las relaciones de la definición 1 son independientes de la elección de $P(a, b)$ en el lado terminal de θ en tanto que $(a, b) \neq (0, 0)$.

Se debe memorizar esta forma alterna de la definición 1. Para auxiliar a la memoria, observe que $r = 1$, por consiguiente $P(a, b)$ está en el círculo unitario, y todos los valores de la función corresponden a valores obtenidos usando la definición 1 para funciones circulares de la sección 5-2. De hecho, usando la forma alterna de la definición 1 junto con el enunciado original de la definición 1 de esta sección, se tiene una manera alterna de evaluación de las funciones circulares:

Funciones circulares y funciones trigonométricas

Para x cualquier número real:

$$\text{sen } x = \text{sen } (x \text{ radianes}) \qquad \cos x = \cos (x \text{ radianes})$$
$$\sec x = \sec (x \text{ radianes}) \qquad \csc x = \csc (x \text{ radianes}) \qquad (1)$$
$$\tan x = \tan (x \text{ radianes}) \qquad \cot x = \cot (x \text{ radianes})$$

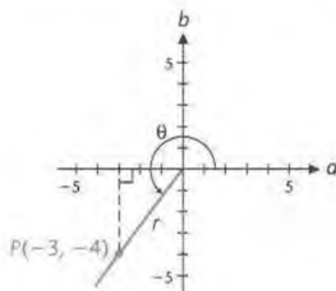
De manera que ahora se pueden evaluar las funciones circulares en términos de las funciones trigonométricas, usando triángulos de referencia donde sea apropiado, o en términos de puntos circulares y de la función generadora antes analizada. Cada enfoque tiene ciertas ventajas en situaciones particulares, y usted debe familiarizarse con el uso de ambos.

Esto se debe a que a partir de las ecuaciones (1) se puede evaluar las funciones circulares usando una calculadora en el modo de radián (véase la sección 5-2). Generalmente, a menos que se quiera dar cierto énfasis, no se usará "rad" después de un número real. Esto es, se interpretará a las expresiones tal como "sen 5.73" como el "valor de la función circular sen 5.73" o el "valor de la función trigonométrica sen (5.73 rad)" según el contexto en que ocurra la expresión o la forma que se desea acentuar. Se permanecerá flexible y con frecuencia se cambiará entre el énfasis en la función circular al énfasis en la función trigonométrica, dependiendo de cuál de los dos proporcione mayor claridad en una situación dada.

EJEMPLO 3 **Evaluación de las funciones trigonométricas**

Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas para el ángulo ilustrado θ cuyo lado terminal contiene a $P(-3,-4)$. Véase figura 3.

FIGURA 3



Solución

$$(a, b) = (-3, -4)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

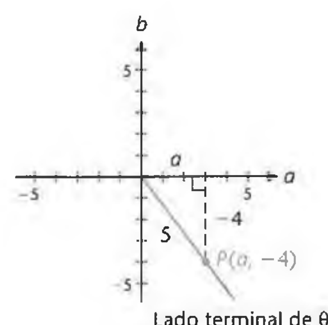
Problema seleccionado 3 Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas si el lado terminal de θ contiene al punto $(-6, -8)$. [*Nota:* Este punto está en el lado terminal del ángulo en el ejemplo 3; de aquí que los resultados finales deben ser los mismos que los obtenidos en el ejemplo 3.]

EJEMPLO 4 **Evaluación de las funciones trigonométricas**

Encuentre el valor de cada una de las otras cinco funciones trigonométricas para un ángulo θ (sin encontrar θ) dado que θ es un ángulo del cuadrante IV sen $\theta = -\frac{4}{5}$.

Solución La información dada es suficiente para poder localizar un triángulo de referencia en el IV cuadrante para θ, aunque no se conozca θ. Se traza un triángulo de referencia, que se etiqueta en la forma antes expresada (figura 4), y después termine el problema como se indica.

FIGURA 4



Puesto que el sen $\theta = b/r = -\frac{4}{5}$ puede hacer $b = -4$ y $r = 5$ (r nunca es negativo). Si se puede encontrar a, entonces se puede determinar los valores de las otras cinco funciones.

Use el teorema de Pitágoras para encontrar a:

$$a^2 + (-4)^2 = 5^2$$

$$a^2 = 9$$

$$a = \mp 3$$

$$= 3 \quad \text{a no puede ser negativo porque θ es un ángulo del cuadrante IV.}$$

Usando $(a, b) = (3, -4)$ y $r = 5$, se tiene que

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{3}{5} \qquad \sec\theta = \frac{r}{a} = \frac{5}{3} \qquad \csc\theta = \frac{r}{b} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

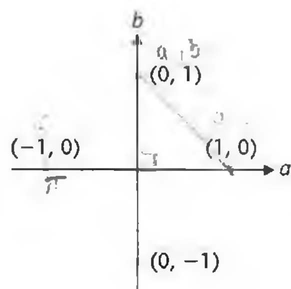
Problema seleccionado 4 Encuentre el valor de cada una de las otras cinco funciones trigonométricas para un ángulo θ (sin encontrar θ) dado que θ es un ángulo del cuadrante II y $\tan\theta = -\frac{3}{4}$.

• Valores exactos para ángulos especiales y números reales

Suponga que está definida una función trigonométrica, se puede evaluar exactamente sin el uso de una calculadora o de una tabla (lo cual es diferente de encontrar los valores aproximados usando una tabla o una calculadora) para cualquier múltiplo de entero de 30°, 45°, 60°, 90°, π/6, π/4, π/3 o de π/2. Con un poco de práctica usted podrá determinar estos valores mentalmente. En muchas situaciones es ventajoso trabajar con valores exactos en vez de con valores aproximados.

Los ángulos más fáciles de tratar son los ángulos cuadrantales, ya que estos ángulos son múltiplos enteros de 90° o π/2. Es fácil encontrar las coordenadas de un punto en los ejes coordenados. Para cualquier punto que no esté en el origen, por conveniencia se escogen puntos de 1 unidad a partir del origen, como se muestra en la figura 5.

FIGURA 5 Ángulos de cuadrantales.



En cada caso $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, es un número positivo.

EJEMPLO 5

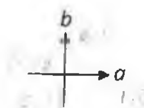
Funciones trigonométricas de ángulos cuadrantales

Encuentre:

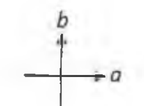
(A) sen 90° (B) cos π (C) tan (−2π) (D) cot (−180°)

Soluciones En cada caso se visualiza la localización del lado terminal del ángulo con respecto a la figura 3. Con un poco de práctica se podrá resolver mentalmente.

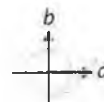
(A) $\text{sen } 90° = \frac{b}{r} = \frac{1}{1} = 1$ $(a, b) = (0, 1);\ r = 1$



(B) $\cos\pi = \frac{a}{r} = \frac{-1}{1} = -1$ $(a, b) = (-1, 0);\ r = 1$

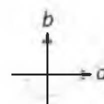


(C) $\tan(-2\pi) = \frac{b}{a} = \frac{0}{1} = 0$ $\quad (a, b) = (1, 0);\ r = 1$



(D) $\cot(-180°) = \frac{a}{b} = \frac{-1}{0}$ $\quad (a, b) = (-1, 0);\ r = 1$

No definida



Problema seleccionado 5 Encuentre:

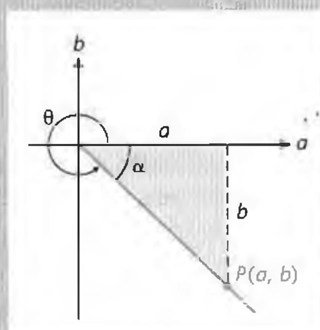
(A) $\text{sen}\,(3\pi/2)$ (B) $\sec(-\pi)$ (C) $\tan 90°$ (D) $\cot(-270°)$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Observe en el ejemplo 5D que la cot (−180°) no está definida. Analice otros ángulos medidos en grados para los que no está definida la cotangente. ¿Para qué ángulos medidos en grados no está definida la función cosecante?

Debido a que el concepto de *triángulo de referencia* que se introdujo en la definición 1 (forma alterna) desempeña un papel importante en mucho del material que sigue, se retoma su definición y se define el concepto relacionado de *ángulo de referencia*.

Triángulo de referencia y ángulo de referencia

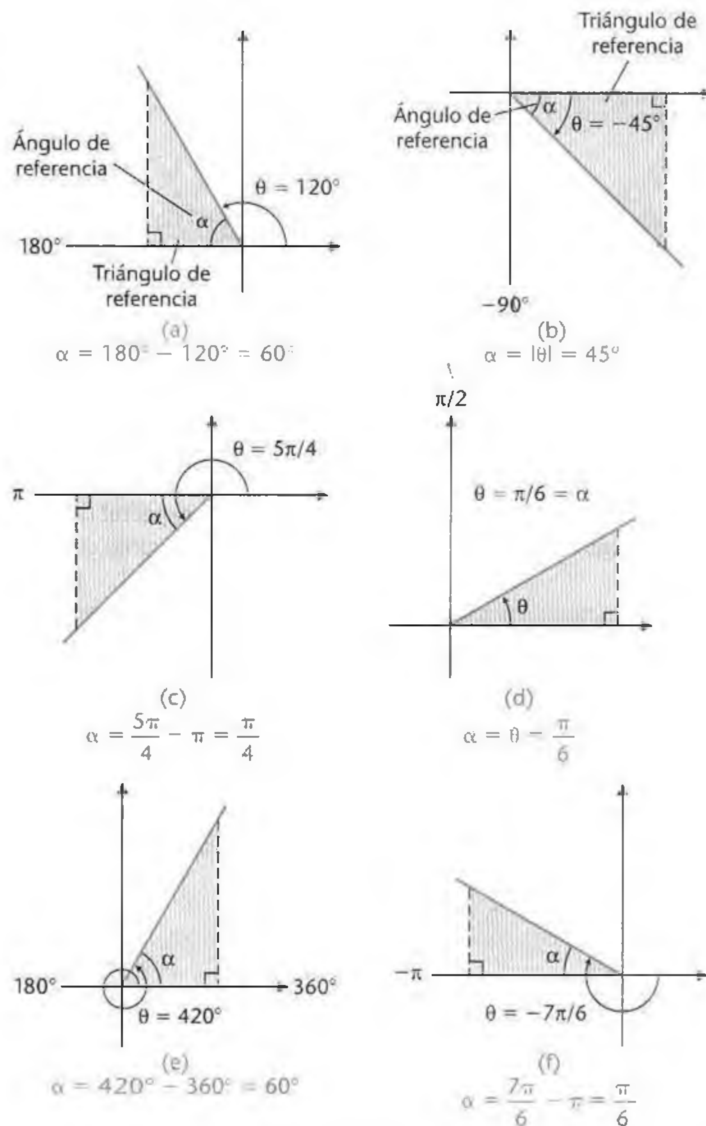
1. Para formar un **triángulo de referencia** para θ, dibuje una perpendicular desde un punto $P(a, b)$ en el lado terminal de θ al eje horizontal.
2. El **ángulo de referencia** α es el ángulo agudo (siempre tomado positivo) entre el lado terminal de θ y el eje horizontal.



$(a, b) \neq (0, 0)$
α es siempre positivo

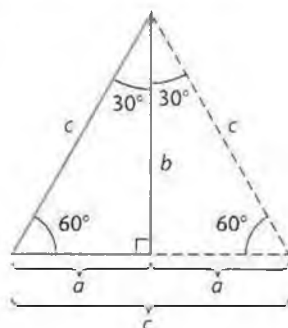
La figura 6 muestra varios triángulos de referencia y ángulos de referencia correspondientes a ángulos particulares.

FIGURA 6 Triángulos de referencia y ángulos de referencia.



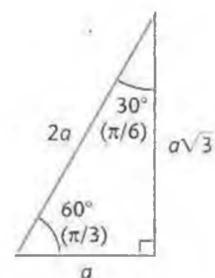
Si el triángulo de referencia de un ángulo dado es un triángulo rectángulo de 30°-60°, o un triángulo rectángulo de 45°, entonces se pueden encontrar las coordenadas exactas, diferentes de (0, 0), en el lado terminal del ángulo dado. Con este fin, se observa primero que en los triángulos 30°-60°, se forma la mitad de un triángulo equilátero, como se indica en la figura 7. Como en un triángulo equilátero todos los lados son iguales, se puede aplicar el teorema de Pitágoras para obtener una útil relación entre los tres lados del triángulo original:

FIGURA 7 Triángulo rectángulo 30°-60°.



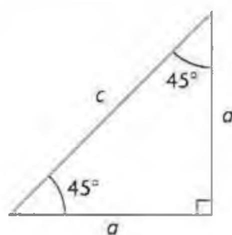
$$c = 2a$$

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{c^2 - a^2} \\ &= \sqrt{(2a)^2 - a^2} \\ &= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \end{aligned}$$

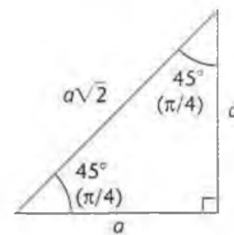


De manera similar, usando el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo de 45°, se obtiene el resultado que se muestra en la figura 8.

FIGURA 8 Triángulo rectángulo 45°.



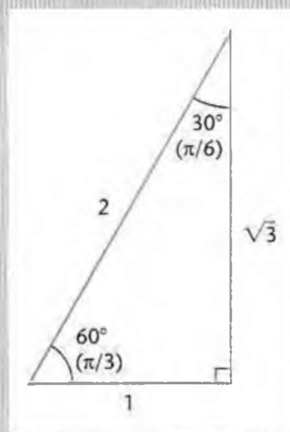
$$c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$$

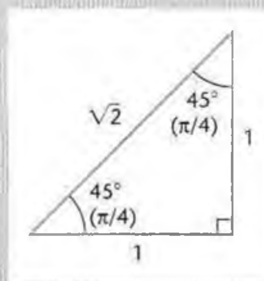


La figura 9 ilustra los resultados mostrados en las figuras 7 y 8 para el caso $a = 1$. Este caso es el más fácil de recordar. Todos los otros casos se pueden obtener a partir de este caso especial multiplicando o dividiendo la longitud de cada lado del triángulo de la figura 9 por la misma cantidad distinta de cero. Por ejemplo, si se quiere que la hipotenusa de un triángulo rectángulo especial de 45° sea 1, simplemente se dividirá a cada lado del triángulo de 45° entre $\sqrt{2}$ como se muestra en la figura 9.

FIGURA 9

Triángulos especiales de 30°-60° y 45°





Si un ángulo o número real tiene un triángulo de referencia de 30°-60° o 45°, se puede usar la figura 9 para encontrar las coordenadas exactas del punto final del lado terminal del ángulo. Usando la definición de las funciones trigonométricas, y la definición 1 (forma alterna), se podrá encontrar el valor exacto de cualquiera de las seis funciones para el ángulo indicado o para el número real.

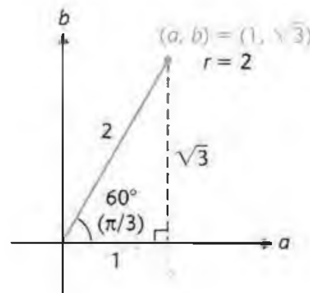
EJEMPLO 6 **Evaluación exacta**

Evalúe exactamente usando los triángulos de referencia apropiados:

(A) cos 60°, sen $(\pi/3)$, tan $(\pi/3)$ (B) sen 45°, cot $(\pi/4)$, sec $(\pi/4)$

Soluciones (A) Use el triángulo especial de 30°-60° con lados 1, 2 y $\sqrt{3}$ como triángulo de referencia, y use el ángulo de 60° o $\pi/3$ como el ángulo de referencia (figura 10). Use los lados del triángulo de referencia para determinar $P(a, b)$ y r; después use las definiciones apropiadas.

FIGURA 10



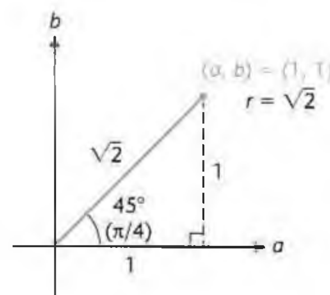
$$\cos 60° = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

(B) Use el triángulo especial de 45° con lados 1, 1 y $\sqrt{2}$ como el triángulo de referencia, y use 45° o $\pi/4$ como el ángulo de referencia (figura 11). Use los lados del triángulo de referencia para determinar $P(a, b)$ y r; después use las definiciones apropiadas.

FIGURA 11



$$\operatorname{sen} 45° = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ o } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot \frac{\pi}{4} = \frac{a}{b} = \frac{1}{1} = 1$$

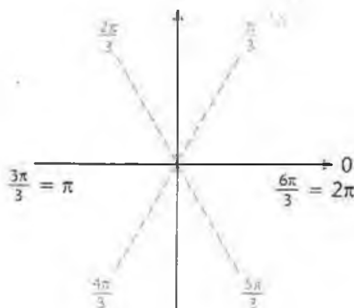
$$\sec \frac{\pi}{4} = \frac{r}{a} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Problema seleccionado 6 Evalúe exactamente usando los triángulos de referencia apropiados:

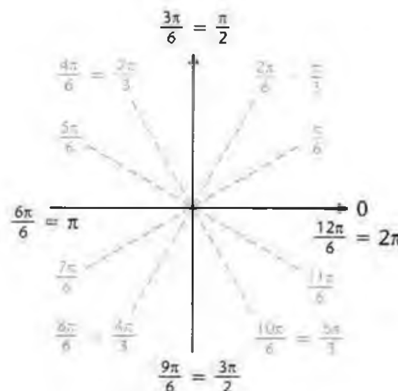
(A) $\cos 45°$, $\tan(\pi/4)$, $\csc(\pi/4)$ (B) $\operatorname{sen} 30°$, $\cos(\pi/6)$, $\cot(\pi/6)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 1 $\sqrt{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sqrt{3}$

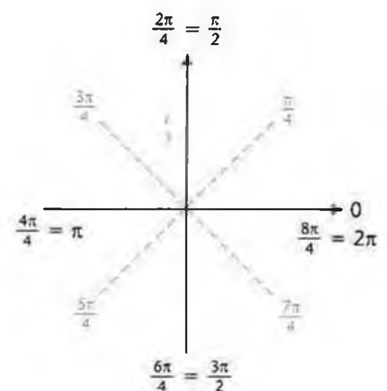
Antes de proceder, conviene observar desde un punto de vista geométrico múltiplos de $\pi/3$ (60°), $\pi/6$ (30°) y $\pi/4$ (45°). Éstos se ilustran en la figura 12.



(a) Múltiplos de $\pi/3$ (60°)



(b) Múltiplos de $\pi/6$ (30°)



(c) Múltiplos de $\pi/4$ (45°)

FIGURA 12 Múltiplos de ángulos especiales.

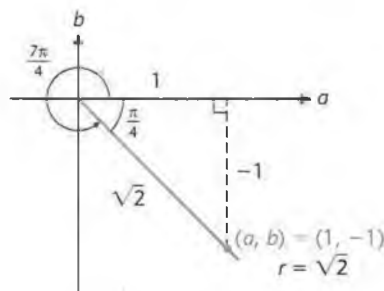
EJEMPLO 7 **Evaluación exacta**

Evalúe exactamente usando los triángulos de referencia apropiados:

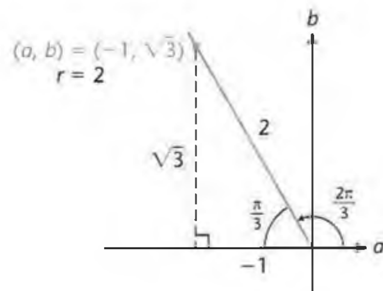
(A) $\cos(7\pi/4)$ (B) $\text{sen}(2\pi/3)$ (C) $\tan 210°$ (D) $\sec(-240°)$

Soluciones Cada ángulo (o número real) tiene un triángulo de referencia de 30°-60° o 45°. Localícelo y determine (a, b) y r como en el ejemplo 6, y después evalúe.

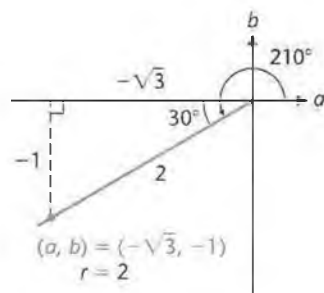
(A) $\cos\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ o $\frac{\sqrt{2}}{2}$



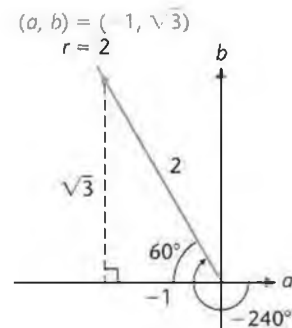
(B) $\text{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



(C) $\tan 210° = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ o $\frac{\sqrt{3}}{3}$



(D) $\sec(-240°) = \frac{2}{-1} = -2$



Problema seleccionado 7 Evalúe exactamente usando los triángulos apropiados:

(A) $\tan(-\pi/4)$ (B) $\text{sen}\ 210°$ (C) $\cos(2\pi/3)$ (D) $\csc(-240°)$

Ahora el problema se invierte; esto es, suponga que está dado el valor exacto de una de las seis funciones trigonométricas y suponga que el valor corresponde a uno de los triángulos especiales de referencia. ¿Puede encontrarse un θ pequeño positivo para el que las funciones trigonométricas tienen este valor? El ejemplo 8 muestra cómo hacerlo.

EJEMPLO 8 **Determinación de ángulos especiales**

Encuentre el θ pequeño positivo medido en radianes o en grados para el que cada uno de los siguientes enunciados es cierto.

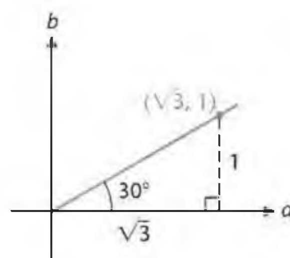
(A) $\tan \theta = 1/\sqrt{3}$ (B) $\sec \theta = -\sqrt{2}$

Soluciones (A)

$$\tan \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Sea $(a, b) = (\sqrt{3}, 1)$ o $(-\sqrt{3}, -1)$. El más pequeño positivo θ para el cual esto es cierto está en el ángulo del cuadrante I con el triángulo de referencia como está dibujado en la figura 13.

FIGURA 13



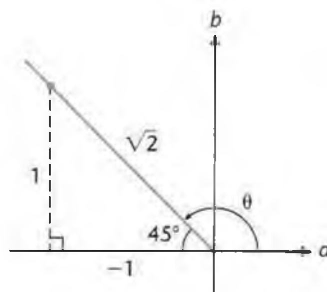
$$\theta = 30° \text{ o } \frac{\pi}{6}$$

(B)

$$\sec \theta = \frac{r}{a} = \frac{\sqrt{2}}{-1} \quad \text{Porque } r > 0$$

a es negativo en los cuadrantes II y III. El θ más pequeño positivo se asocia con un triángulo de referencia de 45° en el cuadrante II como se muestra en la figura 14.

FIGURA 14



$$\theta = 135° \text{ o } \frac{3\pi}{4}$$

Problema seleccionado 8 Encuentre el θ positivo más pequeño medido en radianes o en grados para el que cada uno de los enunciados siguientes es verdadero.

(A) $\text{sen } \theta = \sqrt{3}/2$ (B) $\cos \theta = -1/\sqrt{2}$

Comentario. Después de un poco de práctica, las figuras de los triángulos de referencia de los ejemplos 7 y 8 se pueden visualizar mentalmente; sin embargo, cuando tenga duda, dibuje la figura.

Resumen de valores de ángulos especiales

La tabla 1 incluye un resumen de los valores exactos del seno, el coseno y la tangente para los valores de los ángulos especiales de 0° a 90°. Algunas personas pueden memorizar estos valores, mientras que otras prefieren memorizar los triángulos de la figura 9. Usted haga lo que le parezca más fácil.

TABLA 1 Valores de ángulos especiales

θ	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$ o $\sqrt{3}/3$
45°	$1/\sqrt{2}$ o $\sqrt{2}/2$	$1/\sqrt{2}$ o $\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	No definida

Estos valores de ángulos especiales se recuerdan fácilmente para el seno y el coseno, si se observa el patrón inesperado al terminar la tabla 2 de exploración y análisis 3.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3 Llene la columna del coseno en la tabla 2 con un patrón de valores que es similar a los de la columna del seno. Analice cómo están relacionadas las dos columnas de valores.

TABLA 2 Valores de ángulos especiales (ayuda para la memoria)

θ	sen θ	cos θ
0°	$\sqrt{0}/2 = 0$	
30°	$\sqrt{1}/2 = \frac{1}{2}$	
45°	$\sqrt{2}/2$	
60°	$\sqrt{3}/2$	
90°	$\sqrt{4}/2 = 1$	

La cosecante, la secante y la cotangente se pueden encontrar para estos ángulos especiales usando los valores de las tablas 1 o 2 y las identidades recíprocas del teorema 1.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) -2
2. (A) -0.8582 (B) 0.7539 (C) 1.542 (D) -0.6383 (E) -4.277 (F) 1.137
3. $\text{sen}\ \theta = -\frac{4}{5}$, $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\csc\theta = -\frac{5}{4}$, $\sec\theta = -\frac{5}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$
4. $\text{sen}\ \theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
5. (A) -1 (B) -1 (C) No definida (D) 0
6. (A) $\cos 45° = 1/\sqrt{2}$, $\tan(\pi/4) = 1$, $\csc(\pi/4) = \sqrt{2}$
(B) $\text{sen}\ 30° = \frac{1}{2}$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\cot(\pi/6) = \sqrt{3}$
7. (A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $2/\sqrt{3}$ (E) $\sqrt{3}$ (F) 2
8. (A) 60° o $\pi/3$ (B) 135° o $3\pi/4$

EJERCICIO 5-4

A

Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas para un ángulo θ que tiene un lado terminal con el punto indicado en los problemas del 1 al 4.

1. (6, 8) **2.** (−3, 4)
3. $(-1, \sqrt{3})$ **4.** $(\sqrt{3}, 1)$

Evalúe los problemas del 5 al 14 con cuatro dígitos significativos usando calculadora. Cerciórese de que su calculadora está en el modo correcto (grado o radián) para cada problema.

5. sen 25° **6.** tan 89°
7. cot 12 **8.** csc 13
9. sen 2.137 **10.** tan 4.327
11. cot (−431.41°) **12.** sec (−247.39°)
13. sen 113°27′13″ **14.** cos 235°12′47″

En los problemas del 15 al 26, evalúe exactamente, usando los triángulos de referencia donde sea apropiado, sin usar calculadora.

15. sen 0° **16.** cos 0° **17.** tan 60°
18. cos 30° **19.** sen 45° **20.** csc 60°
21. sec 45° **22.** cot 45° **23.** cot 0°
24. cot 90° **25.** tan 90° **26.** sec 0°

Encuentre el ángulo de referencia α para cada ángulo θ de los problemas del 27 al 32.

27. θ = 300° **28.** θ = 135° **29.** $\theta = \frac{7\pi}{6}$
30. $\theta = \frac{\pi}{4}$ **31.** $\theta = -\frac{5\pi}{3}$ **32.** $\theta = -\frac{5\pi}{4}$

B

En los problemas del 33 al 48, evalúe exactamente, usando los ángulos de referencia donde se considere apropiado, sin usar calculadora.

33. cos 120° **34.** sen 150°
35. cos (3π/2) **36.** sen (π/2)
37. cot (−60°) **38.** sec (−30°)
39. cos (−π/6) **40.** cot (−π/4)
41. sen (3π/4) **42.** cos (2π/3)
43. csc 150° **44.** cot 225°
45. tan (−4π/3) **46.** sec (11π/6)
47. cos 510° **48.** tan 690°

Para cuáles valores de θ, 0° ≤ θ < 360°, no está definido cada uno de los problemas del 49 al 54. Explique por qué.

49. cos θ **50.** sec θ **51.** tan θ
52. cot θ **53.** csc θ **54.** sen θ

En los problemas del 55 al 60, encuentre el θ más pequeño positivo medido en grados y radianes para el cual:

55. $\cos\theta = \frac{-1}{2}$ **56.** $\operatorname{sen}\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$
57. $\operatorname{sen}\theta = \frac{-1}{2}$ **58.** $\tan\theta = -\sqrt{3}$
59. $\csc\theta = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ **60.** $\sec\theta = -\sqrt{2}$

Encuentre el valor de cada una de las otras cinco funciones trigonométricas para un ángulo θ, sin encontrar θ, dada la información indicada en los problemas del 61 al 64. Trace un triángulo de referencia para ayudarse.

61. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ y $\cos\theta < 0$
62. $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$
63. $\cos\theta = -\sqrt{5}/3$ y $\cot\theta > 0$
64. $\cos\theta = -\sqrt{5}/3$ y $\tan\theta > 0$

65. ¿Cuáles funciones trigonométricas no están definidas cuando el lado terminal de un ángulo está en el eje vertical? ¿Por qué?

66. ¿Cuáles funciones trigonométricas no están definidas cuando el lado terminal de un ángulo está en el eje horizontal? ¿Por qué?

67. Encuentre exactamente todos los θ, 0° ≤ θ < 360°, para los que $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$.

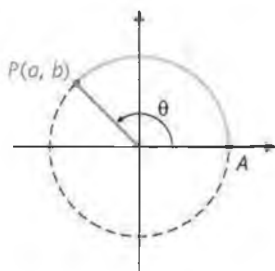
68. Encuentre exactamente todos los θ, 0° ≤ θ < 360°, para los que $\cos\theta = -1/\sqrt{3}$.

69. Encuentre exactamente todos los θ, 0 ≤ θ < 2π, para los que tan θ = 1.

70. Encuentre exactamente todos los θ, 0 ≤ θ < 2π, para los que $\sec\theta = -\sqrt{2}$.

C

En los problemas 71 y 72, refiérase a la siguiente figura.



71. Si las coordenadas de A son (4, 0) y s es la longitud de arco de 7 unidades, encuentre:

(A) La medida exacta de θ en radianes
(B) Las coordenadas P con tres cifras decimales

72. Si las coordenadas de A son (2, 0) y s es la longitud de arco de 8 unidades, encuentre:

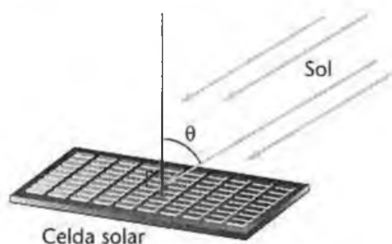
(A) La medida exacta de θ en radianes
(B) Las coordenadas de P con tres cifras decimales

73. En un sistema de coordenadas rectangular, un círculo con centro en el origen pasa por el punto (6, 8). ¿Cuál es la longitud de arco del círculo en el cuadrante I entre el eje horizontal positivo y el punto (6, 8)? Calcule su respuesta con dos cifras decimales.

74. En un sistema de coordenadas rectangular, un círculo con centro en el origen pasa por el punto (12, 5). ¿Cuál es la longitud de arco del círculo en el cuadrante I entre el eje horizontal positivo y el punto (12, 5)? Calcule su respuesta con dos cifras decimales.

APLICACIONES

75. Energía solar. La intensidad I de la luz en una celda solar cambia con el ángulo del Sol y está dada por la fórmula $I = k \cos \theta$, donde k es una constante (véase figura).



(A) Encuentre la intensidad de la luz I en términos de k para $\theta = 0°$, $\theta = 30°$ y $\theta = 60°$.
(B) ¿A qué ángulo (con una cifra decimal) la intensidad será el 25% de la intensidad vertical?

76. Energía solar. Con referencia al problema 75.

(A) Encuentre la intensidad I de la luz en términos de k para $\theta = 20°$, $\theta = 50°$ y $\theta = 90°$.
(B) ¿A qué ángulo (con una cifra decimal) la intensidad será el 80% de la intensidad vertical?

77. Física: ingeniería. La figura ilustra un pistón conectado a una rueda que gira 3 revoluciones por segundo; en consecuencia, el ángulo θ se está generando en $3(2\pi) = 6\pi$ radianes por segundo, o $\theta = 6\pi t$, donde t es el tiempo en segundos. Si P está en (1, 0) cuando $t = 0$, demuestre que

$$y = b + \sqrt{4^2 - a^2}$$
$$= \operatorname{sen} 6\pi t + \sqrt{16 - (\cos 6\pi t)^2}$$

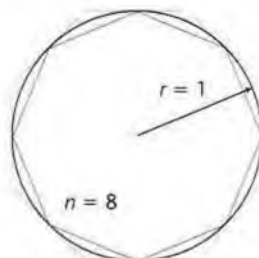
para $t \geq 0$.



78. Física: ingeniería. En el problema 77, encuentre la posición del pistón y cuando $t = 0.2$ segundos (con tres dígitos significativos).

79. Geometría. El área de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio 1 está dada por

$$A = n \tan \frac{180°}{n}$$



(A) Encuentre A para $n = 8$, $n = 100$, $n = 1\,000$ y $n = 10\,000$. Calcule con cinco cifras decimales.
(B) ¿A qué número se aproxima A cuando $n \to$? (¿Cuál es el área de un círculo de radio 1?)

80. Geometría. El área de un polígono regular de n lados inscrito en un círculo de radio 1 está dado por

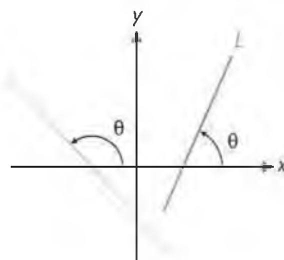
$$A = \frac{n}{2}\operatorname{sen}\frac{360°}{n}$$

(A) Encuentre A para $n = 8$, $n = 100$, $n = 1\,000$, y $n = 10\,000$. Calcule con cinco cifras decimales.
(B) ¿A qué número se aproxima A cuando $n \to \infty$? (¿Cuál es el área de un círculo de radio 1?)

81. Ángulo de inclinación. Recuerde (sección 2-2) que la pendiente de una recta no vertical que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ está dada por la Pendiente $= m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$. El ángulo θ que la recta L hace con el eje x, $0° \le \theta < 180°$, se llama **ángulo de inclinación** de la línea L (véase figura). Así,

$$\text{Pendiente} = m = \tan\theta \qquad 0° \le \theta < 180°$$

(A) Calcule las pendientes con dos cifras decimales de las rectas con ángulos de inclinación de 88.7° y 162.3°.
(B) Encuentre la ecuación de una recta que pasa por (−4, 5) con un ángulo de inclinación de 137°. Escriba la respuesta en la forma $y = mx + b$, con m y b con dos cifras decimales.



82. Ángulo de inclinación. Remítase al problema 81.

(A) Calcule las pendientes con dos cifras decimales de las rectas con ángulos de inclinación de 5.34° y 92.4°.
(B) Encuentre la ecuación de una recta que pasa por (6, −4) con un ángulo de inclinación de 106°. Escriba la respuesta en la forma $y = mx + b$, con m y b con dos cifras decimales.

SECCIÓN 5-5 Solución de triángulos rectángulos*

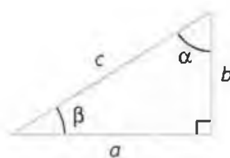
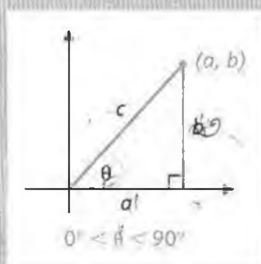


FIGURA 1

En las secciones anteriores se aplican las funciones trigonométricas y circulares en las soluciones de una variedad de problemas significativos. En esta sección se centrará el interés en una clase particular de problemas que involucran triángulos rectángulos. Con referencia a la figura 1, nuestro objetivo será encontrar todas las incógnitas de un triángulo rectángulo, dadas las medidas de dos lados o la de un ángulo agudo y un lado. Esto se llama **solución de un triángulo rectángulo**. Las funciones trigonométricas desempeñan un papel central en este proceso.

Para comenzar, se localiza un triángulo rectángulo en el primer cuadrante de un sistema de coordenadas rectangular y se observa, de la definición de las funciones trigonométricas, las seis relaciones trigonométricas que implican los lados de un triángulo. (Observe que el triángulo rectángulo es el triángulo de referencia para el ángulo θ.)

Relaciones trigonométricas



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c} \qquad \csc\theta = \frac{c}{b}$$

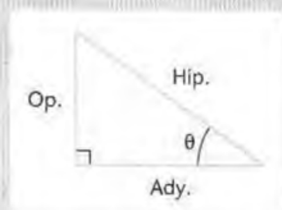
$$\cos\theta = \frac{a}{c} \qquad \sec\theta = \frac{c}{a}$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \cot\theta = \frac{a}{b}$$

* Esta sección proporciona una aplicación importante de las funciones trigonométricas para resolver problemas del mundo real. Sin embargo, ésta puede ser propuesta u omitida sin perder continuidad si se desea. Algunos pueden querer cubrir la sección antes de las secciones 7-1 y 7-2.

Es frecuente que se haga referencia al lado b como el **lado opuesto** de un ángulo θ, como a al **lado adyacente** al ángulo θ y c a la **hipotenusa**. Usando estas designaciones para un triángulo rectángulo arbitrario sin importar el sistema coordenado, se tiene lo siguiente:

Funciones de un triángulo rectángulo



$0° < \theta < 90°$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{\text{Op.}}{\text{Hip.}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{Hip.}}{\text{Op.}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{Ady.}}{\text{Hip.}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{Hip.}}{\text{Ady.}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{Op.}}{\text{Ady.}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{Ady.}}{\text{Op.}}$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Para un valor dado θ, $0 < \theta < 90°$, explique por qué el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas es independiente del tamaño de un triángulo rectángulo que contiene a θ.

TABLA 1

Ángulo más cercano	Dígitos significativos para la medida de un lado
1°	2
10′ o 0.1°	3
1′ o 0.01°	4
10″ o 0.001°	5

El uso de las relaciones trigonométricas para triángulos rectángulos se aclara en los siguientes ejemplos. Con respecto a la precisión de los cálculos, se usa la tabla 1 como guía. (Esta tabla también está impresa en los forros de este libro para una fácil referencia.) En muchos lugares se usará = en lugar de ≈, tenga en cuenta que se supone la precisión indicada en la tabla 1 todo lo que se ha supuesto. Una advertencia más: cuando use su calculadora asegúrese de que esté en el modo de grado.

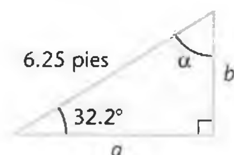
EJEMPLO 1

Solución de un triángulo rectángulo

Resuelva el triángulo rectángulo con $c = 6.25$ pies y $\beta = 32.2°$.

Solución Dibuje primero una figura y marque las partes (figura 2):

FIGURA 2



Resuelva para α

$$\alpha = 90° - 32.2° = 57.8° \quad \alpha \text{ y } \beta \text{ son complementarios.}$$

Despeje b

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{b}{c} \qquad \text{O use } \csc \beta = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{sen} 32.2° = \frac{b}{6.25}$$

$$b = 6.25 \operatorname{sen} 32.2°$$

$$= 3.33 \text{ pies}$$

Despeje a

$$\cos \beta = \frac{a}{c} \qquad \text{O use } \sec \beta = \frac{c}{a}$$

$$\cos 32.2° = \frac{a}{6.25}$$

$$a = 6.25 \cos 32.2°$$

$$= 5.29 \text{ pies}$$

Problema seleccionado 1

Resuelva el triángulo rectángulo con $c = 27.3$ metros y $\alpha = 47.8°$.

En el siguiente ejemplo se aborda un problema del siguiente tipo: Encuentre θ dado que

$$\operatorname{sen} \theta = 0.4196$$

Se sabe cómo encontrar (o aproximar) sen θ dado un θ. ¿pero cómo sé invierte el proceso? ¿Cómo se encuentra a θ dado sen θ? Primero, observe que la solución al problema se puede escribir simbólicamente como

$$\theta = \arcsen 0.4196$$

"arcsen" y "sen $^{-1}$" representan lo mismo.

o

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} 0.4196$$

Ambas expresiones se leen "θ es el ángulo cuyo seno es 0. 4196".

PRECAUCIÓN Es importante observar que $\operatorname{sen}^{-1} 0.4196$ no significa $1/(\operatorname{sen} 0.4196)$. El exponente $^{-1}$ es parte del símbolo de la función, y **sen^{-1} representa la función inversa de seno**. La inversa de las funciones trigonométricas se desarrolla en forma detallada en la sección 5-9.

Por fortuna con una calculadora se puede encontrar θ directamente. La mayoría de las calculadoras del tipo que se usó en este libro tienen las teclas de la función , , o sus equivalentes (revise su manual). Estas teclas usan la relación trigonométrica inversa para encontrar el ángulo agudo correspondiente medido en grados

cuando la calculadora está en el modo de grado. Así, si sen $\theta = 0.4196$ se puede escribir $\theta = \operatorname{arcsen} 0.4196$ o $\theta = \operatorname{sen}^{-1} 0.4196$. Se elige el segundo y se procede como sigue:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1} 0.4196$$

$$= 24.81^\circ \qquad \text{El grado al centesimo más cercano}$$

$$\text{o } 24^\circ 49' \qquad \text{Al minuto más cercano}$$

Comprobación $\qquad \operatorname{sen} 24.81^\circ = 0.4196$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Resuelva cada uno de los siguientes para θ en grados aproximando al centésimo más cercano de un grado usando una calculadora. Explique por qué aparece un mensaje de error en uno de los problemas.

(A) $\cos \theta = 0.2044$ (B) $\tan \theta = 1.4138$ (C) $\operatorname{sen} \theta = 1.4138$

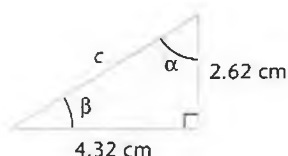
EJEMPLO 2

Solución de un triángulo rectángulo

Resuelva el triángulo rectángulo con $a = 4.32$ centímetros y $b = 2.62$ centímetros. Calcule las medidas del ángulo a los 10' más cercanos.

Solución Dibuje una figura y señale las partes conocidas (figura 3):

FIGURA 3



Despeje β

$$\tan \beta = \frac{2.62}{4.32}$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{2.62}{4.32}$$

$$= 31.2^\circ \text{ o } 31^\circ 10' \qquad 0.2^\circ = [(0.2)(60)]' = 12' \approx 10' \text{ los más cercanos } 10'$$

Despeje α

$$\alpha = 90^\circ - 31^\circ 10' \quad \boxed{= 89^\circ 60' - 31^\circ 10'} \quad = 58^\circ 50'$$

Despeje c

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{2.62}{c} \qquad \text{O use } \csc \beta = \frac{c}{2.62}$$

$$c = \frac{2.62}{\operatorname{sen} 31.2^\circ} = 5.06 \text{ centímetros}$$

o, usando el teorema de Pitágoras,

$$c = \sqrt{4.32^2 + 2.62^2} = 5.05 \text{ centímetros}$$

Observe la pequeña diferencia entre los valores obtenidos para c (5.05 contra 5.06). Esto se obtuvo redondeando β al 10' más cercano en el primer cálculo para c.

Problema seleccionado 2 Resuelva el triángulo rectángulo con $a = 1.38$ kilómetros y $b = 6.73$ kilómetros.

EJEMPLO 3 **Geometría**

Si un pentágono (polígono regular de cinco lados) está inscrito en un círculo de radio 5.35 centímetros, encuentre la longitud de un lado del pentágono.

Solución Trace una figura e inserte un triángulo ACB con C en el centro (figura 4). Agregue la recta auxiliar CD como se indica. Se encuentra AD y se duplica para encontrar la longitud del lado requerido.

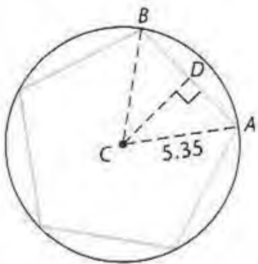


FIGURA 4

$$\text{Ángulo } ACB = \frac{360°}{5} = 72° \qquad \text{Exacto}$$

$$\text{Ángulo } ACD = \frac{72°}{2} = 36° \qquad \text{Exacto}$$

$$\text{sen (ángulo } ACD) = \frac{AD}{AC}$$

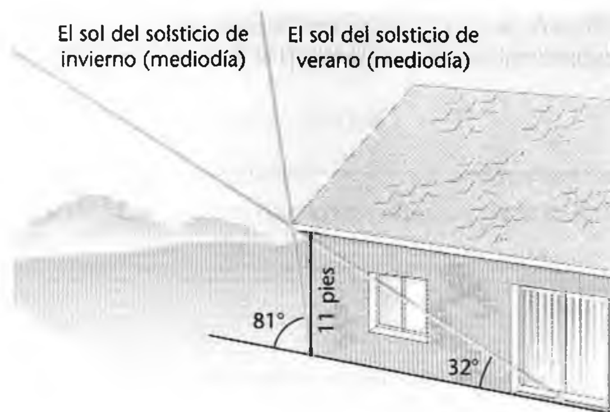
$$\begin{aligned} AD &= AC \text{ sen (ángulo } ACD) \\ &= 5.35 \text{ sen } 36° \\ &= 3.14 \text{ centímetros} \\ AB &= 2AD = 6.28 \text{ centímetros} \end{aligned}$$

Problema seleccionado 3 Si un cuadrado con 43.6 metros por lado está inserto en un círculo, ¿cuánto mide el radio del círculo?

EJEMPLO 4 **Arquitectura**

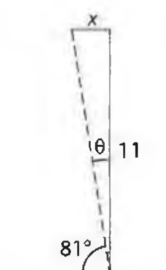
Un arquitecto está diseñando una casa y desea determinar la medida del alerón de un techo para que la sombra de la pared del sur se proyecte completa al mediodía durante el solsticio de verano (figura 5). ¿Cuánto debe medir mínimamente el alerón, por lo menos, para poder ejecutar este propósito?

FIGURA 5



Solución A partir de la figura se dibuja la siguiente relación en el triángulo rectángulo (figura 6) y se despeja x:

FIGURA 6



$$\theta = 90° - 81° = 9°$$

$$\tan\theta = \frac{x}{11}$$

$$x = 11\tan 9° = 1.7 \text{ pies}$$

Problema seleccionado 4 Con la medida del alerón encontrada en el ejemplo 4, ¿de qué tamaño será la sombra del alerón si se baja la pared al mediodía durante el solsticio de invierno?

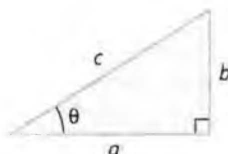
Respuestas a los problemas seleccionados

1. $\beta = 42.2°$, $a = 20.2$ m, $b = 18.3$ m **2.** $\alpha = 11°40'$, $b = 78°20'$, $c = 6.87$ km
3. 30.8 m **4.** 1.1 pies

EJERCICIO 5-5

A

En los problemas del 1 al 12, para el triángulo mostrado en la figura escriba las razones de los lados correspondientes a cada función trigonométrica de los problemas del 1 al 6. No vuelva atrás para ver las definiciones.



1. sen θ **2.** cot θ **3.** csc θ

4. cos θ **5.** tan θ **6.** sec θ

Cada razón de los problemas del 7 al 12 define una función trigonométrica de θ (refiérase a la figura para los problemas del 1 al 12). Indique cuál es la función sin revisar otra vez las definiciones.

7. a/c **8.** b/a **9.** c/a

10. b/c **11.** a/b **12.** c/b

En los problemas del 13 al 18, encuentre cada ángulo agudo θ en grados con dos cifras decimales usando calculadora.

13. $\cos\theta = 0.4917$

14. $\operatorname{sen}\theta = 0.0859$

15. $\theta = \tan^{-1} 8.031$

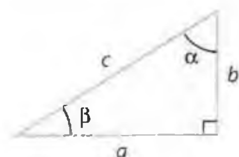
16. $\theta = \cos^{-1} 0.5097$

17. $\operatorname{sen}\theta = 0.6031$

18. $\tan\theta = 1.993$

B

Resuelva cada triángulo en los problemas del 19 al 30 con la información dada y el triángulo marcado en la figura.



19. $\beta = 17.8°, c = 3.45$

20. $\beta = 33.7°, b = 22.4$

21. $\beta = 43°20', c = 42.5$

22. $\beta = 62°30', c = 42.5$

23. $\alpha = 23°0', a = 54.0$

24. $\alpha = 54°, c = 4.3$

25. $\alpha = 53.21°, b = 23.82$

26. $\alpha = 35.73°, b = 6.482$

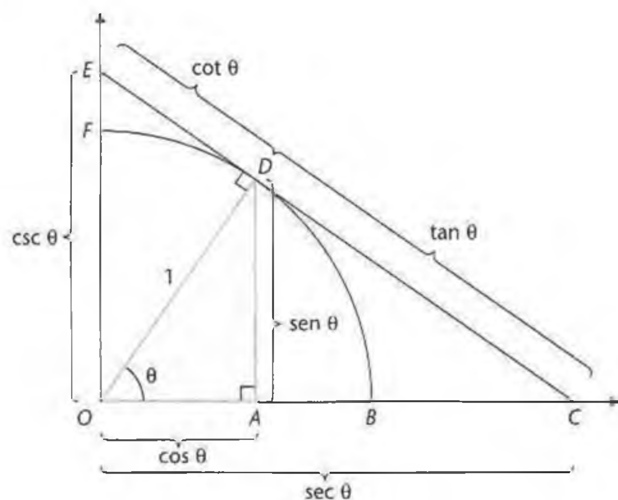
27. $a = 6.00, b = 8.46$

28. $b = 22.0, c = 46.2$

29. $b = 10.0, c = 12.6$

30. $b = 50.0, c = 165$

Los problemas del 31 al 36 dan una interpretación geométrica de las ***relaciones trigonométricas****. Refiérase a la figura, donde O es el centro de un círculo de radio 1, θ es el ángulo agudo AOD, D es el punto de intersección del lado terminal del ángulo θ con el círculo y EC es la tangente del círculo en D.*



31. Explique por qué:
(A) $\cos\theta = OA$ (B) $\cot\theta = DE$ (C) $\sec\theta = OC$

32. Explique por qué:
(A) $\operatorname{sen}\theta = AD$ (B) $\tan\theta = DC$ (C) $\csc\theta = OE$

33. Explique qué pasa en cada uno de los siguientes enunciados cuando el ángulo agudo θ se aproxima a 90°:
(A) $\cos\theta$ (B) $\cot\theta$ (C) $\sec\theta$

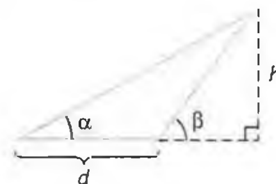
34. Explique qué pasa en cada uno de los siguientes enunciados cuando el ángulo agudo θ se aproxima a 90°:
(A) $\operatorname{sen}\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\csc\theta$

35. Explique qué le pasa a cada uno de los siguientes enunciados cuando el ángulo agudo θ se aproxima a 0°.
(A) $\operatorname{sen}\theta$ (B) $\tan\theta$ (C) $\csc\theta$

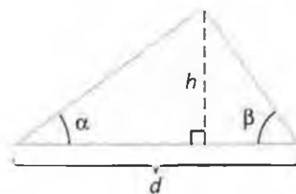
36. Explique qué pasa en cada uno de los siguientes enunciados cuando el ángulo agudo θ se aproxima a 0°:
(A) $\cos\theta$ (B) $\cot\theta$ (C) $\sec\theta$

C

37. Demuestre que (véase figura): $h = \dfrac{d}{\cot\alpha - \cot\beta}$



38. Demuestre que (véase figura): $h = \dfrac{d}{\cot\alpha + \cot\beta}$



APLICACIONES

39. Inspección. Encuentre la altura de un árbol (que crece desde el nivel del terreno) si en un punto a 105 pies de la base del árbol hace un ángulo con la horizontal de 65.3°.

40. Seguridad aérea. Para medir la altura máxima a la que se encuentra una nube sobre un aeropuerto, se dirige un proyector directamente hacia arriba para producir una señal sobre las nubes. Un observatorio a 500 metros de distancia informa que el ángulo de la luz con respecto a la horizontal es de 32.2°. ¿A qué altura (aproxime al metro más cercano) se encuentran las nubes sobre el aeropuerto?

41. Ingeniería. Si un tren sube en un ángulo constante de 1°23', ¿Cuántos pies verticales ha subido después de avanzar 1 milla? (1 milla = 5 280 pies)

42. Seguridad aérea. Si un avión comercial sube un ángulo de 15°30' con una velocidad constante de 315 millas por hora, ¿cuánto tiempo le tomará (aproxime al minuto más cercano) alcanzar una altura de 8.00 millas? Suponiendo que no hay viento.

*43. **Astronomía.** Encuentre el diámetro de la Luna (a la milla más cercana) si cuando está a 239 000 millas de la Tierra produce un ángulo de 32' respecto de un observador en la Tierra.

*44. **Astronomía.** Si el Sol está a 93 000 000 millas de la Tierra y su diámetro está frente a un ángulo de 32' respecto de un observador en la Tierra, ¿cuál es el diámetro del Sol (con dos dígitos significativos)?

*45. **Geometría.** Si un círculo de 4 centímetros de radio tiene una cuerda de longitud de 3 centímetros, encuentre el ángulo central que está frente a esta cuerda (aproxime al grado más cercano).

*46. **Geometría.** Encuentre la longitud de un lado de un polígono regular de nueve lados inscrito en un círculo con un radio de 4.06 pulgadas.

47. Física. En un curso de física se muestra que la velocidad v de una pelota que rueda hacia abajo de un plano inclinado (despreciando la resistencia y la fricción aérea) está dada por

$$v = gt \operatorname{sen} \theta$$

donde g es la constante gravitacional (aceleración debida a la gravedad), t es el tiempo y θ es el ángulo de inclinación de un plano (véase figura). Galileo (1564-1642) usó esta ecuación en la forma

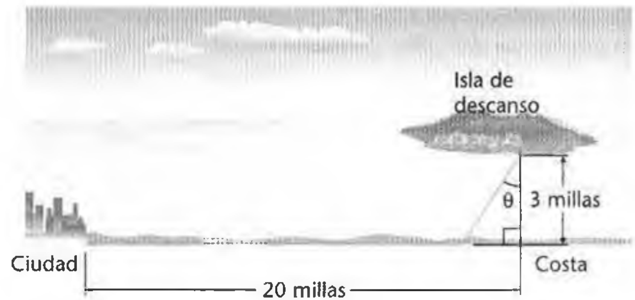
$$g = \frac{v}{t \operatorname{sen} \theta}$$

para estimar g después de medir v experimentalmente. (En aquel entonces no existía ningún artefacto de sincronización para medir la velocidad de un cuerpo en caída libre, así que Galileo usó el plano inclinado para retardar el movimiento hacia abajo.) Una pelota de acero rueda hacia abajo de un plano inclinado de vidrio en 8.0°. Calcule g con una cifra decimal si al final de 3.0 segundos la pelota tiene una velocidad de 4.1 metros por segundo.



48. Física. Remítase al problema 47. Una pelota de acero rueda hacia abajo por un plano inclinado de vidrio a 4.0°. Calcule g con una cifra decimal si después de 4.0 segundos la pelota tiene una velocidad de 9.0 pies por segundo.

*49. **Ingeniería: análisis de costos.** Una compañía de televisión por cable desea instalar un cable desde una ciudad a una isla de descanso a 3 millas de la costa. El cable deberá ir por la costa y después será sumergido hasta la isla, como se indica en la figura. El costo de instalar el cable por la costa es de $15 000 por milla, y sumergido es de $25 000 por milla.



(A) Con referencia a la figura, muestre que el costo en términos de θ está dado por

$$C(\theta) = 75\,000 \sec \theta - 45\,000 \tan \theta + 300\,000$$

(B) Calcule una tabla de costos, aproxime cada costo al dólar más cercano, para los siguientes valores de θ: 10°, 20°, 30°, 40° y 50°. (Observe cómo varían los costos con θ. En un curso de cálculo se pide a los estudiantes encontrar θ para minimizar el costo.)

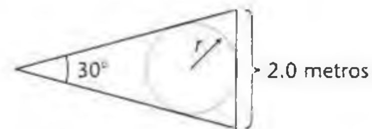
*50. **Ingeniería: análisis de costos.** Refiérase al problema 49. Suponga que la isla está a 4 millas de la costa y que el costo de instalar el cable por la costa es de $20 000 por milla, y sumergido, es de $30 000 por milla.

(A) Refiérase a la figura para el problema 49 con los cambios apropiados, demuestre que el costo en términos de θ está dado por

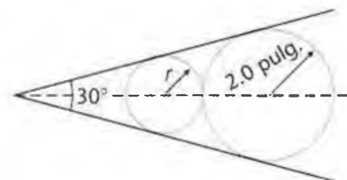
$$C(\theta) = 120\,000 \sec \theta - 80\,000 \tan \theta + 400\,000$$

(B) Calcule una tabla de costos, aproxime cada costo al dólar más cercano, para los siguientes valores de θ: 10°, 20°, 30°, 40° y 50°.

51. **Geometría. Encuentre r en la figura que se incluye (con dos dígitos significativos) para que el círculo sea la tangente de tres lados de un triángulo isósceles. [*Sugerencia:* El radio de un círculo es perpendicular a la tangente de una recta en el punto de tangencia.]



52. **Geometría. Encuentre r en la figura que se incluye (con dos dígitos significativos) para que el círculo más pequeño sea tangente del círculo más grande y los dos lados del ángulo. [Vea la sugerencia en el problema 51.]

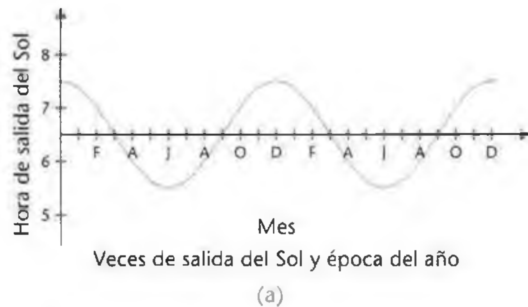


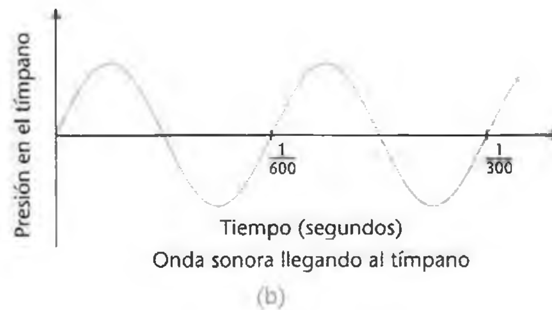
SECCIÓN 5-6 Graficación de funciones trigonométricas básicas

- Funciones periódicas
- Gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$
- Gráficas de $y = \tan x$ y $y = \cot x$
- Gráficas de $y = \csc x$ y $y = \sec x$
- Gráficas en un dispositivo de graficación

Considere las gráficas de tiempo de salida del Sol y las ondas de sonido que se muestran en la figura 1. ¿Cuál es la característica común de las dos gráficas? Ambas representan respectivamente a los fenómenos; esto es, ambas parecen ser periódicas. Las funciones trigonométricas son particularmente utilizadas para describir los fenómenos periódicos.

FIGURA 1 Fenómenos periódicos.





Esta sección analiza las gráficas de las seis funciones trigonométricas con los dominios de números reales antes presentados igual que a los dominios, los rangos y las propiedades periódicas de estas funciones. Las funciones circulares introducidas en la sección 5-2 probarán particularmente su utilidad en este aspecto.

Al parecer hay mucho que recordar en esta sección. Sin embargo, sólo es necesario estar familiarizado con las gráficas y las propiedades de las funciones seno, coseno y tangente. Las relaciones recíprocas ya analizadas permitirán determinar las gráficas y las propiedades de las otras tres funciones trigonométricas de las gráficas y las propiedades de las funciones seno, coseno y tangente.

Funciones periódicas

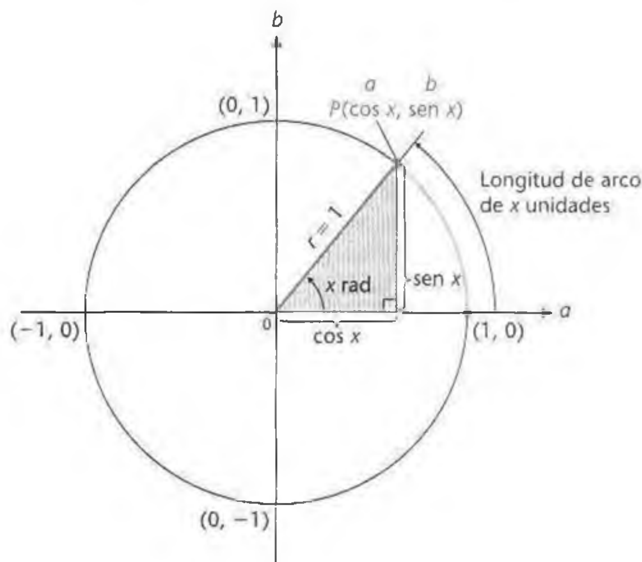
Aquí será necesario volver a los puntos circulares y las funciones generadoras analizadas en las secciones 5-1 y 5-2; puesto que el círculo unitario tiene una circunferencia de 2π, se encuentra que para un valor dado de x (véase figura 2) se volverá al punto circular $W(x) = (a, b)$ si se agrega cualquier múltiplo entero de 2π a x. Piense en un punto P que se mueve en el círculo unitario en cualquier dirección. Cada vez que P

recorre una distancia de 2π, la circunferencia de un círculo, está atrás del punto donde la comenzó. Así, para algún número real x,

$$\text{sen}\,(x + 2k\pi) = \text{sen}\,x \qquad \text{con } k \text{ cualquier entero}$$

$$\cos\,(x + 2k\pi) = \cos x \qquad \text{con } k \text{ cualquier entero}$$

FIGURA 2



Las funciones con esta clase de conducta repetitiva se llaman **funciones periódicas**. En general, se tiene la definición 1.

DEFINICIÓN 1 **Funciones periódicas**

Una función f es **periódica** si existe un número real positivo p tal que

$$f(x + p) = f(x)$$

para todo x en el dominio de f. El número positivo más pequeño p, si existe, se llama **periodo fundamental de f** (o a menudo se conoce como **periodo de f**).

Ambas funciones seno y coseno son periódicas con un periodo de 2π.

Gráficas de $y = \text{sen}\,x$ y $y = \cos x$

Se empieza por graficar

$$y = \text{sen}\,x \quad x \text{ un número real} \tag{1}$$

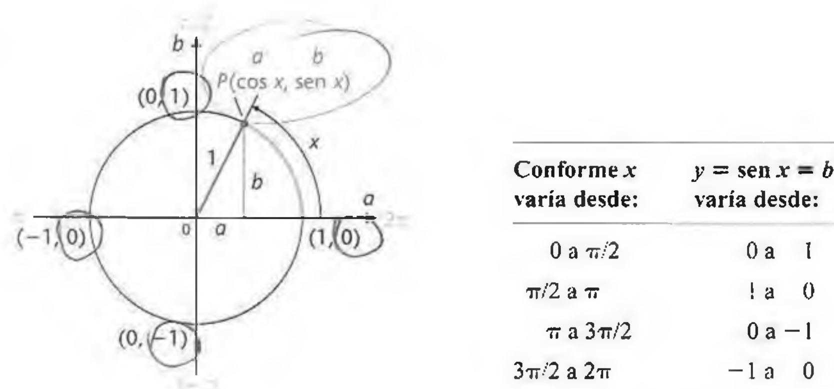
La gráfica de la función seno es la gráfica del conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) que satisfacen la ecuación (1). La obtención de las gráficas usando graficación punto por punto es tediosa y tiende a oscurecer muchas propiedades importantes. Se profundiza de manera más significativa en la naturaleza de estas fun-

ciones observando cómo $y = \text{sen}\, x = b$ varía como el punto circular $P(a, b)$ se mueve en el círculo unitario.

Ahora se sabe que el dominio de la función seno es el conjunto de todos los números reales R, el rango es $[-1, 1]$, y el periodo es 2π. Debido a que la función seno tiene un periodo de 2π, se concentra en la gráfica de un periodo, de 0 a 2π. Una vez que se tiene la gráfica para un periodo, se puede completar el resto de la gráfica tanto como se necesite repitiendo la gráfica a la izquierda o a la derecha.

La figura 3 ilustra cómo $y = \text{sen}\, x = b$ varía conforme x aumenta de 0 a 2π y $P(a, b)$ se mueve alrededor del círculo unitario.

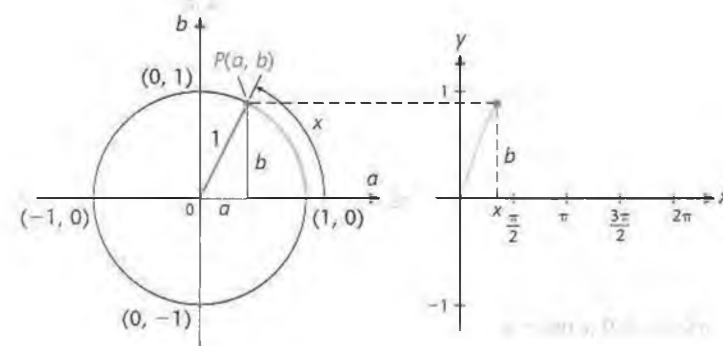
FIGURA 3 Variaciones en sen x.



Conforme x varía desde:	$y = \text{sen}\, x = b$ varía desde:
0 a $\pi/2$	0 a 1
$\pi/2$ a π	1 a 0
π a $3\pi/2$	0 a −1
$3\pi/2$ a 2π	−1 a 0

Para trazar una gráfica de $y = \text{sen}\, x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$, se divide al intervalo en cuatro partes iguales correspondiendo a los cuadrantes por los cuales x varía y y se comporta uniformemente. Se escoge como unidad básica en el eje x a $2\pi/4 = \pi/2$. Por supuesto, todos los otros números reales están en el eje x, pero por claridad se escoge sólo marcar los múltiplos de $\pi/2$. Para completar el dibujo, se usan los resultados de la figura 3, complementando donde sea necesario valores especiales reales (múltiplos enteros de $\pi/6$ o de $\pi/4$) o valores de la calculadora. La gráfica final se muestra en la figura 4. El círculo de la izquierda (que se usa para definir la función seno) por lo general se efectúa mentalmente y no forma parte de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$.

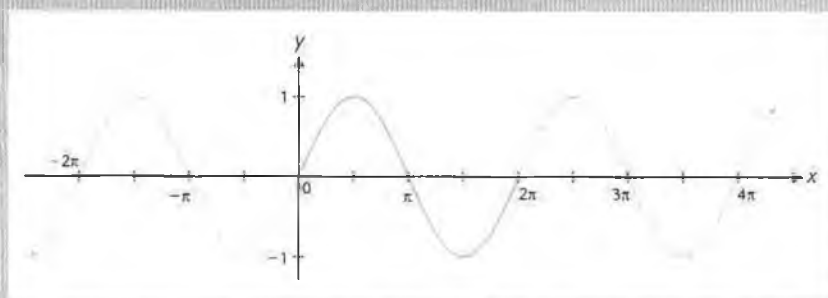
FIGURA 4 Graficación de $y = \text{sen}\, x$.



La figura 5 resume los resultados anteriores y muestra la gráfica de seno en varios periodos.

FIGURA 5

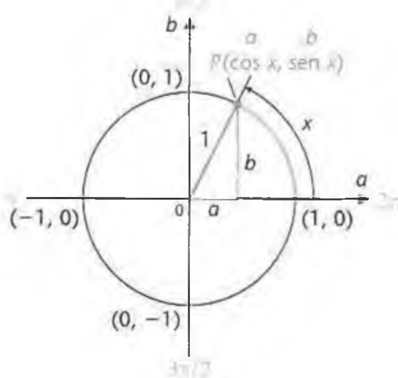
Gráfica de $y = \text{sen}\, x$



Periodo: 2π Dominio: Todos los números reales Rango: $[-1, 1]$
Simétrica con respecto al origen

Si se procede de la misma manera para la función coseno, se puede obtener su gráfica. La figura 6 muestra cómo $\cos x = a = y$ varía cuando $P(a, b)$ se mueve alrededor del círculo unitario.

FIGURA 6 Variaciones del $\cos x$.

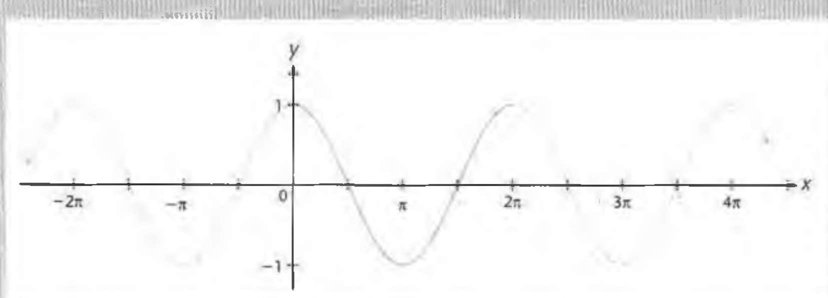


Conforme x varía desde:	$y = \cos x = a$ varía desde:
0 a $\pi/2$	1 a 0
$\pi/2$ a π	0 a -1
π a $3\pi/2$	-1 a 0
$3\pi/2$ a 2π	0 a 1

Se puede usar el resultado de la figura 6, el hecho de que la función coseno sea periódica con periodo 2π, y los valores especiales o encontrados con calculadora donde sea necesario para obtener la figura 7.

FIGURA 7

Gráfica de $y = \cos x$



Periodo: 2π Dominio: Todos los números reales Rango: $[-1, 1]$
Simétrica con respecto al eje y

Se deben aprender las características básicas de las gráficas del seno y coseno para poder trazar las curvas rápidamente. En particular, usted debe poder contestar las preguntas siguientes:

1. ¿Cuál es el periodo de cada función (cuántas veces se ha repetido la gráfica)?
2. ¿Dónde están las intersecciones con el eje x?
3. ¿Dónde están las intersecciones con el eje y?
4. ¿Cuánto se desvía cada curva del eje x?
5. ¿Dónde ocurren los puntos altos y bajos?
6. ¿Cuáles son las propiedades de simetría?

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) Analice cómo están relacionadas las gráficas de las funciones seno y coseno.
(B) ¿Qué se podría desplazar y/o reflejar en la gráfica del seno para obtener la gráfica del coseno?
(C) ¿Es esta gráfica de $y = \text{sen}\,(x - \pi/2)$ o de $y = \text{sen}\,(x + \pi/2)$ igual a la gráfica de $y = \cos x$? Explique en términos de desplazamientos y/o reflexiones.

Gráficas de $y = \tan x$ y $y = \cot x$

Se analiza primero la gráfica de $y = \tan x$. Después, a partir de esta gráfica, puesto que $\cot x = 1/(\tan x)$, se podrá obtener la gráfica de $y = \cot x$ usando las recíprocas de las ordenadas.

La figura 8 muestra que cuando el punto circular $P(a, b)$ está en el eje horizontal (es decir, cuando $x = k\pi$, k es un entero), entonces $(a, b) = (\pm 1, 0)$, y $\tan x = b/a = 0/(\pm 1) = 0$. Cuando $P(a, b)$ está en el eje vertical [es decir, cuando $x = (\pi/2) + k\pi$, k es un entero], entonces $(a, b) = (0, \pm 1)$, y $\tan x = b/a = (\pm 1)/0$ no está definida (la función tangente es discontinua).

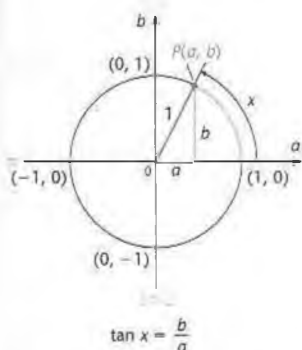


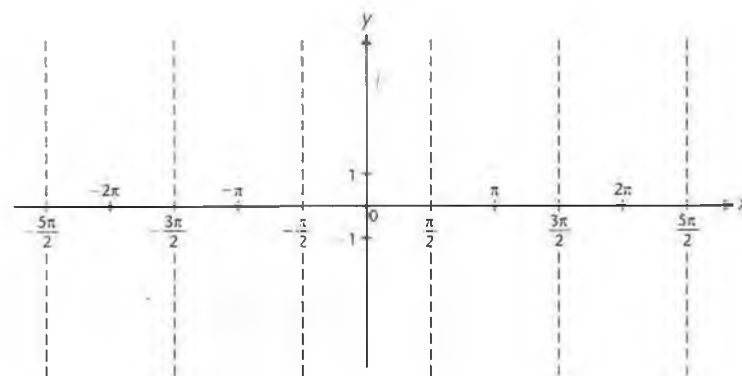
FIGURA 8 El círculo unitario y $\tan x$.

Los valores de x para los cuales $P(a, b)$ están en el eje horizontal en la figura 8 y son las raíces para $\tan x$, o las intersecciones con el eje x para la gráfica de $y = \tan x$. Así, se puede escribir

Intersecciones con el eje x: $k\pi$ $\quad$ k es un entero

El primer paso para graficar $y = \tan x$, es localizar las intersecciones x con el eje x como se muestra en la figura 9.

FIGURA 9 Intersecciones y asíntotas para $y = \tan x$.



Los valores de x tales como $P(a, b)$ que están en el eje vertical de la figura 8 son puntos de discontinuidad. Un segundo paso para graficar $y = \tan x$, es dibujar rectas verticales punteadas que pasen por estos puntos de discontinuidad como se ilustra en la figura 9, la gráfica no puede cruzar estas rectas. Estas rectas verticales punteadas se llaman *asíntotas*, son las pautas convenientes para trazar la gráfica de $y = \tan x$. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de $y = f(x)$ si $f(x)$ aumenta o disminuye sin límite cuando x se aproxima a a desde la izquierda o desde la derecha. Así, se escribe

$$\text{Asíntotas verticales:} \qquad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k \text{ es un entero}$$

Ahora se estudia con mayor detalle la conducta de la gráfica de $y = \tan x$ entre las dos asíntotas más cercanas al origen, es decir, en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Ya que $\tan(-x) = -\tan x$ (sección 5-2), sólo se necesita desarrollar la gráfica del intervalo entre $[0, \pi/2)$, después se puede reflejar esta gráfica que pasa por el origen para obtener la gráfica del intervalo entero entre $(-\pi/2, \pi/2)$.

Dos puntos en la gráfica para el intervalo $[0, \pi/2)$ son fáciles de calcular: $\tan 0 = 0$ y $\tan(\pi/4) = 1$. ¿Qué le pasa a $\tan x$ cuando x se aproxima a $\pi/2$ desde la izquierda? Si x se aproxima a $\pi/2$ desde la izquierda, el punto circular $P(a, b)$ en la figura 9 está en el primer cuadrante, a se aproxima a 0 pasando por los valores positivos y b se aproxima a 1. ¿Qué le pasa a $y = \tan x$ en el proceso? El experimento con calculadora en el ejemplo 1 le ayudará a determinar una respuesta.

EJEMPLO 1

Experimento con calculadora

A partir de una tabla de valores para $y = \tan x$ aproxímese a $\pi/2 \approx 1.570\,796$ pasando por los valores menores de $\pi/2$, comenzando en 0. ¿Cuál es su conclusión?

Solución

Se crea una tabla como se indica:

x	0	0.5	1	1.57	1.5707	1.570 796
$\tan x$	0	0.5	1.6	1 256	10 381	3 060 022

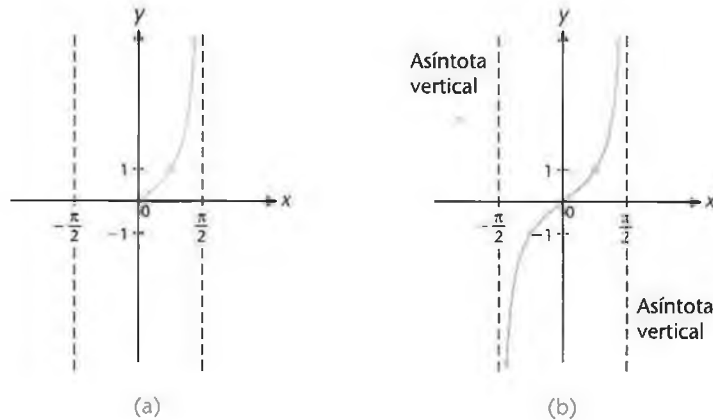
Cuando x se aproxima a $\pi/2$ desde la izquierda, $\tan x$ parece aumentar sin límite.

Problema seleccionado 1

A partir de una tabla de valores para $y = \tan x$, x se aproxima a $-\pi/2 \approx -1.570\,796$ pasando por los valores mayores de $-\pi/2$, comenzando en 0. Esto es, se usan los negativos de los valores de x utilizados en el ejemplo 1. ¿Cuál es su conclusión?

La figura 10(a) muestra la gráfica resultante del análisis del ejemplo 1. La gráfica se puede completar para el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ reflejando la gráfica de la figura 10(a) pasando por el origen. La figura 10(b) muestra el resultado.

FIGURA 10 Gráfica de $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.



Procediendo de la misma manera para los otros intervalos entre las asíntotas, la función tangente parece una función periódica con periodo π. Para verificar esto, regrese a la figura 8. Si(a, b) son las coordenadas del punto circular asociado con x, entonces, usando la simetría del círculo unitario y los triángulos de referencia congruentes, $(-a, -b)$ son las coordenadas del punto circular asociado con $x + \pi$. De aquí que,

$$\tan (x + \pi) = \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a} = \tan x$$

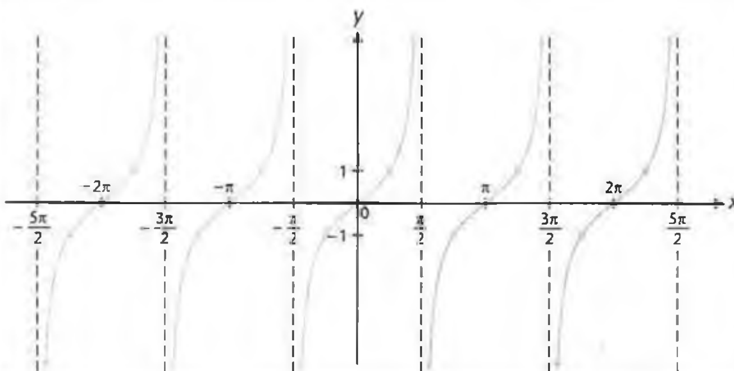
y se concluye que la función tangente es periódica con periodo π. En general,

$$\tan (x + k\pi) = \tan x \qquad k \text{ es un entero}$$

para todos los valores de x para los que ambos lados de la ecuación están definidos.

Para completar la gráfica de $y = \tan x$ sólo se necesita repetir la gráfica de la figura 10 a la izquierda y a la derecha en intervalos de π para producir tanto de la gráfica general como sea necesario (véase figura 11). Se deben aprender las características principales de la gráfica de la función tangente para poder dibujar la gráfica rápidamente.

Gráfica de $y = \tan x$



Periodo: π

Dominio: Todos los números reales excepto $\pi/2 + k\pi$, k es un entero

Rango: Todos los números reales

Simétrica con respecto al origen

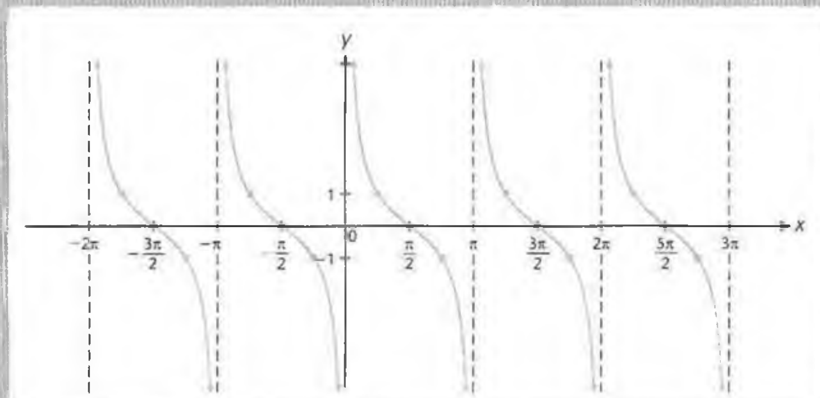
Función creciente entre las asíntotas

Discontinua en $x = \pi/2 + k\pi$, k es un entero

FIGURA 11

Ahora se volverá al análisis de la función cotangente. Puesto que $\cot x = 1/\tan x$, se puede graficar $y = \cot x$ tomando las recíprocas de los valores de y en la gráfica de $y = \tan x$ en la figura 11. Observe que las intersecciones con el eje x y las asíntotas verticales se intercambian. La gráfica de $y = \cot x$ se muestra en la figura 12. Como en la función tangente, se deben aprender sus características principales para poder trazar su gráfica rápidamente.

Gráfica de $y = \cot x$



Periodo: π

Dominio: Todos los números reales excepto $k\pi$, k es un entero

Rango: Todos los números reales

Simétrica con respecto al origen

Función decreciente entre las asíntotas

Discontinua en $x = k\pi$, k es un entero

FIGURA 12

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2

(A) Analice la relación entre las gráficas de las funciones tangente y cotangente.

(B) ¿Qué cambiaría y/o reflejaría en la gráfica de la tangente para obtener la gráfica de la cotangente?

(C) ¿La gráfica de $y = \tan(x - \pi/2)$ o de $y = -\tan(x - \pi/2)$ es igual que la gráfica de $y = \cot x$? Explique en términos de cambios y/o reflexiones.

Gráficas de $y = \csc x$ y $y = \sec x$

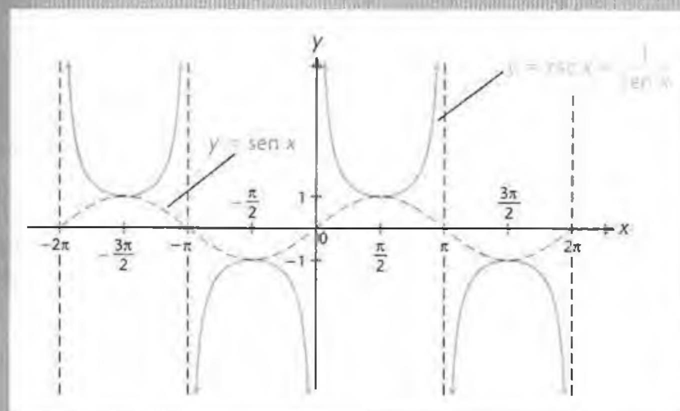
Así como se obtuvo la gráfica de $y = \cot x$ tomando las recíprocas de los valores de y en la gráfica de $y = \tan x$, ya que

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

se pueden obtener las gráficas de $y = \csc x$ y $y = \sec x$ tomando las recíprocas de los valores de y en las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y de $y = \cos x$, respectivamente. Las asíntotas verticales están en las intersecciones con el eje x de cualquier función sen x o cos x.

Las gráficas de $y = \csc x$ y de $y = \sec x$ se muestran en las figuras 13 y 14, respectivamente. Como una ayuda gráfica, se trazan primero las líneas discontinuas de $y = \operatorname{sen} x$ y de $y = \cos x$ y después se dibujan las asíntotas verticales pasando por la intersección x. Compruebe algunos puntos de las gráficas con calculadora.

Gráfica de $y = \csc x$



Periodo: 2π

Dominio: Todos los números reales excepto $k\pi$, k es un entero

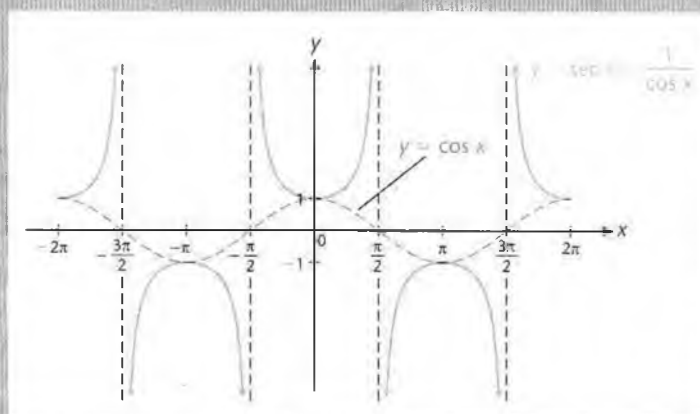
Rango: Todos los números reales y tales que $y \leq -1$ o $y \geq 1$

Simétrica con respecto al origen

Discontinua en $x = k\pi$, k es un entero

FIGURA 13

Gráfica de $y = \sec x$



Periodo: 2π

Dominio: Todos los números reales excepto $\pi/2 + k\pi$, k es un entero

Rango: Todos los números reales y tales que $y \leq -1$ o $y \geq 1$

Simétrica con respecto al eje y

Discontinua en $x = \pi/2 + k\pi$, k es un entero

FIGURA 14

Con esto se termina el análisis de las gráficas de las seis funciones trigonométricas básicas y de sus propiedades fundamentales. En todos los casos se procede a partir de las definiciones básicas y de las propiedades de estas funciones. Ahora se debe poder trazar cualquiera de estas gráficas y describir sus atributos fundamentales. Memorizar el círculo unitario es útil.



▪ Gráficas en un dispositivo de graficación

Ahora que se sabe que las gráficas de las seis funciones trigonométricas se derivan de las definiciones básicas y de sus propiedades, se volverá al trazo de las gráficas con un dispositivo de graficación, que puede producir estas gráficas casi instantáneamente.

EJEMPLO 2 **Gráficas trigonométricas de un dispositivo de graficación**

Utilice un dispositivo de graficación para graficar las funciones

$$y = \operatorname{sen} x \qquad y = \tan x \qquad y = \sec x$$

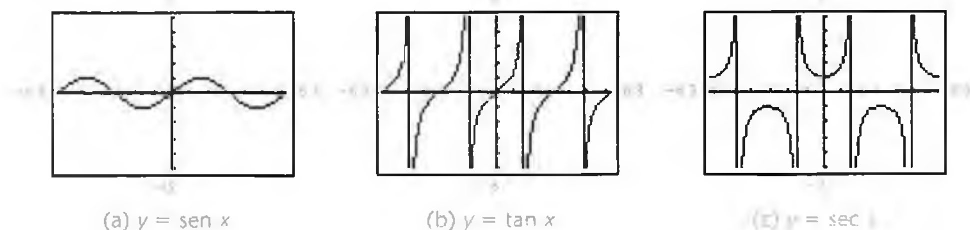
para $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, $-5 \leq y \leq 5$. Despliegue cada gráfica por separado en una ventana de visión en modo "conectado".

Solución Ponga primero el dispositivo de graficación en radianes y modo conectado. Después vaya a la siguiente ventana de parámetros, usando 6.3 como una aproximación para 2π:

X mín = −6.3	X máx = 6.3	Xscl = 1
Y mín = −5	Y máx = 5	Yscl = 1

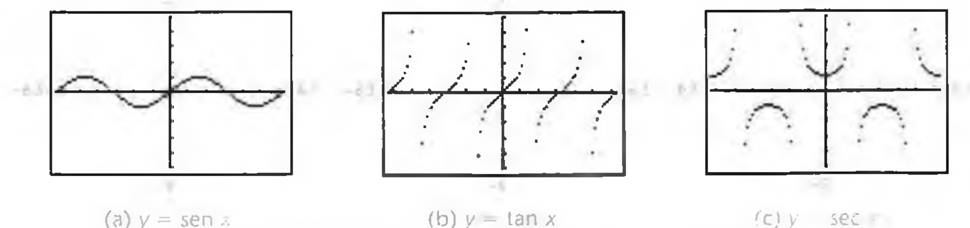
Ahora introduzca cada función y produzca su gráfica como se indica en la figura 15.

FIGURA 15 Gráficas en un dispositivo de graficación en modo "conectado".



En las figuras 15(b) y (c), parece que el dispositivo de graficación ha dibujado también las asíntotas verticales para estas funciones. Éste no es el caso. La mayoría de los dispositivos de graficación calculan los puntos en una gráfica y los conectan con segmentos de recta. El último punto trazado a la izquierda de una asíntota y el primer punto trazado a la derecha de la asíntota tendrán generalmente coordenadas y muy grandes. Si las coordenadas de y tienen signo contrario, entonces el dispositivo de graficación conectará los dos puntos con una recta que es casi vertical, y la línea tendrá la apariencia de una asíntota. El dispositivo no realiza ningún análisis de asíntota, simplemente une los puntos con rectas (esto no es perjudicial) y el efecto visual se acerca al que se produce dibujando las asíntotas. Se puede usar un dispositivo de graficación para trazar los puntos sin conexiones en una línea recta (modo "dot"), como se muestra en la figura 16. A menos que se pida lo contrario, se traza la gráfica en el modo conectado.

FIGURA 16 Gráficas en un dispositivo de graficación en modo "punteado".



Problema seleccionado 2 Repita el ejemplo 2 para (A) $y = \cos x$, (B) $y = \cot x$ y (C) $y = \csc x$. (Use el modo conectado.)

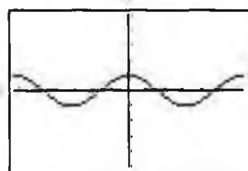
Respuestas a los problemas seleccionados

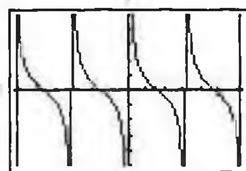
1.

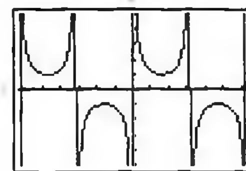
x	0	−0.5	−1	−1.57	−1.5707	−1.570 796
tan x	0	−0.5	−1.6	−1 256	−10 381	−3 060 022

Conforme x tiende a $-\pi/2$ desde la derecha, tan x parece decrecer sin límite.

2. (A) $y = \cos x$ (B) $y = \cot x$ (C) $y = \csc x$

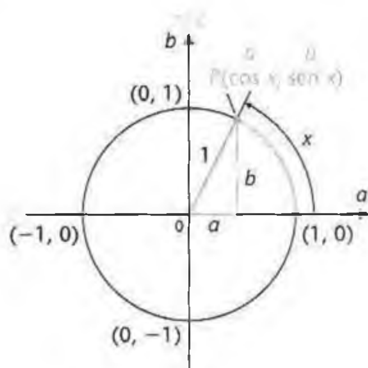






EJERCICIO 5-6

La siguiente figura será útil en muchos de los problemas de este ejercicio.



A

Resuelva los problemas del 1 al 12 sin revisar el texto o usar calculadora. Se puede remitir a la figura anterior.

1. ¿Cuáles son los periodos de las funciones seno, cotangente y cosecante?
2. ¿Cuáles son los periodos de las funciones coseno, tangente y secante?
3. ¿Cuánto se desvía la gráfica de cada función del eje x?
   (A) $y = \cos x$ (B) $y = \tan x$ (C) $y = \csc x$
4. ¿Cuánto se desvía la gráfica de cada función del eje x?
   (A) $y = \operatorname{sen} x$ (B) $y = \cot x$ (C) $y = \sec x$
5. ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x en la gráfica de cada función en el intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$?
   (A) $y = \operatorname{sen} x$ (B) $y = \cot x$ (C) $y = \csc x$
6. ¿Cuáles son las intersecciones con el eje x en la gráfica de cada función en el intervalo $-2\pi \le x \le 2\pi$?
   (A) $y = \cos x$ (B) $y = \tan x$ (C) $y = \sec x$
7. ¿Para qué valores de x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, no están definidas las siguientes funciones?
   (A) $y = \cos x$ (B) $y = \tan x$ (C) $y = \csc x$
8. ¿Para qué valores de x, $-2\pi \le x \le 2\pi$, no están definidas las siguientes funciones?
   (A) $y = \operatorname{sen} x$ (B) $y = \cot x$ (C) $y = \sec x$

B

9. ¿En cuáles puntos, $-2\pi \le x \le 2\pi$, para las siguientes funciones y las asíntotas verticales cruzan al eje x?
   (A) $y = \cos x$ (B) $y = \tan x$ (C) $y = \csc x$
10. ¿En cuáles puntos, $-2\pi \le x \le 2\pi$, para las siguientes funciones y las asíntotas verticales cruzan al eje x?
    (A) $y = \operatorname{sen} x$ (B) $y = \cot x$ (C) $y = \sec x$
11. Trace las gráficas de cada una de las siguientes funciones sobre el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Indique la escala del eje x en términos de π, y dibuje las asíntotas verticales usando las líneas punteadas apropiadas.
    (A) $y = \cos x$ (B) $y = \tan x$ (C) $y = \csc x$
12. Trace las gráficas de cada una de las siguientes funciones en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$. Indique la escala del eje x en términos de π, y dibuje las asíntotas verticales usando las líneas punteadas apropiadas.
    (A) $y = \operatorname{sen} x$ (B) $y = \cot x$ (C) $y = \sec x$
13. (A) Describa un desplazamiento y/o reflexión que transforme la gráfica de $y = \csc x$ en la gráfica de $y = \sec x$.

(B) ¿La gráfica de $y = -\csc (x + \pi/2)$ o de $y = -\csc (x - \pi/2)$ es igual que la de $y = \sec x$? Explique en términos de cambios y/o reflexiones.

14. (A) Describa un desplazamiento y/o reflexión que transformará a la gráfica de $y = \sec x$ en la gráfica de $y = \csc x$.
(B) ¿La gráfica de $y = -\sec (x - \pi/2)$ o de $y = -\sec (x + \pi/2)$ es igual que la gráfica de $y = \csc x$? Explique en términos de desplazamientos y/o reflexiones.

Los problemas del 15 al 20 requieren el uso de un dispositivo de graficación. Estos problemas ofrecen un análisis preliminar de las relaciones de las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y de $y = \cos x$ con las gráficas de $y = A \operatorname{sen} x$, $y = A \cos x$, $y = \operatorname{sen} Bx$, $y = \cos Bx$, $y = \operatorname{sen} (x + C)$, y de $y = \cos (x + C)$. Este importante tema se analizará en forma detallada en la próxima sección.

15. (A) Grafique $y = A \cos x$ $(-2\pi \le x \le 2\pi, -3 \le y \le 3)$ para $A = 1, 2$ y -3. todas en la misma ventana de visión.
(B) ¿Cambian las intersecciones con el eje x? Si éste es el caso, ¿en dónde lo hacen?
(C) ¿Cuánto se desvía cada gráfica del eje x? (Experimente con valores adicionales de A.)
(D) Describa cómo cambia la gráfica de $y = \cos x$ cuando cambian los valores de A en $y = A \cos x$.

16. (A) Grafique $y = A \operatorname{sen} x$ $(-2\pi \le x \le 2\pi, -3 \le y \le 3)$ para $A = 1, 3$ y —2, todos en la misma ventana de visión.
(B) ¿Cambian las intersecciones con el eje x? Si es así, ¿en dónde lo hacen?
(C) ¿Cuánto se desvía cada gráfica del eje x? (Experimente con valores adicionales de A.)
(D) Describa cómo cambia la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ cuando cambian los valores de A en $y = A \operatorname{sen} x$.

17. (A) Grafique $y = \operatorname{sen} Bx$ $(-\pi \le x \le \pi, -2 \le y \le 2)$ para $B = 1, 2$ y 3, todos en la misma ventana de visión.
(B) ¿Cuántos periodos de cada gráfica aparecen en el rectángulo considerado? (Experimente con valores enteros positivos adicionales de B.)
(C) Basándose en las observaciones de la parte B, ¿cuántos periodos de la gráfica de $y = \operatorname{sen} nx$, n es un entero positivo, aparecerán en esta ventana de visión?

18. (A) Grafique $y = \cos Bx$ $(-\pi \le x \le \pi, -2 \le y \le 2)$ para $B = 1, 2$ y 3, todos en la misma ventana de visión.
(B) ¿Cuántos periodos de cada gráfica aparecen en el rectángulo considerado? (Experimente con valores enteros positivos adicionales de B.)
(C) Con base en las observaciones de la parte B, ¿cuántos periodos de la gráfica de $y = \cos nx$, n es un entero positivo, aparecen en esta ventana de visión?

19. (A) Grafique $y = \cos (x + C)$ $(-2\pi \le x \le 2\pi, -1.5 \le y \le 1.5)$ para $C = 0, -\pi/2$ y $\pi/2$, todos en la misma ventana de visión. (Experimente con valores adicionales de C.)
(B) Describa cómo cambia la gráfica de $y = \cos x$ cuando cambian los valores de C en $y = \cos (x + C)$.

20. (A) Grafique $y = \operatorname{sen} (x + C)$ $(-2\pi \le x \le 2\pi, -1.5 \le y \le 1.5)$ para $C = 0, -\pi/2$ y $\pi/2$, todos en la misma ventana de visión. (Experimente con valores adicionales de C.)
(B) Describa cómo cambia la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ cuando cambian los valores de C en $y = \operatorname{sen} (x + C)$.

C

21. Trate de calcular cada uno de los siguientes enunciados en su calculadora. Explique los resultados.

(A) $\sec (\pi/2)$ (B) $\tan (-\pi/2)$ (C) $\cot (-\pi)$

22. Trate de calcular cada uno de los siguientes en su calculadora. Explique los resultados.

(A) $\csc \pi$ (B) $\tan (\pi/2)$ (C) $\cot 0$

Los problemas 23 y 24 requieren del uso de un dispositivo de graficación.

23. Grafique $f(x) = \operatorname{sen} x$ y a $g(x) = x$ en la misma ventana de visión $(-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1)$.

(A) ¿Qué observa en las dos gráficas cuando x se aproxima a 0, por ejemplo $-0.5 \le x \le 0.5$?
(B) Termine la tabla con tres cifras decimales (use la característica de tabla en su dispositivo de graficación si es que tiene uno):

x	-0.3	-0.2	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.3
$\operatorname{sen} x$							

(En matemáticas aplicadas ciertas deducciones, fórmulas y cálculos se simplifican reemplazando $\operatorname{sen} x$ con x para el menor $|x|$.)

24. Grafique $h(x) = \tan x$ y $g(x) = x$ en la misma ventana de visión $(-1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1)$.

(A) ¿Qué observa usted acerca de las dos gráficas cuando x está cerca de cero, digamos $-0.5 \le x \le 0.5$?
(B) Termine la tabla con tres cifras decimales (use la tabla característica de su utilidad gráfica, si tiene alguna):

x	-0.3	-0.2	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.3
$\tan x$							

(En matemáticas aplicadas ciertas deducciones, fórmulas y cálculos, se simplifican al remplazar $\tan x$ con x para $|x|$ pequeñas.)

SECCIÓN 5-7 Graficación de $y = k + A$ sen $(Bx + C)$ y $y = k + A \cos (Bx + C)$

- $y = A$ sen x y $y = A \cos x$
- $y =$ sen Bx y $y = \cos Bx$
- $y = k + A$ sen Bx y $y = k + A \cos Bx$
- $y = k + A$ sen $(Bx + C)$ y $y = k + A \cos (Bx + C)$
- Determinación de la ecuación de una gráfica armónica simple

Ahora que se han analizado las gráficas de $y =$ sen x y $y = \cos x$ con todo detalle, se está listo para considerar las gráficas en formas más generales.

$$y = k + A \text{ sen } (Bx + C) \qquad \text{y} \qquad y = k + A \cos (Bx + C) \tag{1}$$

Estas ecuaciones son muy importantes en matemáticas puras y aplicadas. En matemáticas aplicadas se usa en los análisis de ondas seno, ondas de radio, rayos X, rayos gamma, luz visible, radiación infrarroja, radiación ultravioleta, ondas sísmicas, ondas del océano, circuitos eléctricos, generadores eléctricos, vibraciones, construcción de puentes, sistema masa-resorte, ondas de arco de embarcaciones, estampidos sónicos, etcétera. El fenómeno que se puede describir por cualquiera de las ecuaciones (1), donde x representa al tiempo, es conocido como **movimiento armónico simple**, y ciertos tipos de análisis que implican estas ecuaciones se llaman **análisis armónicos**.

Trazar las gráficas de las ecuaciones (1) no es difícil si el problema se resuelve paso a paso. Es esencial en el proceso, sin embargo, un buen conocimiento de las gráficas de $y =$ sen x y de $y = \cos x$ analizadas en la sección 6-6. Aquí se enfocará la atención en el efecto que tiene A, B, C y k en las gráficas básicas de $y =$ sen x y de $y = \cos x$. Es útil hacer un breve repaso de la sección 3-5.

$y = A$ sen x y $y = A \cos x$

Se investiga primero el efecto de A comparando

$$y = \text{sen } x \qquad \text{y} \qquad y = A \text{ sen } x$$

La gráfica de $y = A$ sen x se puede obtener de la gráfica de $y =$ sen x multiplicando cada valor de y de $y =$ sen x por A. La gráfica de $y = A$ sen x también cruza al eje x donde la gráfica de $y =$ sen x cruza al eje x, porque $A \cdot 0 = 0$. Puesto que el valor máximo de sen x es 1, el valor máximo de A sen x es $|A| \cdot 1 = |A|$. La constante $|A|$ se llama **amplitud** de la gráfica de $y = A$ sen x e indica la desviación máxima de la gráfica de $y = A$ sen x del eje x. Finalmente, el periodo de $y = A$ sen x es también 2π, ya que A sen $(x + 2\pi) = A$ sen x.

EJEMPLO 1

Comparación de gráficas con amplitudes diferentes

Compare las amplitudes de $y = \frac{1}{2}$ sen x y $y = -2$ sen x con las amplitudes de $y =$ sen x y trace la gráfica de cada una en el mismo sistema coordenado para $0 \le x \le 2\pi$.

Solución La amplitud de la gráfica de $y = \frac{1}{2}$ sen x es $|\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, la amplitud de la gráfica de $y = -2$ sen x es $|-2| = 2$, y la amplitud de la gráfica de $y =$ sen x es $|1| = 1$. El signo negativo en $y = -2$ sen x refleja la gráfica de $y = 2$ sen x a través del eje x (lo gira de la parte superior hacia abajo). Las gráficas de estas tres ecuaciones se muestran en la figura 1.

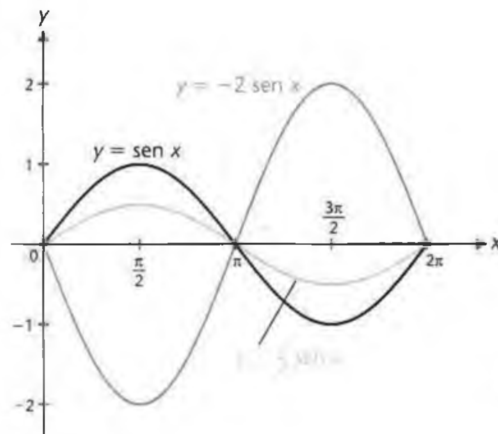


FIGURA 1 Cambio en la amplitud.

Problema seleccionado 1

Compare las gráficas de $y = \frac{1}{3}$ cos x y $y = -3$ cos x con la gráfica de $y =$ cos x graficando cada una en el mismo sistema coordenado para $-\pi/2 \le x \le 3\pi/2$.

$y =$ sen Bx y $y =$ cos Bx

Ahora se estudiará el efecto de B comparando

$$y = \text{sen } x \qquad \text{y} \qquad y = \text{sen } Bx \qquad B > 0$$

Ambos tienen la misma amplitud, 1, ¿pero cómo comparar sus periodos? Puesto que sen x tiene un periodo de 2π, se sigue que sen Bx completa un ciclo conforme Bx varía de

$$Bx = 0 \qquad \text{a} \qquad Bx = 2\pi$$

conforme x varía de

$$x = 0 \qquad \text{a} \quad x = \frac{2\pi}{B}$$

Se concluye que el periodo de sen Bx es $2\pi/B$, como se puede verificar en seguida: Si $f(x) =$ sen Bx, entonces

$$f\left(x + \frac{2\pi}{B}\right) = \operatorname{sen}\left[B\left(x + \frac{2\pi}{B}\right)\right]$$
$$= \operatorname{sen}\,(Bx + 2\pi) = \operatorname{sen} Bx = f(x)$$

EJEMPLO 2 **Comparación de gráficas con periodos diferentes**

Compare los periodos de $y =$ sen $2x$ y de $y =$ sen $(x/2)$ con el periodo de $y =$ sen x y trace una gráfica de cada uno en el mismo sistema coordenado para un periodo que comienza en el origen.

Solución ¿Cuál es el periodo de $y =$ sen $2x$?

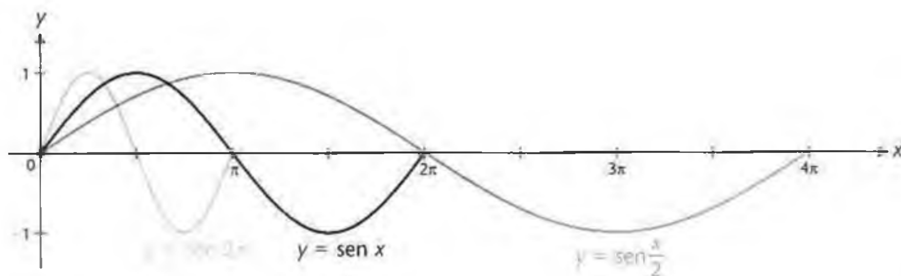
$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{2} = \pi \qquad \text{Mitad del periodo para sen } x.$$

¿Cuál es el periodo de $y =$ sen $(x/2)$?

$$\text{Periodo} = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi \qquad \text{Doble del periodo para sen } x.$$

Las gráficas de las tres ecuaciones se muestran en la figura 2.

FIGURA 2 Cambio en el periodo.



Es claro del ejemplo 2 que el efecto de B será comprimir o estirar la curva básica del seno cambiando el periodo de la función. Un análisis semejante se aplica a $y = \cos Bx$, para $B > 0$, donde se puede mostrar que su periodo también es $2\pi/B$.

Problema seleccionado 2 Compare las gráficas de $y = \cos 2x$ y $y = \cos (x/2)$ con la gráfica de $y = \cos x$ graficando cada una en el mismo sistema coordenado para un periodo que comienza en el origen.

• $y = k + A$ sen Bx y $y = k + A$ cos Bx

Combinando el análisis con la amplitud y el periodo, se resumen los resultados como se indica:

Para $y = A$ sen Bx o para $y = A$ cos Bx, $B > 0$:

$$\text{Amplitud} = |A| \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{B}$$

Si $0 < B < 1$, la curva básica del seno o del coseno se estira.

Si $B > 1$, la curva básica del seno o del coseno se comprime.

Se puede memorizar la fórmula para el periodo, $2\pi/B$, o usar el razonamiento con el que se deriva la fórmula. Recuerde, sen Bx o cos Bx completa un ciclo como Bx varía de

$$Bx = 0 \qquad \text{a} \qquad Bx = 2\pi$$

esto es, conforme x varía de

$$x = 0 \qquad \text{a} \qquad x = \frac{2\pi}{B}$$

Algunos prefieren memorizar una fórmula, otros un proceso.

Ahora se considerarán algunos ejemplos donde se muestra cómo las gráficas de $y = A$ sen Bx y $y = A$ cos Bx se pueden graficar rápidamente.

EJEMPLO 3

Graficación de una ecuación de la forma $y = A$ sen Bx

Exprese la amplitud y el periodo para $y = 2$ sen $2x$, y grafique la ecuación para el intervalo $-\pi \le x \le 2\pi$.

Solución

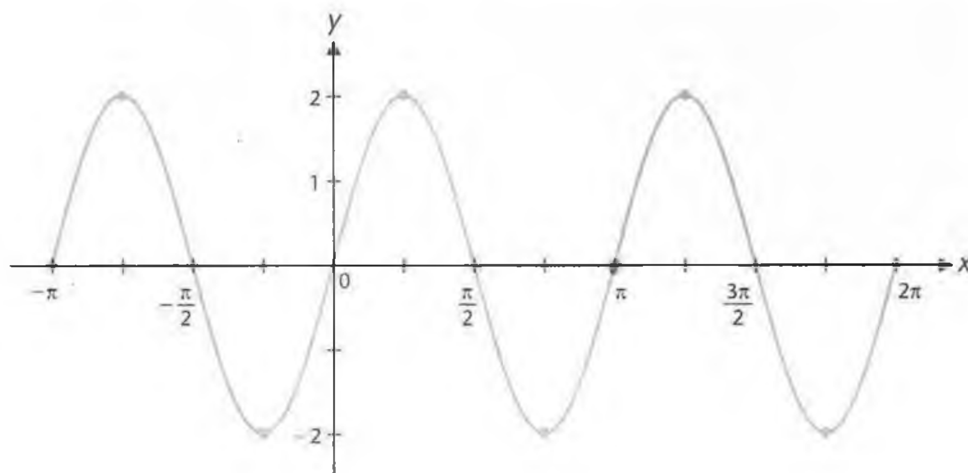
$$\text{Amplitud} = |2| = 2 \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Para trazar la gráfica, divida el intervalo o el periodo $[0, \pi]$ en cuatro partes iguales, localice los puntos altos y bajos y las intersecciones con el eje x, trace en un periodo, y después extienda este trazo para cubrir el intervalo deseado. Haga una escala del eje x usando $\pi/4$ (el periodo dividido entre 4) como la unidad básica, y ajuste la escala en el eje y para acomodar la amplitud 2 (figura 3). *Las escalas en ambos ejes no tienen que ser las mismas.*

Problema seleccionado 3

Exprese la amplitud y el periodo para $y = -\frac{1}{2}$ sen $(x/2)$, y grafique la ecuación para $-4\pi \le x \le 4\pi$.

FIGURA 3 $y = 2$ sen $2x$.



EJEMPLO 4 **Graficación de una ecuación de la forma $y = A \cos Bx$**

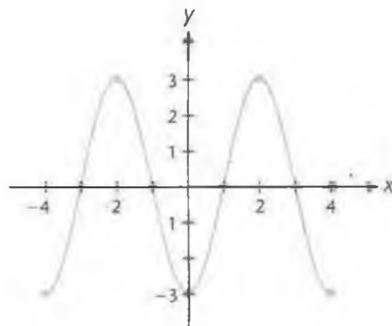
Exprese la amplitud y el periodo para $y = -3 \cos (\pi x/2)$, y grafique la ecuación para $-4 \leq x \leq 4$.

Solución

$$\text{Amplitud} = |-3| = 3 \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{\pi/2} = 4$$

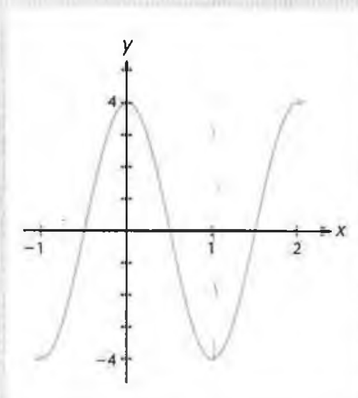
La gráfica de $y = -3 \cos (\pi x/2)$ es la misma que la gráfica de $y = 3 \cos (\pi x/2)$ reflejada a través del eje x. Divida el intervalo de un periodo [0, 4] en cuatro partes iguales, localice los puntos altos y bajos y las intersecciones con el eje x, trace en un periodo, y después extienda el trazo para cubrir el intervalo deseado. Haga una escala del eje x usando $\frac{4}{4} = 1$ como la unidad básica (el periodo dividido entre 4), y ajuste al eje vertical para acomodar la amplitud 3 (figura 4).

FIGURA 4 $y = -3 \cos \frac{\pi x}{2}$.



Problema seleccionado 4 Exprese la amplitud y el periodo para $y = \frac{1}{4} \cos 2\pi x$ y grafique la ecuación para el intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Encuentre una ecuación de la forma $y = A \cos Bx$ que produce la siguiente gráfica:



¿Es posible para una ecuación de la forma $y = A$ sen Bx producir la misma gráfica? Explique.

¿Cómo graficaría una función como

$$y = k + A \text{ sen } Bx \qquad \text{o} \qquad y = k + A \cos Bx?$$

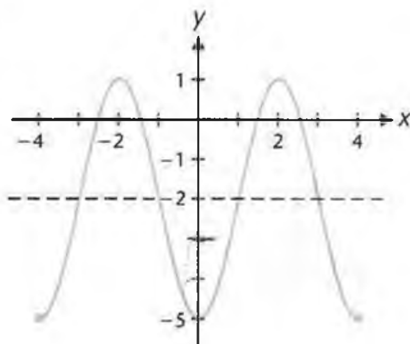
Aplicando los métodos de la sección 2−5, se podría graficar $y = A$ sen Bx o $y = A \cos Bx$ y trasladar a la curva verticalmente k unidades hacia arriba si k es positiva y $|k|$ unidades hacia abajo si k es negativa.

EJEMPLO 5 Graficación de una ecuación de la forma $y = k + A$ sen Bx

Grafique $y = -2 -3 (\pi x/2)$, $-4 \leq x \leq 4$.

Solución Primero se traza $y = -3 \cos (\pi x/2)$, como se hizo en el ejemplo 4, después traslade la gráfica $|-2| = 2$ unidades hacia abajo (figura 5).

FIGURA 5 $y = -2 -3 \cos \frac{\pi x}{2}$.



Muchos encuentran más fácil dibujar primero la recta horizontal discontinua que se muestra en la figura (la cual representa una traslación vertical de dos unidades abajo del eje x), después trace la gráfica de $y = -3 \cos (\pi x/2)$ como si esta recta horizontal fuera el eje x original.

Problema seleccionado 5 Grafique $y = 1 + \frac{1}{4} \cos 2\pi x, -1 \leq x \leq 1$.

• $y = k + A$ sen $(Bx + C)$ y $y = k + A \cos (Bx + C)$

Se considerarán ahora las gráficas de ecuaciones de la forma

$$y = A \text{ sen } (Bx + C) \qquad \text{y} \qquad y = A \cos (Bx + C)$$

Se encontrará que las gráficas de estas ecuaciones son simplemente las gráficas de

$$y = A \text{ sen } Bx \qquad \text{o} \qquad y = A \cos Bx$$

trasladadas horizontalmente a la izquierda o a la derecha. Esto se puede ver como se indica: Puesto que A sen x tiene un periodo de 2π, se sigue que A sen $(Bx + C)$ completa un ciclo conforme $Bx + C$ varía de

$$Bx + C = 0 \qquad \text{a} \qquad Bx + C = 2\pi$$

o (despejando x en cada ecuación) conforme x varía de

Corrimiento de fase Periodo

$$x = -\frac{C}{B} \qquad \text{o} \qquad x = -\frac{C}{B} + \frac{2\pi}{B}$$

Se concluye que $y = A$ sen $(Bx + C)$ tiene un periodo de $2\pi/B$, y su gráfica es trasladada a $|-C/B|$ unidades a la derecha si $-C/B$ es positivo y $|-C/B|$ unidades a la izquierda si $-C/B$ es negativo. El número $-C/B$ se llama también **corrimiento de fase.**

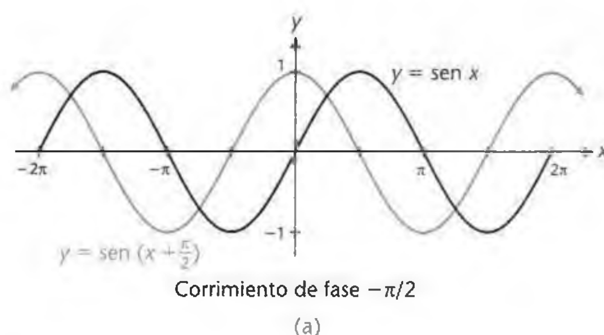
¿Cuál es el periodo y el cambio de fase para $y = $ sen $(x + \pi/2)$? Para encontrar una respuesta, use las fórmulas de arriba para el cambio de periodo y de fase o siga el proceso usado para deducir las fórmulas. Muy probablemente encontrará que el proceso es fácil de recordar: El conjunto $x + \pi/2$ es igual a 0 y a 2π, después despeje x de cada ecuación:

$$x + \frac{\pi}{2} = 0 \qquad x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$x = -\frac{\pi}{2} \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi$$

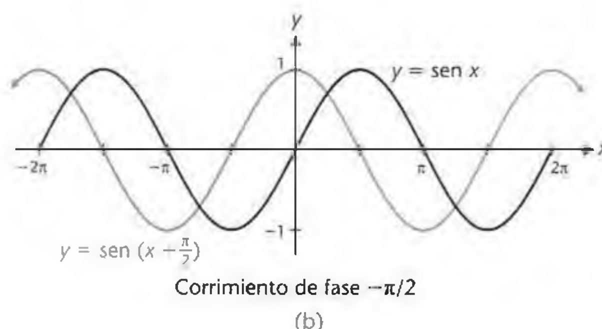
Así, $-\pi/2$ es el cambio de la fase y 2π es el periodo. La gráfica de $y = $ sen x se traslada horizontalmente $|-\pi/2| = \pi/2$ unidades a la izquierda. La figura 6(a) de la siguiente página muestra las gráficas de $y = $ sen x y de $y = $ sen $(x + \pi/2)$.

Siguiendo el mismo proceso, se grafica $y = $ sen $(x - \pi/2)$, como se muestra en la figura 6(b). Aquí, el cambio de fase es $\pi/2$, y la gráfica de $y = $ sen x es trasladada horizontalmente $\pi/2$ unidades a la derecha.



Corrimiento de fase −π/2

(a)



Corrimiento de fase −π/2

(b)

FIGURA 6

Un análisis semejante se aplica a $y = A\cos(Bx + C)$. Los resultados se resumen en los siguientes cuadros.

Propiedades de $y = A$ sen $(Bx + C)$ y $y = A\cos(Bx + C)$

Para $B > 0$:

$$\text{Amplitud} = |A| \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{B} \qquad \text{Corrimiento de fase} = -\frac{C}{B}$$

No es necesario que memorice las fórmulas para el periodo y el cambio de fase a menos que desee hacerlo. Éstas se deducen fácilmente, como se muestra en los siguientes pasos por graficar.

Graficación de $y = A$ sen $(Bx + C)$ y $y = A\cos(Bx + C)$

Paso 1. Encuentre la amplitud $|A|$.

Paso 2. Resuelva $Bx + C = 0$ y $Bx + C = 2\pi$:

$$Bx + C = 0 \qquad \text{y} \qquad Bx + C = 2\pi$$

$$x = -\frac{C}{B} \qquad\qquad x = -\frac{C}{B} + \frac{2\pi}{B}$$

Corrimiento de fase — Periodo

$$\text{Corrimiento de fase} = -\frac{C}{B} \qquad \text{Periodo} = \frac{2\pi}{B}$$

La gráfica termina un ciclo completo cuando $Bx + C$ varía de 0 a 2π; es decir, cuando x varía en el intervalo

$$\left[-\frac{C}{B}, -\frac{C}{B} + \frac{2\pi}{B}\right]$$

Paso 3. Grafique un ciclo en el intervalo $[-C/B, -C/B + 2\pi/B]$.

Paso 4. Extienda la gráfica del paso 3 a la izquierda o a la derecha según desee.

EJEMPLO 6 **Graficación de una ecuación de la forma $y = A \cos (Bx + C)$**

Encuentre la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase para $y = \frac{1}{2} \cos (4x - \pi)$, después trace la gráfica para $-\pi \leq x \leq \pi$.

Solución *Paso 1.* *Encuentre la amplitud:*

$$\text{Amplitud} = |A| = |\tfrac{1}{2}| = \tfrac{1}{2}$$

Paso 2. *Resuelva $Bx + C = 0$ y $Bx + C = 2\pi$:*

$$4x - \pi = 0 \qquad 4x - \pi = 2\pi$$

$$x = \frac{\pi}{4} \qquad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

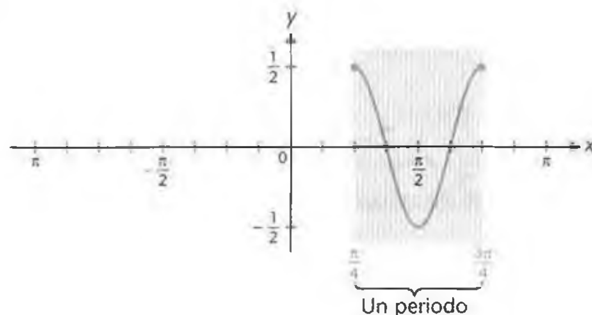
Corrimiento de fase Periodo

$$\text{Corrimiento de fase} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{Periodo} = \frac{\pi}{2}$$

La gráfica completa un ciclo cuando x varía en el intervalo $[\pi/4, 3\pi/4]$.

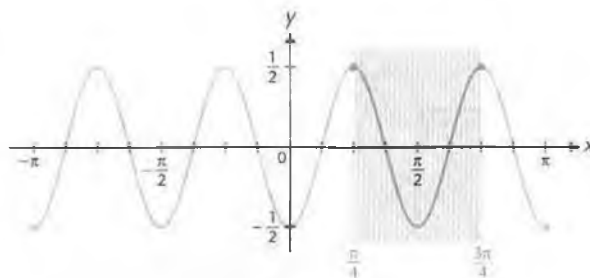
Paso 3. *Gráfica de un ciclo en el intervalo* $[\pi/4, 3\pi/4]$. Divida al intervalo en cuatro partes iguales y trace un ciclo (figura 7). (Haga la escala del eje x en unidades de $\pi/8$.)

FIGURA 7 $y = \frac{1}{2} \cos (4x - \pi)$. $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$.



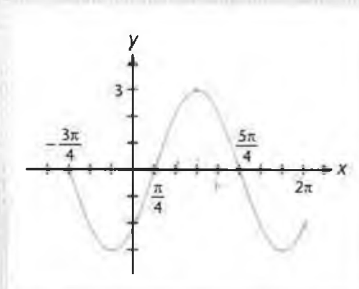
Paso 4. *Extienda la gráfica del paso 3 para cubrir el intervalo* $[-\pi, \pi]$ como se muestra en la figura 8.

FIGURA 8 $y = \frac{1}{2} \cos (4x - \pi)$. $-\pi \leq x \leq \pi$.



Problema seleccionado 6 Grafique $y = \frac{3}{4}$ sen $(2x + \pi)$, $-\pi \leq x \leq \pi$. Exprese la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Encuentre una ecuación de la forma $y = A$ sen $(Bx + C)$ que produzca la siguiente gráfica:



¿Es posible para una ecuación de la forma $y = A \cos (Bx + C)$ producir la misma gráfica? Explique.

Finalmente, la graficación de ecuaciones de la forma $y = k + A$ sen $(Bx + C)$ o $y = k + A \cos (Bx + C)$ implica traslaciones horizontales (corrimientos de fase) y traslaciones verticales.

EJEMPLO 7

Graficación de ecuaciones de la forma $y = k + A \cos (Bx + C)$

Grafique $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos (4x - \pi)$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

Solución Grafique $y = \frac{1}{2} \cos (4x - \pi)$ como en el ejemplo 6, después traslade la gráfica verticalmente hacia arriba en $\frac{3}{2}$ unidades (figura 9):

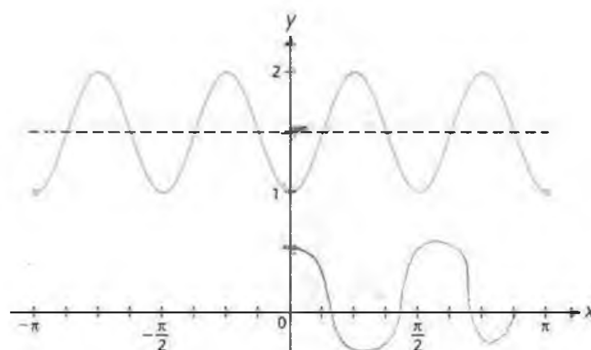


FIGURA 9 $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos (4x - \pi)$.

Problema seleccionado 7

Grafique $y = -\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$ sen $(2x - \pi)$, $-\pi \leq x \leq \pi$.



• Determinación de la ecuación de una gráfica armónica simple

Dada una gráfica armónica simple, el problema será encontrar una ecuación de la forma

$$y = A \text{ sen } (Bx + C) \qquad \text{o} \qquad y = A \cos (Bx + C)$$

que produzca la gráfica. Un ejemplo ilustrará el proceso.

EJEMPLO

Determinación de la ecuación de una gráfica armónica simple

Grafique $y_1 = 3$ sen $x + 4 \cos x$ usando un dispositivo de graficación, y encuentre una ecuación de la forma $y_2 = A$ sen $(Bx + C)$ que tenga la misma gráfica que y_1. Encuentre exactamente A, B y C con tres cifras decimales.

Solución La gráfica de y_1 se muestra en la figura 10.

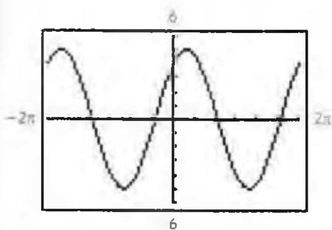


FIGURA 10 $y_1 = 3$ sen$x + 4 \cos x$.

La gráfica parece ser una curva de seno corrida a la izquierda. La amplitud y el periodo parecen ser 5 y 2π, respectivamente. (Por ahora se supondrá esto y se verificará al final). Así, $A = 5$, y puesto que $P = 2\pi/B$, entonces $B = 2\pi/P = 2\pi/2\pi = 1$. Usando un dispositivo de graficación, se encuentra que la intersección con el eje x cercana al origen, con tres cifras decimales, es -0.927. Para encontrar C, sustituya $B = 1$ y $x = -0.927$ en la fórmula de corrimiento de fase $x = -C/B$ y despeje C:

$$x = -\frac{C}{B}$$

$$-0.927 = -\frac{C}{1}$$

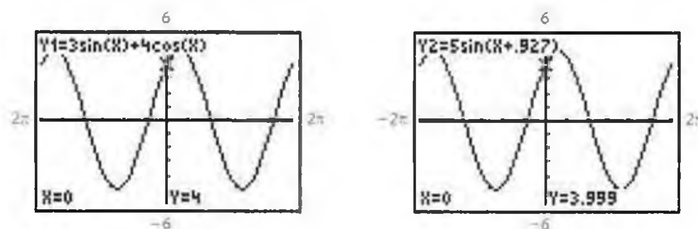
$$C = 0.927$$

Ahora se tiene la ecuación buscada para:

$$y_2 = 5 \text{ sen } (x + 0.927)$$

Comprobación Grafique y_1 y y_2 en la misma ventana de visión. Si las gráficas son iguales, parece que sólo se traza una gráfica, la segunda gráfica se dibuja sobre la primera. Para comprobar, además, que las gráficas son iguales, use, TRACE y alterne y_1 y y_2 para diferentes valores de x. La figura 11 muestra una comparación con $x = 0$ (ambas gráficas están en la misma ventana de visión).

FIGURA 11

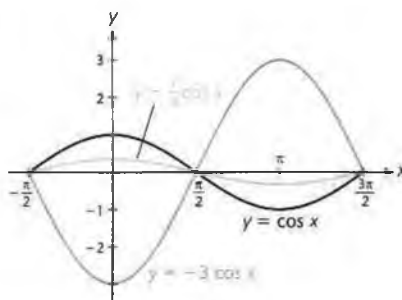


Problema seleccionado 8

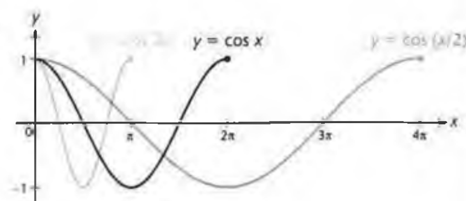
Grafique $y_1 = 4 \text{ sen } x - 3 \cos x$ usando un dispositivo de graficación, y encuentre una ecuación de la forma $y_2 = A \text{ sen } (Bx + C)$ que es igual a la gráfica de y_1. (Encuentre las intersecciones con el eje x cercano al origen con tres cifras decimales.)

Respuestas a los problemas seleccionados

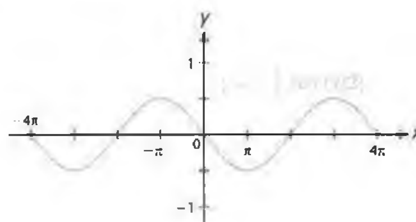
1.



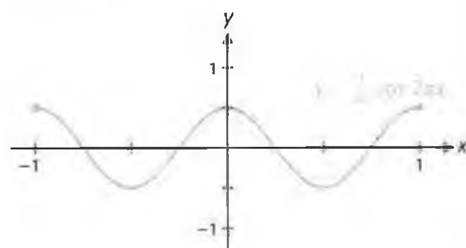
2.



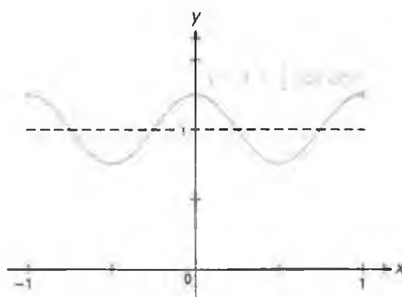
3. Amplitud $\frac{1}{2}$, periodo: 4π



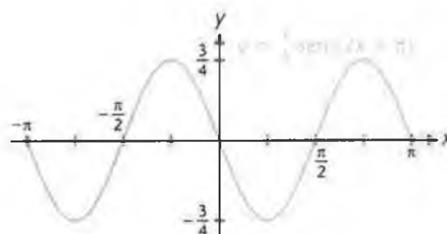
4. Amplitud: $\frac{1}{4}$, periodo: 1



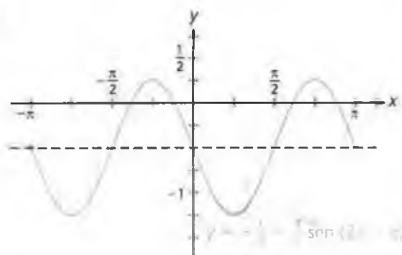
5.



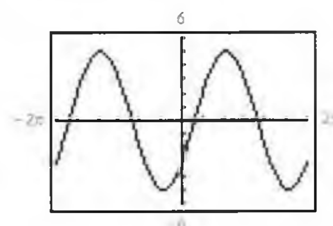
6. Amplitud: $\frac{3}{4}$, periodo: π, corrimiento de fase: $-\pi/2$



7.



8. $y_2 = 5 \text{ sen } (x - 0.644)$



EJERCICIO 5-7

A

Exprese la amplitud A y el periodo P de cada función en los problemas del 1 al 12, y grafique la función sobre el intervalo indicado.

1. $y = 3 \operatorname{sen} x,\ -2\pi \le x \le 2\pi$
2. $y = \frac{1}{4} \cos x,\ -2\pi \le x \le 2\pi$
3. $y = -\frac{1}{2} \cos x,\ -2\pi \le x \le 2\pi$
4. $y = -2 \operatorname{sen} x,\ -2\pi \le x \le 2\pi$
5. $y = \operatorname{sen} 3x,\ -\pi \le x \le 2\pi$
6. $y = \cos 2x,\ -\pi \le x \le \pi$
7. $y = \cos (x/2),\ -4\pi \le x \le 4\pi$
8. $y \operatorname{sen} (x/3),\ -6\pi \le x \le 6\pi$
9. $y = \operatorname{sen} \pi x,\ -2 \le x \le 2$
10. $y = \cos \pi x,\ -2 \le x \le 2$
11. $y = 3 \cos 2x,\ -\pi \le x \le \pi$
12. $y = 2 \operatorname{sen} 4x,\ -\pi \le x \le \pi$

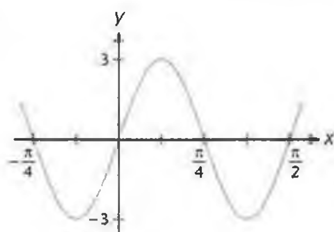
B

Exprese la amplitud A y el periodo P de cada función en los problemas del 13 al 20, y grafique la función sobre el intervalo indicado.

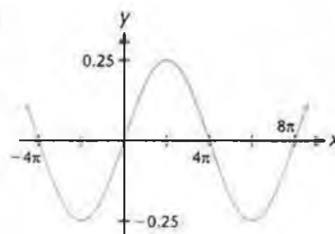
13. $y = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x,\ -2 \le x \le 2$
14. $y = -\frac{1}{3} \cos 2\pi x,\ -2 \le x \le 2$
15. $y = -3 \cos (x/2),\ -4\pi \le x \le 4\pi$
16. $y = -\frac{1}{4} \operatorname{sen} (x/2),\ -4\pi \le x \le 4\pi$
17. $y = 2 + 2 \operatorname{sen} (\pi x/2),\ -4 \le x \le 4$
18. $y = 3 + 3 \cos (\pi x/2),\ -4 \le x \le 4$
19. $y = 4 - 2 \cos (x/2),\ -4\pi \le x \le 4\pi$
20. $y = 3 - 2 \operatorname{sen} (x/2),\ -4\pi \le x \le 4\pi$

En los problemas del 21 al 24, encuentre la ecuación de la forma $y = A$ sen Bx que produzca la gráfica mostrada.

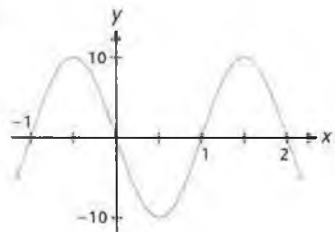
21.



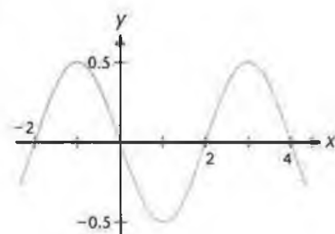
22.



23.

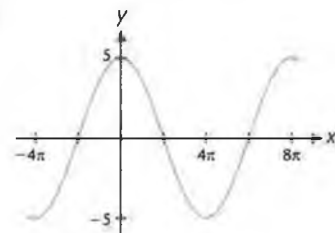


24.

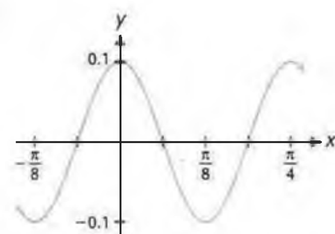


En los problemas del 25 al 28, encuentre la ecuación de la forma $y = A \cos Bx$ que produzca la gráfica mostrada.

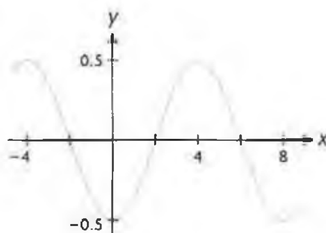
25.



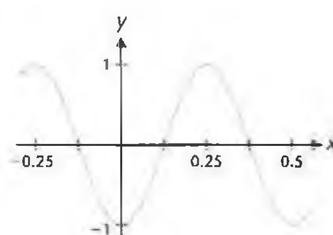
26.



27.



28.



Grafique cada función de los problemas del 29 al 32 con un dispositivo de graficación. (Escoja las dimensiones de cada ventana de visión que por lo menos tenga dos periodos visibles). Encuentre una ecuación de la forma $y = k + A$ sen Bx o $y = k + A \cos Bx$ que tenga la misma gráfica que la ecuación dada. (Estos problemas sugieren la existencia de identidades adicionales además de las identidades básicas analizadas en la sección 5-2).

29. $y = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

30. $y = \text{sen}\, x \cos x$

31. $y = 2\,\text{sen}^2 x$

32. $y = 2\cos^2 x$

Exprese la amplitud A, el periodo P y el cambio de la fase de cada función en los problemas del 33 al 42, y grafique la función sobre el intervalo indicado.

33. $y = \text{sen}\,(x + \pi),\ -\pi \leq x \leq 3\pi$

34. $y = \cos\,(x - \pi),\ -\pi \leq x \leq 3\pi$

35. $y = \frac{1}{2}\cos\,(x - \pi/4),\ -\pi \leq x \leq 3\pi$

36. $y = 2\,\text{sen}\,(x + \pi/4),\ -2\pi \leq x \leq 2\pi$

37. $y = \text{sen}\,[\pi(x - 1)],\ -2 \leq x \leq 3$

38. $y = \cos\,[2\pi(x - \frac{1}{2})],\ -1 \leq x \leq 2$

39. $y = 3\cos\,(\pi x + \pi/2),\ -2 \leq x \leq 2$

40. $y = 2\,\text{sen}\,(\pi x - \pi/4),\ -1 \leq x \leq 3$

41. $y = -4\cos\,(2x - \pi),\ -\pi \leq x \leq 3\pi$

42. $y = -2\cos\,(4x + \pi),\ -\pi \leq x \leq \pi$

En los problemas del 43 al 46, grafique cada función sobre el intervalo indicado.

43. $y = -1 + \text{sen}\,(x + \pi),\ -\pi \leq x \leq 3\pi$

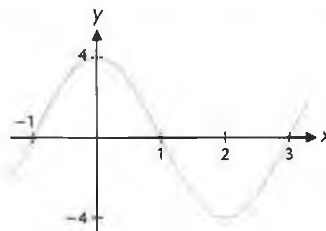
44. $y = 1 + \cos\,(x - \pi),\ -\pi \leq x \leq 3\pi$

45. $y = 2 - 4\cos\,(2x - \pi),\ -\pi \leq x \leq 3\pi$

46. $y = -1 - 2\cos\,(4x + \pi),\ -\pi \leq x \leq \pi$

C

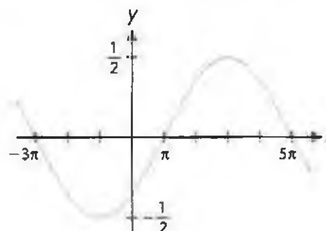
Los problemas 47 y 48 se refieren a la gráfica siguiente:



47. Si la gráfica es la de una ecuación de la forma $y = A$ sen $(Bx + C)$, $0 < -C/B < 2$, encuentre la ecuación.

48. Si la gráfica es la de una ecuación de la forma $y = A$ sen $(Bx + C)$, $-2 < -C/B < 0$, encuentre la ecuación.

Los problemas 49 y 50 se refieren a la siguiente gráfica:



49. Si la gráfica es la de una ecuación de la forma $y = A \cos (Bx + C)$, $0 < -C/B < 4\pi$, encuentre la ecuación.

50. Si la gráfica es la de una ecuación de la forma $y = A \cos (Bx + C)$, $-2\pi < -C/B < 0$, encuentre la ecuación.

Los problemas del 51 al 66 requieren el uso de un dispositivo de graficación.

En los problemas del 51 al 54, exprese la amplitud, el periodo y el corrimiento de fase de cada función y trace una gráfica de la función con la ayuda de un dispositivo de graficación.

51. $y = 3.5\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{2}(t + 0.5)\right],\ 0 \leq t \leq 10$

52. $y = 5.4\,\text{sen}\left[\frac{\pi}{2.5}(t - 1)\right],\ 0 \leq t \leq 6$

53. $y = 50\cos\,[2\pi(t - 0.25)],\ 0 \leq t \leq 2$

54. $y = 25\cos\,[5\pi(t - 0.1)],\ 0 \leq t \leq 2$

En los problemas del 55 al 60, grafique cada ecuación con un dispositivo de graficación. (Escoja el tamaño de cada ventana de visión para que por lo menos dos periodos sean visibles.)

Encuentre una ecuación de la forma $y = A$ sen $(Bx + C)$ cuya gráfica sea igual a la de la ecuación dada. Encuentre exactamente a A, B y C hasta con tres cifras decimales. Use la intersección con el eje x más cercana al origen así como el corrimiento de fase.

55. $y = \sqrt{2}\,\text{sen}\,x + \sqrt{2}\cos x$

56. $y = \sqrt{2}\,\text{sen}\,x - \sqrt{2}\cos x$

57. $y = \sqrt{3}\,\text{sen}\,x - \cos x$

58. $y = \text{sen}\,x + \sqrt{3}\cos x$

59. $y = 4.8\,\text{sen}\,2x - 1.4\cos 2x$

60. $y = 1.4\,\text{sen}\,2x + 4.8\cos 2x$

Los problemas del 61 al 66 ilustran las combinaciones de funciones que aparecen en las aplicaciones armónicas del análisis. Grafique los incisos A, B y C de cada problema en la misma ventana de visión. En los problemas del 61 al 64, ¿qué le pasa a la amplitud de la función en el inciso C? Dé un ejemplo de un fenómeno físico que se pueda modelar por una función semejante.

61. $0 \le x \le 16$

(A) $y = \dfrac{1}{x}$

(B) $y = -\dfrac{1}{x}$

(C) $y = \dfrac{1}{x}\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}x$

62. $0 \le x \le 10$

(A) $y = \dfrac{2}{x}$

(B) $y = -\dfrac{2}{x}$

(C) $y = \dfrac{2}{x}\cos \pi x$

63. $0 \le x \le 10$

(A) $y = x$

(B) $y = -x$

(C) $y = x\,\text{sen}\,\dfrac{\pi}{2}x$

64. $0 \le x \le 10$

(A) $y = \dfrac{x}{2}$

(B) $y = -\dfrac{x}{2}$

(C) $y = \dfrac{x}{2}\cos \pi x$

65. $0 \le x \le 2\pi$

(A) $y = \text{sen}\,x$

(B) $y = \text{sen}\,x + \dfrac{\text{sen}\,3x}{3}$

(C) $y = \text{sen}\,x + \dfrac{\text{sen}\,3x}{3} + \dfrac{\text{sen}\,5x}{5}$

66. $0 \le x \le 4$

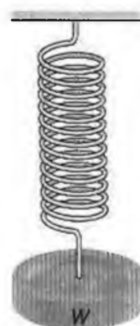
(A) $y = \text{sen}\,\pi x$

(B) $y = \text{sen}\,\pi x + \dfrac{\text{sen}\,2\pi x}{2}$

(C) $y = \text{sen}\,\pi x + \dfrac{\text{sen}\,2\pi x}{2} + \dfrac{\text{sen}\,3\pi x}{3}$

APLICACIONES

67. El sistema masa resorte. Un peso de 6 libras cuelga del final de un resorte que se estira $\frac{1}{3}$ de pie debajo de la posición del equilibrio y entonces se libera (véase figura). Si la resistencia del aire y la fricción se desprecian, la distancia x que el peso se desplaza con respecto de su posición de equilibrio en un tiempo t (en segundos) está dada por



$$x = \tfrac{1}{3}\cos 8t$$

Exprese el periodo P y la amplitud A de esta función, y grafíquela para $0 \le t \le \pi$.

68. Circuitos eléctricos. Un generador de corriente alterna genera una corriente dada por

$$I = 30\,\text{sen}\,120t$$

donde t es el tiempo en segundos. ¿Cuál es la amplitud A y el periodo P de esta función? ¿Cuál es la frecuencia de la corriente; es decir, ¿cuántos ciclos (periodos) se completarán en un segundo?

69. El sistema masa resorte. Suponga que el movimiento del peso en el problema 67 tiene una amplitud de 8 pulgadas y un periodo de 0.5 segundos, y que su posición cuando $t = 0$ es de 8 pulgadas debajo de su posición de reposo (el desplazamiento arriba de la posición de reposo es positivo y debajo es negativo). Encuentre una ecuación de la forma $y = A\cos Bt$ que describe al movimiento en cualquier tiempo $t \ge 0$. (Desprecie cualquier fuerza amortiguadora tales como, la fricción y la resistencia del aire.)

70. Circuitos eléctricos. Si el voltaje E en un circuito eléctrico tiene una amplitud de 110 voltios y un periodo de $\frac{1}{60}$ segundos, y si $E = 110$ volts cuando $t = 0$ segundos, encuentre una ecuación de la forma $E = A\cos Bt$ que da al voltaje en cualquier tiempo $t \ge 0$.

71. **Contaminación.** La cantidad de bióxido de azufre, obtenido de la combustión de combustibles liberados hacia la atmósfera de una ciudad varía estacionariamente. Suponga que el número de toneladas del contaminante liberado en la atmósfera durante cualquier semana después del primero de enero para cierta ciudad está dado por

$$A(n) = 1.5 + \cos\frac{n\pi}{26} \qquad 0 \le n \le 104$$

Grafique la función en el intervalo indicado y describa lo que muestra la gráfica.

72. **Medicina.** Un adulto normal sentado aspira y exhala cerca de 0.82 litros de aire cada 4.00 segundos. El volumen de aire en los pulmones t segundos después de exhalar es aproximadamente

$$V(t) = 0.45 - 0.37\cos\frac{\pi t}{2} \qquad 0 \le t \le 8$$

Grafique la función en el intervalo indicado y describa lo que muestra la gráfica.

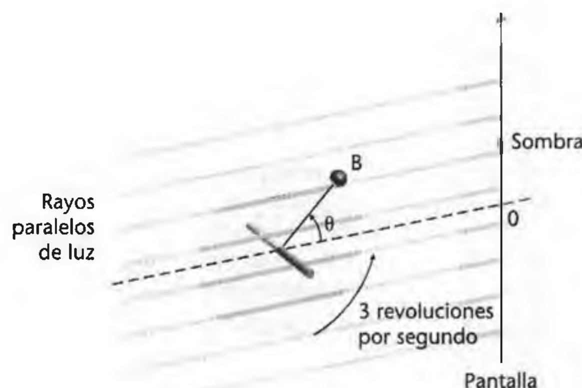
73. **Circuito eléctrico.** La corriente en un circuito eléctrico está dada por $I = 15\cos(120\pi t + \pi/2)$, $0 \le t \le \frac{2}{60}$ donde I está medida en amperes. Exprese la amplitud A, el periodo P y el corrimiento de fase. Grafique la ecuación.

74. **Circuito eléctrico.** La corriente en un circuito eléctrico está dada por $I = 30\cos(120\pi t - \pi)$, $0 \le t \le \frac{3}{60}$ donde I está medida en amperes. Exprese la amplitud A, el periodo P y el corrimiento de fase. Grafique la ecuación.

75. **Física: ingeniería.** El disco de plástico delgado mostrado en la figura gira a 3 revoluciones por segundo, comienza en $\theta = 0$ (así que al final de t segundos, $\theta = 6\pi t$, ¿por qué?). Si el disco tiene un radio de 3, muestre que la posición de la sombra en la escala y de la pequeña pelota de acero B está dada por

$$y = 3\,\text{sen}\,6\pi t$$

Grafique esta ecuación para $0 \le t \le 1$.



76. **Física: ingeniería.** Si en el problema 75 el disco empezó a girar en $\theta = \pi/2$, muestre que la posición de la sombra en un tiempo t (en segundos) está dada por

$$y = 3\,\text{sen}\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Grafique esta ecuación para $0 \le t \le 1$.


77. **Modelado de los tiempos de la puesta del Sol.** Los tiempos de la puesta del Sol para el quinto día de cada mes en un periodo de un año fueron tomados de un folleto de marea de la Bahía de San Francisco en la forma de la tabla 1. El tiempo de luz del día se ignoró, y los tiempos para un reloj de 24 horas comenzando en la medianoche.

(A) Usando un mes como la unidad básica de tiempo, introduzca los datos para un periodo de 2 años en su dispositivo de graficación y produzca una gráfica de dispersión en la ventana de visión. Antes de introducir los datos de la tabla 1 en su dispositivo de graficación, convierta el tiempo de puesta del Sol en horas y minutos, redondee las horas con dos cifras decimales. Elija a $15 \le y \le 20$ para la ventana de visión.

(B) Parece que una curva de la función seno de la forma

$$y = k + A\,\text{sen}\,(Bx + C)$$

modelará aproximadamente estos datos. Las constantes k, A y B se determinan fácilmente de la tabla 1 como se indica: $A = (\text{Máx}\,y - \text{Mín}\,y)/2$, $B = 2\pi/\text{Periodo}$, $k = \text{Mín}\,y + A$. Para calcular a C, estime visualmente con una cifra decimal el menor cambio de fase positivo de la gráfica del inciso A. Después de determinar A, B, k y C, escriba la ecuación resultante. (Su valor de C puede diferir un poco de la respuesta que se da en la parte de atrás del libro.)

(C) Trace los resultados de los incisos A y B en la misma ventana de visión. (Se puede obtener un mejor resultado ajustando levemente su valor de C.)

TABLA 1

x (mes)	1	2	3	4	5	6
y (puesta de sol)*	17:05	17:38	18:07	18:36	19:04	19:29
x (mes)	7	8	9	10	11	12
y (puesta de Sol)*	19:35	19:15	18:34	17:47	17:07	16:51

* Tiempo en un reloj de 24 horas, iniciando a la medianoche.


78. **Modelamiento de variación de temperatura.** El promedio de la temperatura mensual en un periodo de 30 años, en °F, para cada mes del año en Washington, D. C., está dado en la tabla 2 (*Almanaque mundial*).

(A) Usando un mes como la unidad básica de tiempo, introduzca los datos para un periodo de dos años en

su dispositivo de graficación y produzca una gráfica de dispersión en la ventana de visión. Elija a $0 \le y \le 80$ para la ventana de visión.

(B) Al aparecer una función seno de la forma

$$y = k + A \operatorname{sen}(Bx + C)$$

modelará aproximadamente estos datos. Las constantes k, A y B se determinan fácilmente de la tabla 2 como se indica: $A = (\text{Máx } y - \text{Mín } y)/2$, $B = 2\pi/\text{Periodo}$, $k = \text{Mín } y + A$. Para calcular C, estime visualmente con una cifra decimal el más pequeño cambio de fase positivo de la gráfica en el inciso (A). Después de determinar A, B, k y C, escriba la ecuación resultante.

(C) Dibuje las gráficas resultantes de los incisos (A) y (B) en la misma ventana de visión. (Se logra un mejor resultado ajustando levemente el valor de C.)

TABLA 2

x (mes)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y (temp.)	31	34	43	53	62	71	76	74	67	55	45	35

SECCIÓN 5-8 Graficación más general de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

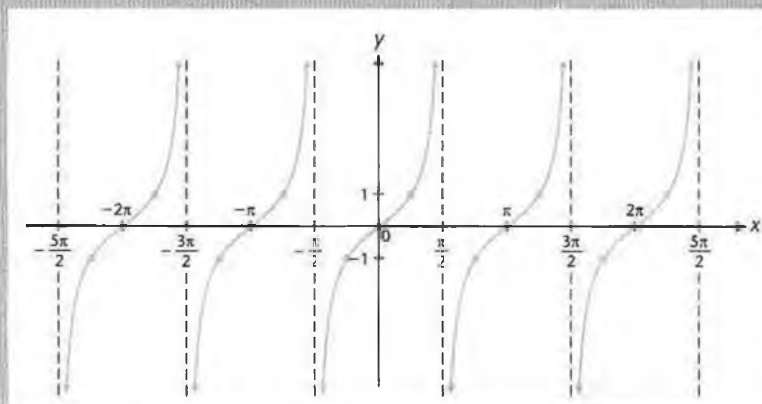
- Graficación de $y = A \tan(Bx + C)$ y $y = A \cot(Bx + C)$
- Graficación de $y = A \sec(Bx + C)$ y $y = A \csc(Bx + C)$

En esta sección se analiza la graficación de las formas más generales de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. En esencia, se sigue el mismo proceso que se desarrolló para graficar a $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ y $y = A \cos(Bx + C)$. El proceso no es difícil si se comprendieron claramente las gráficas básicas y las propiedades periódicas para cada una de estas funciones.

• Graficación de $y = A \tan(Bx + C)$ y $y = A \cot(Bx + C)$

Para una fácil referencia, se repiten las gráficas que se mostrarán para $y = \tan x$ y $y = \cot x$ en la sección 6-6 (véase figuras 1 y 2).

Gráfica de $y = \tan x$



Periodo: π

Dominio: Todos los números reales excepto $\pi/2 + k\pi$, k es un entero

Rango: Todos los números reales

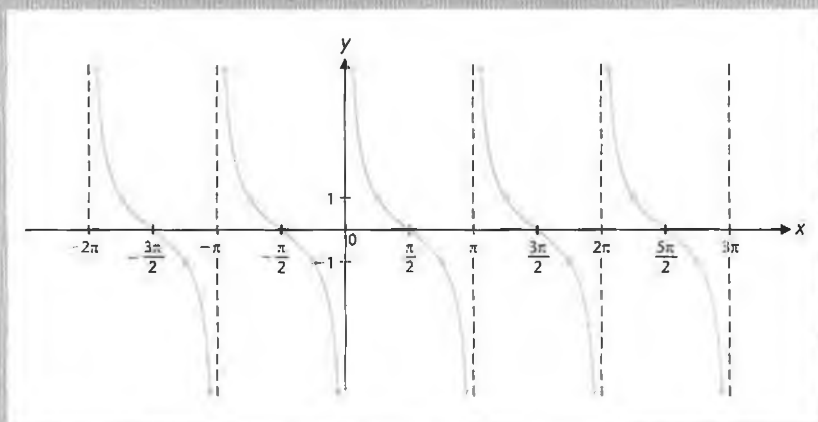
Simétrica con respecto al origen

Función creciente entre las asíntotas

Discontinua en $x = \pi/2 + k\pi$, k es un entero

FIGURA 1

Gráfica de $y = \cot x$



Periodo: π

Dominio: Todos los números reales excepto $k\pi$, k es un entero

Rango: Todos los números reales

Simétrica con respecto al origen

Función decreciente entre las asíntotas

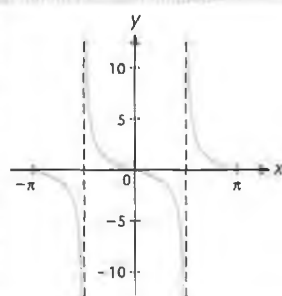
Discontinua en $x = k\pi$, k es un entero

FIGURA 2

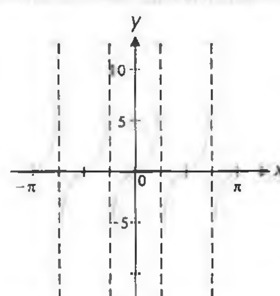
EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) Relacione cada función con su gráfica y analice cómo la gráfica se compara con la gráfica de $y = \tan x$ o de $y = \cot x$.

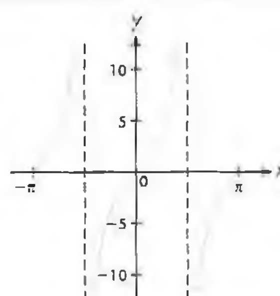
(1) $y = 4 \tan x$ (2) $y = \tan 2x$ (3) $y = \cot (x - \pi/2)$



(a)



(b)



(c)

(B) Use un dispositivo de graficación para explorar la naturaleza de los cambios en las gráficas de las siguientes funciones cuando se cambian los valores de A, B y C. Analice qué pasa en cada caso.

$y = A \tan x$ y $y = A \cot x$ para diferentes valores de A.

$y = A \tan Bx$ y $y = \cot Bx$ para diferentes valores de B.

$y = \tan (x + C)$ y $y = \cot (x + C)$ para diferentes valores de C.

Para trazar rápidamente las gráficas de las ecuaciones de la forma $y = A \tan (Bx + C)$, es necesario saber cómo son las constantes A, B y C y sus efectos en las gráficas básicas de $y = \tan x$ y $y = \cot x$, respectivamente.

Observe primero que **la amplitud no está definida para las funciones de la tangente y cotangente**. Las gráficas de ambas se desvían sin fin desde el eje x. El

efecto de A es hacer que la gráfica tenga más pendiente si $|A| > 1$ o hacer que tenga menos pendiente si $|A| < 1$. Si A es negativa, la gráfica se refleja con respecto al eje x.

Así como con las funciones seno y coseno, las constantes B y C, respectivamente, producen un cambio en el periodo y corrimiento de fase. Puesto que $A \tan x$ y $A \cot x$ tienen cada uno un periodo de π, se deduce que $A \tan (Bx + C)$ y $A \cot (Bx + C)$ cada una completa un ciclo cuando $Bx + C$ varía de

$$Bx + C = 0 \quad \text{a} \quad Bx + C = \pi$$

o (despejando x) cuando x varía de

Corrimiento de fase — Periodo

$$x = -\frac{C}{B} \quad \text{a} \quad x = -\frac{C}{B} + \frac{\pi}{B}$$

Así, $y = A \tan (Bx + C)$ y $y = A \cot (Bx + C)$ cada una tiene un **periodo de π/B y un corrimiento de fase de $-C/B$.** La gráfica básica se corre a la derecha si $-C/B$ es positivo y a la izquierda si $-C/B$ es negativo.

Como antes, no es necesario memorizar las fórmulas para el periodo y corrimiento de fase. Sólo se necesita recordar el proceso usado para obtener las fórmulas.

EJEMPLO 1

Graficación de una ecuación de la forma $y = A \cot (Bx + C)$

Encuentre el periodo y el corrimiento de fase para $y = 2 \cot (x/2)$, después trace su gráfica para $-2\pi < x < 2\pi$.

Solución Un ciclo de $y = 2 \cot (x/2)$ se completa cuando $x/2$ varía de 0 a π. Despeje x de cada ecuación:

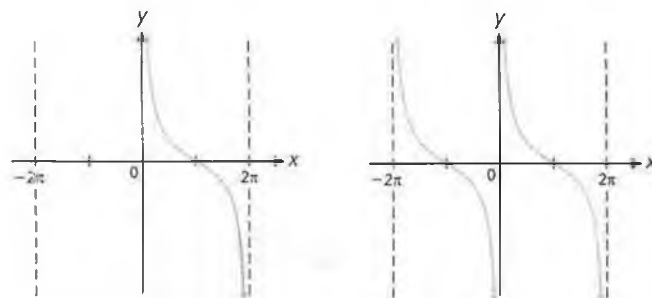
$$\frac{x}{2} = 0 \qquad \frac{x}{2} = \pi$$

$$x = 0 \qquad x = 0 + 2\pi$$

$$\text{Corrimiento de fase} = 0 \qquad \text{Periodo} = 2\pi$$

En general, si $C = 0$, no hay corrimiento de fase. La gráfica se traza por un periodo, $(0, 2\pi)$, luego se extiende en el intervalo $(-2\pi, 2\pi)$ como se muestra en la figura 3.

FIGURA 3



Problema seleccionado 1 Encuentre el periodo y el corrimiento de fase para $y = 3\tan(\pi x/2)$, después trace su gráfica para $-3 < x < 3$.

EJEMPLO 2

Graficación de una ecuación de la forma $y = A \cot(Bx + C)$

Encuentre el periodo y el corrimiento de fase para $y = \cot(2x + \pi/2)$, después trace la gráfica para $-\pi/2 < x < \pi$.

Solución *Paso 1.* Encuentre el periodo y el corrimiento de fase resolviendo $Bx + C = 0$ y $Bx + C = \pi$ para x:

$$2x + \frac{\pi}{2} = 0 \qquad 2x + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$2x = -\frac{\pi}{2} \qquad 2x = -\frac{\pi}{2} + \pi$$

$$x = -\frac{\pi}{4} \qquad x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Corrimiento de fase} = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{Periodo} = \frac{\pi}{2}$$

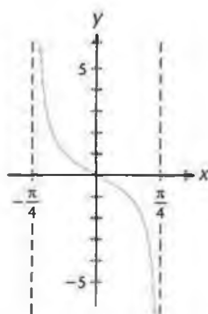
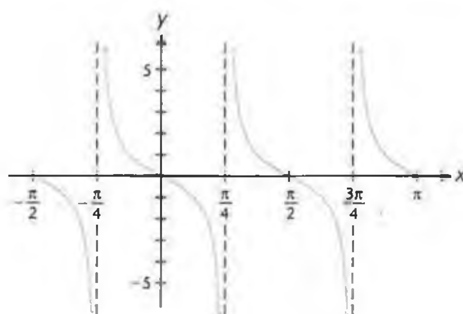


FIGURA 4

Paso 2. Trace un periodo de la gráfica que comienza en $x = -\pi/4$ (el corrimiento de fase) y termina en $x = -\pi/4 + \pi/2$ (el corrimiento de fase más un periodo) (figura 4).

Paso 3. Extienda la gráfica sobre el intervalo $(-\pi/2, \pi)$ (figura 5).

FIGURA 5

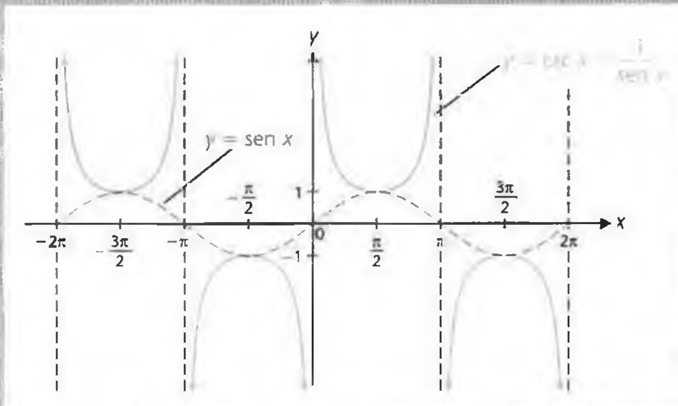


Problema seleccionado 2 Encuentre el periodo y el corrimiento de fase para $y = \tan(\pi x/2 + \pi/4)$, después trace la gráfica para $-3 \leq x \leq 3$.

• Graficación de $y = A \sec(Bx + C)$ y $y = A \csc(Bx + C)$

Para una referencia conveniente, se repiten las gráficas que se mostraron para $y = \csc x$ y $y = \sec x$ en la sección 5-6 (véase figuras 6 y 7).

Gráfica de $y = \csc x$



Periodo: 2π

Dominio: Todos los números reales excepto $k\pi$, k es un entero

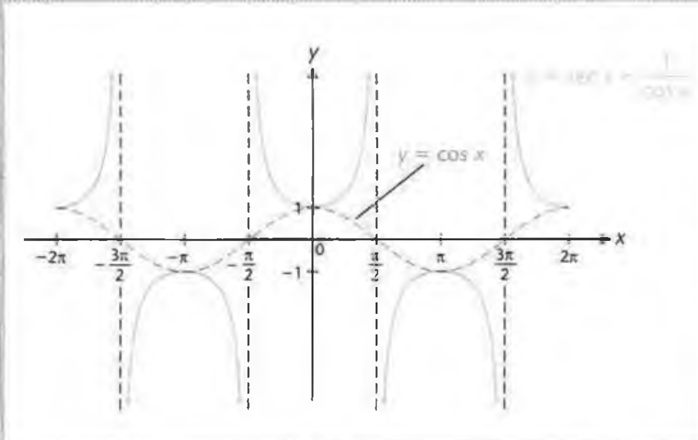
Rango: Todos los números reales y tales que $y \leq -1$ o $y \geq 1$

Simétrica con respecto al origen

Discontinua en $x = k\pi$, k es un entero

FIGURA 6

Gráfica de $y = \sec x$



Periodo: 2π

Dominio: Todos los números reales excepto $\pi/2 + k\pi$, k es un entero

Rango: Todos los números reales y tales que $y \leq -1$ o $y \geq 1$

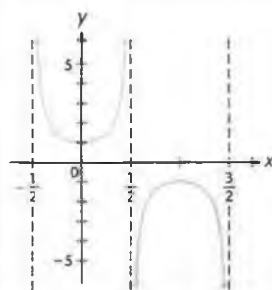
Simétrica con respecto al eje y

Discontinua en $x = \pi/2 + k\pi$, k es un entero

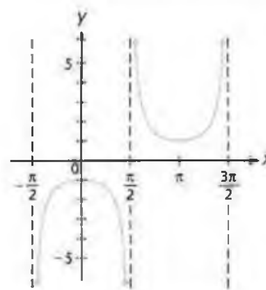
FIGURA 7

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 (A) Relacione cada función con su gráfica y analice cómo se compara la gráfica con la gráfica de $y = \csc x$ o la de $y = \sec x$.

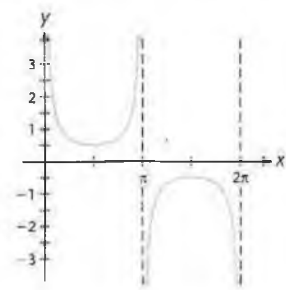
(1) $y = \frac{1}{2}\csc x$ (2) $y = \sec \pi x$ (3) $y = \csc(x - \pi/2)$



(a)



(b)



(c)

(B) Use un dispositivo de graficación para explorar la naturaleza de los cambios en las gráficas de las siguientes funciones cuando se cambian los valores de A, B y C. Analice qué pasa en cada caso.

$y = A \sec x$ y $y = A \csc x$ para diferentes valores de A

$y = \sec Bx$ y $y = \csc Bx$ para diferentes valores de B

$y = \sec (x + C)$ y $y = \csc (x + C)$ para diferentes valores de C

Como con las funciones tangente y cotangente, la **amplitud no está definida para las funciones secante ni cosecante**. Puesto que ambas funciones tienen un periodo de 2π, encontramos el periodo y el corrimiento de fase para cada una resolviendo $Bx + C = 0$ y $Bx + C = 2\pi$.

Para graficar cualquier $y = A \sec (Bx + C)$ o $y = A \csc (Bx + C)$, usted probablemente encontrará más fácil graficar $y = (1/A) \cos (Bx + C)$ o $y = (1/A) \operatorname{sen} (Bx + C)$ con una curva discontinua, y después tomar sus recíprocas. Un ejemplo le podría ayudar a aclarar el proceso.

EJEMPLO 3

Graficación de una ecuación de la forma $y = A \sec (Bx + A)$

Encuentre el periodo y el corrimiento de fase para $y = \frac{1}{2} \sec (2x + \pi)$, después trace la gráfica para $-3\pi/4 < x < 3\pi/4$.

Solución

Paso 1. Encuentre el periodo y el corrimiento de fase resolviendo $Bx + C = 0$ y $Bx + C = 2\pi$ para x:

$$\begin{aligned} 2x + \pi &= 0 & \qquad 2x + \pi &= 2\pi \\ 2x &= -\pi & 2x &= -\pi + 2\pi \\ x &= -\frac{\pi}{2} & x &= -\frac{\pi}{2} + \pi \end{aligned}$$

$$\text{Corrimiento de fase} = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{Periodo} = \pi$$

Paso 2. Puesto que

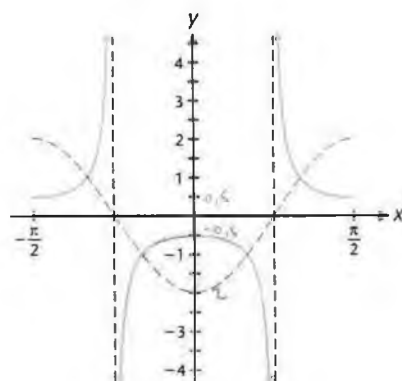
$$\frac{1}{2} \sec (2x + \pi) = \frac{1}{2 \cos (2x + \pi)}$$

se grafica

$$y = 2 \cos (2x + \pi)$$

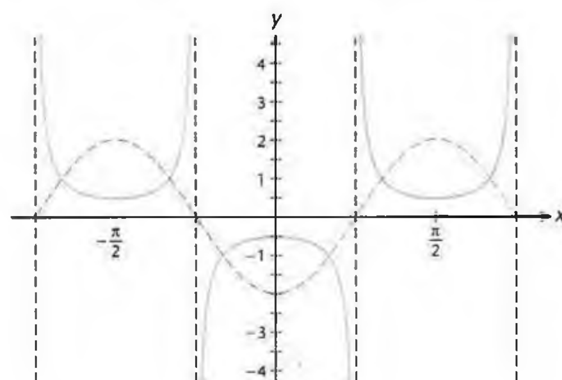
para un ciclo de $-\pi/2$ a $-\pi/2 + \pi$, y después se toman sus recíprocas. Note que también se colocaron las asíntotas verticales al encontrar las intersecciones con el eje x de la gráfica del coseno como guía para trazar de la función secante (figura 8).

FIGURA 8



Paso 3. Extienda la gráfica en el intervalo requerido $(-3\pi/4, 3\pi/4)$ (figura 9).

FIGURA 9

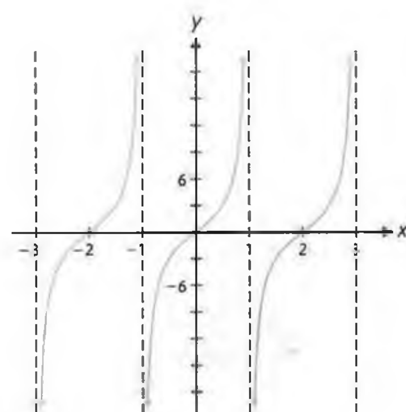


Problema seleccionado 3

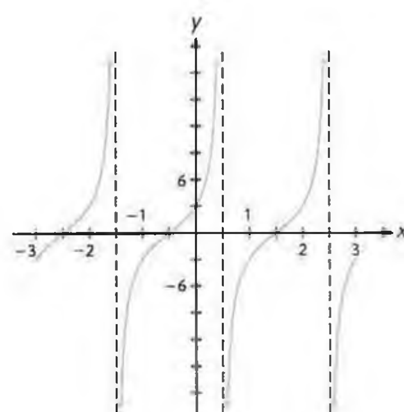
Encuentre el periodo y el corrimiento de fase para $y = 2 \csc(\pi x/2 - \pi)$, después trace la gráfica para $-2 \leq x \leq 10$.

Respuestas a los problemas seleccionados

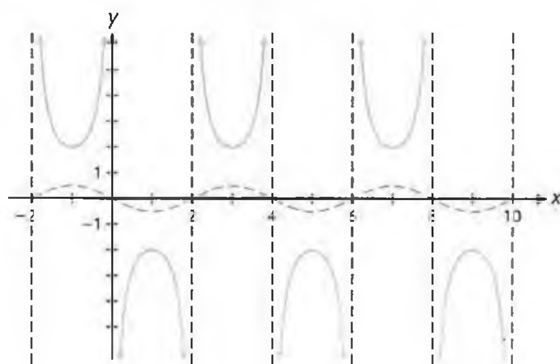
1. Periodo 2, corrimiento de fase 0



2. Periodo 2, corrimiento de fase $-\frac{1}{2}$



3. Periodo 4 corrimiento de fase 2



EJERCICIO 5-8

A

En los problemas del 1 al 4, trace una gráfica de cada función básica sin ver el texto o usando un dispositivo de graficación.

1. $y = \cot x, 0 < x < 2\pi$ **2.** $y = \tan x, 0 \le x \le 2\pi$

3. $y = \sec x, -\pi \le x \le \pi$ **4.** $y = \csc x, -\pi < x < \pi$

B

En los problemas del 5 al 14, encuentre el periodo de cada función y grafique la función para el intervalo indicado.

5. $y = 2 \cot 4x, 0 < x < \pi/2$

6. $y = 3 \tan 2x, -\pi \le x \le \pi$

7. $y = -\frac{1}{4} \tan 8\pi x, 0 < x < \frac{1}{2}$

8. $y = -\frac{1}{2} \cot 2\pi x, 0 < x < 1$

9. $y = \csc (x/2), -3\pi \le x \le 3\pi$

10. $y = \sec \pi x, -1.5 \le x \le 3.5$

11. $y = \frac{1}{2} \cot (x/2), 0 < x < 4\pi$

12. $y = \frac{1}{2} \tan (x/2), -\pi < x < 3\pi$

13. $y = 2 \sec \pi x, -1 \le x \le 3$

14. $y = 2 \csc (x/2), 0 < x < 8\pi$

En los problemas del 15 al 20, encuentre el periodo y el corrimiento de fase, después grafique cada función.

15. $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{2}\right), -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

16. $y = \tan \left(x - \frac{\pi}{2}\right), -\pi < x < \pi$

17. $y = \tan (2x + \pi), -\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

18. $y = \cot (2x - \pi), -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

19. $y = \sec \left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right), -1 < x < 1$

20. $y = \csc \left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right), -1 < x < 1$

En los problemas del 21 al 24, grafique por lo menos dos ciclos de la ecuación dada en un dispositivo de graficación, después encuentre una ecuación de la forma $y = A \tan Bx$, $y = A \cot Bx$, $y = A \sec Bx$ o $y = A \csc Bx$ que tenga la misma gráfica. (Estos problemas sugieren otras identidades además de las analizadas en la sección 5-2. Las identidades adicionales se analizan con todo detalle en el capítulo 6.)

21. $y = \cot x - \tan x$ **22.** $y = \cot x + \tan x$

23. $y = \csc x + \cot x$ **24.** $y = \csc x - \cot x$

C

En los problemas del 25 al 30, encuentre el periodo y el corrimiento de fase, después grafique cada función.

25. $y = 2 \tan \left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right), -4\pi \le x \le 4\pi$

26. $y = 4 \tan (2x + \pi), -\pi \le x \le \pi$

27. $y = -2 \tan \left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right), -1 < x < 7$

28. $y = -3 \cot (\pi x - \pi), -2 < x < 2$

29. $y = 3 \csc \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}\right), -1 < x < 3$

30. $y = 2 \sec\left(\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right), -1 < x < 3$

En los problemas del 31 al 34, grafique por lo menos dos ciclos de la ecuación dada con un dispositivo de graficación, después encuentre una ecuación de la forma $y = A \tan Bx$, $y = A \cot Bx$, $y = A \sec Bx$, o $y = A \csc Bx$ que tenga la misma gráfica. (Estos problemas sugieren identidades adicionales además de las analizadas en la sección 5-2. Las identidades adicionales se analizan con todo detalle en el capítulo 6.)

31. $y = \operatorname{sen} 3x + \cos 3x \cot 3x$

32. $y = \cos 2x + \operatorname{sen} 2x \tan 2x$

33. $y = \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{1 + \cos 4x}$

34. $y = \dfrac{\operatorname{sen} 6x}{1 - \cos 6x}$

APLICACIONES

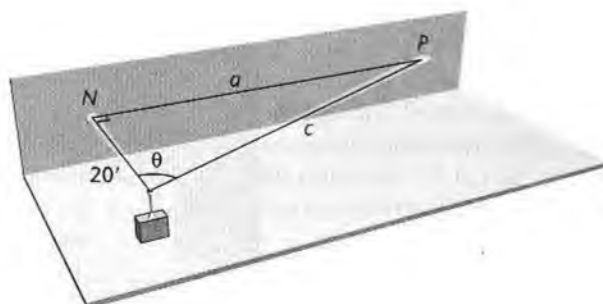


*35. **Movimiento.** La luz de un faro a 20 pies de una pared gira en el sentido de las manecillas del reloj con una rapidez angular de 1/4 rps (véase figura); así, $\theta = \pi t/2$.

(A) Comience a contar el tiempo en segundos cuando la luz está en N y escriba una ecuación para la longitud c del rayo en términos de t.

(B) Grafique la ecuación mostrada en el inciso (A) para el intervalo de tiempo [0, 1). Si la gráfica tiene una asíntota, señálela.

(C) Describa qué le pasa a la longitud c del rayo cuando t varía de 0 a 1.



*36. **Movimiento.** Refiérase al problema 35.

(A) Escriba una ecuación para la distancia a cuando la luz viaja por la pared en términos del tiempo t.

(B) Grafique la ecuación encontrada en el inciso (A) para el intervalo de tiempo [0, 1). Si la gráfica tiene una asíntota, señálela.

(C) Describa qué le sucede a la distancia a sobre la pared cuando la luz t viaja desde 0 a 1.

SECCIÓN 5-9 Funciones trigonométricas inversas

- Función inversa del seno
- Función inversa del coseno
- Función inversa de la tangente
- Resumen
- Las funciones secante, cotangente y la inversa de la cosecante (opcional)

Una breve revisión del concepto general de las funciones inversas analizadas en la sección 2-6 será útil antes de comenzar esta sección. En el siguiente cuadro se exponen nuevamente algunos puntos importantes de las funciones inversas de esta sección.

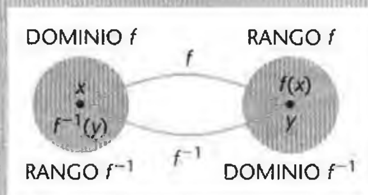
Puntos que definen las funciones inversas

Para f una función uno a uno y para su inversa f^{-1}:

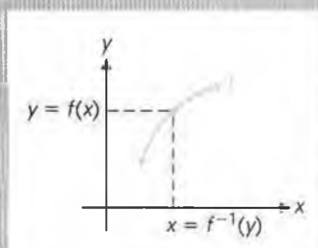
1. Si (a, b) es un elemento de f, entonces (b, a) es un elemento de f^{-1} y viceversa.
2. Rango de f = Dominio de f^{-1}

   Dominio de f = Rango de f^{-1}

3.



4. Si $x = f^{-1}(y)$, entonces $y = f(x)$ para y en el dominio de f^{-1} y x en el dominio de f y viceversa.



5. $f[f^{-1}(y)] = y$ para y en el dominio de f^{-1}
$f^{-1}[f(x)] = x$ para x en el dominio de f

Todas las funciones trigonométricas son periódicas; de aquí que, cada valor del rango se puede asociar con una infinidad de valores del dominio (figura 1). Como resultado, ninguna función trigonométrica es uno a uno. Sin restricciones, ninguna función trigonométrica tiene una función inversa. Para resolver este problema, se restringe el dominio de cada función para que sea uno a uno sobre el dominio restringido. Así, para este dominio restringido, está garantizada una función inversa.

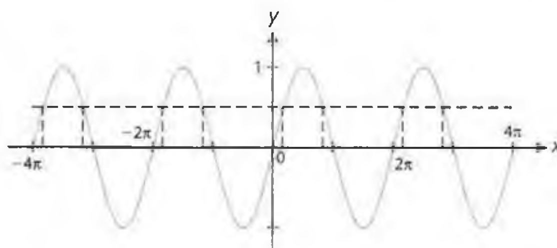


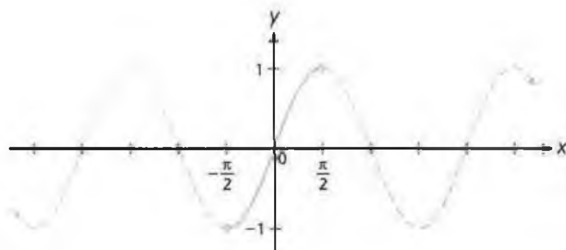
FIGURA 1 $y = \text{sen } x$ no es uno a uno en $(-\infty, \infty)$.

Las funciones trigonométricas inversas representan otro grupo de las funciones básicas que se añaden a nuestra biblioteca de funciones elementales. Estas funciones se usan en muchas aplicaciones y desarrollos matemáticos, y serán particularmente útiles cuando se resuelvan las ecuaciones trigonométricas de la sección 6-5.

Función inversa del seno

¿Cómo se puede restringir el dominio de la función seno para que sea uno a uno? Hay infinidad de maneras de hacer esto. Una manera natural y generalmente aceptada se muestra en la figura 2.

FIGURA 2 $y = \text{sen}\, x$ es uno a uno en $[-\pi/2, \pi/2]$.



Si el dominio de la función seno está restringida al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, se ve que la función restringida pasa la prueba de la línea horizontal (sección 2-8) y, por consiguiente, es uno a uno. Observe que cada valor del rango de -1 a 1 se supone exacto una vez que x se mueve de $-\pi/2$ a $\pi/2$. Se usa esta función restringida del seno para definir la función inversa del seno.

DEFINICIÓN 1 **Función inversa del seno**

La **función inversa del seno,** se denota por **sen**$^{-1}$ o **arcoseno**, se define como la inversa de la función restringida del seno $y = \text{sen}\, x$, $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. En consecuencia,

$$y = \text{sen}^{-1} x \qquad \text{y} \qquad y = \text{arcsen}\, x$$

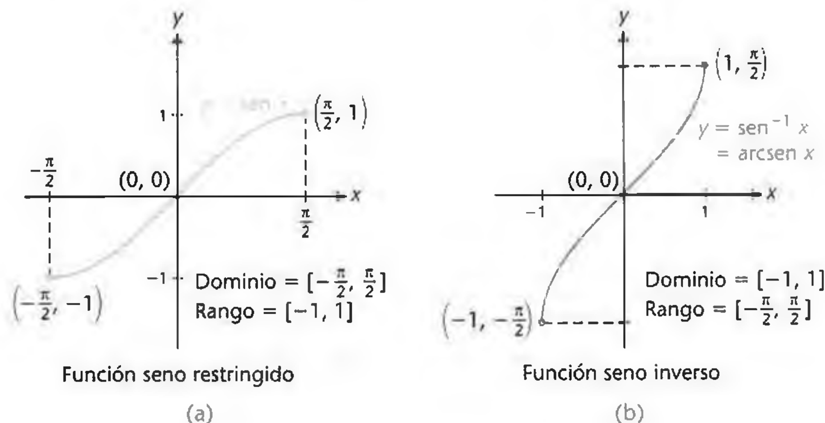
son equivalentes a

$$\text{sen}\, y = x \qquad \text{donde } -\pi/2 \leq y \leq \pi/2,\ -1 \leq x \leq 1$$

En otras palabras, el inverso del seno de x, o del arcoseno de x, es el número o el ángulo y, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, cuyo seno es x.

Para graficar $y = \text{sen}^{-1} x$, tome cada punto en la gráfica de la función restringida del seno e invierta el orden de las coordenadas. Por ejemplo, puesto que $(-\pi/2, -1)$, $(0, 0)$ y $(\pi/2, 1)$ están en la gráfica de la función restringida del seno (figura 3) entonces $(-1, -\pi/2)$, $(0, 0)$ y $(1, \pi/2)$ están en la gráfica de la función inversa del seno, como se muestra en la figura 3. Usando estos tres puntos se obtiene una manera rápida de trazar la gráfica de la función inversa del seno. Una gráfica más exacta se puede obtener usando una calculadora.

FIGURA 3 Función inversa del seno.



Se expresan las importantes identidades del seno, seno inverso, que son una consecuencia de las propiedades generales de las funciones inversas dadas en el cuadro del principio de esta sección.

Identidades del seno y del seno inverso

$$\text{sen}\,(\text{sen}^{-1}x) = x \qquad -1 \le x \le 1$$
$$\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,x) = x \qquad -\pi/2 \le x \le \pi/2$$

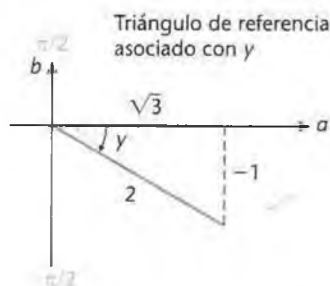
$$\text{sen}\,(\text{sen}^{-1}\,0.7) = 0.7$$
$$\text{sen}^{-1}\,[\text{sen}\,(-1.2)] = -1.2$$

EJEMPLO 1 **Valores exactos**

Encuentre los valores exactos sin usar una calculadora:

(A) $\text{arcsen}\,(-\frac{1}{2})$ (B) $\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,1.2)$ (C) $\cos\,(\text{sen}^{-1}\frac{2}{3})$

Solución (A) $y = \text{arcsen}\,(-\frac{1}{2})$ es equivalente a



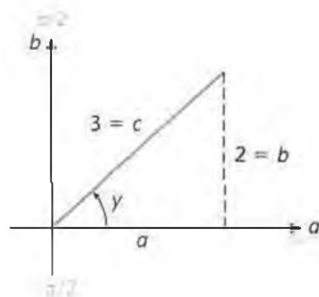
$$\text{sen}\,y = -\tfrac{1}{2} \qquad -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

$$y = -\frac{\pi}{6} = \text{arcoseno}\,(-\tfrac{1}{2})$$

[*Nota:* $y \neq 11\pi/6$, aunque cuando $\text{sen}\,(11\pi/6) = -\frac{1}{2}$. y debe estar entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, incluso.]

(B) $\text{sen}^{-1}\,(\text{sen}\,1.2) = 1.2$ Identidad del seno y del seno inverso, puesto que $-\pi/2 \le 1.2 \le \pi/2$

(C) Sea $y = \text{sen}^{-1}\frac{2}{3}$, después $\text{sen}\,y = \frac{2}{3}$, $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Dibuje el triángulo de referencia asociado con y. Luego el $\cos y = \cos\,(\text{sen}^{-1}\frac{2}{3}$ se puede determinar directamente del triángulo (después de encontrar el tercer lado) sin encontrar realmente a y.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = \sqrt{3^2 - 2^2} \qquad \text{Ya que } a > 0 \text{ en el cuadrante I}$$

$$= \sqrt{5}$$

Por consiguiente, $\cos(\text{sen}^{-1}\frac{2}{3}) = \cos y = \sqrt{5}/3$

Problema seleccionado 1 Encuentre los valores exactos sin usar calculadora:

(A) $\text{arcsen}(\sqrt{2}/2)$
(B) $\text{sen}[\text{sen}^{-1}(-0.4)]$
(C) $\tan[\text{sen}^{-1}(-1/\sqrt{5})]$

EJEMPLO 2 **Valores con calculadora**

Encuentre con cuatro dígitos significativos usando una calculadora:

(A) $\text{arcsen}(-0.3042)$
(B) $\text{sen}^{-1} 1.357$
(C) $\cot[\text{sen}^{-1}(-0.1087)]$

Solución Las teclas de la función que se usan para representar la inversa de las funciones trigonométricas varían en las diferentes calculadoras, así que debe leer el manual del usuario para la suya. Ponga su calculadora en el modo radián y siga su manual para la secuencia de las teclas.

(A) $\text{arcsen}(-0.3042) = -0.3091$
(B) $\text{sen}^{-1} 1.357 = \text{Error}$ 1.357 no está en el dominio de sen^{-1}
(C) $\cot[\text{sen}^{-1}(-0.1087)] = -9.145$

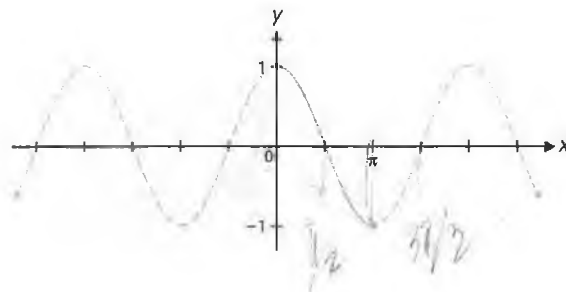
Problema seleccionado 2 Encuentre con cuatro dígitos significativos usando una calculadora:

(A) $\text{sen}^{-1} 0.2903$
(B) $\text{arcsen}(-2.305)$
(C) $\cot[\text{sen}^{-1}(-0.3446)]$

• Función inversa del coseno

Para restringir la función del coseno de tal manera que se convierta en uno a uno, se elige el intervalo $[0, \pi]$. En este intervalo la función restringida pasa la prueba de la línea horizontal, y cada valor del rango se supone exacto una vez que x se mueve de 0 a π (figura 4). Esta función restringida del coseno se usa para definir la *función inversa del coseno.*

FIGURA 4 $y = \cos x$ es uno a uno en $[0, \pi]$.



DEFINICIÓN 2 **Función inversa del coseno**

La **función inversa del coseno**, denotada por $\cos^{-1}$ o **arcocoseno**, se define como la inversa de la función restringida del coseno $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$. Por consiguiente,

$$y = \cos^{-1} x \qquad \text{y} \qquad y = \arccos x$$

son equivalentes a

$$\cos y = x \qquad \text{donde } 0 \leq y \leq \pi,\ -1 \leq x \leq 1$$

En otras palabras, el inverso del coseno de x, o del arcocoseno de x, es el número o el ángulo y, $0 \leq y \leq \pi$, cuyo coseno es x.

La figura 5 compara las gráficas de la función restringida del coseno y su inversa. Observe que $(0, 1)$, $(\pi/2, 0)$ y $(\pi, -1)$ no están en la gráfica restringida del coseno. Invirtiendo las coordenadas se obtienen tres puntos en la gráfica de la función inversa del coseno.

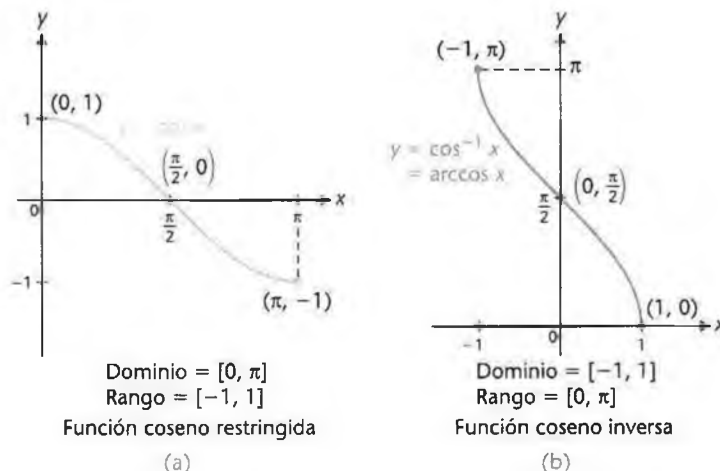


FIGURA 5 Función coseno inversa.

Se termina este análisis dando las identidades del coseno y del inverso del coseno:

Identidades del coseno y del inverso del coseno

$\cos(\cos^{-1} x) = x \qquad -1 \leq x \leq 1 \qquad f[f^{-1}(x)] = x$

$\cos^{-1}(\cos x) = x \qquad 0 \leq x \leq \pi \qquad f^{-1}[f(x)] = x$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Evalúe cada uno de los siguientes enunciados con una calculadora. ¿Cuál ilustra una identidad del coseno y del inverso del coseno y cuál no? Analice por qué.

(A) $\cos(\cos^{-1} 0.2)$ (C) $\cos^{-1}(\cos 2)$

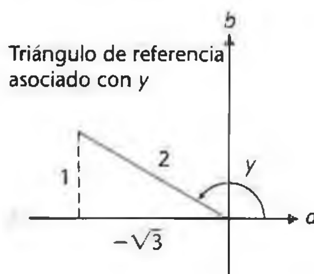
(B) $\cos[\cos^{-1}(-2)]$ (D) $\cos^{-1}[\cos(-3)]$

EJEMPLO 3 **Valores exactos**

Encuentre los valores exactos sin usar calculadora:

(A) $\arccos(-\sqrt{3}/2)$ (B) $\cos(\cos^{-1} 0.7)$ (C) $\text{sen}[\cos^{-1}(-\frac{1}{3})]$

Soluciones (A) $y = \arccos(-\sqrt{3}/2)$ es equivalente a



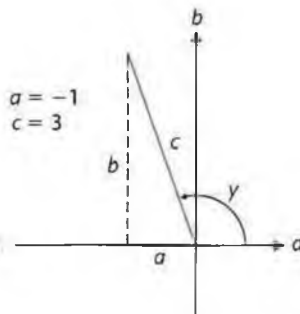
$$\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad 0 \le y \le \pi$$

$$y = \frac{5\pi}{6} = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

[*Nota:* $y \neq -5\pi/6$, aun cuando $\cos(-5\pi/6) = -\sqrt{3}/2$ y debe estar entre 0 y π, incluso.]

(B) $\cos(\cos^{-1} 0.7) = 0.7$ Identidad del coseno y del coseno inverso, puesto que $-1 \le 0.7 \le 1$

(C) Sea $y = \cos^{-1}(-\frac{1}{3})$; entonces $\cos y = -\frac{1}{3}$, $0 \le y \le \pi$. Dibuje un triángulo de referencia asociado con y. Entonces $\text{sen}\, y = \text{sen}[\cos^{-1}(-\frac{1}{3})]$ se puede determinar directamente del triángulo (después de encontrar el tercer lado) sin encontrar realmente y.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b = \sqrt{3^2 - (-1)^2} \qquad \text{Ya que } b > 0 \text{ en el cuadrante II}$$

$$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Así, $\text{sen}[\cos^{-1}(-\frac{1}{3})] = \text{sen}\, y = 2\sqrt{2}/3$.

Problema seleccionado 3 Encuentre los valores exactos sin usar calculadora:

(A) $\arccos(\sqrt{2}/2)$ (B) $\cos^{-1}(\cos 3.05)$ (C) $\cot[\cos^{-1}(-1/\sqrt{5})]$

EJEMPLO 4 **Valores con calculadora**

Encuentre con cuatro dígitos significativos usando una calculadora:

(A) $\arccos 0.4325$ (B) $\cos^{-1} 2.137$ (C) $\csc[\cos^{-1}(-0.0349)]$

Solución Ponga su calculadora en el modo radián.

(A) $\arccos 0.4325 = 1.124$

(B) $\cos^{-1} 2.137 = \text{Error}$ 2.137 no está en el dominio de $\cos^{-1}$

(C) $\csc[\cos^{-1}(-0.0349)] = 1.001$

Problema seleccionado 4 Encuentre con cuatro dígitos significativos usando una calculadora:

(A) $\cos^{-1} 0.6773$ (B) $\arccos(-1.003)$ (C) $\cot[\cos^{-1}(-0.5036)]$

Función inversa de la tangente

Para restringir la función tangente para que llegue a ser uno a uno, se elige al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. En este intervalo la función restringida pasa la prueba de la recta horizontal, y cada valor del rango se supone exacto una vez que x se mueve a través de este dominio restringido (figura 6). Esta función restringida de la tangente se usa para definir la *función inversa de la tangente.*

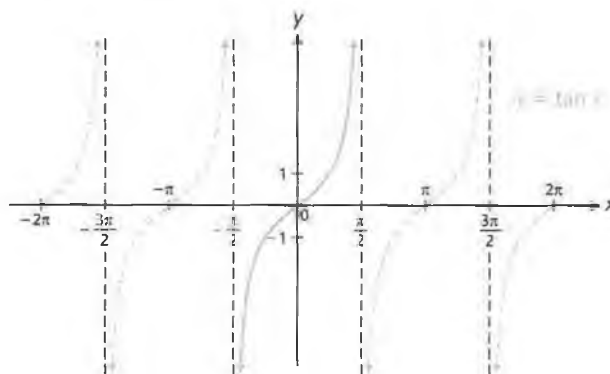


FIGURA 6 $y = \tan x$ es uno a uno en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$.

DEFINICIÓN 3 **Función inversa de la tangente**

La **función inversa de la tangente**, denotada por $\mathbf{tan^{-1}}$ o **arcotangente**, se define como la inversa de la función restringida de la tangente $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Así,

$$y = \tan^{-1} x \qquad \text{y} \qquad y = \arctan x$$

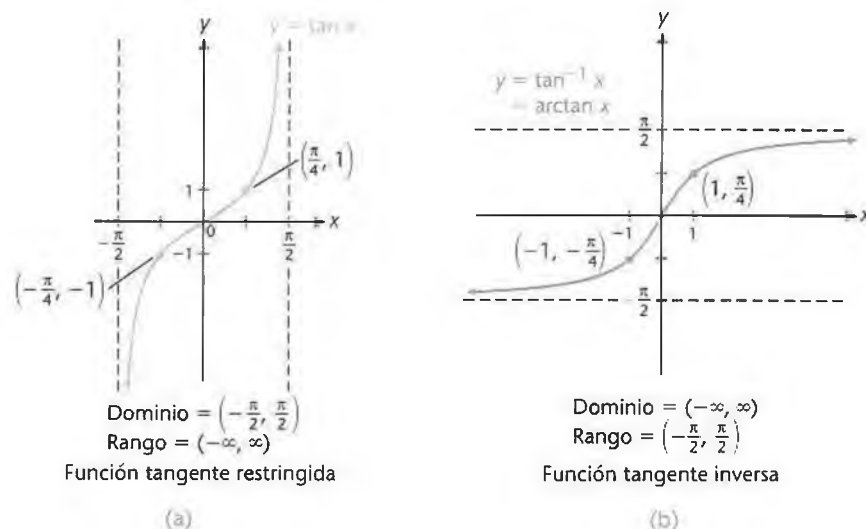
son equivalentes a

$$\tan y = x \qquad \text{donde } -\pi/2 < y < \pi/2 \text{ y } x \text{ es un número real}$$

En otras palabras, la inversa de la tangente de x, o el arcotangente de x, es el número o el ángulo y, $-\pi/2 < y < \pi/2$, cuya tangente es x.

En la figura 7 se comparan las gráficas de la función tangente restringida y su inversa. Observe que $(-\pi/4, 1)$, $(0, 0)$ y $(\pi/4, 1)$ están en la gráfica de la tangente restringida. Invirtiendo las coordenadas se obtienen tres puntos en la gráfica de la función inversa de la tangente. También observe que las asíntotas verticales pasan a ser asíntotas horizontales para la función inversa.

FIGURA 7 Función tangente inversa.



Ahora expresamos las identidades de la tangente y la inversa de la tangente.

Identidades de la tangente y su inversa

$\tan(\tan^{-1} x) = x$	$-\infty < x < \infty$	$f(f^{-1}(x)) = x$
$\tan^{-1}(\tan x) = x$	$-\pi/2 < x < \pi/2$	$f^{-1}(f(x)) = x$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Evalúe cada uno de los siguientes enunciados con calculadora. ¿Cuál ilustra la inversa de la tangente y la identidad de la tangente y cuál no? Analice por qué.

(A) $\tan(\tan^{-1} 30)$ (C) $\tan^{-1}(\tan 1.4)$

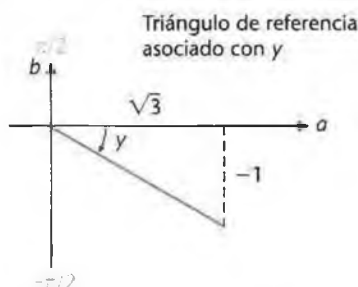
(B) $\tan[\tan^{-1}(-455)]$ (D) $\tan^{-1}[\tan(-3)]$

EJEMPLO 5 **Valores exactos**

Encuentre los valores exactos sin usar calculadora:

(A) $\tan^{-1}(-1/\sqrt{3})$ (B) $\tan^{-1}(\tan 0.63)$

Soluciones (A) $y = \tan^{-1}(-1/\sqrt{3})$ es equivalente a



$$\tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$y = -\frac{\pi}{6} = \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

[*Nota:* y no puede ser $11\pi/6$. y debe estar entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.]

(B) $\tan^{-1}(\tan 0.63) = 0.63$ Identidad de la tangente y de la inversa de la tangente, puesto que $-\pi/2 < 0.63 < \pi/2$

Problema seleccionado 5 Encuentre los valores exactos sin usar calculadora:

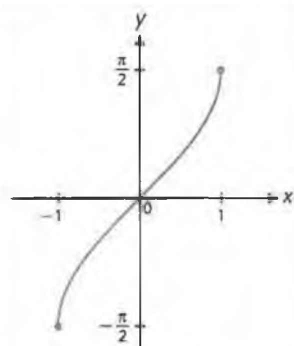
(A) $\arctan(-\sqrt{3})$ (B) $\tan(\tan^{-1} 43)$

• Resumen

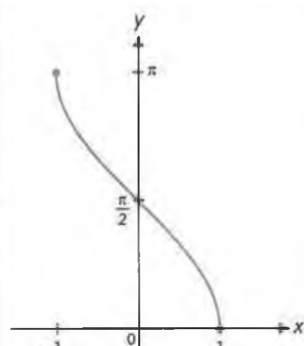
Se resumen las definiciones y las gráficas de las funciones trigonométricas inversas analizadas hasta aquí para una referencia conveniente.

Resumen de sen^{-1}, cos^{-1}, y tan^{-1}

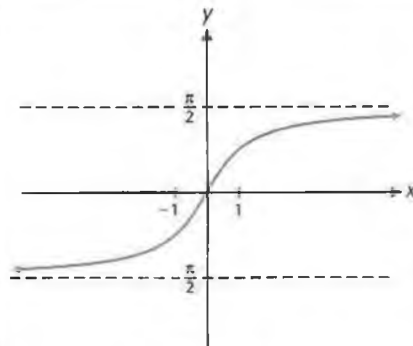
$y = \text{sen}^{-1} x$	es equivalente a	$x = \text{sen}\, y$	$-1 \le x \le 1, -\pi/2 \le y \le \pi/2$
$y = \cos^{-1} x$	es equivalente a	$x = \cos y$	$-1 \le x \le 1, 0 \le y \le \pi$
$y = \tan^{-1} x$	es equivalente a	$x = \tan y$	$-\infty < x < \infty, -\pi/2 < y < \pi/2$



$y = \text{sen}^{-1} x$
Dominio = $[-1, 1]$
Rango = $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$y = \cos^{-1} x$
Dominio = $[-1, 1]$
Rango = $[0, \pi]$



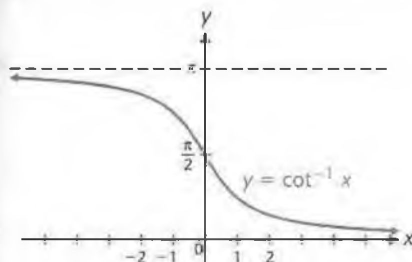
$y = \tan^{-1} x$
Dominio = $(-\infty, \infty)$
Rango = $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

• Las funciones secante, cotangente y la inversa de la cosecante (opcional)

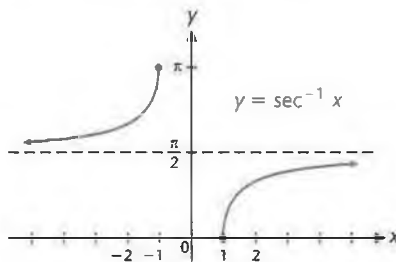
Para terminar, se incluyen las definiciones y las gráficas de las funciones inversa de la cotangente, de la secante y de la cosecante.

DEFINICIÓN 4 Funciones inversas de la cotangente, de la secante y de la cosecante

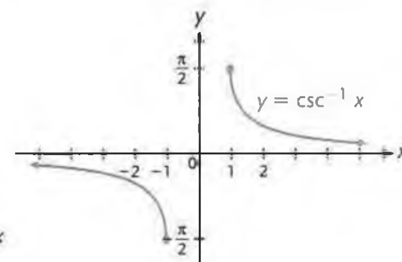
$y = \cot^{-1} x$	es equivalente a	$x = \cot y$	donde $0 < y < \pi$, $-\infty < x < \infty$
$y = \sec^{-1} x$	es equivalente a	$x = \sec y$	donde $0 \leq y \leq \pi, y \neq \pi/2$, $\|x\| \geq 1$
$y = \csc^{-1} x$	es equivalente a	$x = \csc y$	donde $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2, y \neq 0$, $\|x\| \geq 1$



Dominio: Todos los números reales
Rango: $0 < y < \pi$



Dominio: $x \leq -1$ o $x \geq 1$
Rango: $0 \leq y \leq \pi$, $y \neq \pi/2$



Dominio: $x \leq -1$ o $x \geq 1$
Rango: $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$, $y \neq 0$

[*Nota:* Las definiciones de la $\sec^{-1}$ y $\csc^{-1}$ no son un acuerdo universal.]

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $\pi/4$ (B) -0.4 (C) $-1/2$
2. (A) 0.2945 (B) No está definida (C) -2.724
3. (A) $\pi/4$ (B) 3.05 (C) $-1/2$
4. (A) 0.8267 (B) No está definida (C) -0.5829
5. (A) $-\pi/3$ (B) 43

EJERCICIO 5-9

A menos que se exprese lo contrario, se supone que la inversa de las funciones trigonométricas tiene como rango a los números reales (use el modo de radián en los problemas con calculadora). Algunos problemas implican rangos con ángulos medidos en grados, y éstos son claramente indicados (use el modo del grado en problemas con calculadora).

A

En los problemas del 1 al 12, encuentre los valores exactos sin usar una calculadora.

1. $\cos^{-1} 0$ **2.** $\operatorname{sen}^{-1} 0$ **3.** arcsen $(\sqrt{3}/2)$
4. arccos $(\sqrt{3}/2)$ **5.** arctan $\sqrt{3}$ **6.** $\tan^{-1} 1$
7. $\operatorname{sen}^{-1} (\sqrt{2}/2)$ **8.** $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ **9.** arccos 1
10. arctan $(1/\sqrt{3})$ **11.** $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ **12.** $\tan^{-1} 0$

En los problemas del 13 al 18, evalúe con cuatro dígitos significativos con calculadora.

13. $\operatorname{sen}^{-1} 0.9103$ **14.** $\cos^{-1} 0.4038$ **15.** arctan 103.7
16. $\tan^{-1} 43.09$ **17.** arcos 3.051 **18.** arcsen 1.131

B

En los problemas del 19 al 34, encuentre los valores exactos sin usar calculadora.

19. arcsen $(-\sqrt{2}/2)$ **20.** arccos $(-\frac{1}{2})$
21. $\tan^{-1} (-\sqrt{3})$ **22.** $\tan^{-1} (-1)$
23. $\cos^{-1} (-1)$ **24.** $\operatorname{sen}^{-1} (-\sqrt{3}/2)$
25. $\operatorname{sen}^{-1} (-1)$ **26.** $\cos^{-1} (-\sqrt{3}/2)$

27. $\tan(\tan^{-1} 25)$

28. $\text{sen}\,[\text{sen}^{-1}(-0.6)]$

29. $\cos^{-1}(\cos 2.3)$

30. $\tan^{-1}[\tan(-1.5)]$

31. $\text{sen}(\cos^{-1}\sqrt{3}/2)$

32. $\tan(\cos^{-1} 1/2)$

33. $\csc[\tan^{-1}(-1)]$

34. $\cos[\text{sen}^{-1}(-\sqrt{3}/2)]$

En los problemas del 35 al 40, evalúe con cuatro dígitos significativos usando una calculadora.

35. $\arctan(-10.04)$

36. $\tan^{-1}(-4.038)$

37. $\cot[\cos^{-1}(-0.7003)]$

38. $\sec[\text{sen}^{-1}(-0.0399)]$

39. $\sqrt{5} + \cos^{-1}(1 - \sqrt{2})$

40. $\sqrt{2} + \tan^{-1}\sqrt[3]{5}$

En los problemas del 41 al 44, encuentre la medida exacta del grado de cada uno sin usar calculadora.

41. $\text{sen}^{-1}(-\sqrt{2}/2)$

42. $\cos^{-1}(-1/2)$

43. $\arctan(-\sqrt{3})$

44. $\arctan(-1)$

45. $\cos^{-1}(-1)$

46. $\text{sen}^{-1}(-1)$

En los problemas del 47 al 52, encuentre la medida del grado de cada una con dos cifras decimales usando una calculadora en el modo grado.

47. $\cos^{-1} 0.7253$

48. $\tan^{-1} 12.4304$

49. $\text{arcsen}(-0.3662)$

50. $\arccos(-0.9206)$

51. $\tan^{-1}(-837)$

52. $\text{sen}^{-1}(-0.7071)$

53. Evalúe $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, 2)$ con una calculadora en el modo radián, y explique por qué esto ilustra o no la identidad del seno y del seno inverso.

54. Evalúe $\cos^{-1}[\cos(-0.5)]$ con una calculadora en el modo radián, y explique por qué esto ilustra o no la identidad del coseno y del coseno inverso.

Los problemas del 55 al 64 requieren del uso de un dispositivo de graficación.

En los problemas del 55 al 62, grafique cada función en un dispositivo de graficación sobre el intervalo indicado.

55. $y = \text{sen}^{-1} x, -1 \le x \le 1$

56. $y = \cos^{-1} x, -1 \le x \le 1$

57. $y = \cos^{-1}(x/3), -3 \le x \le 3$

58. $y = \text{sen}^{-1}(x/2), -2 \le x \le 2$

59. $y = \text{sen}^{-1}(x - 2), 1 \le x \le 3$

60. $y = \cos^{-1}(x + 1), -2 \le x \le 0$

61. $y = \tan^{-1}(2x - 4), -2 \le x \le 6$

62. $y = \tan^{-1}(2x + 3), -5 \le x \le 2$

63. La identidad $\cos(\cos^{-1} x) = x$ es válida para $-1 \le x \le 1$.
   (A) La gráfica $y = \cos(\cos^{-1} x)$ para $-1 \le x \le 1$.
   (B) ¿Qué pasa si se grafica $y = \cos(\cos^{-1} x)$ sobre un intervalo más ancho, por ejemplo, $-2 \le x \le 2$? Explique.

64. La identidad $\text{sen}(\text{sen}^{-1} x) = x$ es válido para $-1 \le x \le 1$.
   (A) La gráfica $y = \text{sen}(\text{sen}^{-1} x)$ para $-1 \le x \le 1$.
   (B) ¿Qué pasa si se grafica $y = \text{sen}(\text{sen}^{-1} x)$ en un intervalo más ancho, por ejemplo, $-2 \le x \le 2$? Explique.

C

En los problemas del 65 al 68, escriba cada expresión como una expresión algebraica en x libre de funciones trigonométricas o de inversas de las funciones trigonométricas

65. $\cos(\text{sen}^{-1} x)$

66. $\text{sen}(\cos^{-1} x)$

67. $\cos(\arctan x)$

68. $\tan(\text{arcsen}\, x)$

En los problemas 69 y 70, encuentre $f^{-1}(x)$. ¿Cómo debe estar x restringido en $f^{-1}(x)$?

69. $f(x) = 4 + 2\cos(x - 3), 3 \le x \le (3 + \pi)$

70. $f(x) = 3 + 5\,\text{sen}(x - 1), (1 - \pi/2) \le x \le (1 + \pi/2)$

Los problemas 71 y 72 requieren del uso de un dispositivo de graficación.

71. La identidad $\cos^{-1}(\cos x) = x$ es válida para $0 \le x \le \pi$.
   (A) Grafique $y = \cos^{-1}(\cos x)$ para $0 \le x \le \pi$.
   (B) ¿Qué pasa si se grafica $y = \cos^{-1}(\cos x)$ en un intervalo más grande, por ejemplo, $-2\pi \le x \le 2\pi$? Explique.

72. La identidad $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x$ es válida para $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.
   (A) Grafique $y = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x$ para $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.
   (B) ¿Qué pasa si se grafica $y = \text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x)$ en un intervalo más grande, como, $-2\pi \le x \le 2\pi$? Explique.

APLICACIONES

73. Fotografía. El ángulo de visión cambia con la longitud focal de un lente de cámara: Un lente gran angular de 28 mm tiene un ángulo de visión ancho, y un lente de telefoto de 300 mm tiene un ángulo de visión estrecho. Para una cámara de formato de 35 mm el ángulo de visión θ, en grados, está dado por

$$\theta = 2\tan^{-1}\frac{21.634}{x}$$

donde x es la longitud focal del lente que se usa. ¿Cuál es el ángulo de visión (en grados decimales con dos cifras decimales) de un lente de 28 mm? ¿De un lente de 100 mm?



74. Fotografía. Refiriéndose al problema 73, ¿cuál es el ángulo de visión (en grados decimales con dos cifras decimales) de un lente de 17 mm? ¿De un lente de 70 mm?

75. (A) Grafique la función del problema 73 con un dispositivo de graficación usando el modo grado. La gráfica debe cubrir lentes con longitudes focales de 10 mm a 100 mm.

(B) ¿Qué longitud focal de lentes, con dos cifras decimales, tendrá un ángulo de visión de 40°? Resuelva graficando $\theta = 40$ y $\theta = 2\tan^{-1}(21.634/x)$ en la misma ventana de visión y encuentre el punto de intersección usando una rutina de aproximación.

76. (A) Grafique la función del problema 73 con un dispositivo de graficación, en modo de grado, con la gráfica de lentes que cubren longitudes focales de 100 mm a 1 000 mm.

(B) ¿Cuál es la longitud focal de un lente, con dos cifras decimales, que podría tener un ángulo de visión de 10°? Resuelva graficando $\theta = 10$ y $\theta = 2\tan^{-1}(21.634/x)$ en la misma ventana de visión y encuentre el punto de intersección usando una rutina de aproximación.

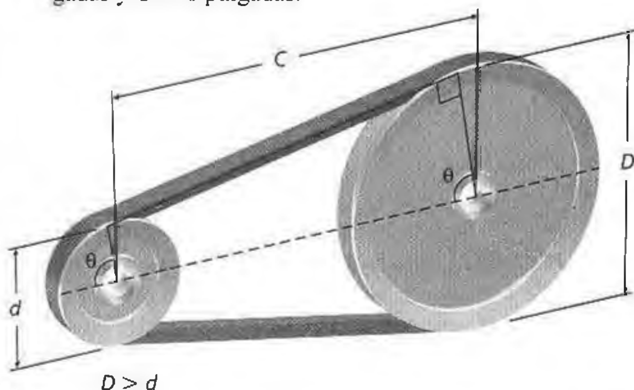
77. Ingeniería. La longitud de la banda alrededor de las dos poleas en la figura está dada por

$$L = \pi D + (d - D)\theta + 2C \operatorname{sen} \theta$$

Donde θ (en radianes) está dado por

$$\theta = \cos^{-1} \frac{D - d}{2C}$$

Verifique estas fórmulas y encuentre la longitud de la banda con dos cifras decimales si $D = 4$ pulgadas, $d = 2$ pulgadas y $C = 6$ pulgadas.



78. Ingeniería. Para el problema 77, encuentre la longitud de la banda si $D = 6$ pulgadas, $d = 4$ pulgadas y $C = 10$ pulgadas.

79. Ingeniería. La función

$$y_1 = 4\pi - 2\cos^{-1}\frac{1}{x} + 2x\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{x}\right)$$

representa la longitud de la banda alrededor de dos poleas en el problema 77 cuando los centros de las poleas están a x pulgadas de separación.

(A) Grafique y_1 en un dispositivo de graficación (en modo radián), incluyendo en la gráfica las poleas cuando sus centros están separados por una distancia de 3 a 10 pulgadas.

(B) ¿Qué distancia, con dos cifras decimales, debería haber entre los centros de las dos poleas para usar una banda de 24 pulgadas de longitud? Resuelva graficando y_1 y $y_2 = 24$ en la misma ventana de visión y encuentre el punto de intersección usando una rutina de aproximación.

80. Ingeniería. La función

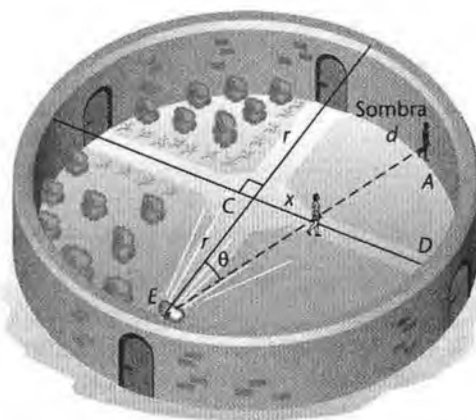
$$y_1 = 6\pi - 2\cos^{-1}\frac{1}{x} + 2x\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\frac{1}{x}\right)$$

representa la longitud de la banda alrededor de las dos poleas en el problema 78 cuando los centros de las poleas están a x pulgadas de distancia.

(A) Grafique y_1 con un dispositivo de graficación (en modo radián), mostrando los centros de las poleas separados por 3 a 20 pulgadas de distancia.

(B) A qué distancia, con dos cifras decimales, deben estar colocados los centros de las dos poleas para usar una banda de 36 pulgadas de longitud? Resuelva graficando y_1 y $y_2 = 36$ en la misma ventana de visión y encontrar el punto de intersección usando una rutina de aproximación.

81. Movimiento. La figura representa un patio circular rodeado por una pared alta de piedra. Un foco localizado en E brilla en el patio.



(A) Si una persona camina x pies lejos del centro a lo largo de DC, muestre que la sombra de la persona se moverá una distancia dada por

$$d = 2r\theta = 2r\tan^{-1}\frac{x}{r}$$

donde θ está en radianes. [*Sugerencia:* Dibuje una recta de A a C.]

(B) Encuentre d con dos cifras decimales si $r = 100$ pies y $x = 40$ pies.

82. Movimiento. En el problema 81, encuentre d para $r = 50$ pies y $x = 25$ pies.

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 5 Un análisis depredador-presa que implica leones de la montaña y venados



En algunas áreas del desierto occidental, las poblaciones de venado y del león de la montaña están interrelacionadas, ya que el venado es la fuente de alimento de los leones de la montaña. La población de cada especie sube y baja en ciclos, pero fuera de fase unos con respecto de los otros. Un equipo de investigación de administración de fauna calculó las poblaciones respectivas en cierta región cada 2 años en un periodo de 16 años, con los resultados que se muestran en la tabla 1:



TABLA 1 Leones de montaña-población de venados

Años	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Venados	1 272	1 523	1 152	891	1 284	1 543	1 128	917	1 185
Leones de M.	39	47	63	54	37	48	60	46	40

(A) Análisis de población del venado

1. Introduzca los datos para la población de venado para el intervalo de tiempo [0, 16] en un dispositivo de graficación y haga una gráfica de dispersión de los datos.
2. Se puede usar una función de la forma $y = k + A$ sen $(Bx + C)$ para modelar estos datos. Use los datos de la tabla 1 para determinar k, A y B. Use la gráfica de la parte 1 para estimar visualmente a C con una cifra decimal.
3. Dibuje los datos de la parte 1 y la ecuación de la parte 2 en la misma ventana de visión. Si es necesario, ajuste el valor de C para un mejor ajuste.
4. Escriba un resumen de los resultados, fluctuaciones que describen y los ciclos de la población de venado.

(B) Análisis de la población del león de la montaña

1. Introduzca los datos para la población de león de la montaña para el intervalo de tiempo [0, 16] en un dispositivo de graficación y haga una gráfica de dispersión de los datos.
2. Se puede usar una función de la forma $y = k + A$ sen $(Bx + C)$ para modelar estos datos. Use los datos de la tabla 1 para determinar k, A y B. Use la gráfica de la parte 1 para estimar visualmente a C con una cifra decimal.
3. Dibuje los datos de la parte 1 y la ecuación de la parte 2 en la misma ventana de visión. Si es necesario, ajuste el valor de C para un mejor ajuste.
4. Escriba un resumen de los resultados, fluctuaciones que describen y los ciclos de la población del león de la montaña.

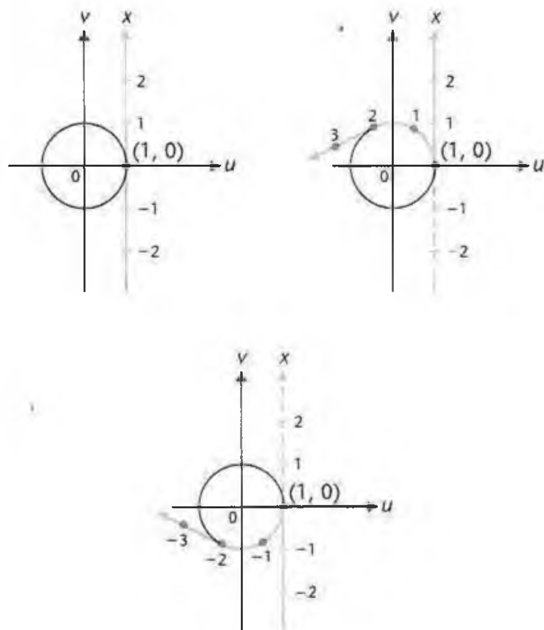
(C) Interrelación de las dos poblaciones

1. Analice la relación de las poblaciones máximas del depredador con las máximas poblaciones de la presa con respecto al tiempo.
2. Analice la relación de las poblaciones mínimas del depredador con las poblaciones mínimas de la presa con respecto al tiempo.
3. Analice la dinámica de las fluctuaciones de las dos poblaciones interdependientes. ¿Cuál es la causa de que las dos poblaciones suban y bajen, y por qué están fuera de fase una con respecto de la otra?

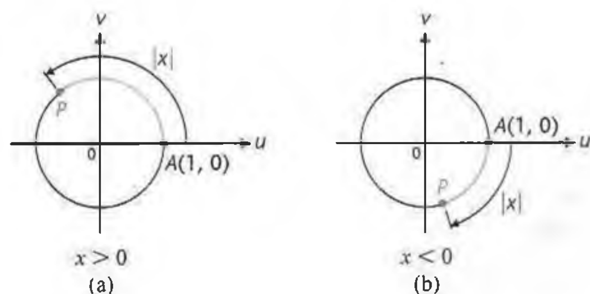
Repaso del capítulo 5

5-1 LA FUNCIÓN GENERADORA

El **círculo unitario** es un círculo de radio 1 con centro en el origen de un sistema coordenado rectangular. La **función generadora** envuelve una recta numérica real con el origen en (1, 0) alrededor del círculo unitario (el eje real positivo se envuelve en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y el eje real negativo se envuelve en el sentido de las manecillas del reloj). Así, cada número real de la recta real está relacionado con un punto único, llamado **punto circular**, en el círculo unitario.



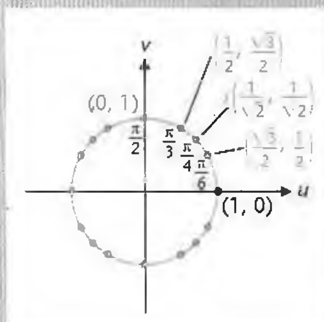
Una manera equivalente de relacionar números reales con puntos en el círculo unitario es pensar en términos de la *longitud de arco,* suponiendo que se sabe cuál es la longitud del arco. Para encontrar el punto circular P asociado con el número real x, se comienza en $A(1, 0)$ y se mueve $|x|$ unidades a lo largo del círculo unitario, a la izquierda si x es positivo y a la derecha si x es negativo. La longitud del arco AP es $|x|$ (véase figura).



$x > 0$
(a)

$x < 0$
(b)

Coordenadas en puntos circulares clave



Ayuda de memoria

$$W\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1) \qquad = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}\right)$$

$$W\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \qquad = \left(\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$W\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

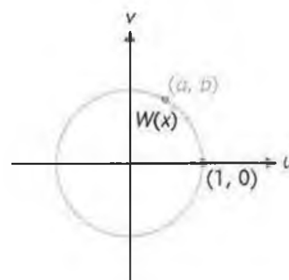
$$W\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}\right)$$

$$W(0) = (1, 0) \qquad = \left(\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2}\right)$$

Observe los patrones

La siguiente es una **importante propiedad de la función generadora**: Para todos los números reales x,

$W(x) = W(x + 2k\pi)$
k cualquier entero



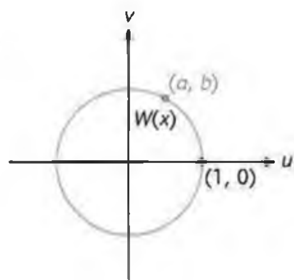
5-2 FUNCIONES CIRCULARES

La función generadora W une cada número real x con un par ordenado de números reales (a, b), las coordenadas del punto circular $W(x)$. Esta asociación se usa en la siguiente definición de las seis **funciones circulares**: si x es un número real y (a, b) son las coordenadas del punto circular $W(x)$, entonces

$$\operatorname{sen} x = b \qquad \csc x = \frac{1}{b} \quad b \neq 0$$

$$\cos x = a \qquad \sec x = \frac{1}{a} \quad a \neq 0$$

$$\tan x = \frac{b}{a} \quad a \neq 0 \qquad \cot x = \frac{a}{b} \quad b \neq 0$$



Usando los resultados de la sección 5-1, se puede evaluar cualquiera de las seis funciones circulares exactamente, cuando existe alguna, para múltiplos enteros de los números reales $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. Una calculadora se puede usar para evaluar las funciones circulares para números reales arbitrarios.

Las siguientes **identidades básicas trigonométricas,** valen para todos los reemplazos de x por números reales para los que estén definidos ambos lados de una ecuación:

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Identidades del cociente

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades para negativos

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidad de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

5-3 ÁNGULOS Y SU MEDIDA

Un **ángulo** tiene dos lados y un punto común llamado **vértice**. Un **ángulo** se puede formar comenzando con el lado inicial en una posición fija y girando al **lado terminal** desde la posición fija a su posición final (en sentido contrario al de las manecillas del reloj, **positivo**; en el sentido de las manecillas del reloj, **negativo**). Un ángulo está en **posición estándar** en un sistema coordenado rectangular si su vértice está en el origen y su lado inicial está en el eje x positivo. Los **ángulos de cuadrante** tienen sus lados terminales en un eje coordenado. Un ángulo de **un grado** es 1/360 de una rotación completa. Un ángulo de **un radián** es un ángulo central de un círculo subtendido por un arco que tiene la misma longitud que el radio.

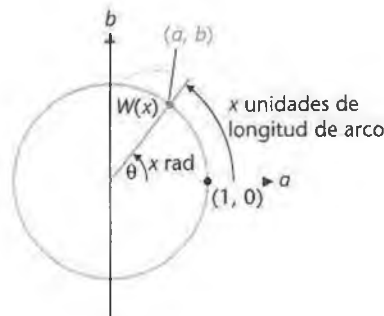
Medido en radianes: $\theta = \dfrac{s}{r}$

Conversión de radianes a grados: $\dfrac{\theta_{grad}}{180°} = \dfrac{\theta_{rad}}{\pi \text{ rad}}$

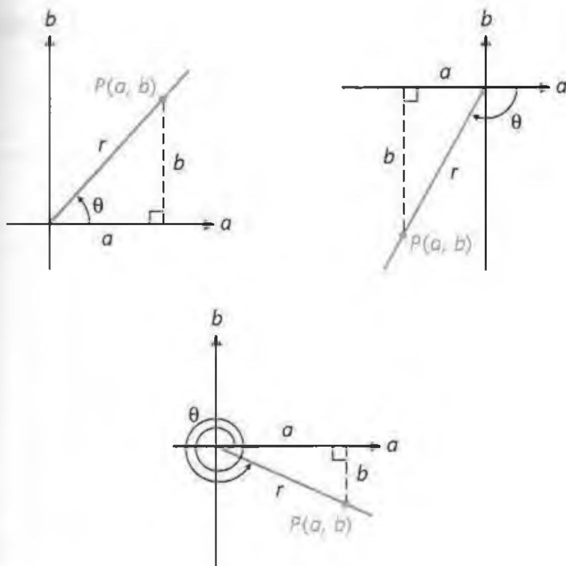
5-4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

A cada una de las seis funciones circulares se le asocia una **función trigonométrica** del mismo nombre. Si θ es un ángulo medido en radianes x, entonces el valor de cada función trigonométrica en θ está dado por el valor del número real x:

Función trigonométrica	Función circular
$\operatorname{sen}\theta$	$= \operatorname{sen} x$
$\cos\theta$	$= \cos x$
$\tan\theta$	$= \tan x$
$\csc\theta$	$= \csc x$
$\sec\theta$	$= \sec x$
$\cot\theta$	$= \cot x$



Para muchas aplicaciones que implican el uso de funciones trigonométricas, incluyendo las aplicaciones del triángulo, es útil tener una **definición alterna de una función trigonométrica** que utilice las coordenadas de un punto arbitrario $(a, b) \neq (0, 0)$ en el lado terminal de un ángulo θ: Si θ es un ángulo arbitrario en la posición estándar en un sistema coordenado rectangular y $P(a, b)$ es un punto a r unidades del origen en el lado terminal de θ, entonces:



$\text{sen } \theta = \dfrac{b}{r}$ $\qquad \csc \theta = \dfrac{r}{b} \quad b \neq 0$

$\cos \theta = \dfrac{a}{r}$ $\qquad \sec \theta = \dfrac{r}{a} \quad a \neq 0$

$\tan \theta = \dfrac{b}{a}, \quad a \neq 0$ $\qquad \cot \theta = \dfrac{a}{b} \quad b \neq 0$

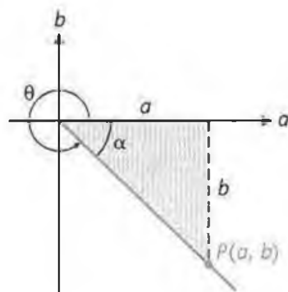
$r = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$: $P(a, b)$ es un punto arbitrario en el lado terminal de θ, $(a, b) \neq (0, 0)$

Dominios: Los conjuntos de todos los ángulos posibles para los que se definen las funciones.

Rangos: Subconjunto del conjunto de números reales.

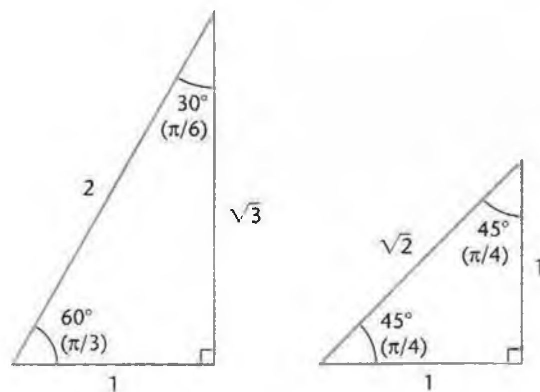
(Los dominios y rangos se expresarán más precisamente en la próxima sección.)

Asociado con cada ángulo que no termina en un eje coordenado está **un triángulo de referencia** para θ. El triángulo de referencia se forma dibujando una perpendicular del punto (a, b) en el lado terminal de θ al eje horizontal. El **ángulo de referencia** α es el ángulo agudo, siempre tomado positivo, entre el lado terminal de θ y el eje horizontal como se indica en la figura siguiente.



Referencia del triángulo
$(a, b) \neq (0, 0)$
α siempre es positivo.

Si un triángulo de la referencia de un ángulo dado es un triángulo rectángulo 30°-60° o un triángulo rectángulo a 45°, entonces se puede encontrar las coordenadas exactas y, por otra parte (0, 0), en el lado terminal del ángulo dado. Las siguientes relaciones de triángulos rectángulos 30°-60° y 45° del triángulo rectángulo son útiles en este enfoque:



Algunos valores especiales del ángulo se resumen en la siguiente tabla:

TABLA 1 Valores especiales de ángulos

θ	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$ o $\sqrt{3}/3$
45°	$1/\sqrt{2}$ o $\sqrt{2}/2$	$1/\sqrt{2}$ o $\sqrt{2}/2$	1
60°	$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	No está definida

Las funciones circulares están relacionadas con las funciones trigonométricas como se indica: Para x cualquier número real,

$\text{sen } x = \text{sen } (x \text{ radianes}) \qquad \cos x = \cos (x \text{ radianes})$

$\sec x = \sec (x \text{ radianes}) \qquad \csc x = \csc (x \text{ radianes})$

$\tan x = \tan (x \text{ radianes}) \qquad \cot x = \cot (x \text{ radianes})$

Ahora se puede evaluar las funciones circulares en términos de funciones trigonométricas, usando triángulos de referencia donde crea apropiado, o en términos del punto circular y de la función generadora. Cada enfoque tiene ciertas ventajas en situaciones particulares.

5-5 SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

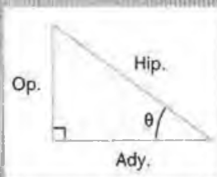
Un **triángulo rectángulo** es un triángulo con un ángulo de 90°. Para **resolver un triángulo rectángulo** se deberán encontrar todos los ángulos y los lados desconocidos, dadas las medidas de dos lados o las medidas de un lado y el ángulo agudo.

Las funciones trigonométricas de ángulos agudos

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{Op.}}{\text{Hip.}} \qquad \csc \theta = \frac{\text{Hip.}}{\text{Op.}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{Adj.}}{\text{Hip.}} \qquad \text{sen } \theta = \frac{\text{Hip.}}{\text{Adj.}}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{Op.}}{\text{Adj.}} \qquad \cot \theta = \frac{\text{Adj.}}{\text{Op.}}$$



Precisión Computacional

Ángulo cercano a	Dígitos significativos para el lado medido
1°	2
10′ o 0.1°	3
1′ o 0.01°	4
10″ o 0.001°	5

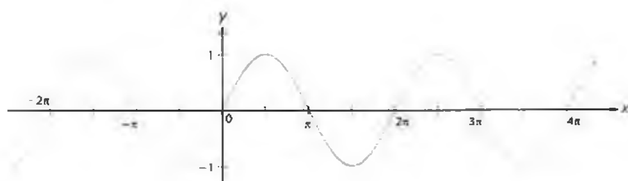
5-6 GRAFICACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS

Una función f es **periódica** si existe un número real positivo p tal que

$$f(x + p) = f(x)$$

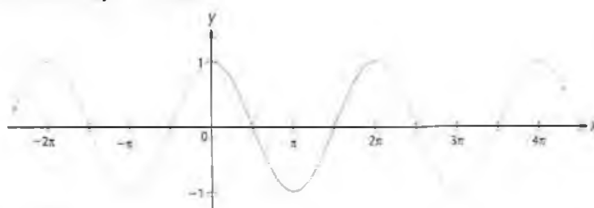
para todo x en el dominio de f. El p positivo más pequeño, si existe, se llama **periodo fundamental de** f, o a menudo **periodo de** f. Todas las funciones trigonométricas y circulares son periódicas.

Gráfica de $y = \text{sen } x$:



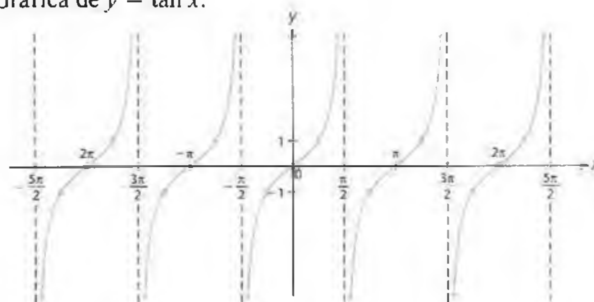
Periodo: 2π
Dominio: Todos los números reales
Rango: $[-1, 1]$

Gráfica de $y = \cos x$:



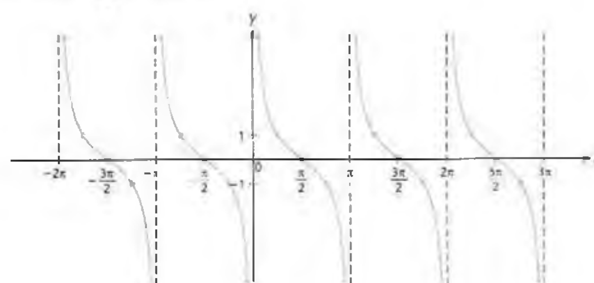
Periodo: 2π
Dominio: Todos los números reales
Rango: $[-1, 1]$

Gráfica de $y = \tan x$:



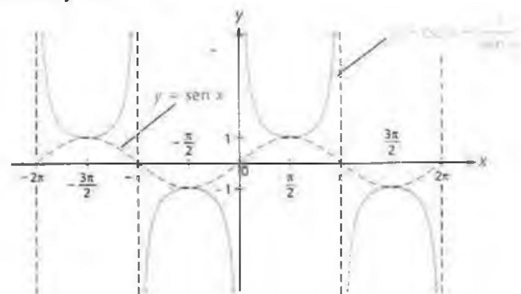
Periodo: π
Dominio: Todos los números reales excepto $\pi/2 + k\pi$, k es un entero
Rango: Todos los números reales

Gráfica de $y = \cot x$:



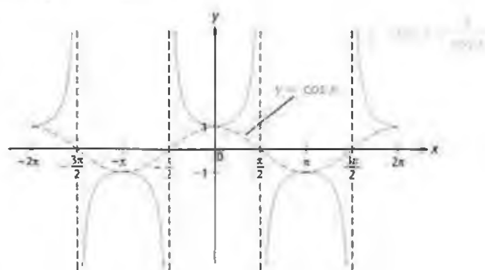
Periodo: π
Dominio: Todos los números reales excepto $k\pi$, k un entero
Rango: Todos los números reales

Gráfica de $y = \csc x$:



Periodo: 2π
Dominio: Todos los números reales excepto $k\pi$, k un entero
Rango: Todos los números reales y tales que $y \leq -1$ o $y \geq 1$

Gráfica de $y = \sec x$:



Periodo: 2π
Dominio: Todos los números reales excepto $\pi/2 + k\pi$, k un entero
Rango: Todos los números reales y tales que $y \leq -1$ o $y \geq 1$

5-7 GRAFICACION DE $y = k + A$ sen $(Bx + C)$ y $y = k + A \cos (Bx + C)$

$$|A| = \text{Amplitud}$$

Para encontrar el periodo y cambio de fase, resuelva $(Bx + C) = 0$ y $(Bx + C) = 2\pi$:

Corrimiento de fase Periodo

$$x = -\frac{C}{B} \quad \text{a} \quad x = -\frac{C}{B} + \frac{2\pi}{B}$$

El periodo $2\pi/B$. El cambio de la fase es una traslación horizontal a la derecha si $-C/B$ es positivo y a la izquierda si $-C/B$ es negativo.

$|k|$ es una traslación vertical: hacia arriba si k es positivo y hacia abajo si k es negativo.

5-8 GRAFICACIÓN MÁS GENERAL DE LAS FUNCIONES TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE

La amplitud no está definida para estas funciones.

Para encontrar el periodo y el cambio de fase para $y = A \tan (Bx + C)$ o $y = A \cot (Bx + C)$, resuelva $Bx + C = 0$ y $Bx + C = \pi$:

Corrimiento de fase Periodo

$$x = -\frac{C}{B} \quad \text{a} \quad x = -\frac{C}{B} + \frac{\pi}{B}$$

El periodo es π/B. El cambio de fase es una traslación horizontal a la derecha si $-C/B$ es positivo y a la izquierda si $-C/B$ es negativo.

Para encontrar el periodo y cambio de fase para $y = A \sec (Bx + C)$ o $y = \csc (Bx + C)$, resuelva $Bx + C = 0$ y $Bx + C = 2\pi$:

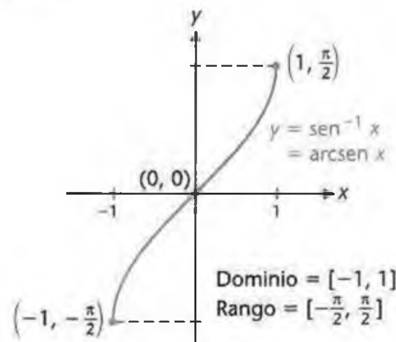
Corrimiento de fase Periodo

$$x = -\frac{C}{B} \quad \text{a} \quad x = -\frac{C}{B} + \frac{2\pi}{B}$$

El periodo es $2\pi/B$. El cambio de fase es una traducción horizontal a la derecha si $-C/B$ es positivo y a la izquierda si $-C/B$ es negativo.

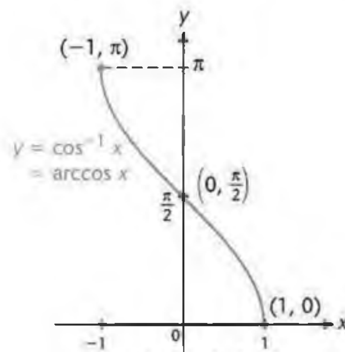
5-9 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

$y = \text{sen}^{-1} x = \text{arcsen}\, x$ si y sólo si sen $y = x$, $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$ y $-1 \leq x \leq 1$.



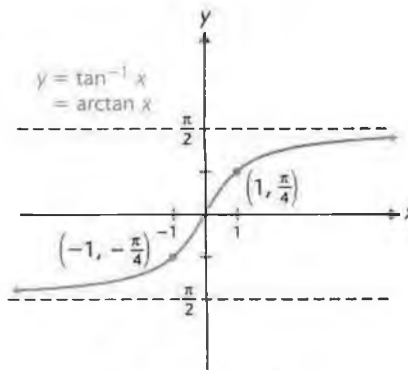
Función seno inverso

$y = \cos^{-1} x = \arccos x$ si y sólo si $\cos y = x$, $0 \leq y \leq \pi$ y $-1 \leq x \leq 1$.



Función coseno inversa

$y = \tan^{-1} x = \arctan x$ si y sólo si $\tan y = x$, $-\pi/2 < y < \pi/2$ y x es cualquier número real.



Función tangente inversa

Ejercicio de repaso del capítulo 5

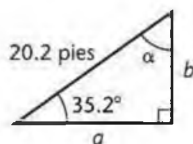
Al resolver los problemas de este capítulo compruebe sus respuestas con las que se dan al final del libro. Ahí se incluyen todas las respuestas a los problemas de repaso, y después de cada respuesta está un número en tipo itálico que indica la sección a la que pertenece el problema que se está analizando. Si se le presentan dudas repase las secciones correspondientes en el texto.

A

1. Encuentre la medida en radianes de un ángulo central enfrente a una longitud de arco de 15 centímetros en un círculo con 6 centímetros de radio.

2. En un círculo con 3 centímetros de radio, encuentre la longitud de arco opuesto a un ángulo de 2.5 radianes.

3. Resuelva el triángulo:



4. Encuentre el ángulo de referencia asociado con cada ángulo θ:

(A) $\theta = \pi/3$ (B) $\theta = -120°$
(C) $\theta = -13\pi/6$ (D) $\theta = 210°$

5. ¿En cuál cuadrante cada uno de los siguientes enunciados es negativo?

(A) sen θ (B) cos θ (C) tan θ

6. Si $(4, -3)$ está en el lado terminal del ángulo θ, encuentre:

(A) sen θ (B) sec θ (C) cot θ

7. Termine la tabla 1 usando valores exactos. No use calculadora.

TABLA 1

θ°	θ rad	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0°					ND*		
30°							
45°	$\pi/4$		$1/\sqrt{2}$				
60°							
90°							
180°							
270°							
360°							

*ND = No está definida.

8. ¿Cuál es el periodo de cada una de las siguientes funciones?

(A) $y = \cos x$ (B) $y = \csc x$ (C) $y = \tan x$

9. Indique el dominio y rango de cada una de las siguientes funciones.

(A) $y = \text{sen}\, x$ (B) $y = \tan x$

10. Trace una gráfica de $y = \text{sen}\, x$, $-2\pi \le x \le 2\pi$.

11. Trace una gráfica de $y = \cot x$, $-\pi < x < \pi$.

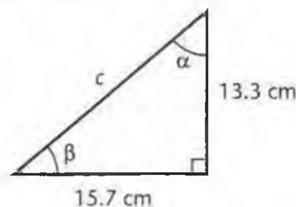
12. Describa verbalmente el significado de un ángulo central de 0.5 rad en un círculo.

13. Describa el cambio más pequeño de la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ que produzca la gráfica de $y = \cos x$.

B

14. Cambie 1.37 radianes a grados decimales con dos cifras decimales.

15. Resuelva el triángulo:



16. Indique si el ángulo está en el cuadrante I, II, III o IV o es un ángulo cuadrantal.

(A) $-210°$ (B) $5\pi/2$ (C) 4.2 radianes

17. ¿Cuál de los ángulos siguientes es coterminal con 120°?

(A) $-240°$ (B) $-7\pi/6$ (C) 840°

18. ¿Cuál de los siguientes enunciados tiene el mismo valor de cos 3?

(A) cos 3° (B) cos (3 radianes) (C) $\cos(3 + 2\pi)$

19. ¿Para cuál valor de x, $0 \le x < 2\pi$, no está definida cada una de las siguientes funciones?

(A) $\tan x$ (B) $\cot x$ (C) $\csc x$

20. Un punto circular $P(a, b)$ se mueve en el sentido de las manecillas del reloj de un círculo unitario comenzando en $(1, 0)$ y parando después de recorrer una distancia de 8.305 unidades. Explique cómo se puede encontrar las coordenadas del punto P en su posición final y cómo se determinaría en cuál cuadrante está P. Encuentre las coordenadas de P con tres cifras decimales y el cuadrante para la posición final de P.

En los problemas del 21 al 36, evalúe exactamente sin usar calculadora.

21. tan 0 **22.** sec 90° **23.** $\cos^{-1} 1$

24. $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$ **25.** $\text{sen}^{-1}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **26.** csc 300°

27. $\arctan \sqrt{3}$

28. $\operatorname{sen} 570°$

29. $\tan^{-1}(-1)$

30. $\cot\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

31. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$

32. $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

33. $\cos(\cos^{-1} 0.33)$

34. $\csc[\tan^{-1}(-1)]$

35. $\operatorname{sen}\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$

36. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{-4}{5}\right)$

Evalúe los problemas del 37 al 44 con cuatro dígitos significativos usando una calculadora.

37. $\cos 423.7°$

38. $\tan 93°46'17''$

39. $\sec(-2.073)$

40. $\operatorname{sen}^{-1}(-0.8277)$

41. $\arccos(-1.3281)$

42. $\tan^{-1} 75.14$

43. $\csc[\cos^{-1}(-0.4081)]$

44. $\operatorname{sen}^{-1}(\tan 1.345)$

45. Encuentre la medida exacta en grados de cada uno de los ángulos siguientes sin usar calculadora:

(A) $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-1/2)$ (B) $\theta = \arccos(-1/2)$

46. Encuentre la medida en grados de cada uno de los ángulos siguientes con dos cifras decimales usando una calculadora:

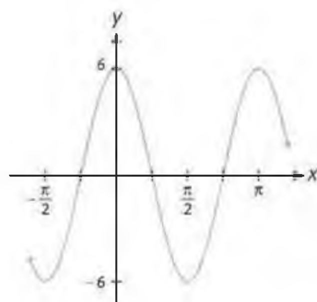
(A) $\Theta = \cos^{-1}(-0.8763)$ (B) $\Theta = \arctan 7.3771$

47. Evalúe $\cos^{-1}[\cos(-2)]$ con una calculadora en modo radián, y explique por qué esto ilustra o no ilustra la identidad de coseno y del coseno inverso.

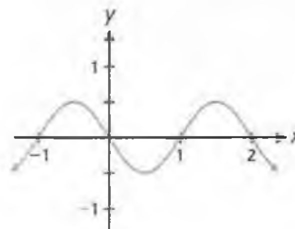
48. Trace una gráfica de $y = -2\cos \pi x$, $-1 \le x \le 3$. Indique la amplitud A y el periodo P.

49. Trace una gráfica de $y = -2 + 3\operatorname{sen}(x/2)$, $-4\pi \le x \le 4\pi$.

50. Encuentre la ecuación de la forma $y = A\cos Bx$ que tiene la gráfica



51. Encuentre la ecuación de la forma $y = A\operatorname{sen} Bx$ que tiene la gráfica



52. Describa el corrimiento y/o reflexión más pequeños que transforman la gráfica de $y = \tan x$ en la gráfica de $y = \cot x$.

53. Simplifique cada una de las funciones siguientes usando las identidades básicas apropiadas.

(A) $\operatorname{sen}(-x)\cot(-x)$ (B) $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

54. Trace una gráfica de $y = 3\operatorname{sen}[(x/2) + (\pi/2)]$ en el intervalo $-4\pi \le x \le 4\pi$.

55. Indique la amplitud A, el periodo P, y el cambio de fase para la gráfica de $y = -2\cos[(\pi/2)x - (\pi/4)]$. No grafique.

56. Trace una gráfica de $y = \cos^{-1} x$, e indique el dominio y el rango.

57. Grafique $y = 1/(1 + \tan^2 x)$ en un dispositivo de graficación que muestre al menos dos periodos completos de la gráfica. Encuentre una ecuación de la forma $y = k + A\operatorname{sen} Bx$ o $y = k + A\cos Bx$ que tenga la misma gráfica.

58. Grafique cada ecuación con un dispositivo de graficación y encuentre una ecuación de la forma $y = A\tan Bx$ o $y = A\cot Bx$ que tenga la misma gráfica que la ecuación dada. Escoja las dimensiones de la ventana de visión para que por lo menos sean visibles dos periodos.

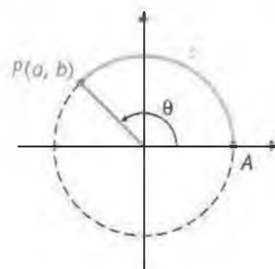
(A) $y = \dfrac{2\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} 2x}$ (B) $y = \dfrac{2\cos^2 x}{\operatorname{sen} 2x}$

C

59. Si en la figura las coordenadas de A son $(8, 0)$ y la longitud del arco s es de 20 unidades, encuentre:

(A) La medida exacta de θ en radianes

(B) Las coordenadas de P con tres dígitos significativos



60. Encuentre exactamente el menor número real positivo para el cual:

(A) $\cos x = -\frac{1}{2}$ (B) $\csc x = -\sqrt{2}$

61. Trace una gráfica de $y = \sec x$, $-\pi/2 < x < 3\pi/2$.

62. Trace una gráfica de $y = \tan^{-1} x$, e indique el dominio y el rango.

63. Indique el periodo P y el cambio de fase para la gráfica de $y = -5 \tan(\pi x + \pi/2)$. No grafique.

64. Indique el periodo y el cambio de fase para la gráfica de $y = 3 \csc(x/2 - \pi/4)$. No grafique.

65. Indique si cada una de las funciones siguientes es simétrica con respecto al eje x, el eje y o el origen.

(A) Seno (B) Coseno (C) Tangente

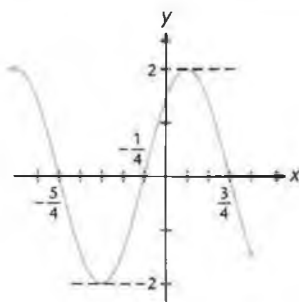
66. Escriba como una expresión algebraica en x libre de funciones trigonométricas o de funciones trigonométricas inversas a:

$$\sec(\text{sen}^{-1} x)$$

67. Intente calcular cada una de las funciones siguientes en su calculadora. Explique los resultados.

(A) $\csc(-\pi)$ (B) $\tan(-3\pi/2)$ (C) $\text{sen}^{-1} 2$

68. La gráfica siguiente representa una ecuación de la forma $y = A \text{ sen}(Bx + C)$, $-1 < -C/B < 0$. Encuentre la ecuación.



69. Grafique $y = 1.2 \text{ sen } 2x + 1.6 \cos 2x$ con un dispositivo de graficación. (Escoja las dimensiones de la ventana de visión para que por lo menos dos periodos sean visibles.) Encuentre una ecuación de la forma $y = A \text{ sen}(Bx + C)$ que tenga la misma gráfica de la ecuación dada. Encuentre A y B exactamente y C con tres cifras decimales. Use la intersección con el eje x cerca del origen como el corrimiento de fase.

70. Cierta forma de onda particular es aproximada por los primeros seis términos de una serie de Fourier:

$$y = \frac{4}{\pi}\left(\text{sen}x + \frac{\text{sen } 3x}{3} + \frac{\text{sen } 5x}{5} + \frac{\text{sen } 7x}{7} + \frac{\text{sen } 9x}{9} + \frac{\text{sen } 11x}{11}\right)$$

(A) Grafique esta ecuación con un dispositivo de graficación para $-3\pi \le x \le 3\pi$ y $-2 \le y \le 2$.

(B) La gráfica del inciso (A) se aproxima una forma de onda que se compone totalmente de segmentos de línea recta. Trace a mano la forma de la onda a la que se aproxima la serie de Fourier.

Esta forma de onda se llama **onda de pulso u onda cuadrada**, y se usa, por ejemplo, para probar distorsión y para sincronizar las operaciones en computadoras.

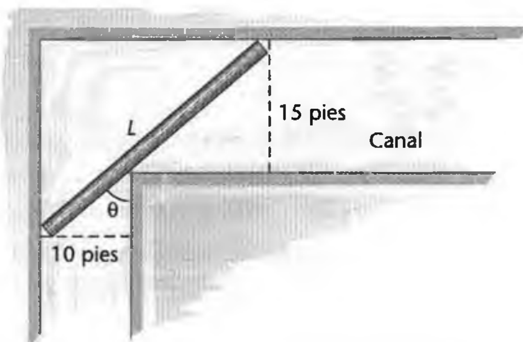
APLICACIONES

71. Astronomía. ¿Una recta del Sol a la Tierra barre un ángulo de cuántos radianes en 73 días? Exprese la respuesta en términos de π.

72. Geometría. Encuentre el perímetro de un cuadrado inscrito en un círculo con 5.00 centímetros de radio.

73. Corriente alterna. La corriente I en corriente eléctrica alterna tiene una amplitud de 30 amperes y un periodo de $\frac{1}{60}$ segundos. Si $I = 30$ amperes cuando $t = 0$, encuentre una ecuación de la forma $I = A \cos Bt$ que dé la corriente a cualquier tiempo $t \ge 0$.

74. Acceso restringido. Un canal de 10 pies de ancho hace un ángulo recto con un canal de 15 pies de ancho. Un tronco largo y delgado va a estar flotando en los canales formando un ángulo recto (véase figura). Se necesita encontrar la medida del tronco más largo que va de un lado a otro apoyado en la esquina ignorando el diámetro del tronco.



(A) Exprese la longitud de la recta L que toca los dos lados exteriores de los canales y la esquina interior en términos de θ.

(B) Termine la tabla 2, con una cifra decimal, y calcule de la tabla el tronco más largo para aproximar al pie más cercano que puede hacer esto. (El tronco más largo es la distancia más corta L.)

TABLA 2

θ (rads)	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
L (pies)	42.0						

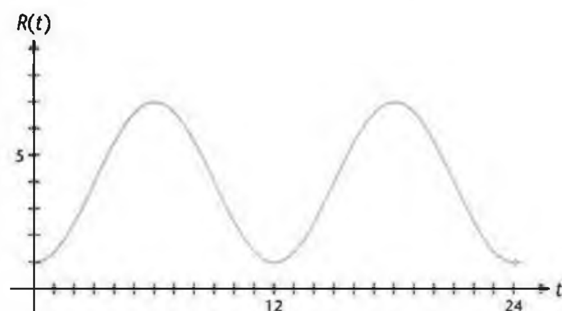
(C) Grafique la función del inciso (A) con un dispositivo de graficación y use un método de aproximación para encontrar la distancia más corta L con una cifra decimal, en consecuencia, la longitud del tronco más largo que puede hacer esto.

(D) Explique qué pasa con la longitud L cuando θ se aproxima a 0 o $\pi/2$.

75. Modelado del ciclo estacional de negocios. Una compañía refresquera tiene ingresos por ventas en un periodo de 2 años como el que se muestra en la gráfica siguiente donde $R(t)$ es el ingreso (en millones de dólares) de un mes de ventas t meses después del 1 de febrero.

(A) Encuentre una ecuación de la forma $R(t) = k + A \cos Bt$ que produzca esta gráfica.

(B) Interprete verbalmente la gráfica



76. Modelado de la variación de la temperatura. El promedio de 30 años de temperatura mensual, °F, de cada mes del año para Los Ángeles está dado en la tabla 3 (*Almanaque mundial*).

(A) Usando un mes como la unidad básica de tiempo, introduzca los datos para un periodo de dos años en su dispositivo de graficación y realice una gráfica de dispersión en la ventana de visión. Escoja $40 \leq y \leq 90$ para la ventana de visión.

(B) Esto aparenta que una curva seno de la forma

$$y = k + A \text{ sen } (Bx + C)$$

se aproximará al modelo de estos datos. Las constantes k, A y B se determinan fácilmente de la tabla 3. Para calcular C, estime visualmente hasta una cifra decimal el cambio de fase positivo más pequeño desde el inciso (A) de la gráfica. Después de determinar A, B, k y C, escriba la ecuación resultante. (Su valor de C puede diferir levemente del que se da en las respuestas de su libro.)

(C) Grafique los resultados de los incisos (A) y (B) en la misma ventana de visión. (Se puede obtener un mejor ajuste arreglando levemente el valor de C.)

TABLA 3

x (mes)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y (temp.)	58	60	61	63	66	70	74	75	74	70	63	58

CAPÍTULO 6

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y ECUACIONES CONDICIONALES

$f(x)=|3x+4|+1$

$y=-x, x>0$

Las funciones trigonométricas tienen amplia variedad de usos en la solución de problemas de la vida cotidiana, así como en el desarrollo de las matemáticas. Cualquiera que sea su uso, a menudo es importante poder cambiar una expresión trigonométrica de una forma a otra equivalente que sea más útil. Esto implica el uso de identidades. Recuerde que una ecuación con una o más variables es una *identidad* si el lado izquierdo es igual al derecho para todos los reemplazos de las variables que definen ambos lados. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$$

es una identidad, pero

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

no lo es. Esta última expresión se denomina *ecuación condicional*, ya que sólo se cumple para ciertos valores de x y no para todos los valores que definen ambos lados. En las primeras cuatro secciones del capítulo se abordan las identidades trigonométricas y en la última, las ecuaciones trigonométricas condicionales.

SECCIÓN 6-1 Identidades básicas y su uso



- Identidades básicas
- Otras identidades

En esta sección se repasan las identidades básicas introducidas en la sección 5-2 y se muestra cómo se usan para verificar otras identidades.

Identidades básicas

En el siguiente cuadro se enumeran, para una referencia conveniente, las identidades básicas vistas en la sección 5-2. Estas identidades se usarán con mucha frecuencia en el trabajo que sigue por lo que se deberán memorizar.

Identidades trigonométricas básicas

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Identidades de cociente

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades para negativos

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Todas estas identidades se establecieron en la sección 5-2 (en los problemas 87 y 88 de la sección de ejercicios 5-2, se establecieron la segunda y tercera identidad de Pitágoras).

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Analice un camino fácil para recordar la segunda y tercera identidad de Pitágoras a partir de la primera. [*Sugerencia:* Divida la primera identidad pitagórica entre las expresiones adecuadas.]

• Otras identidades

Como antes se indicó, cuando se trabaja con expresiones trigonométricas, a menudo es preferible convertir una forma a otra equivalente que pueda ser más útil. Esta sección está diseñada para que se adquiera experiencia en este proceso. Además de usar las identidades básicas y demostrar otras identidades, se usarán con frecuencia las operaciones algebraicas básicas tales como multiplicación, factorización, combinación y reducción de fracciones, etcétera. Los ejemplos siguientes ilustran algunas de las técnicas usadas para demostrar ciertas identidades. Los pasos mostrados no son necesariamente los únicos (a menudo, hay más de un camino para cumplir el objetivo). Para adquirir habilidad en el uso de las identidades, es importante que realice muchos problemas por su cuenta.

EJEMPLO 1 Demostración de identidades

Demuestre la identidad: $\cos x \tan x = \operatorname{sen} x$

Demostración

Por lo general, se comienza con el lado más complicado, y se transforma ese lado en el otro, en uno o más pasos, mediante identidades básicas, álgebra u otras identidades establecidas. Por consiguiente,

$$\cos x \tan x = \cos x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \text{Identidad cociente}$$

$$= \operatorname{sen} x \qquad \text{Álgebra}$$

Problema seleccionado 1 Demuestre la identidad: $\operatorname{sen} x \cot x = \cos x$

EJEMPLO 2 Demostración de identidades

Demuestre la identidad: $\sec(-x) = \sec x$

Demostración

$$\begin{aligned} \sec(-x) &= \frac{1}{\cos(-x)} && \text{Identidad recíproca} \\ &= \frac{1}{\cos x} && \text{Identidad para negativos} \\ &= \sec x && \text{Identidad recíproca} \end{aligned}$$

Problema seleccionado 2 Demuestre la identidad: $\csc(-x) = -\csc x$

EJEMPLO 3 **Demostración de identidades**

Demuestre la identidad: $\cot x \cos x + \operatorname{sen} x = \csc x$

Demostración

$$\begin{aligned} \cot x \cos x + \operatorname{sen} x &= \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cos x + \operatorname{sen} x && \text{Identidad cociente} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x && \text{Álgebra} \\ &= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} && \text{Algebra} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} x} && \text{Identidad pitagórica} \\ &= \csc x && \text{Identidad recíproca} \end{aligned}$$

Pasos algebraicos clave en el ejemplo 3

$$\frac{a}{b}a + b = \frac{a^2}{b} + b = \frac{a^2 + b^2}{b}$$

Problema seleccionado 3 Demuestre la identidad: $\tan x \operatorname{sen} x + \cos x = \sec x$

Para demostrar cualquier identidad, se procede de un lado al otro, o de la mitad de ambos lados, asegúrese que todos los pasos sean reversibles. No use propiedades de igualdad para realizar la misma operación en ambos lados de la ecuación. Aun cuando no hay un método fijo de demostración de funciones para todas las identidades, en ocasiones puede ayudar el seguir ciertos pasos.

Pasos sugeridos para la demostración de identidades

1. Empiece con el lado más complicado de la identidad y transfórmelo en un lado más simple.

2. Intente operaciones algebraicas tales como multiplicación, factorización, combinación de fracciones y separación de fracciones.
3. Si los otros pasos fallan, exprese cada función en términos de funciones seno y coseno, y después realice las operaciones algebraicas adecuadas.
4. En cada paso, tenga en mente el otro lado de la identidad. Esto a menudo revela lo que se debe hacer para llegar ahí.

EJEMPLO 4 **Demostración de identidades**

Demuestre la identidad: $\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}=2\sec x$

Demostración

$$\begin{aligned}
\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} &= \frac{(1+\operatorname{sen} x)^2+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)} && \text{Álgebra}\\
&= \frac{1+2\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)} && \text{Álgebra}\\
&= \frac{1+2\operatorname{sen} x+1}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)} && \text{Identidad pitagórica}\\
&= \frac{2+2\operatorname{sen} x}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)} && \text{Álgebra}\\
&= \frac{2(1+\operatorname{sen} x)}{\cos x\,(1+\operatorname{sen} x)} && \text{Álgebra}\\
&= \frac{2}{\cos x} && \text{Álgebra}\\
&= 2\sec x && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}$$

Pasos algebraicos clave en el ejemplo 4

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ba} \qquad (1+c)^2=1+2c+c^2 \qquad \frac{m(a+b)}{n(a+b)}=\frac{m}{n}$$

Problema seleccionado 4 Demuestre la identidad: $\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}+\dfrac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}=2\csc x$

EJEMPLO 5 **Demostración de identidades**

Demuestre la identidad: $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen} x+1}{\cos^2 x}=\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}$

Demostración

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x + 1}{\cos^2 x} = \frac{(\operatorname{sen} x + 1)^2}{\cos^2 x} \qquad \text{Algebra}$$

$$= \frac{(\operatorname{sen} x + 1)^2}{1 - \operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{sen} x)^2}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} \qquad \text{Álgebra}$$

$$= \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} \qquad \text{Álgebra}$$

Pasos algebraicos clave en el ejemplo 5

$a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2 \qquad 1 - b^2 = (1 - b)(1 - b)$

Problema seleccionado 5 Demuestre la identidad: $\sec^4 x - 2\sec^2 x \tan^2 x + \tan^4 x = 1$

EJEMPLO 6 Demostración de identidades

Demuestre la identidad: $\dfrac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = 1 - 2\cos^2 x$

Demostración

$$\frac{\tan x - \cot x}{\tan x + \cot x} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}$$

Cambie a senos y cosenos (identidades de cociente).

$$= \frac{(\operatorname{sen} x)(\cos x)\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)}{(\operatorname{sen} x)(\cos x)\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)}$$

Multiplique el numerador y el denominador por (sen x)(cos x), y use el álgebra para transformar la fracción compuesta en una fracción simple.

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x - \cos^2 x}{1} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= 1 - 2\cos^2 x \qquad \text{Álgebra}$$

Pasos algebraicos clave en el ejemplo 6

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}} = \frac{ab\left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}\right)}{ab\left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}\right)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2}$$

Problema seleccionado 6 Demuestre la identidad: $\cot x - \tan x = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x \cos x}$

Con sólo observar cómo otros demuestran identidades será suficiente para que usted mejore en ello, pero también debe demostrar una gran cantidad por su cuenta. Con la práctica, el proceso le parecerá menos complicado

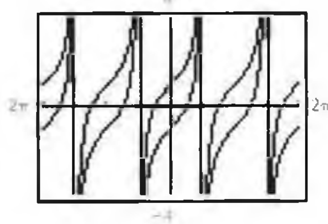

EJEMPLO 7 **Prueba de identidades mediante un dispositivo de graficación**

Use un dispositivo de graficación para probar si cada una de las siguientes expresiones es una identidad. Si una ecuación parece ser una identidad, demuéstrela. Si parece que no lo es, encuentre un valor de x para el que ambos lados estén definidos pero no sean iguales.

(A) $\tan x + 1 = (\sec x)(\operatorname{sen} x - \cos x)$
(B) $\tan x - 1 = (\sec x)(\operatorname{sen} x - \cos x)$

Solución (A) Grafique cada lado de la ecuación en la misma ventana de visión (figura 1).

FIGURA 1



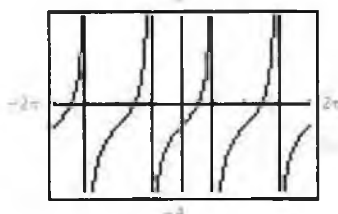
No existe una identidad, dado que las gráficas no concuerdan. Intente con $x = 0$

$$\text{Lado izquierdo:}\quad \tan 0 + 1 = 1$$
$$\text{Lado derecho:}\quad (\sec 0)(\operatorname{sen} 0 - \cos 0) = -1$$

Encontrar un valor de x para el que ambos lados estén definidos, pero no sean iguales, no es suficiente para demostrar que la ecuación no sea una identidad.

(B) Grafique cada lado de la ecuación en la misma ventana de visión (figura 2).

FIGURA 2



La ecuación parece ser una identidad, que en seguida se demostrará:

$$(\sec x)(\operatorname{sen} x - \cos x) = \left(\frac{1}{\cos x}\right)(\operatorname{sen} x - \cos x)$$
$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}$$
$$= \tan x - 1$$

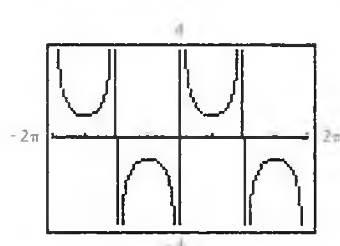
Problema seleccionado 7 Use un dispositivo de graficación para probar si cada una de las siguientes expresiones es una identidad. Si una ecuación parece ser una identidad, demuéstrela; si no lo parece, encuentre un valor de x para el que ambos lados estén definidos pero no sean iguales.

(A) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos^2 x} = \csc x$ (B) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos^2 x} = \sec x$

Respuestas a los problemas seleccionados

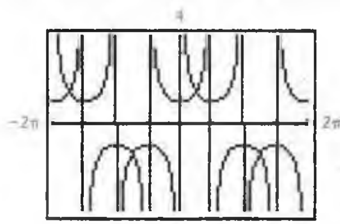
En las siguientes demostraciones de identidades, es posible tener otra secuencia (el proceso no es único).

1. $\operatorname{sen} x \cot x = \operatorname{sen} x \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cos x$
2. $\csc(-x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-x)} = \dfrac{1}{-\operatorname{sen} x} = -\csc x$
3. $\tan x \operatorname{sen} x + \cos x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$
4. $\dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \dfrac{(1 + \cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)} = \dfrac{1 + 2\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)}$
   $= \dfrac{2(1 + \cos x)}{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)} = 2 \csc x$
5. $\sec^4 x - 2 \sec^2 x \tan^2 x + \tan^4 x = (\sec^2 x - \tan^2 x)^2 = 1^2 = 1$
6. $\cot x - \tan x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \dfrac{\cos^2 x - (1 - \cos^2 x)}{\operatorname{sen} x \cos x} = \dfrac{2\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x \cos x}$
7. (A) una identidad:



$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \csc x$$

(B) No existe una identidad; el lado izquierdo no es igual al derecho para $x = 1$, por ejemplo.



EJERCICIO 6-1

A

Demuestre que los problemas del 1 al 26 sean identidades.

1. $\operatorname{sen}\theta \sec\theta = \tan\theta$
2. $\cos\theta \csc\theta = \cot\theta$
3. $\cot u \sec u \operatorname{sen} u = 1$
4. $\tan\theta \csc\theta \cos\theta = 1$
5. $\dfrac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = -\tan x$
6. $\cot(-x)\tan x = -1$
7. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\tan\alpha\cot\alpha}{\csc\alpha}$
8. $\tan\alpha = \dfrac{\cos\alpha\sec\alpha}{\cot\alpha}$
9. $\cot u + 1 = (\csc u)(\cos u + \operatorname{sen} u)$
10. $\tan u + 1 = (\sec u)(\operatorname{sen} u + \cos u)$
11. $\dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \csc x - \sec x$
12. $\dfrac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \cot x - \tan x$
13. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos t} + \cos t = \sec t$
14. $\dfrac{\cos^2 t}{\operatorname{sen} t} + \operatorname{sen} t = \csc t$
15. $\dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} = \sec x$
16. $\dfrac{\operatorname{sen} u}{1 - \cos^2 u} = \csc u$
17. $(1 - \cos u)(1 + \cos u) = \operatorname{sen}^2 u$
18. $(1 - \operatorname{sen} t)(1 + \operatorname{sen} t) = \cos^2 t$
19. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$
20. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2\operatorname{sen} x \cos x$
21. $(\sec t + 1)(\sec t - 1) = \tan^2 t$
22. $(\csc t - 1)(\csc t + 1) = \cot^2 t$
23. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
24. $\sec^2 u - \tan^2 u = 1$
25. $\cot x + \sec x = \dfrac{\cos x + \tan x}{\operatorname{sen} x}$
26. $\operatorname{sen} m(\csc m - \operatorname{sen} m) = \cos^2 m$

En los problemas del 27 al 30, grafique todas las partes de cada problema en la misma ventana de visión con un dispositivo de graficación.

27. $-\pi \le x \le \pi$
    (A) $y = \operatorname{sen}^2 x$ (B) $y = \cos^2 x$
    (C) $y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$
28. $-\pi \le x \le \pi$
    (A) $y = \sec^2 x$ (B) $y = \tan^2 x$
    (C) $y = \sec^2 x - \tan^2 x$
29. $-\pi \le x \le \pi$
    (A) $y = \dfrac{\cos x}{\cot x \operatorname{sen} x}$ (B) $y = 1$
30. $-\pi \le x \le \pi$
    (A) $y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x \tan x}$ (B) $y = 1$

B

Demuestre que los problemas del 31 al 60 sean identidades.

31. $\dfrac{1 - (\operatorname{sen} x - \cos x)^2}{\operatorname{sen} x} = 2\cos x$
32. $\dfrac{1 - \cos^2 y}{(1 - \operatorname{sen} y)(1 + \operatorname{sen} y)} = \tan^2 y$
33. $\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\cot\theta + 1}{\csc\theta}$
34. $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta = \dfrac{\tan\theta + 1}{\sec\theta}$
35. $\dfrac{1 + \cos y}{1 - \cos y} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 y}{(1 - \cos y)^2}$
36. $1 - \operatorname{sen} y = \dfrac{\cos^2 y}{1 + \operatorname{sen} y}$
37. $\tan^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \tan^2 x \operatorname{sen}^2 x$
38. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \csc^2 x$
39. $\dfrac{\csc\theta}{\cot\theta + \tan\theta} = \cos\theta$
40. $\dfrac{1 + \sec\theta}{\operatorname{sen}\theta + \tan\theta} = \csc\theta$
41. $\ln(\tan x) = \ln(\operatorname{sen} x) - \ln(\cos x)$
42. $\ln(\cot x) = \ln(\cos x) - \ln(\operatorname{sen} x)$
43. $\ln(\cot x) = -\ln(\tan x)$
44. $\ln(\csc x) = -\ln(\operatorname{sen} x)$
45. $\dfrac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \dfrac{\sec A - 1}{\sec A + 1}$
46. $\dfrac{1 - \csc y}{1 + \csc y} = \dfrac{\operatorname{sen} y - 1}{\operatorname{sen} y + 1}$
47. $\operatorname{sen}^4 w - \cos^4 w = 1 - 2\cos^2 w$
48. $\operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$
49. $\sec x - \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \tan x$
50. $\csc n - \dfrac{\operatorname{sen} n}{1 + \cos n} = \cot n$
51. $\dfrac{\cos^2 z - 3\cos z + 2}{\operatorname{sen}^2 z} = \dfrac{2 - \cos z}{1 + \cos z}$

52. $\dfrac{\text{sen}^2 t + 4\,\text{sen}\, t + 3}{\cos^2 t} = \dfrac{3 + \text{sen}\, t}{1 - \text{sen}\, t}$

53. $\dfrac{\cos^3 \theta - \text{sen}^3 \theta}{\cos \theta - \text{sen}\, \theta} = 1 + \text{sen}\, \theta \cos \theta$

54. $\dfrac{\cos^3 u + \text{sen}^3 u}{\cos u + \text{sen}\, u} = 1 - \text{sen}\, u \cos u$

55. $(\sec x - \tan x)^2 = \dfrac{1 - \text{sen}\, x}{1 + \text{sen}\, x}$

56. $(\cot u - \csc u)^2 = \dfrac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$

57. $\dfrac{\csc^4 x - 1}{\cot^2 x} = 2 + \cot^2 x$

58. $\dfrac{\sec^4 x - 1}{\tan^2 x} = 2 + \tan^2 x$

59. $\dfrac{1 + \text{sen}\, v}{\cos v} = \dfrac{\cos v}{1 - \text{sen}\, v}$

60. $\dfrac{\text{sen}\, x}{1 - \cos x} = \dfrac{1 + \cos x}{\text{sen}\, x}$

Use un dispositivo de graficación para probar si cada uno de los problemas del 61 al 72 es una identidad. Si una ecuación parece ser una identidad, demuéstrela. Si parece que no lo es, encuentre un valor de x para el que ambos lados estén definidos pero no sean iguales.

61. $\dfrac{\text{sen}\,(-x)}{\cos(-x)\tan(-x)} = -1$

62. $\dfrac{\cos(-x)}{\text{sen}\, x \cot(-x)} = 1$

63. $\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x \tan(-x)} = -1$

64. $\dfrac{\cos x}{\text{sen}\,(-x)\cot(-x)} = 1$

65. $\text{sen}\, x + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}\, x} = \sec x$

66. $\dfrac{1 - \tan^2 x}{1 - \cot^2 x} = \tan^2 x$

67. $\text{sen}\, x + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}\, x} = \csc x$

68. $\dfrac{\tan^2 x - 1}{1 - \cot^2 x} = \tan^2 x$

69. $\dfrac{\tan x}{\text{sen}\, x - 2\tan x} = \dfrac{1}{\cos x - 2}$

70. $\dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\, x} + \dfrac{\cos x}{1 + \text{sen}\, x} = 2 \sec x$

71. $\dfrac{\tan x}{\text{sen}\, x + 2\tan x} = \dfrac{1}{\cos x - 2}$

72. $\dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x + 1} - \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x - 1} = 2 \csc x$

C

Demuestre que los problemas del 73 al 78 son identidades.

73. $\dfrac{2\,\text{sen}^2 x + 3\cos x - 3}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{2\cos x - 1}{1 + \cos x}$

74. $\dfrac{3\cos^2 z + 5\,\text{sen}\, z - 5}{\cos^2 z} = \dfrac{3\,\text{sen}\, z - 2}{1 + \text{sen}\, z}$

75. $\dfrac{\tan u + \text{sen}\, u}{\tan u - \text{sen}\, u} - \dfrac{\sec u + 1}{\sec u - 1} = 0$

76. $\dfrac{\text{sen}\, x \cos y + \cos x\, \text{sen}\, y}{\cos x \cos y - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y} = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

77. $\tan \alpha + \cot \beta = \dfrac{\tan \beta + \cot \alpha}{\tan \beta \cot \alpha}$

78. $\dfrac{\cot \alpha + \cot \beta}{\cot \alpha \cot \beta - 1} = \dfrac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

En los problemas del 79 al 84 se requiere el uso de un dispositivo de graficación. A partir de la gráfica de $y1 = f(x)$, encuentre una función más simple de la forma $g(x) = k + AT(x)$, donde $T(x)$ es una de las seis funciones trigonométricas que tiene la misma gráfica como $y1 = f(x)$. Demuestre la identidad $f(x) = g(x)$.

79. $f(x) = \dfrac{1 - \text{sen}^2 x}{\tan x} + \text{sen}\, x \cos x$

80. $f(x) = \dfrac{1 + \text{sen}\, x}{2\cos x} - \dfrac{\cos x}{2 + 2\,\text{sen}\, x}$

81. $f(x) = \dfrac{\cos^2 x}{1 + \text{sen}\, x - \cos^2 x}$

82. $f(x) = \dfrac{\tan x\, \text{sen}\, x}{1 - \cos x}$

83. $f(x) = \dfrac{1 + \cos x - 2\cos^2 x}{1 - \cos x} - \dfrac{\text{sen}^2 x}{1 + \cos x}$

84. $f(x) = \dfrac{3\,\text{sen}\, x - 2\,\text{sen}\, x \cos x}{1 - \cos x} - \dfrac{1 + \cos x}{\text{sen}\, x}$

Cada una de las ecuaciones en los problemas del 85 al 92 es una identidad en ciertos cuadrantes asociados con x. Indique los cuadrantes.

85. $\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\text{sen}\, x$

86. $\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = \cos x$

87. $\sqrt{1 - \cos^2 x} = \text{sen}\, x$

88. $\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\cos x$

89. $\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = |\cos x|$

90. $\sqrt{1 - \cos^2 x} = |\text{sen}\, x|$

91. $\dfrac{\text{sen}\, x}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}} = \tan x$

92. $\dfrac{\text{sen}\, x}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}} = -\tan x$

En cálculo, las sustituciones trigonométricas proporcionan una forma efectiva para racionalizar las formas radicales $\sqrt{a^2 - u^2}$ y $\sqrt{a^2 + u^2}$, que a su vez conduce a la solución de una importante clase de problemas. Los problemas del 93 al 96 implican tales transformaciones. [Recuerde: $\sqrt{x^2} = |x|$ para todos los números reales x.]

93. En la forma radical $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$, sea $u = a$ sen x, $-\pi/2 < x < \pi/2$. Simplifique mediante una identidad básica y escriba la forma final sin radicales.

94. En la forma radical $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$, sea $u = a \cos x$, $0 < x < \pi$. Simplifique mediante una identidad básica y escriba la forma final sin radicales.

95. En la forma radical $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$, sea $u = a \tan x$, $0 < x < \pi/2$. Simplifique mediante una identidad básica y escriba la forma final sin radicales.

96. En la forma radical $\sqrt{a^2 + u^2}$, $a > 0$, sea $u = a \cot x$, $0 < x < \pi/2$. Simplifique mediante una identidad básica y escriba la forma final sin radicales.

SECCIÓN 6-2 Identidades de suma, diferencia y cofunción

- Identidades de suma y diferencia para el coseno
- Identidades de cofunción
- Identidades de suma y diferencia del seno y tangente
- Resumen y su uso

Las identidades básicas analizadas en la sección 6-1 implican sólo una variable. En esta sección se consideran identidades que implican dos variables.

Identidades de suma y diferencia para el coseno

Se comienza con la importante **identidad de diferencia para el coseno**:

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{1}$$

Muchas otras identidades útiles se pueden demostrar fácilmente a partir de ésta en particular.

Aquí, se traza una prueba de la ecuación (1) suponiendo que x y y están en el intervalo $(0, 2\pi)$ y $x > y > 0$. La identidad (1) se cumple, sin embargo, para todos los números reales y ángulos medidos en radianes o en grados.

Primero, asocie x y y con arcos y ángulos en el círculo unitario como se indica en la figura 1(a). Usando las definiciones de las funciones circulares, dadas en la sección 5-2, marque los puntos terminales de x y y como se muestra en la figura 1(a).

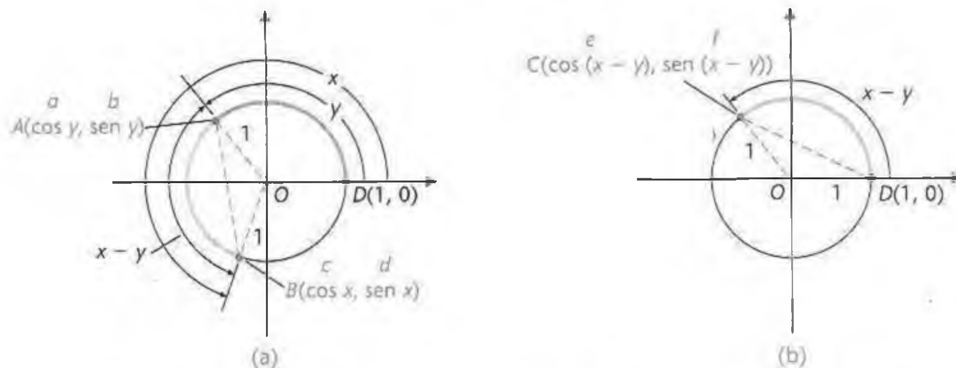


FIGURA 1 Identidad de diferencia.

Ahora, si se gira el triángulo AOB en el sentido de las manecillas del reloj con respecto al origen hasta que el punto terminal A coincida con $D(1, 0)$, entonces el punto terminal B estará en C, como se muestra en la figura 1(b). Por consiguiente, como en la rotación se conservan las longitudes,

$$d(A, B) = d(C, D)$$
$$\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} = \sqrt{(1 - e)^2 + (0 - f)^2}$$
$$(c - a)^2 + (d - b)^2 = (1 - e)^2 + f^2$$

$$c^2 - 2ac + a^2 + d^2 - 2db + b^2 = 1 - 2e + e^2 + f^2$$

$$(c^2 + d^2) + (a^2 + b^2) - 2ac - 2db = 1 - 2e + (e^2 + f^2) \qquad (2)$$

Como los puntos A, B y C están sobre los círculos unitarios, $c^2 + d^2 = 1$, $a^2 + b^2 = 1$ y $e^2 + f^2 = 1$, entonces la ecuación (2) se simplifica a

$$e = ac + bd \qquad (3)$$

Reemplazando e, a, c, b y d con $\cos(x - y)$, $\cos y$, $\cos x$, $\operatorname{sen} y$ y $\operatorname{sen} x$, respectivamente (véase figura 1), se obtiene

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos y \cos x + \operatorname{sen} y \operatorname{sen} x \\ &= \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \qquad (4) \end{aligned}$$

De esta manera, se ha establecido la identidad de diferencia para el coseno.

Si se reemplaza y con $-y$ en la ecuación (4) y se usan las identidades para negativos (un buen ejercicio para usted), se obtiene

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \qquad (5)$$

Ésta es la **identidad de suma para el coseno**.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Analice cómo se podría demostrar que, en general,

$$\cos(x - y) \neq \cos x - \cos y$$

y

$$\cos(x + y) \neq \cos x + \cos y$$

• Identidades de cofunción

Para obtener las identidades de suma y diferencia para las funciones seno y tangente, se necesita primero obtener las *identidades de cofunción* directamente de la ecuación (1), la identidad de diferencia para el coseno:

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos y + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} y \\ &= (0)(\cos y) + (1)(\operatorname{sen} y) \\ &= \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Así, se tiene la **identidad de cofunción para el coseno**:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \operatorname{sen} y \qquad (6)$$

para cualquier número real y o ángulo medido en radianes. Si y está medida en grados, reemplace $\pi/2$ con 90°.

Ahora, si se sustituye $y = \pi/2 - x$ en la ecuación (6), se tiene

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Esto es la **identidad de cofunción para el seno**; es decir,

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad (7)$$

donde x es cualquier número real o ángulo medido en radianes. Si x está medido en grados, reemplace $\pi/2$ con 90°.

Por último, se establece la **identidad de cofunción para la tangente** (y se deja su obtención para el problema 10 en la sección de ejercicios 6-2):

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x \qquad (8)$$

para cualquier número real o ángulo x medido en radianes. Si x está medido en grados, reemplace $\pi/2$ por 90°.

Comentario. Si $0 < x < 90°$, entonces x y $90° - x$ son ángulos complementarios. "Coseno", "cotangente" y "cosecante" significan, respectivamente, "complemento del seno", "complemento de la tangente" y "complemento de la secante". Ahora sólo se hará referencia al coseno, cotangente y cosecante como **cofunciones** del seno, tangente y secante, respectivamente.

• Identidades de suma y diferencia del seno y tangente

Para obtener una identidad de diferencia del seno, se usan las ecuaciones (1), (6) y (7) como sigue:

$$\operatorname{sen}(x - y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x - y)\right] \qquad \text{Use la ecuación 6}$$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - (-y)\right] \qquad \text{Álgebra}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(-y) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\operatorname{sen}(-y) \qquad \text{Use la ecuación (1).}$$

$$= \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y \qquad \text{Use las ecuaciones (6) y (7) y las identidades para negativos.}$$

Se obtiene el mismo resultado al reemplazar $\pi/2$ por 90°. Así,

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y \qquad (9)$$

es la **identidad de diferencia para el seno**.

Ahora, si se reemplaza y en la ecuación (9) con $-y$ (un buen ejercicio para usted), se obtiene

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \qquad (10)$$

la **identidad de suma para el seno**.

No es difícil deducir las identidades de suma y diferencia para la función tangente. Observe si puede explicar la razón de cada paso:

$$\tan(x - y) = \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x - y)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$$

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cos y}{\cos x \cos y} - \dfrac{\cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y} + \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}}$$

Divida el numerador y el denominador entre $\cos x$ y $\cos y$.

$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}}$$

$$= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Así, para todos los ángulos o números reales x y y,

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \quad (11)$$

es la **identidad de diferencia para la tangente**.

Por otra parte, si se reemplaza y en la ecuación (11) por $-y$ (otro buen ejercicio para usted), se obtiene

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad (12)$$

la **identidad de suma para la tangente**.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Analice cómo se podría demostrar que, en general,

$$\tan(x - y) \neq \tan x - \tan y$$

y

$$\tan(x + y) \neq \tan x + \tan y$$

• Resumen y su uso Antes de proceder con ejemplos que ilustren el uso de estas nuevas identidades, repase la lista dada en el cuadro siguiente.

Resumen de identidades

Identidades de suma

$$\text{sen}(x+y) = \text{sen}\, x \cos y + \cos x\, \text{sen}\, y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Identidades de diferencia

$$\text{sen}(x-y) = \text{sen}\, x \cos y - \cos x\, \text{sen}\, y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$$
$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Identidades de cofunción
(Reemplace $\pi/2$ por 90° si x está en grados.)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen}\, x \qquad \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

EJEMPLO 1 **Uso de la identidad de diferencia**

Simplifique $\cos(x - \pi)$ mediante la identidad de diferencia.

Solución

$$\begin{aligned}\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y\\ \cos(x-\pi) &= \cos x \cos \pi + \text{sen}\, x\, \text{sen}\, \pi\\ &= (\cos x)(-1) + (\text{sen}\, x)(0)\\ &= -\cos x\end{aligned}$$

Problema seleccionado 1 Simplifique $\text{sen}(x + 3\pi/2)$ mediante la identidad de suma.


EJEMPLO 2 **Comprobación del uso de identidades de suma y diferencia en un dispositivo de graficación**

Simplifique $\text{sen}(x - \pi)$ mediante la identidad de diferencia. Introduzca la forma original como $y1$ y la forma convertida como $y2$ en un dispositivo de graficación, después grafíquelas en la misma ventana de visión.

Solución

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x-\pi) &= \operatorname{sen} x \cos \pi - \cos x \operatorname{sen} \pi\\ &= (\operatorname{sen} x)(-1) - (\cos x)(0)\\ &= -\operatorname{sen} x\end{aligned}$$

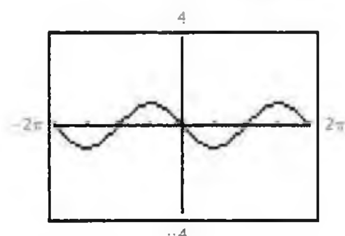


FIGURA 2

La gráfica de $y1 = \operatorname{sen}(x-\pi)$ y $y2 = -\operatorname{sen} x$ se muestran en la misma ventana de visión (figura 2). Use la función TRACE y muévase hacia atrás y adelante entre $y1$ y $y2$ en diferentes valores de x para demostrar que los correspondientes valores de y sean los mismos, o casi los mismos.

Problema seleccionado 2 Simplifique $\cos(x + 3\pi/2)$ usando una identidad de suma. Introduzca la forma original como $y1$ y la forma convertida como $y2$ en un dispositivo de graficación, después grafíquelas en la misma ventana de visión.

EJEMPLO 3 **Determinación de valores exactos**

Encuentre el valor de tan 75° en la forma radical exacta.

Solución Como se puede escribir $75° = 45° + 30°$, la suma de dos ángulos especiales, se puede usar la identidad de suma para tangentes con $x = 45°$ y $y = 30°$.

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\tan(45° + 30°) = \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°} \quad \text{Identidad de suma}$$

$$= \frac{1 + (1/\sqrt{3})}{1 - 1(1/\sqrt{3})} \quad \text{Evalúe las funciones de manera exacta.}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \quad \text{Multiplique el numerador y el denominador por } \sqrt{3} \text{ y simplifique.}$$

$$= 2 + \sqrt{3} \quad \text{Racionalice el denominador y simplifique.}$$

Problema seleccionado 3 Encuentre el valor de cos 15° en la forma radical exacta.

EJEMPLO 4 **Determinación de valores exactos**

Encuentre el valor exacto de $\cos(x+y)$, dado $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, $\cos y = \frac{4}{5}$, x es un ángulo en el cuadrante II y y es un ángulo en el cuadrante I. No use calculadora ni tabla.

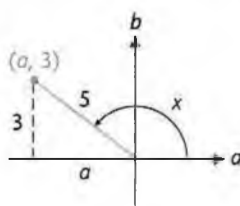
Solución Se comienza con la identidad de suma para el coseno,

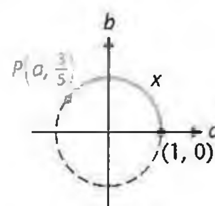
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

Se conoce el $\operatorname{sen} x$ y el $\cos y$, pero no el $\cos x$ y el $\operatorname{sen} y$. Se encuentran las dos últimas usando dos métodos diferentes como sigue (use el método que considere más fácil).

Dado que sen $x = \frac{3}{5}$ y x es un ángulo que está en el cuadrante II, encuentre cos x:

Método I. Use un triángulo de referencia: *Método II.* Use un círculo unitario:





$$\cos x = \frac{a}{5} \qquad \cos x = a$$

$$a^2 + 3^2 = 5^2 \qquad a^2 + (\tfrac{3}{5})^2 = 1$$

$$a^2 = 16 \qquad a^2 = \tfrac{16}{25}$$

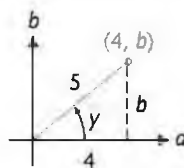
$$a = \pm 4 \qquad a = \pm\tfrac{4}{5}$$

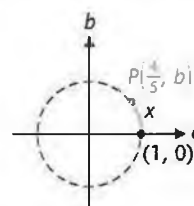
En el cuadrante II, $a = -4$ En el cuadrante II, $a = -\frac{4}{5}$

Por lo tanto, $\cos x = -\frac{4}{5}$ Por lo tanto, $\cos x = -\frac{4}{5}$

Dado que cos $y = \frac{4}{5}$ y y es un ángulo que está en el cuadrante I, encuentre sen y:

Método I. Use un triángulo de referencia: *Método II.* Use un círculo unitario:





$$\text{sen}\, y = \frac{b}{5} \qquad \text{sen}\, y = b$$

$$4^2 + b^2 = 5^2 \qquad (\tfrac{4}{5})^2 + b^2 = 1$$

$$b^2 = 9 \qquad b^2 = \tfrac{9}{25}$$

$$b = \pm 3 \qquad b = \pm\tfrac{3}{5}$$

En el cuadrante II, $b = 3$ En el cuadrante II, $b = \frac{3}{5}$

Por lo tanto, $\text{sen}\, y = \frac{3}{5}$ Por lo tanto, $\text{sen}\, y = \frac{3}{5}$

Ahora se puede evaluar cos $(x + y)$ sin conocer x ni y:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$$
$$= (-\tfrac{4}{5})(\tfrac{4}{5}) - (\tfrac{3}{5})(\tfrac{3}{5}) = -\tfrac{25}{25} = -1$$

Problema seleccionado 4 Encuentre el valor exacto de sen $(x - y)$, dados sen $x = -\frac{2}{3}$, cos $y = \sqrt{5}/3$, x es un ángulo que se encuentra en el cuadrante III y y es un ángulo que está en el cuadrante IV. No use calculadora ni tabla.

EJEMPLO 5 **Demostración de identidades**

Demuestre la identidad: $\tan x + \cot y = \dfrac{\cos(x-y)}{\cos x \operatorname{sen} y}$

Demostración

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x \operatorname{sen} y} = \frac{\cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \operatorname{sen} y}$$ Identidad de diferencia para el coseno

$$= \frac{\cancel{\cos x} \cos y}{\cancel{\cos x} \operatorname{sen} y} + \frac{\operatorname{sen} x \cancel{\operatorname{sen} y}}{\cos x \cancel{\operatorname{sen} y}}$$ Álgebra

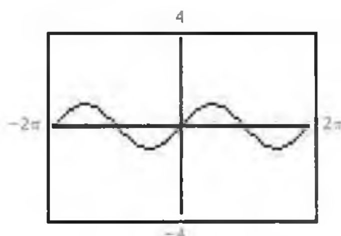
$$= \cot y + \tan x$$ Identidades de cociente

$$= \tan x + \cot y$$

Problema seleccionado 5 Demuestre la identidad: $\cot y - \cot x = \dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $-\cos x$ 2. $y1 = \cos(x + 3\pi/2)$, $y2 = \operatorname{sen} x$



3. $(1+\sqrt{3})/2\sqrt{2}$ o $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$ 4. $-4\sqrt{5}/9$

5. $\dfrac{\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} = \dfrac{\cancel{\operatorname{sen} x} \cos y}{\cancel{\operatorname{sen} x} \operatorname{sen} y} - \dfrac{\cos x \cancel{\operatorname{sen} y}}{\operatorname{sen} x \cancel{\operatorname{sen} y}} = \cot y - \cot x$

EJERCICIO 6-2

A

Se pueden utilizar las identidades de suma para establecer propiedades periódicas para las funciones trigonométricas. Demuestre las identidades de los problemas del 1 al 8 usando identidades de suma.

1. $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$ **2.** $\cos(x + 2\pi) = \cos x$

3. $\tan(x + \pi) = \tan x$ **4.** $\cot(x + \pi) = \cot x$

5. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, k es un entero

6. $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x$, k es un entero

7. $\cot(x + k\pi) = \cot x$, k en un entero

8. $\tan(x + k\pi) = \tan x$, k en un entero

Demuestre cada identidad en los problemas del 9 al 12 usando identidades de cofunción para el seno y el coseno y las identidades básicas analizadas en la sección 6-1.

9. $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$ **10.** $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

11. $\csc\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$ **12.** $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$

Convierta los problemas del 13 al 18 a formas que impliquen sen x, cos x y/o tan x mediante identidades de suma o de diferencia.

13. $\operatorname{sen}(30° - x)$ **14.** $\operatorname{sen}(x - 45°)$

15. $\operatorname{sen}(180° - x)$ **16.** $\cos(x + 180°)$

17. $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ **18.** $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

B

Use las identidades adecuadas para encontrar los valores exactos de los problemas del 19 al 26. No use calculadora.

19. sec 75° **20.** sen 75°

21. $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}$ $\left[\textit{Sugerencia: } \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right]$

22. $\cos\frac{\pi}{12}$ $\left[\textit{Sugerencia: } \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right]$

23. cos 74° cos 44° + sen 74° sen 44°

24. sen 22° cos 38° + cos 22° sen 38°

25. $\frac{\tan 27° + \tan 18°}{1 - \tan 27° \tan 18°}$ **26.** $\frac{\tan 110° - \tan 50°}{1 + \tan 110° \tan 50°}$

Encuentre sen (x − y) y tan (x + y), de manera exacta y sin calculadora usando la información dada en los problemas del 27 al 30.

27. $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{sen} y = \sqrt{8}/3$, x es un ángulo en el cuadrante IV, y es un ángulo en el cuadrante I.

28. $\operatorname{sen} x = \frac{2}{3}$, $\cos y = -\frac{1}{4}$, x es un ángulo en el cuadrante II, y es un ángulo en el cuadrante III.

29. $\tan x = \frac{3}{4}$, $\tan y = -\frac{1}{2}$, x es un ángulo en el cuadrante III, y es un ángulo del cuadrante IV.

30. $\cos x = -\frac{1}{3}$, $\tan y = \frac{1}{2}$, x es un ángulo del cuadrante II, y es un ángulo en el cuadrante III.

Demuestre cada identidad en los problemas del 31 al 44.

31. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

32. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

33. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

34. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$

35. $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$ **36.** $\cot 2x = \frac{\cot^2 x - 1}{2\cot x}$

37. $\frac{\operatorname{sen}(v + u)}{\operatorname{sen}(v - u)} = \frac{\cot u + \cot v}{\cot u - \cot v}$

38. $\frac{\operatorname{sen}(u + v)}{\operatorname{sen}(u - v)} = \frac{\tan u + \tan v}{\tan u - \tan v}$

39. $\cot x - \tan y = \frac{\cos(x + y)}{\operatorname{sen} x \cos y}$

40. $\tan x - \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos x \cos y}$

41. $\tan(x - y) = \frac{\cot y - \cot x}{\cot x \cot y + 1}$

42. $\tan(x + y) = \frac{\cot x + \cot y}{\cot x \cot y - 1}$

43. $\frac{\cos(x + h) - \cos x}{h} = \cos x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) - \operatorname{sen} x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$

44. $\frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} = \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$

Evalúe ambos lados de la identidad de diferencia para el seno, y la identidad de suma para la tangente en cuanto a los valores de x y y indicados en los problemas del 45 al 48. Evalúe con calculadora hasta obtener cuatro dígitos significativos.

45. $x = 5.288$, $y = 1.769$ **46.** $x = 3.042$, $y = 2.384$

47. $x = 42.08°$, $y = 68.37°$ **48.** $x = 128.3°$, $y = 25.62°$

49. Explique cómo podría demostrar que, en general,

$$\sec(x - y) \neq \sec x - \sec y$$

50. Explique cómo podría demostrar que, en general,

$$\csc(x + y) \neq \csc x + \csc y$$

En los problemas del 51 al 56, use las identidades de suma o diferencia para convertir cada ecuación a la forma que implica sen x, cos x y/o tan x. Introduzca la ecuación original en un dispositivo de graficación como y1 y la forma convertida como y2, después grafique y1 y y2 en la misma ventana de visión. Use la función TRACE para comparar las dos gráficas.

51. $y = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$ **52.** $y = \operatorname{sen}(x - \pi/3)$

53. $y = \cos(x - 3\pi/4)$ **54.** $y = \cos(x + 5\pi/6)$

55. $y = \tan(x + 2\pi/3)$ **56.** $y = \tan(x - \pi/4)$

C

En los problemas del 57 al 60, evalúe de manera exacta como se hace con los números reales sin usar una calculadora.

57. $\operatorname{sen}[\cos^{-1}(-\frac{4}{5}) + \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{3}{5})]$

58. $\cos[\operatorname{sen}^{-1}(-\frac{3}{5}) + \cos^{-1}(\frac{4}{5})]$

59. $\operatorname{sen}[\arccos\frac{1}{2} + \arcsen(-1)]$

60. $\cos[\arccos(-\sqrt{3}/2) - \arcsen(-\frac{1}{2})]$

61. Exprese $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} y)$ en una forma equivalente sin que aparezcan las funciones trigonométricas normales ni las inversas.

62. Exprese $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x - \cos^{-1} y)$ en forma equivalente sin que aparezcan las funciones trigonométricas normales ni las inversas.

Demuestre las identidades en los problemas 63 y 64.

63. $\cos(x + y + z) = \cos x \cos y \cos z - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos z - \operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen} z - \cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$

64. $\text{sen}(x + y + z) = \text{sen}\,x\cos y\cos z + \cos x\,\text{sen}\,y\cos z + \cos x\cos y\,\text{sen}\,z - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y\,\text{sen}\,z$

En los problemas 65 y 66, escriba cada ecuación en términos de una sola función trigonométrica. Introduzca la ecuación original en un dispositivo de graficación como y1 y la forma convertida como y2, después grafique y1 y y2 en la misma ventana de visión. Use la función TRACE para comparar las dos gráficas.

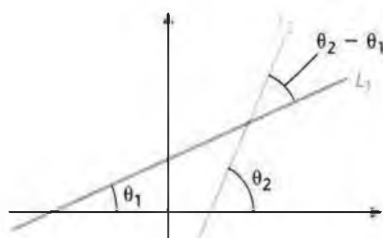
65. $y = \cos 1.2x \cos 0.8x - \text{sen}\,1.2x\,\text{sen}\,0.8x$

66. $y = \text{sen}\,0.8x \cos 0.3x - \cos 0.8x\,\text{sen}\,0.3x$

APLICACIONES

67. Geometría analítica. Use la información de la figura para demostrar que

$$\tan(\theta_2 - \theta_1) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

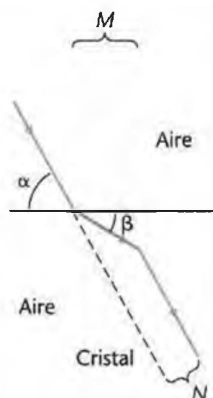


$\tan\theta_1 = \text{Pendiente de } L_1 = m_1$

$\tan\theta_2 = \text{Pendiente de } L_2 = m_2$

68. Geometría analítica. Encuentre el ángulo agudo de intersección entre las dos rectas $y = 3x + 1$ y $y = \frac{1}{2}x - 1$. (Use los resultados del problema 67.)

69. Refracción de la luz. Los rayos de luz que pasan a través del cristal de una ventana, se refractan cuando entran al vidrio y cuando vuelven a salir continúan en una trayectoria paralela a los rayos entrantes (véase figura). Si el cristal tiene un espesor de M pulgadas, el desplazamiento paralelo de los rayos de luz es de N pulgadas, el ángulo de incidencia es α y el ángulo de refracción es β, demuestre que



$$\tan\beta = \tan\alpha - \frac{N}{M}\sec\alpha$$

[*Sugerencia*: Use primero las relaciones geométricas para obtener

$$\frac{M}{\text{sen}(90° - \beta)} = \frac{N}{\text{sen}(\alpha - \beta)}$$

después use identidades de diferencia e identidades fundamentales para completar la deducción.]

70. Refracción de la luz. Use el resultado del problema 69 para encontrar β hasta el grado más próximo si $\alpha = 43°$, $M = 0.25$ pulgadas y $N = 0.11$ pulgadas.

71. Reconocimiento. El Capitán es un gran pico monolítico de granito que se eleva en forma recta desde el suelo del valle de Yosemite en el Parque Nacional de Yosemite. Atrae a escaladores de picos de todo el mundo. Algunas veces la reflexión del pico se puede ver en el río Merced que corre a lo largo del valle. ¿Cómo se puede determinar la altura H de El Capitán, con respecto del río, usando sólo un sextante de h pies de altura para medir el ángulo de elevación β hacia la parte superior del pico, y el ángulo de depresión α de la parte superior del pico reflejado en el río? (Véase la figura, no está a escala.)

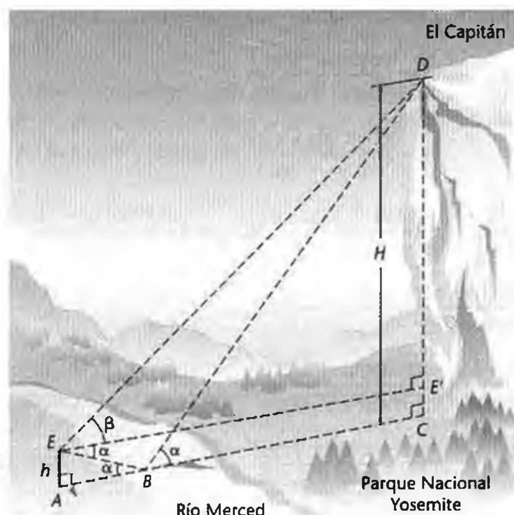
(A) Usando las relaciones de triángulos rectángulos, demuestre que

$$H = h\frac{1 + \tan\beta\cot\alpha}{1 - \tan\beta\cot\alpha}$$

(B) Usando identidades de suma o diferencia, demuestre que el resultado del inciso (A) se puede escribir en la forma

$$H = h\frac{\text{sen}(\alpha + \beta)}{\text{sen}(\alpha - \beta)}$$

(C) Si un sextante con una altura de 4.90 pies registra que α es de 46.23° y β es de 46.15°, calcule la altura H de El Capitán por arriba del río Merced hasta tres dígitos significativos.



SECCIÓN 6-3 Identidades de ángulos dobles y de ángulo mitad

- Identidades de ángulos dobles
- Identidades de ángulo mitad

En esta sección se desarrolla otro conjunto importante de identidades llamadas *identidades de ángulos dobles* y de *ángulo mitad.* Se pueden deducir esas identidades directamente de las identidades de suma y de diferencia explicadas en la sección 6-2. Aunque los nombres usan la palabra "ángulo", las nuevas identidades se cumplen también para los números reales.

Identidades de ángulos dobles

Se comienza con la identidad de suma para el seno:

$$\text{sen}\,(x + y) = \text{sen}\,x \cos y + \cos x\,\text{sen}\,y$$

y se reemplaza y por x para obtener

$$\text{sen}\,(x + x) = \text{sen}\,x \cos x + \cos x\,\text{sen}\,x$$

Con la simplificación, se tiene

$$\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x \cos x \qquad \text{Identidad de ángulo doble para el seno} \qquad (1)$$

Si se comienza con la identidad de suma para el coseno,

$$\cos\,(x + y) = \cos x \cos y - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,y$$

y se reemplaza y por x, se obtiene

$$\cos\,(x + x) = \cos x \cos x - \text{sen}\,x\,\text{sen}\,x$$

Con la simplificación, se tiene

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \qquad \text{Primera identidad de ángulo doble para el coseno} \qquad (2)$$

Ahora, mediante la identidad pitagórica

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (3)$$

en la forma

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \qquad (4)$$

y sustituyéndola en la ecuación (2), se obtiene

$$\cos 2x = 1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x$$

Con la simplificación, se obtiene

$$\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x \qquad \text{Segunda identidad de ángulo doble para el coseno} \qquad (5)$$

O, si se usa la ecuación (3) en la forma

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

y se sustituye en la ecuación (2), se obtiene

$$\cos 2x = \cos^2 x - (1 - \cos^2 x)$$

Con la simplificación, el resultado es

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \qquad \text{Tercera identidad de ángulo doble del coseno} \qquad (6)$$

Se pueden establecer las identidades de ángulos dobles para la función tangente en la misma forma comenzando con la fórmula de suma para la tangente. Esto se propone como ejercicio para usted (problemas del 19 al 21 en el ejercicio 6-3).

A continuación se indican las identidades de ángulo doble para una adecuada referencia.

Identidades de ángulos dobles

$$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\cot x}{\cot^2 x - 1} = \frac{2}{\cot x - \tan x}$$

Las identidades del segundo renglón se usan de manera ventajosa en cálculos del siguiente tipo:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

para transformar una forma con potencia en otra sin potencia.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) Analice cómo se podría demostrar que, en general,

$$\text{sen } 2x \neq 2 \text{ sen } x \qquad \cos 2x \neq 2\cos x \qquad \tan 2x \neq 2\tan x$$

(B) Grafique $y1 = \text{sen } 2x$ y $y2 = 2 \text{ sen } x$ en la misma ventana de visión. ¿Cuál es su conclusión? Repita el proceso para los otros dos postulados del inciso (A).

EJEMPLO 1 **Determinación de identidades**

Demuestre la identidad: $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

Demostración Se comienza por el lado derecho:

$$\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} \qquad \text{Identidades de cociente}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\cos^2 x + \text{sen}^2 x} \qquad \text{Álgebra}$$

$$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \cos 2x \qquad \text{Identidad de ángulo doble}$$

Pasos algebraicos clave en el ejemplo 1

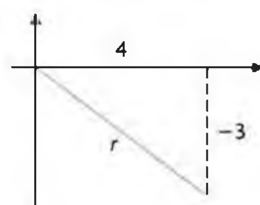
$$\frac{1 - \dfrac{a^2}{b^2}}{1 + \dfrac{a^2}{b^2}} = \frac{b^2\left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)}{b^2\left(1 + \dfrac{a^2}{b^2}\right)} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2}$$

Problema seleccionado 1 Demuestre la identidad: $\text{sen } 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

EJEMPLO 2 Determinación de valores exactos

Encuentre los valores exactos, sin usar calculadora, de sen $2x$ y cos $2x$ si $\tan x = -\frac{3}{4}$ y x es un ángulo en el cuadrante IV.

Solución Se dibuja primero el triángulo de referencia para x y se encuentra cualesquiera de los lados desconocidos:



$$r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{sen } x = -\tfrac{3}{5}$$

$$\cos x = \tfrac{4}{5}$$

Ahora se usan las identidades de ángulos dobles para el seno y el coseno:

$$\text{sen } 2x = 2 \,\text{sen } x \cos x = 2\left(-\tfrac{3}{5}\right)\left(\tfrac{4}{5}\right) = -\tfrac{24}{25}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\tfrac{4}{5}\right)^2 - 1 = \tfrac{7}{25}$$

Problema seleccionado 2 Encuentre los valores exactos, sin usar calculadora, de cos $2x$ y tan $2x$ si sen $x = \frac{4}{5}$ y x es un ángulo en el cuadrante II.

Identidades de ángulo mitad

Las identidades de ángulo mitad son simplemente identidades de ángulo doble establecidas en forma alterna. Se comienza con la identidad de ángulo doble para el coseno en la forma

$$\cos 2m = 1 - 2\,\text{sen}^2\, m$$

Ahora reemplace m con $x/2$ y despeje para sen $(x/2)$ [si $2m$ es el doble de m, entonces m es la mitad de $2m$ (piense acerca de esto)]:

$$\cos x = 1 - 2\text{sen}^2 \frac{x}{2}$$

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$

$$\text{sen}\, \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \qquad \text{Identidad ángulo mitad para el seno} \qquad (7)$$

donde la elección del signo se determina por el cuadrante en que se encuentre $x/2$.

Si se quiere obtener una identidad de ángulo mitad para el coseno, se comienza con la identidad de ángulo doble para el coseno en la forma

$$\cos 2m = 2\cos^2 m - 1$$

y se hace $m = x/2$ para obtener

$$\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \qquad \text{Identidad de ángulo mitad para el coseno} \qquad (8)$$

donde el signo se determina por el cuadrante en el que se encuentre $x/2$.

Para obtener una *identidad de ángulo mitad para la tangente,* use la identidad de cociente y las fórmulas de ángulo mitad para el seno y coseno:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\text{sen}\, \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Así,

$$\tan \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \qquad \text{Identidad de ángulo mitad para la tangente} \qquad (9)$$

donde el signo se determina por el cuadrante en que se encuentre $x/2$.

Se pueden obtener versiones más simples de la ecuación (9) como sigue:

$$\left|\tan \frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \qquad (10)$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{sen}^2\, x}{(1 + \cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{sen}^2\, x}}{\sqrt{(1 + \cos x)^2}}$$

$$= \frac{|\text{sen}\, x|}{1 + \cos x}$$

$\sqrt{\text{sen}^2\, x} = |\text{sen}\, x|$ y $\sqrt{(1 + \cos x)^2} = 1 + \cos x$, ya que $1 + \cos x$ nunca es negativo

Se pueden eliminar todos los signos de valor absoluto, ya que se puede demostrar que tan $(x/2)$ y sen x siempre tienen el mismo signo (un buen ejercicio para usted). Así,

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\text{sen}\, x}{1 + \cos x} \qquad \text{Identidad de ángulo mitad para la tangente} \qquad (11)$$

Al multiplicar el numerador y el denominador en el radicando de la ecuación (10) por $1 - \cos x$ y razonando como antes, también se puede obtener

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\text{sen}\, x} \qquad \text{Identidad de ángulo mitad para la tangente} \qquad (12)$$

A continuación se incluye la lista de todas las identidades de ángulo mitad para una adecuada referencia.

Identidades de ángulo mitad

$$\text{sen}\, \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\text{sen}\, x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\text{sen}\, x}$$

donde el signo se determina por el cuadrante en que se encuentre $x/2$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 (A) Analice cómo se podría demostrar que, en general,

$$\text{sen}\, \frac{x}{2} \neq \tfrac{1}{2}\, \text{sen}\, x \qquad \cos \frac{x}{2} \neq \tfrac{1}{2} \cos x \qquad \tan \frac{x}{2} \neq \tfrac{1}{2} \tan x$$

(B) Grafique $y1 = \text{sen}\,(x/2)$ y $y2 = \tfrac{1}{2}\, \text{sen}\, x$ en la misma ventana de visión. ¿Qué se puede concluir? Repita el proceso para los otros dos postulados del inciso (A).

EJEMPLO 3 **Determinación de valores exactos**

Calcule el valor exacto de sen 165° sin usar calculadora mediante una identidad de ángulo mitad.

Solución

$$\text{sen}\,165^\circ = \text{sen}\,\frac{330^\circ}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \cos 330^\circ}{2}}$$ Use la identidad de ángulo mitad para el seno con un radical positivo, ya que sen 165° es positivo.

$$= \sqrt{\frac{1 - (\sqrt{3}/2)}{2}}$$

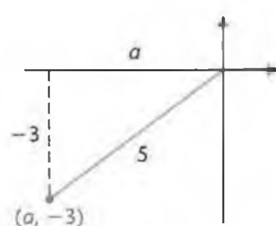
$$= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Problema seleccionado 3 Calcule el valor exacto de tan 105° sin usar calculadora, mediante una identidad de ángulo mitad.

EJEMPLO 4 **Determinación de valores exactos**

Encuentre los valores exactos de $\cos(x/2)$ y $\cot(x/2)$, sin utilizar calculadora, si $\text{sen}\,x = -\frac{3}{5}$, $\pi < x < 3\pi/2$.

Solución Dibuje un triángulo de referencia en el tercer cuadrante y encuentre $\cos x$. Después use las identidades pertinentes de ángulo mitad.



$$a = -\sqrt{5^2 - (-3)^2} = -4$$

$$\cos x = -\tfrac{4}{5}$$

Si $\pi < x < 3\pi/2$, entonces

$$\frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} < \frac{3\pi}{4}$$ Divida cada miembro de $\pi < x < 3\pi/2$ entre 2.

Así, $x/2$ es un ángulo en el segundo cuadrante donde el coseno y la cotangente son negativos, y

$$\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \qquad \cot\frac{x}{2} = \frac{1}{\tan(x/2)} = \frac{\text{sen}\,x}{1 - \cos x}$$

$$= -\sqrt{\frac{1 + (-\frac{4}{5})}{2}} \qquad = \frac{-\frac{3}{5}}{1 - (-\frac{4}{5})} = -\frac{1}{3}$$

$$= -\sqrt{\frac{1}{10}} \text{ o } \frac{-\sqrt{10}}{10}$$

Problema seleccionado 4 Encuentre los valores exactos de sen $(x/2)$ y tan $(x/2)$, sin usar una calculadora, si $\cot x = -\frac{4}{3}$, $\pi/2 < x < \pi$.

EJEMPLO 5 **Demostración de identidades**

Demuestre la identidad: $\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{2 \tan x}$

Demostración

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$ Identidad de ángulo mitad para el seno

$$\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$$ Eleve al cuadrado ambos lados.

$$= \frac{\tan x}{\tan x} \cdot \frac{1 - \cos x}{2}$$ Álgebra

$$= \frac{\tan x - \tan x \cos x}{2 \tan x}$$ Álgebra

$$= \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{2 \tan x}$$ Identidad de cociente

Problema seleccionado 5 Demuestre la identidad: $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{\tan x + \operatorname{sen} x}{2 \tan x}$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $\frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)}{1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x \left[2\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\right]}{\cos^2 x \left(1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)} = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$

2. $\cos 2x = -\frac{7}{25}$, $\tan 2x = \frac{24}{7}$ 3. $-\sqrt{3} - 2$ 4. $\operatorname{sen}(x/2) = 3\sqrt{10}/10$, $\tan(x/2) = 3$

5. $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{\tan x}{\tan x} \cdot \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{\tan x + \tan x \cos x}{2 \tan x} = \frac{\tan x + \operatorname{sen} x}{2 \tan x}$

EJERCICIO 6-3

A

En los problemas del 1 al 6, verifique cada identidad para los valores indicados.

1. $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, $x = 30°$
2. $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, $x = 45°$
3. $\tan 2x = \frac{2}{\cot x - \tan x}$, $x = \frac{\pi}{3}$
4. $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$, $x = \frac{\pi}{6}$
5. $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$, $x = \pi$ (Escoja el signo correcto).
6. $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$, $x = \frac{\pi}{2}$ (Escoja el signo correcto).

En los problemas del 7 al 10, encuentre el valor exacto, sin usar calculadora, mediante identidades de ángulo doble y ángulo mitad.

7. sen 22.5° **8.** tan 75°

9. cos 67.5° **10.** tan 15°

En los problemas del 11 al 14, grafique y1 y y2 en la misma ventana de visión para $-2\pi \le x \le 2\pi$. Use la función TRACE para comparar las dos gráficas.

11. $y1 = \cos 2x$, $y2 = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

12. $y1 = \text{sen}\, 2x$, $y2 = 2\,\text{sen}\, x \cos x$

13. $y1 = \tan \frac{x}{2}$, $y2 = \frac{\text{sen}\, x}{1 + \cos x}$

14. $y1 = \tan 2x$, $y2 = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

B

Demuestre las identidades en los problemas del 15 al 32.

15. $(\text{sen}\, x + \cos x)^2 = 1 + \text{sen}\, 2x$

16. $\text{sen}\, 2x = (\tan x)(1 + \cos 2x)$

17. $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

18. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$

19. $1 - \cos 2x = \tan x\, \text{sen}\, 2x$

20. $1 + \text{sen}\, 2t = (\text{sen}\, t + \cos t)^2$

21. $\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ **22.** $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}$

23. $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ **24.** $\tan 2x = \frac{2 \cot x}{\cot^2 x - 1}$

25. $\cot \frac{\theta}{2} = \frac{\text{sen}\, \theta}{1 - \cos \theta}$ **26.** $\cot \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{\text{sen}\, \theta}$

27. $\cos 2u = \frac{1 - \tan^2 u}{1 + \tan^2 u}$ **28.** $\frac{\cos 2u}{1 - \text{sen}\, 2u} = \frac{1 + \tan u}{1 - \tan u}$

29. $2 \csc 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}$ **30.** $\sec 2x = \frac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x}$

31. $\cos \alpha = \frac{1 - \tan^2 (\alpha/2)}{1 + \tan^2 (\alpha/2)}$

32. $\cos 2\alpha = \frac{\cot \alpha - \tan \alpha}{\cot \alpha + \tan \alpha}$

Calcule los valores exactos de sen 2x cos 2x y tan 2x usando la información dada en los problemas del 33 al 36 y las identidades adecuadas. No use calculadora.

33. $\text{sen}\, x = \frac{3}{5}$, $\pi/2 < x < \pi$ **34.** $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\pi/2 < x < \pi$

35. $\tan x = -\frac{5}{12}$, $-\pi/2 < x < 0$

36. $\cot x = -\frac{5}{12}$, $-\pi/2 < x < 0$

En los problemas del 37 al 40, calcule los valores exactos de sen (x/2), cos (x/2) y tan (x/2) usando la información dada y las identidades adecuadas. No use calculadora.

37. $\text{sen}\, x = -\frac{1}{3}$, $\pi < x < 3\pi/2$

38. $\cos x = -\frac{1}{4}$, $\pi < x < 3\pi/2$

39. $\cot x = \frac{3}{4}$, $-\pi < x < -\pi/2$

40. $\tan x = \frac{3}{4}$, $-\pi < x < -\pi/2$

Suponga que está asesorando a un estudiante que tiene dificultades para encontrar los valores exactos de sen θ y cos θ a partir de la información dada en los problemas 41 y 42. Suponga que ha realizado cada problema y ha identificado los pasos clave en el proceso de solución; proceda a guiar al estudiante por el proceso de solución usando las siguientes preguntas. Registre las respuestas correctas del estudiante.

(A) ¿En qué cuadrante está el ángulo 2 θ y cómo lo sabe?

(B) ¿Cómo puede encontrar sen 2 θ y cos 2 θ? Encuentre cada uno.

(C) ¿Qué identidades relacionan sen θ y cos θ con sen 2 θ o cos 2 θ?

(D) ¿Cómo podría usar las identidades del inciso (C) para encontrar sen θ y cos θ de manera exacta, incluyendo el signo correcto?

(E) ¿Cuáles son los valores exactos de sen θ y cos θ?

41. Encuentre los valores exactos de sen θ y cos θ, dado $\tan 2\theta = -\frac{4}{3}$, $0° < \theta < 90°$.

42. Encuentre los valores exactos de sen θ y cos θ, dado $\sec 2\theta = -\frac{5}{4}$, $0° < \theta < 90°$.

Demuestre cada una de las identidades siguientes para el valor de x indicado en los problemas del 43 al 46. Calcule los valores hasta con cinco dígitos significativos usando calculadora.

(A) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

(B) $\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

(Escoja el signo correcto).

43. $x = 252.06°$ **44.** $x = 72.358°$

45. $x = 0.934\,57$ **46.** $x = 4$



En los problemas del 47 al 50, grafique y1 y y2 en la misma ventana de visión para $-2\pi \le x \le 2\pi$, y establezca los intervalos para los cuales y1 y y2 son identidades.

47. $y1 = \cos (x/2)$, $y2 = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

48. $y1 = \cos (x/2)$, $y2 = -\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$

49. $y1 = \text{sen}\, (x/2)$, $y2 = -\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

50. $y1 = \text{sen}\, (x/2)$, $y2 = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$

C

Demuestre las identidades en los problemas del 51 al 54.

51. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

52. $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$

53. $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

54. $\operatorname{sen} 4x = (\cos x)(4\operatorname{sen} x - 8\operatorname{sen}^3 x)$

En los problemas del 55 al 60, encuentre el valor exacto de cada una de las expresiones usando una calculadora.

55. $\cos(2\cos^{-1}\frac{3}{5})$

56. $\operatorname{sen}(2\cos^{-1}\frac{3}{5})$

57. $\tan[2\cos^{-1}(-\frac{4}{5})]$

58. $\tan[2\tan^{-1}(-\frac{3}{4})]$

59. $\cos[\frac{1}{2}\cos^{-1}(-\frac{3}{5})]$

60. $\operatorname{sen}[\frac{1}{2}\tan^{-1}(-\frac{4}{3})]$

En los problemas del 61 al 66, grafique f(x) con un dispositivo de graficación, encuentre una función más simple g(x) que tenga la misma gráfica que f(x), y verifique la identidad f(x) = g(x). [Suponga g(x) = k + AT(Bx), donde T(x) es una de las seis funciones trigonométricas.]

61. $f(x) = \csc x - \cot x$

62. $f(x) = \csc x + \cot x$

63. $f(x) = \dfrac{1 - 2\cos 2x}{2\operatorname{sen} x - 1}$

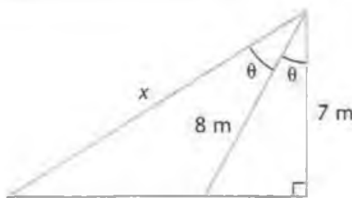
64. $f(x) = \dfrac{1 + 2\cos 2x}{1 + 2\cos x}$

65. $f(x) = \dfrac{1}{\cot x \operatorname{sen} 2x - 1}$

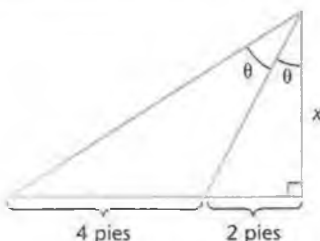
66. $f(x) = \dfrac{\cot x}{1 + \cos 2x}$

APLICACIONES

67. Medición indirecta. Encuentre el valor exacto de x en la figura; después encuentre x y θ con hasta tres cifras decimales. [*Sugerencia*: Use $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.]



68. Medición indirecta. Encuentre el valor exacto de x en la figura; después encuentre x y θ con hasta tres cifras decimales. [*Sugerencia*: Use $\tan 2\theta = (2\tan\theta)/(1 - \tan^2\theta)$.]



69. Física: deportes. La distancia teórica d que un lanzador de bala, uno de disco o uno de jabalina puede lograr en cierto lanzamiento, se encuentra en la física de manera aproximada por

$$d = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{32 \text{ pies por segundo cuadrado}}$$

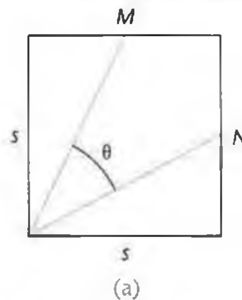
donde v_0 es la velocidad inicial del objeto lanzado (en pies por segundo) y θ es el ángulo por arriba de la horizontal con que el objeto sale de la mano (véase la figura).



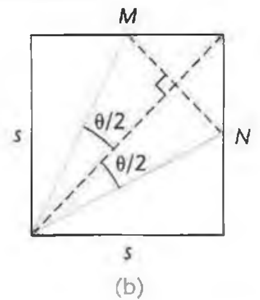
(A) Escriba la fórmula sólo en términos de $\operatorname{sen}\theta$ mediante una identidad adecuada.

(B) Usando el resultado de la ecuación del inciso (A), determine el ángulo θ que producirá la máxima distancia d para cierta velocidad inicial v_0. Este resultado es una consideración importante para los lanzadores de bala, de jabalina y de disco.

70. Geometría. En el inciso (a) de la figura, M y N son los puntos medios de los lados de un cuadrado. Encuentre el valor exacto de $\cos\theta$. [*Sugerencia*: Use en la solución el teorema de Pitágoras, la definición de seno y coseno, la identidad de ángulo mitad y algunas rectas auxiliares como las dibujadas en el inciso (b) de la figura.]



(a)



(b)

71. Área. Un polígono regular de n lados se encuentra en un círculo de radio R.

(A) Demuestre que el área del n ésimo lado del polígono está dada por

$$A_n = \tfrac{1}{2}nR^2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$

[*Sugerencia*: Área de un triángulo $= \frac{1}{2}$ (base)(altura). Una identidad de ángulo doble también es útil.]

(B) Para un círculo de radio 1, complete la tabla 1, con cinco cifras decimales, usando la fórmula del inciso (A).

TABLA 1

n	10	100	1 000	10 000
A_n				

(C) ¿Qué número hace que A_n parezca aproximarse conforme n aumenta sin límite? (¿Cuál es el área de un círculo de radio 1?)

(D) ¿A_n será exactamente igual al área del círculo circunscrito para una n lo suficientemente grande? ¿Cómo se puede acercar A_n para obtener el área del círculo circunscrito?

[En cálculo, el área del círculo circunscrito se denomina *límite* de A_n conforme n aumenta sin límite. Utilizando un lenguaje simbólico, para un círculo de radio 1 se puede escribir $\lim_{n\to\infty} A_n = \pi$ El concepto de límite es la parte fundamental sobre la cual se ha construido el cálculo.]

SECCIÓN 6-4 Identidades de producto-suma y suma-producto

- Identidades de producto-suma
- Identidades de suma-producto

Se concluye el estudio de identidades desarrollando las *identidades de producto-suma* y *suma-producto*, que se obtienen fácilmente a partir de las identidades de suma y de diferencia desarrolladas en la sección 6-2. Esas identidades se usan en cálculo para convertir las formas de producto en formas de suma más adecuadas. También se usan en música, en el estudio de ondas sonoras, para convertir formas de suma en formas de producto más adecuadas.

Identidades de producto-suma

Primero, sume las identidades de suma y de diferencia para el seno, las del lado izquierdo con las del lado izquierdo y las del lado derecho con las del lado derecho:

$$\begin{aligned} \text{sen}(x+y) &= \text{sen}\,x\cos y + \cos x\,\text{sen}\,y \\ \text{sen}(x-y) &= \text{sen}\,x\cos y - \cos x\,\text{sen}\,y \\ \hline \text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y) &= 2\,\text{sen}\,x\cos y \end{aligned}$$

o

$$\text{sen}\,x\cos y = \tfrac{1}{2}[\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)]$$

De manera similar, al sumar o restar las identidades adecuadas de suma y de diferencia, se puede obtener otras tres **identidades de producto-suma**. Éstas se enlistan a continuación para una referencia adecuada.

Identidades de producto-suma

$$\text{sen}\,x\cos y = \tfrac{1}{2}[\text{sen}(x+y) + \text{sen}(x-y)]$$
$$\cos x\,\text{sen}\,y = \tfrac{1}{2}[\text{sen}(x+y) - \text{sen}(x-y)]$$
$$\text{sen}\,x\,\text{sen}\,y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$
$$\cos x\cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

EJEMPLO 1 Un producto como una diferencia

Escriba el producto $\cos 3t\,\text{sen}\,t$ como una suma o diferencia.

Solución

$$\cos x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)] \quad \text{Sea } x = 3t \text{ y } y = t.$$

$$\cos 3t \operatorname{sen} t = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(3t+t) - \operatorname{sen}(3t-t)]$$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4t - \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$$

Problema seleccionado 1 Escriba el producto $\cos 5\theta \cos 2\theta$ como una suma o diferencia.

EJEMPLO 2 **Determinación de valores exactos**

Evalúe de manera exacta sen 105° sen 15° mediante una identidad adecuada de producto-suma.

Solución

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\operatorname{sen} 105^\circ \operatorname{sen} 15^\circ = \tfrac{1}{2}[\cos(105^\circ - 15^\circ) - \cos(105^\circ + 15^\circ)]$$

$$= \tfrac{1}{2}[\cos 90^\circ - \cos 120^\circ]$$

$$= \tfrac{1}{2}[0 - (-\tfrac{1}{2})] = \tfrac{1}{4}, \text{ o } 0.25$$

Problema seleccionado 2 Evalúe de manera exacta cos 165° sen 75° mediante una identidad adecuada de producto-suma.

• Identidades de suma-producto

Las identidades de producto-suma se pueden transformar en formas equivalentes denominadas **identidades de suma-producto**. Esas identidades se usan para expresar sumas y diferencias que implican senos y cosenos, como productos que implican senos y cosenos. Se ilustra la transformación para una identidad. Las otras tres identidades se pueden obtener mediante procedimientos análogos.

Se comienza con una identidad de producto-suma:

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)] \tag{1}$$

Se podría hacer

$$\alpha + \beta = x$$
$$\alpha - \beta = y$$

Resolviendo este sistema, se tiene

$$\alpha = \frac{x+y}{2} \qquad \beta = \frac{x-y}{2} \tag{2}$$

Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1) y simplificando, se obtiene

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

Todas las identidades de suma-producto se enlistan a continuación para una adecuada referencia.

Identidades de suma-producto

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

EJEMPLO 3 **Una diferencia como un producto**

Escriba la diferencia sen 7θ − sen 3θ como un producto,

Solución

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} 7\theta - \operatorname{sen} 3\theta = 2 \cos \frac{7\theta + 3\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{7\theta - 3\theta}{2}$$

$$= 2 \cos 5\theta \operatorname{sen} 2\theta$$

Problema seleccionado 3 Escriba la suma $\cos 3t + \cos t$ como un producto.

EJEMPLO 4 **Determinación de valores exactos**

Encuentre el valor exacto de sen 105° − sen 15° mediante una identidad adecuada de suma-producto.

Solución

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \operatorname{sen} \frac{x-y}{2}$$

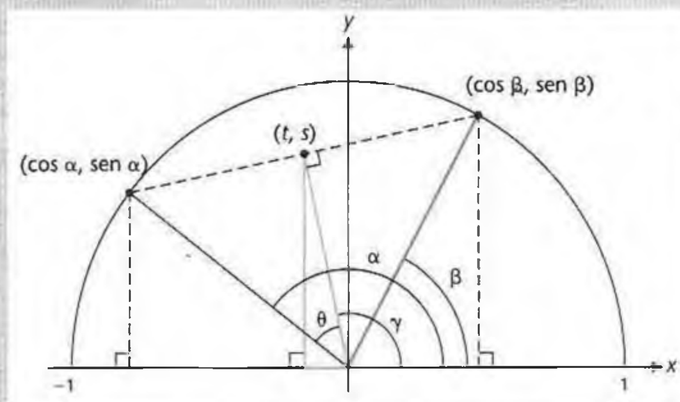
$$\operatorname{sen} 105^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ = 2 \cos \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \operatorname{sen} \frac{105^\circ - 15^\circ}{2}$$

$$= 2 \cos 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Problema seleccionado 4 Encuentre el valor exacto de cos 165° − cos 75° mediante una identidad adecuada de suma-producto.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 La siguiente "prueba sin palabras" de dos identidades de suma-producto se basa en una "prueba" similar realizada por Sidney H. Kung, de la Universidad de Jacksonville, que en octubre de 1996 se imprimió en la *Revista de Matemáticas.* (Analice cómo las relaciones de la figura a continuación se verifican de la figura.)



$$\theta = \frac{\alpha - \beta}{2} \qquad \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta}{2} = s = \cos\frac{\alpha - \beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} = t = \cos\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $\frac{1}{2}\cos 7\theta + \frac{1}{2}\cos 3\theta$ **2.** $(-\sqrt{3} - 2)/4$ **3.** $2\cos 2t\cos t$ **4.** $-\sqrt{6}/2$

EJERCICIO 6-4

A

En los problemas del 1 al 4, escriba cada producto como una suma o diferencia que implique seno y coseno.

1. sen $3m$ cos m **2.** cos $7A$ cos $5A$

3. sen u sen $3u$ **4.** cos 2θ sen 3θ

En los problemas del 5 al 8, escriba cada diferencia o suma como un producto que implique senos y cosenos.

5. sen $3t$ + sen t **6.** cos 7θ + cos 5θ

7. cos $5w$ − cos $9w$ **8.** sen u − sen $5u$

B

Evalúe de manera exacta los problemas del 9 al 12, usando una identidad adecuada.

9. sen 195° cos 75° **10.** cos 75° sen 15°

11. cos 15° cos 75° **12.** sen 105° sen 165°

Evalúe de manera exacta los problemas del 13 al 16, usando una identidad adecuada.

13. $\cos 285° + \cos 195°$
14. $\operatorname{sen} 195° + \operatorname{sen} 105°$
15. $\cos 15° - \cos 105°$
16. $\operatorname{sen} 75° - \operatorname{sen} 165°$

Use las identidades de suma y de diferencia para demostrar las identidades de los problemas 17 y 18.

17. $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos (x + y) + \cos (x - y)]$
18. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\cos (x - y) - \cos (x + y)]$

19. Explique cómo puede transformar la identidad de producto-suma

$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos (u - v) - \cos (u + v)]$$

en la identidad de suma-producto

$$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \frac{x + y}{2} \operatorname{sen} \frac{x - y}{2}$$

mediante una sustitución adecuada.

20. Explique cómo se puede trasformar la identidad producto-suma

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos (u + v) + \cos (u - v)]$$

en la identidad de suma-producto

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

mediante una sustitución adecuada.

Demuestre cada identidad en los problemas del 21 al 28.

21. $\dfrac{\operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} 4t}{\cos 2t - \cos 4t} = \cot t$
22. $\dfrac{\cos t - \cos 3t}{\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 3t} = \tan t$
23. $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\cos x - \cos y} = -\cot \dfrac{x + y}{2}$
24. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = \tan \dfrac{x + y}{2}$
25. $\dfrac{\cos x + \cos y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \cot \dfrac{x - y}{2}$
26. $\dfrac{\cos x - \cos y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} = -\tan \dfrac{x - y}{2}$
27. $\dfrac{\cos x + \cos y}{\cos x - \cos y} = -\cot \dfrac{x + y}{2} \cot \dfrac{x - y}{2}$
28. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \dfrac{\tan [\frac{1}{2}(x + y)]}{\tan [\frac{1}{2}(x - y)]}$

Demuestre cada una de las identidades siguientes para los valores de x y y indicados en los problemas del 29 al 32. Evalúe cada lado hasta con cinco dígitos significativos.

(A) $\cos x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)]$
(B) $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$

29. $x = 172.63°, y = 20.177°$
30. $x = 50.137°, y = 18.044°$
31. $x = 1.1255, y = 3.6014$
32. $x = 0.039\,17, y = 0.610\,52$


Escriba cada uno de los problemas del 33 al 40, como un producto, si y es una suma o diferencia: o como una suma o diferencia si y es un producto. Introduzca la ecuación original en un dispositivo de graficación como y1, la forma convertida como y2, y la gráfica de y1 y y2 en la misma ventana de visión. Use la función TRACE para comparar las dos gráficas.

33. $y = \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x$
34. $y = \cos 3x + \cos x$
35. $y = \cos 1.7x - \cos 0.3x$
36. $y = \operatorname{sen} 2.1x - \operatorname{sen} 0.5x$
37. $y = \operatorname{sen} 3x \cos x$
38. $y = \cos 5x \cos 3x$
39. $y = \operatorname{sen} 2.3x \operatorname{sen} 0.7x$
40. $y = \cos 1.9x \operatorname{sen} 0.5x$

C

Demuestre cada identidad en los problemas 41 y 42.

41. $\cos x \cos y \cos z = \frac{1}{4}[\cos (x + y - z) + \cos (y + z - x) + \cos (z + x - y) + \cos (x + y + z)]$
42. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z = \frac{1}{4}[\operatorname{sen}(x + y - z) + \operatorname{sen} (y + z - x) + \operatorname{sen} (z + x - y) - \operatorname{sen} (x + y + z)]$

En los problemas del 43 al 46:

(A) Grafique y1, y2 y y3 con un dispositivo de graficación para $0 \le x \le 1$ y $-2 \le y \le 2$.
(B) Convierta y1 a una suma o diferencia y repita el inciso (A).

43. $y1 = 2 \cos (28\pi x) \cos (2\pi x)$
$y2 = 2 \cos (2\pi x)$
$y3 = -2 \cos (2\pi x)$

44. $y1 = 2 \operatorname{sen} (24\pi x) \operatorname{sen} (2\pi x)$
$y2 = 2 \operatorname{sen} (2\pi x)$
$y3 = -2 \operatorname{sen} (2\pi x)$

45. $y1 = 2 \operatorname{sen} (20\pi x) \cos (2\pi x)$
$y2 = 2 \cos (2\pi x)$
$y3 = -2 \cos (2\pi x)$

46. $y1 = 2 \cos (16\pi x) \operatorname{sen} (2\pi x)$
$y2 = 2 \operatorname{sen} (2\pi x)$
$y3 = -2 \operatorname{sen} (2\pi x)$

APLICACIONES


Los problemas 47 y 48 implican el fenómeno del sonido llamado interferencias. Si se escuchan dos tonos con la misma intensidad y altura aproximada (frecuencia), uno después del otro,

es difícil para la mayoría de las personas diferenciar uno de otro. Sin embargo, si los tonos se escuchan de manera simultánea, se intercalan entre sí, produciendo un sonido bajo ululado denominado ***interferencia****. Cuando los músicos afinan un instrumento con otros instrumentos o con un diapasón, escuchan esos tonos bajos ululados y tratan de eliminarlos ajustando sus instrumentos. Los problemas 47 y 48 proporcionan una ilustración visual del fenómeno de interferencia.*

47. Frecuencias de música y de interferencia Las ecuaciones $y = 0.5 \cos 128\pi t$ y $y = -0.5 \cos 144\pi t$ son ecuaciones de ondas sonoras con frecuencias de 64 y 72 hertz, respectivamente. Si ambos sonidos se emiten de manera simultánea, el resultado es una frecuencia de *interferencia*.

(A) Demuestre que

$$0.5 \cos 128\pi t - 0.5 \cos 144\pi t = \text{sen } 8\pi t \text{ sen } 136\pi t$$

(La forma de producto es más útil para los ingenieros de sonido.)

(B) Grafique cada ecuación en una diferente ventana de visión para $0 \le t \le 0.25$:

$$y = 0.5 \cos 128\pi t$$

$$y = -0.5 \cos 144\pi t$$

$$y = 0.5 \cos 128\pi t - 0.5 \cos 144\pi t$$

$$y = \text{sen } 8\pi t \text{ sen } 136\pi t$$

48. Frecuencias de música y de interferencia. $y = 0.25 \cos 256\pi t$ y $y = -0.25 \cos 288\pi t$ son ecuaciones de ondas sonoras con frecuencias de 128 y 144 hertz, respectivamente. Si ambos sonidos se emiten de manera simultánea, resulta una *interferencia*.

(A) Demuestre que

$$0.25 \cos 256\pi t - 0.25 \cos 288\pi t = 0.5 \text{ sen } 16\pi t \text{ sen } 272\pi t$$

(La forma de producto es más útil para los ingenieros de sonido.)

(B) Grafique cada ecuación en una diferente ventana de visión para $0 \le t \le 0.125$.

$$y = 0.25 \cos 256\pi t$$

$$y = -0.25 \cos 288\pi t$$

$$y = 0.25 \cos 256\pi t - 0.25 \cos 288\pi t$$

$$y = 0.5 \text{ sen } 16\pi t \text{ sen } 272\pi t$$

SECCIÓN 6-5 Ecuaciones trigonométricas

- Solución de ecuaciones trigonométricas mediante un procedimiento algebraico.
- Solución de ecuaciones trigonométricas mediante dispositivos de graficación.

En las primeras cuatro secciones de este capítulo se consideraron ecuaciones trigonométricas denominadas *identidades*. Estas ecuaciones son verdaderas para todos los reemplazos de la(s) variable(s) para las que ambos lados están definidos. Ahora se considerará otra clase de ecuaciones trigonométricas, llamadas **ecuaciones condicionales**, que pueden ser verdaderas para algunos reemplazos de la variable pero falsas para otros. Por ejemplo,

$$\cos x = \text{sen } x$$

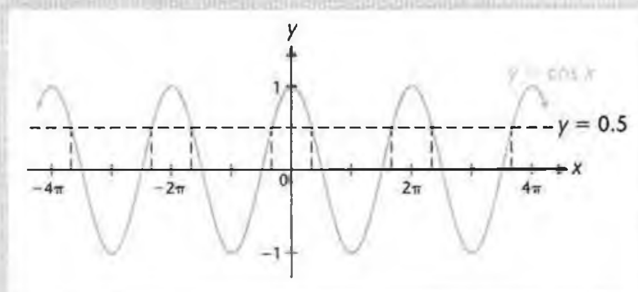
es una ecuación condicional, ya que es verdadera para algunos valores, por ejemplo $x = \pi/4$, y falsa para otros, tales como $x = 0$. (Compruebe ambos valores.)

En esta sección se consideran dos procedimientos para resolver ecuaciones condicionales trigonométricas: un procedimiento algebraico y un procedimiento con un dispositivo de graficación. Resolver ecuaciones trigonométricas usando un procedimiento algebraico requiere a menudo del uso de manipulaciones algebraicas, identidades e ingenuidad. En algunos casos los métodos algebraicos conducen a soluciones exactas, que son muy útiles en ciertos contextos. Se pueden usar métodos con un dispositivo de graficación para aproximar soluciones en una amplia variedad de ecuaciones trigonométricas; pero a menudo no producen soluciones exactas. Cada método tiene sus fortalezas.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Se está interesado en las soluciones de la ecuación

$$\cos x = 0.5$$

La figura siguiente muestra una gráfica parcial de los lados izquierdo y derecho de la ecuación.



(A) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$? ¿Cuáles son?
(B) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación en el intervalo $(-\infty, \infty)$? Analice un método para escribir todas las soluciones de la ecuación.

• Solución de ecuaciones trigonométricas mediante un procedimiento algebraico

Usted puede encontrar útil las sugerencias siguientes para resolver ecuaciones trigonométricas mediante un procedimiento algebraico:

Sugerencias para la solución de ecuaciones trigonométricas de manera algebraica

1. Considere una función trigonométrica en particular como una variable, y resuélvala.
   (a) Considere el uso de manipulaciones algebraicas tales como factorización, ,combinación o separación de fracciones, etcétera.
   (b) Considere el uso de identidades.
2. Después de resolver una función trigonométrica, despeje la variable.

Varios ejemplos le ayudarán a comprender el procedimiento algebraico.

EJEMPLO 1 **Soluciones exactas mediante factorización**

Encuentre todas las soluciones exactas de $2 \cos^2 x - \cos x = 0$.

Solución *Paso 1. Despeje cos x:*

$$2\cos^2 x - \cos x = 0 \quad \text{Factorice } \cos x.$$
$$\cos x\,(2\cos x - 1) = 0 \quad ab = 0 \text{ sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0.$$
$$\cos x = 0 \quad \text{o} \quad 2\cos x - 1 = 0$$
$$\cos x = \tfrac{1}{2}$$

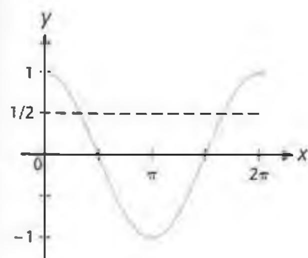


FIGURA 1

Paso 2. *Resuelva cada ecuación en un periodo [0, 2π):* Trace la gráfica de $y = \cos x$, $y = 0$ y $y = \frac{1}{2}$ en el mismo sistema coordenado para ayudarse al escribir todas las soluciones en un periodo (véase figura 1).

$$\cos x = 0 \qquad \cos x = \tfrac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

Paso 3. *Escriba una expresión para todas las soluciones.* Como la función coseno es periódica con un periodo 2π, todas las soluciones están dadas por

$$x = \begin{cases} \pi/3 + 2k\pi \\ \pi/2 + 2k\pi \\ 3\pi/2 + 2k\pi \\ 5\pi/3 + 2k\pi \end{cases} \quad k \text{ es cualquier entero}$$

Problema seleccionado 1 Encuentre de manera exacta todas las soluciones para $2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x = 0$.

EJEMPLO 2

Soluciones aproximadas usando identidades y factorización

Encuentre todas las soluciones reales para $3\cos^2 x + 8\,\text{sen}\, x = 7$. Calcule todas las funciones inversas con cuatro cifras decimales.

Solución *Paso 1.* *Despeje sen x y/o cos x.* Pase todos los términos diferentes de cero a la izquierda del signo igual y exprese el lado izquierdo en términos de $\text{sen}\, x$:

$$3\cos^2 x + 8\,\text{sen}\, x = 7$$
$$3\cos^2 x + 8\,\text{sen}\, x - 7 = 0 \quad \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x$$
$$3(1 - \text{sen}^2 x) + 8\,\text{sen}\, x - 7 = 0$$
$$3\,\text{sen}^2 x - 8\,\text{sen}\, x + 4 = 0 \quad 3u^2 - 8u - 4 = (u - 2)(3u - 2)$$
$$(\text{sen}\, x - 2)(3\,\text{sen}\, x - 2) = 0 \quad ab = 0 \text{ sólo si } a = 0 \text{ o } b = 0$$
$$\text{sen}\, x - 2 = 0 \quad \text{o} \quad 3\,\text{sen}\, x - 2 = 0$$
$$\text{sen}\, x = 2 \qquad \text{sen}\, x = \tfrac{2}{3}$$

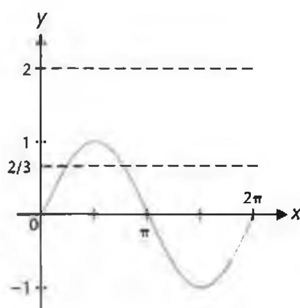


FIGURA 2

Paso 2. *Resuelva cada ecuación en un periodo $[0, 2\pi)$.* Trace una gráfica de $y = \text{sen}\, x$, $y = 2$ y $y = \frac{2}{3}$ en el mismo sistema coordenado para ayudar a escribir todas las soluciones en un periodo (véase figura 2).

Resuelva la primera ecuación:

$$\text{sen}\, x = 2 \qquad \text{No hay solución, ya que } -1 \le \text{sen}\, x \le 1.$$

Resuelva la segunda ecuación:

$$\text{sen}\, x = \tfrac{2}{3} \qquad \text{En la gráfica se observa que existen soluciones en el primer y segundo cuadrantes.}$$

$$x = \text{sen}^{-1} \tfrac{2}{3} = 0.7297 \qquad \text{Solución en el primer cuadrante}$$

$$x = \pi - 0.7297 = 2.4119 \qquad \text{Solución en el segundo cuadrante}$$

Comprobación sen 0.7297 = 0.6667; sen 2.4119 = 0.6666 (Las comprobaciones pueden no ser exactas debido a los errores de redondeo.)

Paso 3. *Escriba una expresión para todas las soluciones.* Como la función seno es periódica con el periodo 2π, todas las soluciones están dadas por

$$x = \begin{cases} 0.7297 + 2k\pi \\ 2.4119 + 2k\pi \end{cases} \qquad k \text{ es cualquier entero.}$$

Problema seleccionado 2 Encuentre todas las soluciones reales de $8\,\text{sen}^2 x = 5 - 10 \cos x$. Calcule todas las funciones inversas con cuatro cifras decimales.

EJEMPLO 3 **Soluciones aproximadas mediante sustitución**

Encuentre θ, medido en grados, con hasta tres cifras decimales de manera que

$$5\,\text{sen}\,(2\theta - 5) = -3.045 \qquad 0° \le 2\theta - 5 \le 360°$$

Solución *Paso 1.* *Realice una sustitución.* Sea $u = 2\theta - 5$ para obtener

$$5\,\text{sen}\, u = -3.045 \qquad 0° \le u \le 360°$$

Paso 2. *Despeje sen u.*

$$\text{sen}\, u = \frac{-3.045}{5} = -0.609$$

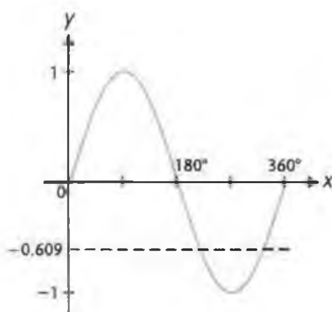


FIGURA 3

Paso 3. *Despeje para u en $0° \le u \le 360°$.* Trace una gráfica de $y = \text{sen}\, u$ y $y = -0.609$ en el mismo sistema coordenado para ayudar a escribir todas las soluciones en $0° \le u \le 360°$ (véase figura 3).

Las soluciones se encuentran en el tercer y cuarto cuadrantes. Si el ángulo de referencia es α, entonces $u = 180° + \alpha$ o $u = 360° - \alpha$.

$$\alpha = \text{sen}^{-1} 0.609 = 37.571° \quad \text{Ángulo de referencia}$$
$$u = 180° + 37.571°$$
$$= 217.517° \quad \text{Solución en el tercer cuadrante}$$
$$u = 360° - 37.571°$$
$$= 322.429° \quad \text{Solución en el cuarto cuadrante}$$

Comprobación $\quad$ $\text{sen } 217.517° = -0.609 \qquad \text{sen } 322.429° = -0.610$

Paso 4. Ahora despeje para θ:

$$u = 217.517° \qquad u = 322.429°$$
$$2\theta - 5 = 217.517° \qquad 2\theta - 5 = 322.429°$$
$$\theta = 111.259° \qquad \theta = 163.715°$$

Se deja al lector una comprobación final en la ecuación original.

Problema seleccionado 3 $\quad$ Encuentre θ, medido en grados, con tres cifras decimales de manera que

$$8 \tan (6\theta + 15) = -64.328 \qquad -90° < 6\theta + 15 < 90°$$

EJEMPLO 4 Soluciones exactas mediante identidades y factorización

Encuentre las soluciones exactas para $\text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \text{sen } 2x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

Solución $\quad$ La solución siguiente sólo incluye los pasos clave. Trace las gráficas que sean adecuadas en una hoja de papel.

$$\text{sen}^2 x = \tfrac{1}{2} \text{sen } 2x \quad \text{Use la identidad de ángulo doble.}$$
$$= \tfrac{1}{2}(2 \text{ sen } x \cos x)$$
$$\text{sen}^2 x - \text{sen } x \cos x = 0 \quad a^2 - ab = a(a - b)$$
$$\text{sen } x(\text{sen } x - \cos x) = 0 \quad a(a - b) = 0 \text{ sólo si } a = 0 \text{ o } a - b = 0$$

$$\text{sen } x = 0 \quad \text{o} \quad \text{sen } x - \cos x = 0$$
$$x = 0, \pi \qquad \text{sen } x = \cos x$$
$$\frac{\text{sen } x}{\cos x} = 1$$
$$\tan x = 1$$
$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

Combinando las soluciones de ambas ecuaciones, se tiene el conjunto completo de soluciones:

$$x = 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$$

Problema seleccionado 4 Encuentre las soluciones exactas para sen $2x$ = sen x, $0 \leq x < 2\pi$.

EJEMPLO 5 Soluciones aproximadas mediante identidades y la fórmula cuadrática

Resuelva $\cos 2x = 4\cos x - 2$ para toda x real. Calcule las funciones inversas con cuatro cifras decimales.

Solución *Paso 1. Despeje cos x.*

$$\cos 2x = 4\cos x - 2$$ Use una identidad de doble ángulo.

$$2\cos^2 x - 1 = 4\cos x - 2$$

$$2\cos^2 x - 4\cos x + 1 = 0$$ Haga una ecuación cuadrática en cos x. El lado izquierdo no se factoriza usando coeficientes enteros. Resuelva mediante la fórmula cuadrática.

$$\cos x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$$= 1.707107 \text{ o } 0.292893$$

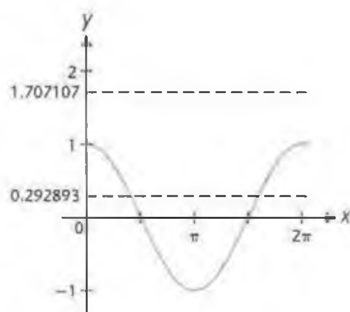


FIGURA 4

Paso 2. Resuelva cada ecuación en un periodo [0, 2π): Trace una gráfica de $y = \cos x$, $y = 1.707107$, y $y = 0.292893$ en el mismo sistema coordenado para ayudar a escribir todas las soluciones en un periodo (figura 4).

Resuelva la primera ecuación:

$$\cos x = 1.707107$$ No existe solución, ya que $-1 \leq \cos x \leq 1$

Resuelva la segunda ecuación:

$$\cos x = 0.292893$$

La figura 4 indica una solución en el primer cuadrante y otra en el cuarto cuadrante. Si el ángulo de referencia es α, entonces $x = \alpha$ o $x = 2\pi - \alpha$.

$$\alpha = \cos^{-1} 0.292893 = 1.2735$$

$$2\pi - \alpha = 2\pi - 1.2735 = 5.0096$$

Comprobación $\cos 1.2735 = 0.292936 \qquad \cos 5.0096 = 0.292854$

Paso 3. *Escriba una expresión para todas las soluciones.* Como la función coseno es periódica con el periodo 2π, todas las soluciones están dadas por

$$x = \begin{cases} 1.2735 + 2k\pi \\ 5.0096 + 2k\pi \end{cases} \quad k \text{ es cualquier entero}$$

Problema seleccionado 5 Resuelva $\cos 2x = 2(\text{sen } x - 1)$ para toda x real. Calcule las funciones inversas con cuatro cifras decimales.

• Solución de ecuaciones trigonométricas mediante dispositivos de graficación

Todas las ecuaciones trigonométricas que se han resuelto con métodos algebraicos, pueden también resolverse, aunque a menudo no de manera exacta, con métodos donde se utilizan dispositivos de graficación. Además, existen muchas ecuaciones trigonométricas que se pueden resolver (con el grado de exactitud decimal deseado) mediante métodos con dispositivos de graficación, pero no se pueden resolver en una secuencia finita de pasos usando métodos algebraicos. Los ejemplos del 6 al 8 lo demuestran.

EJEMPLO 6 **Solución mediante un dispositivo de graficación**

Encuentre todas las soluciones reales hasta con cuatro cifras decimales para $2 \cos 2x = 1.35x - 2$.

Solución Esta ecuación trigonométrica relativamente simple no se puede resolver usando un número finito de pasos algebraicos (¡inténtelo!). Sin embargo, se puede resolver fácilmente con la exactitud deseada mediante un dispositivo de graficación. Grafique $y1 = 2 \cos 2x$ y $y2 = 1.35x - 2$ en la misma ventana de visión, y encuentre cualquier punto de intersección usando una rutina preconstruida. El primer punto de intersección se muestra en la figura 5. Parece que hay más de un punto de intersección, pero cuando se hace un acercamiento a la parte de la gráfica que se está analizando, se muestra que las dos gráficas no se intersectan en esa región (figura 6). La única solución es

$$x = 0.9639$$

Comprobación Lado izquierdo: $2 \cos 2(0.9639) = -0.6989$
Lado derecho: $1.35(0.9639) - 2 = -0.6987$

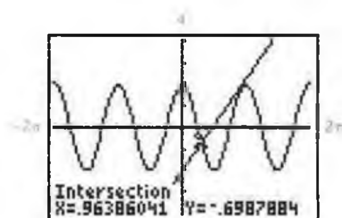


FIGURA 5

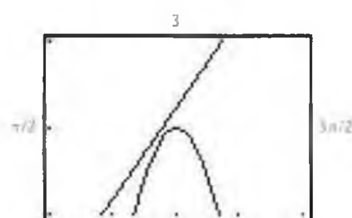


FIGURA 6

Problema seleccionado 6 Encuentre todas las soluciones reales con cuatro cifras decimales para $\text{sen } x/2 = 0.2x - 0.5$.

EJEMPLO 7 **Aplicación geométrica**

Se tiene un arco de 10 centímetros sobre un círculo que tiene una cuerda de 8 centímetros. ¿Cuál es el radio del círculo, con cuatro cifras decimales? ¿Cuál es la medida en radianes del ángulo central subtendido por el arco, con cuatro cifras decimales?

Solución Trace una figura con rectas auxiliares (figura 7). De la figura, θ en radianes es

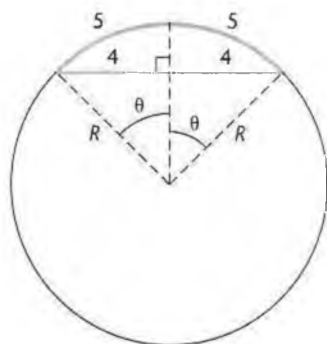


FIGURA 7

$$\theta = \frac{5}{R} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} \theta = \frac{4}{R}$$

Así,

$$\operatorname{sen} \frac{5}{R} = \frac{4}{R}$$

y el problema es resolver esta ecuación trigonométrica para R. Con métodos algebraicos no se despeja R, así es que vuelva al uso de un dispositivo de graficación. Comience por graficar $y1 = \operatorname{sen}(5/x)$ y $y2 = 4/x$ en la misma ventana de visión para $1 \le x \le 10$ y $-2 \le y \le 2$ (figura 8). Parece que la gráfica intersecta x entre 4 y 5. Para obtener una visión más clara del punto de intersección, se cambian las dimensiones de la ventana a $4 \le x \le 5$ y $0.5 \le y \le 1.5$ y se usa una rutina preconstruida para encontrar el punto de intersección (figura 9).

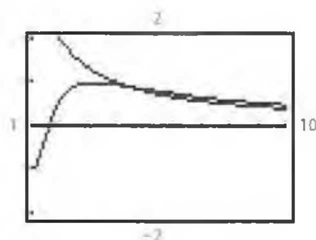


FIGURA 8

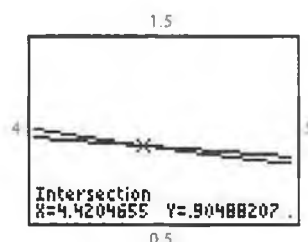


FIGURA 9

En la figura 9, se ve que

$$R = 4.4205 \text{ centímetros}$$

Comprobación

$$\operatorname{sen} \frac{5}{R} = \operatorname{sen} \frac{5}{4.4205} = 0.9049 \qquad \frac{4}{R} = \frac{4}{4.4205} = 0.9049$$

Si se tiene R, se puede calcular la medida en radianes del ángulo central subtendido por el arco de 10 centímetros:

$$\text{Ángulo central} = \frac{10}{R} = \frac{10}{4.4205} = 2.2622 \text{ radianes}$$

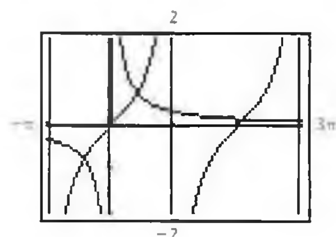
Problema seleccionado 7 Se tiene un arco de 8.2456 pulgadas sobre un círculo que tiene una cuerda de 6.0344 pulgadas. ¿Cuál es el radio del círculo, con cuatro cifras decimales? ¿Cuál es la medida del ángulo central, con cuatro cifras decimales, subtendido por el arco?

EJEMPLO 8 **Solución mediante un dispositivo de graficación**

Encuentre todas las soluciones reales, con cuatro cifras decimales, para $\tan(x/2) = 1/x$, $-\pi < x \le 3\pi$.

Solución Grafique $y1 = \tan(x/2)$ y $y2 = 1/x$ en la misma ventana de visión para $-\pi < x < 3\pi$ (figura 10). Las soluciones son los puntos de intersección.

FIGURA 10



Utilizando una rutina preconstruida, se encuentra que las tres soluciones son

$$x = -1.3065, 1.3065, 6.5846$$

Se deja al lector la comprobación de estas soluciones.

Problema seleccionado 8 Encuentre todas las soluciones reales, con cuatro cifras decimales, para $0.25 \tan(x/2) = \ln x$, $0 < x < 4\pi$.

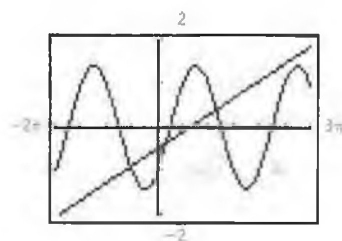
Resolver desigualdades trigonométricas mediante un dispositivo de graficación es tan fácil como resolver ecuaciones trigonométricas mediante un dispositivo de graficación. El ejemplo 9 ilustra el proceso.

EJEMPLO 9 **Solución de una desigualdad trigonométrica**

Resuelva $\text{sen}\, x - \cos x < 0.25x - 0.5$ con una exactitud de dos cifras decimales.

Solución Grafique $y1 = \text{sen}\, x - \cos x$ y $y2 = 0.25x - 0.5$ en la misma ventana de visión (figura 11).

FIGURA 11



Al encontrar los tres puntos de intersección mediante una rutina preconstruida, se observa que la gráfica de $y1$ está debajo de la gráfica de $y2$ sobre los dos intervalos siguientes: $(-1.65, 0.52)$ y $(3.63, \infty)$. En consecuencia, el conjunto solución para la desigualdad es $(-1.65, 0.52) \cup (3.63, \infty)$.

Problema seleccionado 9 Resuelva $\cos x - \operatorname{sen} x > 0.4 - 0.3x$ con una exactitud de dos cifras decimales.



EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación siguiente?

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0 \qquad (1)$$

Grafique $y1 = \operatorname{sen}(1/x)$ y $y2 = 0$ para cada uno de los intervalos indicados en los incisos (A) a (G). A partir de cada gráfica, estime el número de soluciones que parece tener la ecuación (1). ¿Qué conjetura final podría usted establecer respecto al número de soluciones de la ecuación (1)? Explique.

(A) $[-20, 20]$; ¿puede 0 ser una solución? Explique.

(B) $[-2, 2]$ (C) $[-1, 1]$ (D) $[-0.1, 0.1]$ (E) $[-0.01, 0.01]$

(F) $[-0.001, 0.001]$ (G) $[-0.0001, 0.0001]$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $x = \begin{cases} 0 + 2k\pi \\ \pi + 2k\pi \\ 7\pi/6 + 2k\pi \\ 11\pi/6 + 2k\pi \end{cases}$ k es cualquier entero

2. $x = \begin{cases} 1.8235 + 2k\pi \\ 4.4597 + 2k\pi \end{cases}$ k es cualquier entero

3. $-16.318°$ 4. $x = 0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$

5. $x = \begin{cases} 0.9665 + 2k\pi \\ 2.1751 + 2k\pi \end{cases}$ k es cualquier entero

6. $x = 5.1609$ 7. $R = 3.1103$ pulg; ángulo central $= 2.6511$ rad

8. $x = 1.1828, 2.6369, 9.2004$ 9. $(-1.67, 0.64) \cup (3.46, \infty)$

EJERCICIO 6-5

A

En los problemas del 1 al 12, encuentre las soluciones exactas sobre los intervalos indicados, x es un número real y θ está en grados.

1. $2\operatorname{sen} x + 1 = 0, 0 \le x < 2\pi$
2. $2\cos x + 1 = 0, 0 \le x < 2\pi$
3. $2\operatorname{sen} x + 1 = 0$, para toda x real
4. $2\cos x + 1 = 0$, para toda x real
5. $\tan x + \sqrt{3} = 0, 0 \le x < \pi$
6. $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0, 0 \le x < \pi$
7. $\tan x + \sqrt{3} = 0$, para toda x real
8. $\sqrt{3}\tan x + 1 = 0$, para toda x real
9. $2\cos\theta - \sqrt{3} = 0, 0° \le \theta < 360°$

10. $\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0, 0^\circ \le \theta < 360^\circ$

11. $2\cos\theta - \sqrt{3} = 0$, para toda θ

12. $\sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta - 1 = 0$, para toda θ

Resuelva los problemas del 13 al 18 con cuatro cifras decimales (θ está en grados, x es real).

13. $7\cos x - 3 = 0, 0 \le x < 2\pi$

14. $5\cos x - 2 = 0, 0 \le x < 2\pi$

15. $2\tan\theta - 7 = 0, 0^\circ \le \theta < 180^\circ$

16. $4\tan\theta + 15 = 0, 0^\circ \le \theta < 180^\circ$

17. $1.3224\,\text{sen}\,x + 0.4732 = 0$, para toda x real

18. $5.0118\,\text{sen}\,x - 3.1105 = 0$, para toda x real

Resuelva los problemas del 19 al 22 con cuatro cifras decimales usando un dispositivo de graficación.

19. $1 - x = 2\sin x$, para toda x real

20. $2x - \cos x = 0$, para toda x real

21. $\tan(x/2) = 8 - x, 0 \le x < \pi$

22. $\tan 2x = 1 + 3x, 0 \le x < \pi/4$

B

En los problemas del 23 al 34, encuentre todas las soluciones exactas para toda x real y θ en grados.

23. $2\,\text{sen}^2\,\theta + \text{sen}\,2\theta = 0$, para toda θ

24. $\cos^2\theta = \frac{1}{2}\text{sen}\,2\theta$, para toda θ

25. $\tan x = -2\,\text{sen}\,x, 0 \le x < 2\pi$

26. $\cos x = \cot x, 0 \le x < 2\pi$

27. $\sec(x/2) + 2 = 0, 0 \le x < 2\pi$

28. $\tan(x/2) - 1 = 0, 0 \le x < 2\pi$

29. $2\cos^2\theta + 3\,\text{sen}\,\theta = 0, 0^\circ \le \theta < 360^\circ$

30. $\text{sen}^2\,\theta + 2\cos\theta = -2, 0^\circ \le \theta < 360^\circ$

31. $\cos 2\theta + \cos\theta = 0, 0^\circ \le \theta < 360^\circ$

32. $\cos 2\theta + \text{sen}^2\,\theta = 0, 0^\circ \le \theta < 360^\circ$

33. $2\,\text{sen}^2(x/2) - 3\,\text{sen}(x/2) + 1 = 0, 0 \le x \le 2\pi$

34. $4\cos^2 2x - 4\cos 2x + 1 = 0, 0 \le x \le 2\pi$

Resuelva los problemas del 35 al 40, x es real y θ está en grados. Calcule las funciones inversas con cuatro dígitos significativos.

35. $6\,\text{sen}^2\,\theta + 5\,\text{sen}\,\theta = 6, 0^\circ \le \theta \le 90^\circ$

36. $4\cos^2\theta = 7\cos\theta + 2, 0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

37. $3\cos^2 x - 8\cos x = 3, 0 \le x \le \pi$

38. $8\,\text{sen}^2\,x + 10\,\text{sen}\,x = 3, 0 \le x \le \pi/2$

39. $2\,\text{sen}\,x = \cos 2x, 0 \le x < 2\pi$

40. $\cos 2x + 10\cos x = 5, 0 \le x < 2\pi$

Resuelva los problemas 41 y 42 para todas las soluciones reales. Calcule las funciones inversas con cuatro dígitos significativos.

41. $2\,\text{sen}^2\,x = 1 - 2\,\text{sen}\,x$

42. $\cos^2 x = 3 - 5\cos x$

Resuelva los problemas del 43 al 52 con cuatro cifras decimales mediante un dispositivo de graficación.

43. $2\,\text{sen}\,x = \cos 2x, 0 \le x < 2\pi$

44. $\cos 2x + 10\cos x = 5, 0 \le x < 2\pi$

45. $2\,\text{sen}^2\,x = 1 - 2\,\text{sen}\,x$, para toda x real

46. $\cos^2 x = 3 - 5\cos x$, para toda x real

47. $\cos 2x > x^2 - 2$, para toda x real

48. $2\,\text{sen}(x - 2) < 3 - x^2$, para toda x real

49. $\cos(2x + 1) \le 0.5x - 2$, para toda x real

50. $\text{sen}(3 - 2x) \ge 1 - 0.4x$, para toda x real

51. $e^{\text{sen}\,x} = 2x - 1$, para toda x real

52. $e^{-\text{sen}\,x} = 3 - x$, para toda x real

53. Explique la diferencia entre evaluar $\tan^{-1}(-5.377)$ y resuelva la ecuación $\tan x = -5.377$.

54. Explique la diferencia entre evaluar $\cos^{-1}(-0.7334)$ y resuelva la ecuación $\cos x = -0.7334$.

C

Encuentre las soluciones exactas en los problemas del 55 al 58. [Sugerencia: Eleve al cuadrado ambos lados en un punto adecuado, después despeje y al final, elimine las soluciones extrañas.]

55. $\cos x - \text{sen}\,x = 1, 0 \le x < 2\pi$

56. $\text{sen}\,x + \cos x = 1, 0 \le x < 2\pi$

57. $\tan x - \sec x = 1, 0 \le x < 2\pi$

58. $\sec x + \tan x = 1, 0 \le x < 2\pi$

Resuelva los problemas 59 y 60 con cuatro dígitos significativos mediante un dispositivo de graficación.

59. $\text{sen}(1/x) = 1.5 - 5x, 0.04 \le x \le 0.2$

60. $2\cos(1/x) = 950x - 4, 0.006 < x < 0.007$

61. Se quiere encontrar las raíces de la función $f(x) = \text{sen}(1/x)$ para $x > 0$.



(A) Explore la gráfica de f para diferentes intervalos $[0.1, b]$ para algunos valores de $b, b > 0.1$. ¿Tiene la función f una raíz más grande? Si es así, ¿cuál es (con cuatro cifras decimales)? Explique qué sucede con la gráfica de f conforme x aumenta sin límite. ¿Tiene la gráfica una asíntota? Si es así, ¿cuál es su ecuación?

(B) Explore la gráfica de f para diferentes intervalos $(0, b]$ para algunos valores de b, $0 < b \leq 0.1$. ¿Cuántas raíces existen entre 0 y b, para cualquier $b > 0$, aunque sean pequeñas? Explique por qué sucede esto. ¿Tiene f una raíz positiva más pequeña? Explique.

62. Se quiere encontrar las raíces de la función $g(x) = \cos(1/x)$ para $x > 0$.

(A) Explore la gráfica de g para diferentes intervalos $[0.1, b]$ para algunos valores de b, $b > 0.1$. ¿La función g tiene la raíz más grande? Si es así, ¿cuál es (con cuatro cifras decimales)? Explique qué sucede con la gráfica de g conforme x aumenta sin límite. ¿Tiene la gráfica una asíntota? Si es así, ¿cuál es su ecuación?

(B) Explore la gráfica de g para diferentes intervalos $(0, b]$ para algunos valores de b, $0 < b \leq 0.1$ ¿Cuántas raíces existen entre 0 y b, para cualquier $b > 0$, aunque sea pequeña? Explique por qué sucede esto. ¿Tiene g una raíz positiva más pequeña? Explique.

APLICACIONES

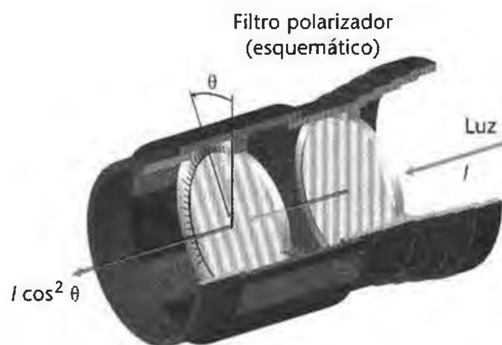
63. **Corriente eléctrica.** Un generador de corriente eléctrica produce una corriente dada por la ecuación

$$I = 30 \operatorname{sen} 120\pi t$$

donde t es el tiempo en segundos e I es la corriente en amperes. Encuentre el tiempo t positivo más pequeño (con cuatro dígitos significativos) de manera que $I = -10$ amperes.

64. **Corriente eléctrica.** Remítase al problema 63. Encuentre el tiempo t positivo más pequeño (con cuatro dígitos significativos) de manera que $I = 25$ amperes.

65. **Óptica.** Un filtro polarizador de una cámara fotográfica contiene dos placas paralelas de vidrio polarizado: uno es fijo y la otra puede girar. Si θ es el ángulo de rotación desde la posición de máxima transmisión de luz, entonces la intensidad de la luz que sale del filtro es $\cos^2\theta$ veces la intensidad I de la luz que entra al filtro (véase la figura).



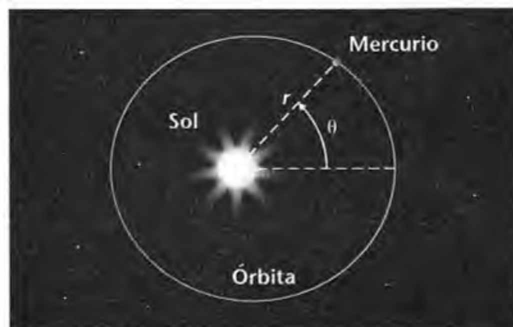
Encuentre el ángulo θ más pequeño (en grados decimales con dos cifras decimales) de manera que la intensidad de la luz que sale del filtro sea el 40% de la que entra.

66. **Óptica.** Refiérase al problema 65. Encuentre el ángulo θ positivo más pequeño de manera que la luz que sale del filtro sea el 70% de la que entra.

67. **Astronomía.** El planeta Mercurio viaja alrededor del Sol en una órbita elíptica dada aproximadamente por

$$r = \frac{3.44 \times 10^7}{1 - 0.206 \cos\theta}$$

(véase la figura). Encuentre el ángulo θ positivo más pequeño (en grados decimales con tres dígitos significativos) de manera tal que Mercurio esté a 3.09×10^7 millas del Sol.

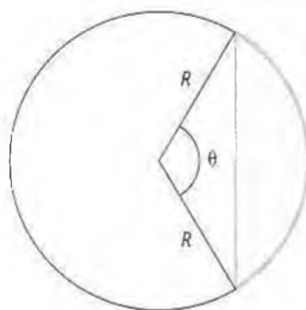


68. **Astronomía.** Refiérase al problema 67. Encuentre el ángulo θ positivo más pequeño (en grados decimales con tres dígitos significativos) de manera que Mercurio esté a 3.78×10^7 millas del Sol.

69. **Geometría.** El área del segmento de un círculo en la figura está dado por

$$A = \tfrac{1}{2}R^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

donde θ está medido en radianes. Use un dispositivo de graficación para encontrar la medida en radianes, hasta con tres cifras decimales, del ángulo θ si el radio es de 8 pulgadas y el área del segmento es de 48 pulgadas cuadradas.

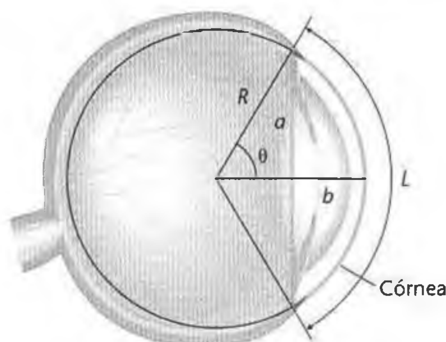


70. **Geometría.** Repita el problema 69 si el radio es de 10 centímetros y el área del segmento tiene 40 centímetros cuadrados.

71. **Cirugía de ojos.** Una técnica de cirugía para corregir el astigmatismo implica remover pequeñas partes de tejido para cambiar la curvatura de la córnea.* En la sección trans-

*Basado en el artículo "La corrección quirúrgica del astigmatismo", por Sheldon Rothman y Helen Strassberg, *UMAP Journal*, vol. V, núm. 2, 1984.

versal de la córnea que se muestra en la figura, el arco circular, con radio R y el ángulo central 2θ, representa una sección transversal de la superficie de la córnea.



(A) Si $a = 5.5$ milímetros y $b = 2.5$ milímetros, encuentre la L correcta con cuatro cifras decimales.

(B) Al reducir la longitud de la cuerda a $2a$ sin cambiar la longitud L del arco, tiene un efecto de empuje de la córnea hacia afuera redondeándola. Con la ayuda de un dispositivo de graficación en parte de la solución, aproxime b con cuatro cifras decimales si a se reduce a 5.4 milímetros y L permanece igual que en el inciso (A).

72. Cirugía de ojos. Refiérase al problema 71.

(A) Si en la figura $a = 5.4$ milímetros y $b = 2.4$ milímetros, encuentre la L correcta con cuatro cifras decimales.

(B) Aumentar la longitud de la cuerda sin cambiar la longitud L del arco, tiene un efecto de jalar la córnea hacia dentro haciéndola más plana, aun de forma circular. Con la ayuda de un dispositivo de graficación en parte de la solución, aproxime b con cuatro cifras decimales si a se aumenta a 5.5 milímetros y L permanece igual que en el inciso (A).

Geometría analítica. *Encuentre las soluciones simultáneas para cada sistema de ecuaciones en los problemas 73 y 74 ($0° \leq \theta \leq 360°$). Estas ecuaciones son polares, y se analizarán en el capítulo siguiente.*

* **73.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$
$r = \operatorname{sen} 2\theta$

* **74.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta$
$r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta)$

Los problemas 75 y 76 están relacionados con la rotación de los ejes en geometría analítica.

** **75. Geometría analítica.** Dada la ecuación $2xy = 1$, reemplace x y y con

$$x = u \cos \theta - v \operatorname{sen} \theta$$

$$y = u \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta$$

y simplifique el lado izquierdo de la ecuación resultante. Encuentre el ángulo θ positivo más pequeño medido en grados de manera que el coeficiente del término uv sea 0.

** **76. Geometría analítica.** Repita el problema 75 para $xy = -2$.

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 6 Desde *M* sen *Bt* + *N* cos *Bt* hasta *A* sen (*Bt* + *C*), una herramienta de análisis armónico

Al resolver cierta clase de problemas matemáticos avanzados (problemas que tienen que ver con circuitos eléctricos, sistemas de masa-resorte, flujo de calor, etcétera), el proceso de solución conduce de manera natural a una función de la forma

$$y = M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt \qquad (1)$$

La investigación siguiente mostrará que el fenómeno que conduce a este tipo de ecuación son las armónicas simples y se puede representar por una ecuación de la forma

$$y = A \operatorname{sen} (Bt + C)$$

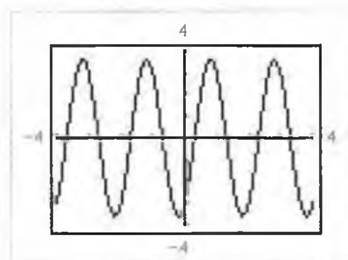
(A) Dispositivo de graficación para exploración. Use un dispositivo de graficación para explorar la naturaleza de la gráfica de la ecuación (1) para algunos valores de M, N y B. ¿La gráfica parece ser armónica simple; es decir, parece ser la gráfica de una ecuación de la forma $y = A \operatorname{sen} (Bt + C)$?

La gráfica de $y = 2 \operatorname{sen}(\pi t) - 3\cos(\pi t)$, que es típica de varias gráficas de la ecuación (1), se muestra en la figura 1. El resultado es que la gráfica de ésta también se puede obtener de una ecuación de la forma

$$y = A \operatorname{sen}(Bt + C) \tag{2}$$

para valores adecuados de A, B y C.

FIGURA 1 $y = 2 \operatorname{sen}(\pi t) - 3\cos(\pi t)$.



El problema ahora es: Dados M, N y B en la ecuación (1), encuentre A, B y C en la ecuación (2), de manera que ésta produzca la misma gráfica que la anterior. Esto último se prefiere sobre lo primero, ya que de (2) se puede fácilmente leer la amplitud, periodo y corrimiento de fase, y reconocer un fenómeno como armónico simple.

El proceso para encontrar A, B y C, dados M, N y B, requiere un poco de ingenuidad y el uso de la identidad de la suma

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \tag{3}$$

¿Cómo se procede? Se comienza por tratar de obtener el lado derecho de la ecuación (1) para que se parezca al lado derecho de la identidad (3). Después se usa (3), de derecha a izquierda, para obtener (2).

(B) Estableciendo una identidad de transformación. Demuestre que

$$y = M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt = \sqrt{M^2 + N^2} \operatorname{sen}(Bt + C) \tag{4}$$

donde C es cualquier ángulo (en radianes si t es real) que tiene $P(M, N)$ sobre su lado terminal. *Sugerencia*: Un primer paso es el siguiente:

$$M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt = \frac{\sqrt{M^2 + N^2}}{\sqrt{M^2 + N^2}} (M \operatorname{sen} Bt + N \cos Bt)$$

(C) Uso de la identidad de transformación. Use la ecuación (4) para transformar

$$y1 = -4 \operatorname{sen} \frac{t}{2} + 3 \cos \frac{t}{2}$$

en la forma $y2 = A \operatorname{sen}(Bt + C)$, donde se escoge C de manera que $|C|$ sea mínima. Calcule C hasta con tres cifras decimales. A partir de la nueva ecuación, determine la amplitud, periodo y corrimiento de fase.

(D) Visualización y verificación del dispositivo de graficación. Grafique $y1$ y $y2$ de la parte C en la misma ventana de visión.

(E) Aplicación física. Se suspende un peso de un resorte, con una constante del resorte de 64, se jala 4 centímetros por debajo de su posición de equilibrio y después se le da un empuje hacia abajo para producir una velocidad inicial hacia abajo de 24 centímetros por segundo. En matemáticas más avanzadas (ecuaciones diferenciales) se encuentra que la ecuación de movimiento (despreciando la resistencia del aire y la fricción) está dada de manera aproximada por

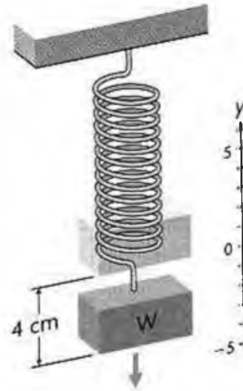
$$y1 = -3 \operatorname{sen} 8t - 4 \cos 8t$$

donde $y1$ es la posición del peso en la parte inferior de la escala en la figura 2, en un tiempo t (y está en centímetros y t en segundos). Transforme la ecuación en la forma

$$y2 = A \text{ sen } (Bt + C)$$

e indique la amplitud, periodo y corrimiento de fase del movimiento. Escoja el mínimo positivo C y mantenga A positivo.

FIGURA 2 Sistema masa-resorte.



(F) Visualización y verificación en un dispositivo de graficación. La gráfica de $y1$ y $y2$ del inciso (E) en la misma ventana de visión de un dispositivo de graficación, $0 \le t \le 6$. ¿Cuántas veces pasará el peso por $y = 2$ en los primeros 6 segundos?

(G) Solución de una ecuación trigonométrica. ¿Cuánto tiempo, con tres cifras decimales, le tomará al peso llegar a $y = 2$ la primera vez?

Repaso del capítulo 6

6-1 IDENTIDADES BÁSICAS Y SU USO

Las siguientes once identidades son básicas en el proceso para cambiar expresiones trigonométricas a formas equivalentes que son más útiles:

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen } x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Identidades de cocientes

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}$$

Identidades para negativos

$$\text{sen } (-x) = -\text{sen } x \qquad \cos (-x) = \cos x$$

$$\tan (-x) = -\tan x$$

Identidades pitagóricas

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$1 + \cos^2 x = \csc^2 x$$

Aun cuando no existen métodos fijos para la demostración que trabaja bien para todas las identidades, los siguientes pasos sugeridos son útiles en muchos casos.

Pasos sugeridos para la demostración de identidades

1. Comience con el lado más complicado de la identidad y transfórmela en un lado más simple.
2. Intente operaciones algebraicas tales como multiplicación, factorización, combinación de fracciones y fracciones separables.
3. Si los otros pasos fallan, exprese cada función en términos de las funciones seno y coseno, y después realice operaciones algebraicas adecuadas.
4. En cada paso, tenga en cuenta el otro lado de la identidad. Esto a menudo revela lo que usted debe hacer para llegar ahí.

6-2 IDENTIDADES DE SUMA, DIFERENCIA Y COFUNCIÓN

Identidades de suma

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

Identidades de diferencia

$$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$$

Identidades de cofunción

(Reemplace $\pi/2$ con 90° si x está en grados.)

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x \qquad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

6-3 IDENTIDADES DE ÁNGULOS DOBLES Y DE ÁNGULO MITAD

Identidades de ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x - 1$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\cot x}{\cot^2 x - 1} = \frac{2}{\cot x - \tan x}$$

Identidades de ángulo mitad

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

6-4 IDENTIDADES DE PRODUCTO-SUMA Y DE SUMA-PRODUCTO

Identidades de producto-suma

$$\operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$$

$$\cos x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)]$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

Identidades de suma-producto

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

6-5 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

En las primeras cuatro secciones del capítulo, se consideraron ecuaciones trigonométricas llamadas **identidades**. Las identidades son verdaderas para todos los reemplazos de la(s) variable(s) para las cuales ambos lados están definidos. Esta sección considera **ecuaciones condicionales**, que son verdaderas para algunos reemplazos de variables pero son falsas para otros reemplazos de variables para las cuales ambos lados es-

tán definidos. La ecuación sen $x = \cos x$ es una ecuación condicional.

En la **resolución de una ecuación trigonométrica mediante un procedimiento trigonométrico**, ninguna regla en particular le conducirá a todas las soluciones de cada ecuación trigonométrica que usted quiera encontrar. Resolver ecuaciones trigonométricas de manera algebraica a menudo requiere del uso de manipulación algebraica, identidades e ingenuidad.

Sugerencias para la solución de ecuaciones trigonométricas de manera algebraica

1. Tome en cuenta una función trigonométrica en particular como una variable y resuélvala.
   (a) Considere el uso de manipulación algebraica tal como factorización, combinación o separación de fracciones, etcétera.
   (b) Considere el uso de identidades.
2. Después de resolver una función trigonométrica, despeje la variable.

Con la **solución de una ecuación trigonométrica mediante un procedimiento en un dispositivo de graficación** se pueden resolver mayor variedad de problemas que con el procedimiento algebraico. Las soluciones son generalmente aproximaciones (con cualquier exactitud decimal deseada). En algunos casos las soluciones exactas se pueden encontrar por medio de un procedimiento algebraico.

Ejercicio de repaso del capítulo 6

Después de resolver todos los problemas de este capítulo, revise y compruebe las soluciones que se encuentran al final. Ahí están todas las respuestas a los problemas de repaso, excepto las comprobaciones; en seguida está un número en tipo itálico que indica de qué sección es el problema analizado. Si se le presentan dudas, revise la sección correspondiente en el texto.

A

Demuestre cada identidad en los problemas del 1 al 4.

1. $\tan x + \cot x = \sec x \csc x$
2. $\sec^4 x - 2\sec^2 x \tan^2 x + \tan^4 x = 1$
3. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} + \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x} = 2\sec^2 x$
4. $\cos\left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$
5. Escriba como una suma: $\operatorname{sen} 5\alpha \cos 3\alpha$.
6. Escriba como producto: $\cos 7x - \cos 5x$.
7. Simplifique: $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{9\pi}{2}\right)$

Resuelva de manera exacta los problemas 8 y 9 (θ está en grados, x es real).

8. $\sqrt{2}\cos\theta + 1 = 0$, para todo θ
9. $\operatorname{sen} x \tan x - \operatorname{sen} x = 0$, para toda x real

Resuelva los problemas del 10 al 13 con cuatro cifras decimales(θ está en grados. x es real).

10. $\operatorname{sen} x = 0.7088$, para toda x real
11. $\cos\theta = 0.2557$, para toda θ
12. $\cot x = -0.1692$, $-\pi/2 < x < \pi/2$
13. $3\tan(11 - 3x) = 23.46$, $-\pi/2 < 11 - 3x < \pi/2$
14. Use un dispositivo de graficación para probar si cada una de las siguientes expresiones es una identidad. Si la ecuación parece ser una identidad, demuéstrela. Si no lo parece, encuentre un valor de x para la que ambos lados están definidos pero no son iguales.
    (A) $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 - 2\operatorname{sen} x \cos x$
    (B) $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

B

Demuestre cada identidad en los problemas del 15 al 23.

15. $\dfrac{1 - 2\cos x - 3\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \dfrac{1 - 3\cos x}{1 - \cos x}$
16. $(1 - \cos x)(\csc x + \cot x) = \operatorname{sen} x$
17. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$
18. $\cos 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

19. $\cot \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

20. $\cot x - \tan x = \frac{4\cos^2 x - 2}{\operatorname{sen} 2x}$

21. $\left(\frac{1 - \cot x}{\csc x}\right)^2 1 - \operatorname{sen} 2x$

22. $\tan m + \tan n = \frac{\operatorname{sen}(m + n)}{\cos m \cos n}$

23. $\tan(x + y) = \frac{\cot x + \cot y}{\cot x \cot y - 1}$

Evalúe de manera exacta los problemas 24 y 25 mediante las identidades pertinentes de suma-producto o de producto-suma.

24. $\cos 195° \operatorname{sen} 75°$

25. $\cos 195° + \cos 105°$

Resuelva de manera exacta los problemas del 26 al 30 (θ está en grados, x es real).

26. $4\operatorname{sen}^2 x - 3 = 0, 0 \le x < 2\pi$

27. $2\operatorname{sen}^2 \theta + \cos \theta = 1, 0° \le \theta \le 180°$

28. $2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x = 0$, para toda x real

29. $\operatorname{sen} 2x = \sqrt{3} \operatorname{sen} x$, para toda x real

30. $2\operatorname{sen}^2 \theta + 5\cos \theta + 1 = 0$, all θ

Resuelva los problemas del 31 al 33 con cuatro dígitos significativos (θ está en grados, x es real).

31. $\tan \theta = 0.2557$, para toda θ

32. $\operatorname{sen}^2 x + 2 = 4\operatorname{sen} x$, para toda x real

33. $\tan^2 x = 2\tan x + 1, 0 \le x < \pi$

Resuelva los problemas del 34 al 37 con cuatro cifras decimales mediante un dispositivo de graficación.

34. $3\operatorname{sen} 2x = 2x - 2.5$, para toda x real

35. $3\operatorname{sen} 2x > 2x - 2.5$, para toda x real

36. $2\operatorname{sen}^2 x - \cos 2x = 1 - x^2$, para toda x real

37. $2\operatorname{sen}^2 x - \cos 2x \le 1 - x^2$, para toda x real

38. Dada la ecuación $\tan(x + y) = \tan x + \tan y$
   (A) ¿Es $x = 0$ y $y = \pi/4$ una solución?
   (B) ¿Es la ecuación una identidad o una ecuación condicional? Explique.

39. Explique la diferencia entre evaluar $\operatorname{sen}^{-1} 0.3351$ y la solución de la ecuación $\operatorname{sen} x = 0.3351$.

40. Use un dispositivo de graficación para probar si cada una de las siguientes expresiones es una identidad. Si una ecuación parece ser una identidad, verifíquela. Si no lo parece, encuentre un valor de x para el que ambos lados estén definidos pero no sean iguales.

(A) $\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x + 2\tan x} = \frac{1}{\cos x - 2}$

(B) $\frac{\tan x}{\operatorname{sen} x - 2\tan x} = \frac{1}{\cos x - 2}$

41. Use una identidad de suma o diferencia para convertir $y = \cos(x - \pi/3)$ a una forma que implique sen x y/o cos x. Introduzca como $y1$ la ecuación original a un dispositivo de graficación, la forma convertida como $y2$, y grafique $y1$ y $y2$ en la misma ventana de visión. Use la función TRACE para comparar las dos gráficas.

42. (A) Resuelva de manera exacta $\tan(x/2) = 2\operatorname{sen} x, 0 \le x < 2\pi$, mediante métodos algebraicos.
   (B) Resuelva $\tan(x/2) = 2\operatorname{sen} x, 0 \le x < 2\pi$, con cuatro cifras decimales, usando un dispositivo de graficación.

43. Resuelva $3\cos(x - 1) = 2 - x^2$, para toda x real, con tres cifras decimales, usando un dispositivo de graficación.

C

Resuelva de manera exacta los problemas del 44 al 46, sin usar calculadora.

44. Dada $\tan x = -\frac{3}{4}$, $\pi/2 \le x \le \pi$, encuentre:
   (A) $\operatorname{sen}(x/2)$ (B) $\cos 2x$

45. $\operatorname{sen}[2\tan^{-1}(-\frac{3}{4})]$

46. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5} + \cos^{-1}\frac{4}{5})$

47. (A) Resuelva $\cos^2 2x = \cos 2x + \operatorname{sen}^2 2x, 0 \le x < \pi$, de manera exacta, mediante métodos algebraicos.
   (B) Resuelva $\cos^2 2x = \cos 2x + \operatorname{sen}^2 2x, 0 \le x < \pi$, con cuatro cifras decimales usando un dispositivo de graficación.

48. Se quiere encontrar las raíces de

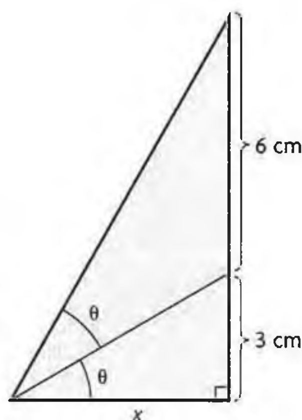


$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x - 1} \qquad \text{para } x > 0$$

   (A) Explore la gráfica de f para diferentes intervalos $[a, b]$ para diversos valores de a y b, $0 < a < b$. ¿La función f tiene la raíz más pequeña? Si es así, ¿cuál es (con cuatro cifras decimales)? ¿La función tiene la raíz más grande? Si es así cuál es (con cuatro cifras decimales)?
   (B) Explique qué sucede con la gráfica conforme x aumenta sin límite. ¿Tiene la gráfica una asintota? Si es así, ¿cuál es su ecuación?
   (C) Explore la gráfica de f para intervalos cada vez más pequeños que contienen $x = 1$. ¿Cuántas raíces existen en cualquier intervalo que contiene $x = 1$? ¿Es $x = 1$ una raíz? Explique.

APLICACIONES

49. **Medición indirecta.** Encuentre el valor exacto de x en la figura; después encuentre x y θ con tres cifras decimales. [*Sugerencia*: use una identidad adecuada que implique $\tan 2\theta$.]



50. **Corriente eléctrica.** Un generador de corriente alterna produce una corriente dada por la ecuación

$$I = 50 \operatorname{sen} 120\pi (t - 0.001)$$

donde t es el tiempo en segundos, e I es la corriente en amperes. Encuentre el valor de t positivo más pequeño, con tres dígitos significativos, de manera que $I = 40$ amperes.

51. **Frecuencias de música e interferencia.** $y = 0.6 \cos 184\pi t$ y $y = -0.6 \cos 208\pi t$ son ecuaciones de ondas sonoras con frecuencias de 92 y 104 hertz, respectivamente. Si se emiten ambos sonidos de manera simultánea, se tendrá una frecuencia de interferencia.

(A) Demuestre que

$$0.6 \cos 184\pi t - 0.6 \cos 208\pi t = 1.2 \operatorname{sen} 12\pi t \operatorname{sen} 196\pi t$$

(B) Grafique cada una de las ecuaciones siguientes en una diferente ventana de visión para $0 \le t \le 0.2$.

$$y = 0.6 \cos 184\pi t$$

$$y = -0.6 \cos 208\pi t$$

$$y = 0.6 \cos 184\pi t - 0.6 \cos 208\pi t$$

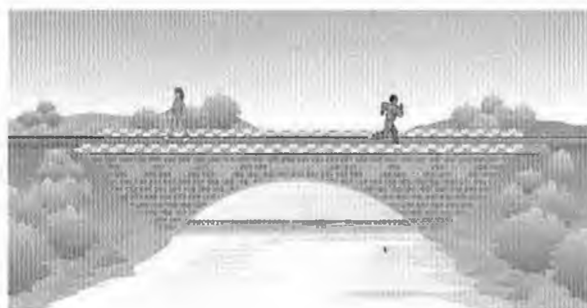
$$y = 1.2 \operatorname{sen} 12\pi t \operatorname{sen} 196\pi t$$



52. **Ingeniería.** Se tiene un puente con un arco circular con una longitud de arco de 36 pies y salva un claro del canal de 32 pies (véase la figura). Determine, con tres cifras decimales, la altura y el radio del arco circular por arriba del agua en el centro del puente. Comience por dibujar rectas auxiliares en la figura, marcando las partes adecuadas, después explique cómo la siguiente ecuación trigonométrica

$$\operatorname{sen} \theta = \tfrac{8}{9}\theta$$

se relaciona con el problema. Resuelva en seguida la ecuación trigonométrica para θ; el radio es fácil de encontrar y la altura del arco por arriba del agua se puede deducir con un poco de ingenuidad.



CAPÍTULO 7

TEMAS ADICIONALES EN LA TRIGONOMETRÍA





$f(x)=|3x + 4| + 1$

En este capítulo se consideran varios temas adicionales de trigonometría. Primero, se regresa al problema de resolver triángulos, pero ahora no sólo de triángulos rectángulos sino de cualquier tipo. Después se usan algunas de estas ideas para desarrollar el importante concepto de vector. Una vez adquirido el conocimiento de la trigonometría, es posible introducir el estudio del *sistema de coordenadas polares*, probablemente el sistema coordenado más importante después del sistema coordenado rectangular. En seguida se consideran las ecuaciones polares y sus gráficas, los números complejos se representan en la *forma polar*. Una vez que un número complejo está en la forma polar, se pueden encontrar las *n*ésimas potencias y las *n* ésimas raíces del número usando un ingenioso teorema debido a De Moivre.

SECCIÓN 7-1 Ley de los senos



- Deducción de la ley de los senos
- Solución de los casos ALA y AAL
- Solución del caso LLA incluyendo el caso ambiguo

La ley de los senos (desarrollada en esta sección) y la ley de los cosenos (que se desarrollará en la siguiente) desempeñan un papel fundamental en la solución de **triángulos oblicuos** (triángulos sin un ángulo recto). Todo triángulo oblicuo es **agudo**, todos sus ángulos están entre 0° y 90°, u obtuso, un ángulo está entre 90° y 180°. La figura 1 ilustra ambos tipos de triángulos.

FIGURA 1 Triángulos oblicuos.

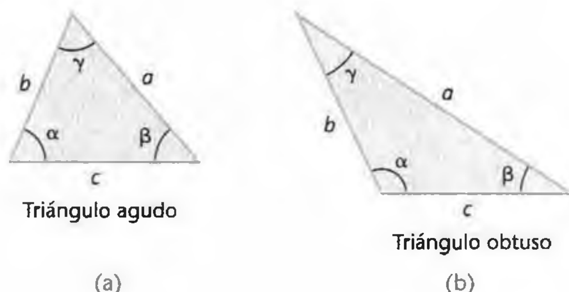


TABLA 1 Triángulos y dígitos significativos

Ángulo más cercano	Dígitos significativos para la medida de un lado
1°	2
10′ o 0.1°	3
1′ o 0.01°	4
10″ o	5

Observe cómo se marcaron los lados y los ángulos de los triángulos oblicuos de la figura 1: El lado a es el ángulo opuesto α, el lado b es el ángulo opuesto β y el lado c es el ángulo opuesto γ. Observe también que el lado más grande de un triángulo está frente al ángulo más grande. Dando tres cantidades cualquiera de las seis que se indican en la figura 1 se busca encontrar las tres restantes, si éstas existen. Este proceso se llama **solución del triángulo**.

En esta sección se desarrolla la *ley de los senos* y en la siguiente se desarrollará la *ley de los cosenos*. Estas dos leyes proporcionan las herramientas básicas para la solución de los triángulos oblicuos. Si las cantidades dadas incluyen un lado y el ángulo opuesto, se debe usar la ley de los senos; de otro modo, se inicia con la ley de los cosenos.

Antes de proceder con ejemplos específicos, es importante recordar las reglas de la tabla 1 considerando la precisión de las medidas del ángulo y del lado. La tabla 1 se repite también en la cubierta del texto para una referencia fácil.

Cálculos con calculadora

Cuando se resuelve un cierto lado o un ángulo, se realizan todas las operaciones con calculadora y después se redondea al número apropiado de dígitos significativos (como se especifica en la tabla 1) al finalizar el cálculo. Su respuesta puede diferir un poco de las que se dan en el libro, dependiendo del orden en que se resuelvan los lados y los ángulos.

• Deducción de la ley de los senos

La ley de los senos es relativamente fácil de probar usando las propiedades de los triángulos rectángulos estudiadas en la sección 5-5. Se usará también el hecho de que

$$\text{sen}\,(180° - x) = \text{sen}\,x$$

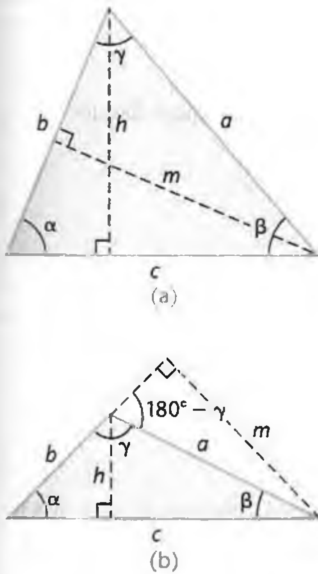


FIGURA 2

la cual se obtiene fácilmente usando una identidad de la diferencia (un ejercicio bueno para usted). Refiriéndose a los triángulos de la figura 2, se procede como sigue: Para cada triángulo,

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{h}{b} \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\,\beta = \frac{h}{a}$$

Despejando h de cada ecuación, se obtiene

$$h = b\,\text{sen}\,\alpha \qquad \text{y} \qquad h = a\,\text{sen}\,\beta$$

Así,

$$b\,\text{sen}\,\alpha = a\,\text{sen}\,\beta$$

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} \tag{1}$$

De manera similar, para cada triángulo de la figura 2,

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{m}{c} \qquad \text{y} \qquad \text{sen}\,\gamma = \text{sen}\,(180° - \gamma) = \frac{m}{a}$$

Al despejar m de cada ecuación, se obtiene

$$m = c\,\text{sen}\,\alpha \qquad \text{y} \qquad m = a\,\text{sen}\,\gamma$$

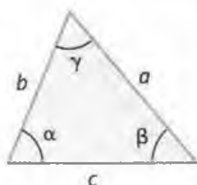
Así,

$$c\,\text{sen}\,\alpha = a\,\text{sen}\,\gamma$$

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c} \tag{2}$$

Si se combinan las ecuaciones (1) y (2), se obtiene la **ley de los senos**.

Teorema 1 **Ley de los senos**



$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

En palabras, la razón del seno de un ángulo con su lado opuesto es igual a la razón del seno de cualquiera de los otros ángulos con su lado opuesto.

[*Nota:* Si las cantidades dadas incluyen un ángulo y el lado opuesto, use la ley de los senos. Si no es así, empiece con la ley de los cosenos.]

Por consiguiente, la ley de los senos se usa para resolver triángulos, dando:

1. Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (LLA)
2. Dos ángulos y cualquier lado (ALA o AAL)

Comience con la ley de los cosenos (sección 7-2) para resolver un triángulo dado:

3. Tres lados (LLL)
4. Dos lados y un ángulo (LAL)

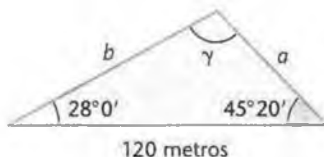
Primero se aplica la ley de los senos para los casos más fáciles ALA y AAL, después se aborda el caso más difícil LLA.

• Solución de los casos ALA y AAL

EJEMPLO 1 **Solución para el caso ALA**

Resuelva el triángulo de la figura 3.

FIGURA 3



Solución Se están dando dos ángulos y el lado que los contiene, éste es el caso ALA. Encuentre el tercer ángulo, después encuentre los otros dos lados usando la ley de los senos.

Despeje γ

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$
$$= 180° - (28°0' + 45°20')$$
$$= 106°40'$$

Despeje a

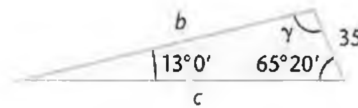
$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$
$$a = \frac{c\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\gamma}$$
$$= \frac{120\,\text{sen}\,28°0'}{\text{sen}\,106°40'}$$
$$= 58.8 \text{ metros}$$

Despeje b

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{b} = \frac{\text{sen}\,\gamma}{c}$$
$$b = \frac{c\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\gamma}$$
$$= \frac{120\,\text{sen}\,45°20'}{\text{sen}\,106°40'}$$
$$= 89.1 \text{ metros}$$

Problema seleccionado 1 Resuelva el triángulo de la figura 4.

FIGURA 4



Observe cómo el **caso AAL** siempre se puede convertir al caso ALA encontrando primero el tercer ángulo. En el caso del ALA o del AAL para determinar un triángulo único, la suma de los dos ángulos debe estar entre 0° y 180°, ya que la suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a 180° y ningún ángulo puede ser cero ni negativo.

• Solución del caso LLA incluyendo el caso ambiguo

Ahora se tratará el caso donde se dan dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos (el caso LLA). Este caso tiene diferentes resultados posibles, dependiendo de las medidas de los dos lados y del ángulo. La tabla 2 ilustra las diferentes posibilidades.

TABLA 2 Variaciones LLA

α	a ($h = b$ sen α)	Número de triángulos	Figura	Caso
Agudo	$0 < a < h$	0		(a)
Agudo	$a = h$	1		(b)
Agudo	$h < a < b$	2	Caso ambiguo	(c)
Agudo	$a \geq b$	1		(d)
Obtuso	$0 < a \leq b$	0		(e)
Obtuso	$a > b$	1		(f)

No es necesario aprenderse de memoria la tabla 2. Generalmente, un burdo dibujo de cierta situación indicará cuál de las variaciones se aplica. El caso donde $h < a < b$ se denomina **caso ambiguo**, porque son siempre posibles dos triángulos, un agudo y otro obtuso.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Analice cuáles casos de la tabla 2 se aplican y por qué en el proceso de solución de un triángulo LLA con α agudo se encuentra que:

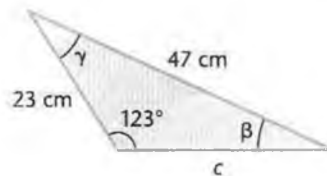
(1) sen $\beta > 1$
(2) sen $\beta = 1$
(3) $0 <$ sen $\beta < 1$

EJEMPLO 2 **Solución del caso LLA**

Resuelva el (los) triángulo(s) con $\alpha = 123°$, $b = 23$ centímetros y $a = 47$ centímetros.

Solución En un burdo dibujo (figura 5), se observa que sólo hay un triángulo:

FIGURA 5



Despeje β

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{23\operatorname{sen}123^\circ}{47}$$

$$\beta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{23\operatorname{sen}123^\circ}{47}\right) = 24^\circ$$

Despeje γ

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 123^\circ - 24^\circ = 33^\circ$$

Despeje c

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$$c = \frac{a\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{47\operatorname{sen}33^\circ}{\operatorname{sen}123^\circ} = 31 \text{ centímetros}$$

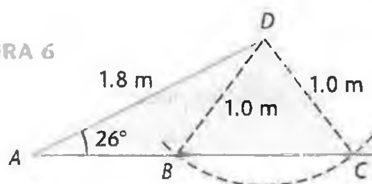
Problema seleccionado 2 Resuelva el (los) triángulo(s) con $\beta = 98^\circ$, $a = 62$ metros y $b = 88$ metros.

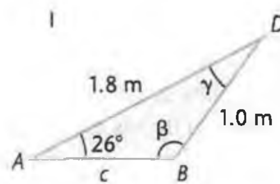
EJEMPLO 3 **Resuelva el caso LLA (ambiguo)**

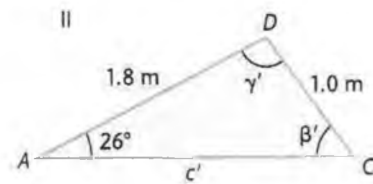
Resuelva el (los) triángulo(s) con $\alpha = 26^\circ$, $a = 1.0$ metro y $b = 1.8$ metros.

Solución Si se trata de dibujar un triángulo con los lados indicados y un ángulo, se encuentra que son posibles dos triángulos, I y II (figura 6). Esto se verifica por el hecho de que $h < a < b$, donde $h = b \operatorname{sen}\alpha = 0.79$ metros, $a = 1.0$ metro y $b = 1.8$ metros.

FIGURA 6







Despeje β y β' Se comienza por encontrar β y β' usando la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{1.8\operatorname{sen}26^\circ}{1.0} = 0.7891$$

El ángulo β puede ser obtuso o agudo:

$$\beta = 180^\circ - \operatorname{sen}^{-1} 0.7891 \quad \text{o} \quad \beta' = \operatorname{sen}^{-1} 0.7891$$
$$= 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ \qquad\qquad = 52^\circ$$

Despeje γ y γ'

En seguida se encuentra γ y γ':

$$\gamma = 180^\circ - (26^\circ + 128^\circ) = 26^\circ$$
$$\gamma' = 180^\circ - (26^\circ + 52^\circ) = 102^\circ$$

Despeje c y c'

Finalmente, se despeja c y c':

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c} \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma'}{c'}$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad c' = \frac{a \operatorname{sen}\gamma'}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$= \frac{1.0 \operatorname{sen} 26^\circ}{\operatorname{sen} 26^\circ} \qquad = \frac{1.0 \operatorname{sen} 102^\circ}{\operatorname{sen} 26^\circ}$$

$$= 1.0 \text{ metro} \qquad = 2.2 \text{ metros}$$

En resumen:

Triángulo I: $\beta = 128^\circ$ $\gamma = 26^\circ$ $c = 1.0$ metro

Triángulo II: $\beta' = 52^\circ$ $\gamma' = 102^\circ$ $c' = 2.2$ metros

Problema seleccionado 3

Resuelva el (los) triángulo(s) con $a = 8$ kilómetros, $b = 10$ kilómetros y $\alpha = 35^\circ$.

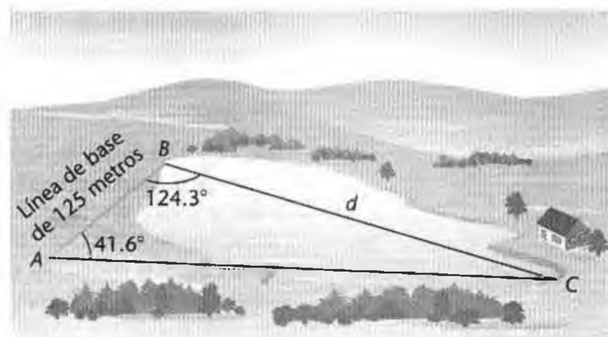
La ley de los senos es útil en muchas aplicaciones, como se puede ver en el ejemplo 4 y las aplicaciones de los ejercicios 7-1.

EJEMPLO 4

Topografía

Para medir la longitud d de un lago (véase figura 7), se estableció y se midió una línea de base AB de 125 metros. Los ángulos A y B son de 41.6° y 124.3°, respectivamente. ¿Qué tan largo es el lago?

FIGURA 7



Solución Encuentre el ángulo C y use la ley de los senos.

$$\text{Ángulo } C = 180° - (124.3° + 41.6°) = 14.1°$$

$$\frac{\text{sen } 14.1°}{125} = \frac{\text{sen } 41.6°}{d}$$

$$d = 125\left(\frac{\text{sen } 41.6°}{\text{sen } 14.1°}\right) = 341 \text{ metros}$$

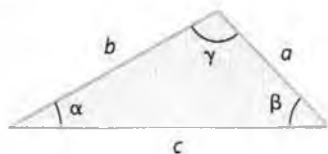
Problema seleccionado 4 En el ejemplo 4, encuentre la distancia AC.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $\gamma = 101°40'$, $b = 141$, $c = 152$ 2. $\alpha = 44°$, $\gamma = 38°$, $c = 55$ m
3. $\beta = 134°$, $\beta' = 46°$, $\gamma = 11°$, $\gamma' = 99°$, $c = 2.7$ km, $c' = 14$ km 4. 424 m

EJERCICIO 7-1

Las etiquetas de la siguiente figura se basan en la convención que se seguirá en este conjunto de ejercicios. Sus respuestas a algunos problemas pueden diferir un poco de las que se dan en el libro, dependiendo del orden en que se resuelvan los lados y los ángulos de un triángulo dado.



A

Resuelva cada triángulo en los problemas del 1 al 8.

1. $\alpha = 73°$, $\beta = 28°$, $c = 42$ pies
2. $\alpha = 41°$, $\beta = 33°$, $c = 21$ centímetros
3. $\alpha = 122°$, $\gamma = 18°$, $b = 12$ kilómetros
4. $\beta = 43°$, $\gamma = 36°$, $a = 92$ milímetros
5. $\beta = 112°$, $\gamma = 19°$, $c = 23$ yardas
6. $\alpha = 52°$, $\gamma = 105°$, $c = 47$ metros
7. $\alpha = 52°$, $\gamma = 47°$, $a = 13$ centímetros
8. $\beta = 83°$, $\gamma = 77°$, $c = 25$ millas

En los problemas del 9 al 16, determine si la información de cada problema permite que usted construya cero, uno o dos triángulos. No resuelva el triángulo. Explique cuál caso de la tabla 2 se aplica.

9. $a = 2$ pulgadas, $b = 4$ pulgadas, $\alpha = 30°$
10. $a = 3$ pies, $b = 6$ pies, $\alpha = 30°$
11. $a = 6$ pulgadas, $b = 4$ pulgadas, $\alpha = 30°$

12. $a = 8$ pies, $b = 6$ pies, $\alpha = 30°$

13. $a = 1$ pulgada, $b = 4$ pulgadas, $\alpha = 30°$

14. $a = 2$ pies, $b = 6$ pies, $\alpha = 30°$

15. $a = 3$ pulgadas, $b = 4$ pulgadas, $\alpha = 30°$

16. $a = 5$ pies, $b = 6$ pies, $\alpha = 30°$

B

Resuelva cada triángulo en los problemas del 17 al 30. Si un problema no tiene solución, indíquelo.

17. $\alpha = 118.3°$, $\gamma = 12.2°$, $b = 17.3$ pies

18. $\beta = 27.5°$, $\gamma = 54.5°$, $a = 9.27$ pulgadas

19. $\alpha = 67.7°$, $\beta = 54.2°$, $b = 123$ metros

20. $\alpha = 122.7°$, $\beta = 34.4°$, $b = 18.3$ kilómetros

21. $\alpha = 46.5°$, $a = 7.9$ milímetros, $b = 13.1$ milímetros

22. $\alpha = 26.3°$, $a = 14.7$ pulgadas, $b = 35.2$ pulgadas

23. $\beta = 38.9°$, $a = 42.7$ pulgadas, $b = 30.0$ pulgadas, α agudo

24. $\beta = 27.3°$, $a = 244$ centímetros, $b = 135$ centímetros, α agudo

25. $\beta = 38.9°$, $a = 42.7$ pulgadas, $b = 30.0$ pulgadas, α obtuso

26. $\beta = 27.3°$, $a = 244$ centímetros, $b = 135$ centímetros, α obtuso

27. $\alpha = 123.2°$, $a = 101$ yardas, $b = 152$ yardas

28. $\alpha = 137.3°$, $a = 13.9$ metros, $b = 19.1$ metros

29. $\beta = 29°30'$, $a = 43.2$ milímetros, $b = 56.5$ milímetros

30. $\beta = 33°50'$, $a = 673$ metros, $b = 1\,240$ metros

C

31. Sea $\alpha = 42.3°$ y $b = 25.2$ centímetros. Determine un valor k, tal que si $0 < a < k$, no hay solución; si $a = k$, hay una solución; y si $k < a < b$, hay dos soluciones.

32. Sea $\alpha = 37.3°$ y $b = 42.8$ centímetros. Determine un valor k, tal que si $0 < a < k$, no hay solución; si $a = k$, hay una solución, y si $k < a < b$, hay dos soluciones.

33. Ecuación de Mollweide,

$$(a - b)\cos\frac{\gamma}{2} = c\,\text{sen}\frac{\alpha - \beta}{2}$$

a menudo se usa para comprobar la solución final de un triángulo, ya que las seis partes de un triángulo están implicadas en la ecuación. Si el lado izquierdo no es igual al lado derecho después de la sustitución, entonces se ha cometido un error al resolver el triángulo. Use esta ecuación para comprobar el problema 1. (Debido a los errores de redondeo, ambos lados pueden no ser exactamente iguales.)

34. (A) Use la ley de los senos y las identidades adecuadas para mostrar que en el caso de cualquier triángulo

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan\frac{\alpha - \beta}{2}}{\tan\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

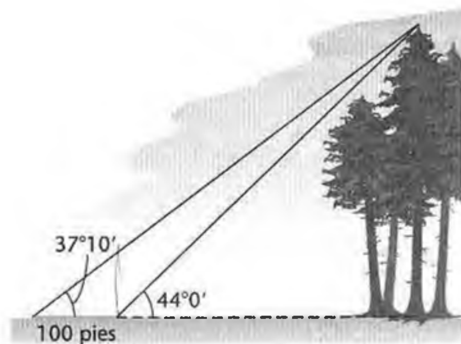
(B) Demuestre la fórmula con los valores del problema 1.

APLICACIONES

35. Guardia costera. Dos postes de mirador, A y B (con 10.0 millas de separación), se colocan en una costa para vigilar barcos ilegales que traspasen el límite de 3 millas. Si el poste A reporta un barco S en el ángulo $BAS = 37°30'$ y el poste B reporta el mismo barco en el ángulo $ABS = 20°0'$, ¿a qué distancia está el barco del poste A?, ¿a qué distancia está de la costa (suponga que la costa está a lo largo de la línea que une a los dos postes de observación)?

36. Mirador de observación. Un faro en F está señalado con dos estaciones de mirador, A y B, con 10.0 millas de separación. Si la estación B reporta al faro con un ángulo $ABF = 53°0'$ y la estación A reporta al faro a un ángulo $BAF = 28°30'$, ¿a qué distancia de la estación A está el faro? ¿Y de la estación B?

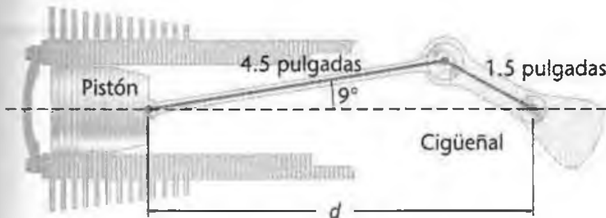
* **37. Ciencia natural.** Los árboles más altos del mundo crecen en el Parque Nacional Redwood en California; la altura de éstos es mayor que el largo de un campo de futbol. Encuentre la altura de uno de estos árboles, dada la información de la figura. (La medida de 100 pies tiene una precisión de tres dígitos significativos.)



* **38. Topografía.** Para medir la altura del Monte Whitney en California, los topógrafos usan un esquema como el que se muestra en la figura del problema 37. Establecen una línea de base horizontal de 2 000 pies de largo al pie de

la montaña y encuentran que el ángulo más cercano a la montaña es de 43°5'; y el más lejano es de 38°0'. Si la línea de base estaba a 5 000 pies sobre el nivel del mar, ¿cuál es la altura del Monte Whitney con respecto al nivel del mar?

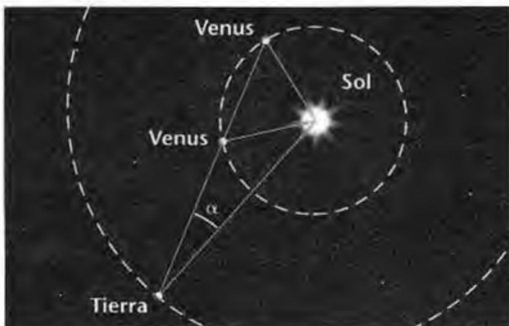
39. **Ingeniería.** Un pistón de 4.5 pulgadas se une por medio de una barra con un pistón de 1.5 pulgadas del cigueñal (véase figura). ¿A qué distancia del centro del cigüeñal está la base del pistón (distancia *d*) cuando la barra forma un ángulo de 9° (con la línea central? El problema tiene dos respuestas.



40. **Ingeniería.** Repita el problema 39 si la barra del pistón es de 6.3 pulgadas, el cigueñal es de 1.7 pulgadas y el ángulo es de 11°.

41. **Astronomía.** Las órbitas de la Tierra y Venus son aproximadamente circulares, con el Sol en el centro. Se manda una señal a Venus desde la Tierra, y el ángulo *STV* es de 18°40'. Si el radio de la órbita de la Tierra es 1.495×10^8 kilómetros y el radio de la órbita de Venus es 1.085×10^8 kilómetros, ¿cuáles son las posibles distancias de la Tierra a Venus (véase figura)?

42. **Astronomía.** En el problema 41, se encuentra el ángulo máximo *STV*. [*Sugerencia:* El ángulo es máximo cuando una línea recta que une a la Tierra y a Venus es tangente a la órbita de Venus.]

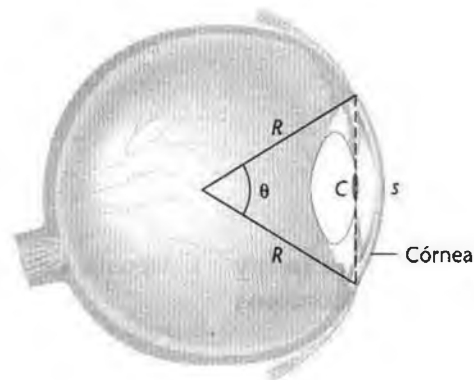


*43. **Topografía.** Un árbol que crece en una ladera proyecta una sombra de 102 pies sobre el plano de la colina (véase figura). Encuentre la altura vertical del árbol si, con respecto a la horizontal, la colina tiene una pendiente de 15.0° y el ángulo de elevación del Sol es de 62.0°.



*44. **Topografía.** Encuentre la altura del árbol del problema 43 si la longitud de la sombra es de 157 pies y, con respecto a la horizontal, la colina tiene una pendiente de 11.0° y el ángulo de elevación del Sol es de 42.0°.

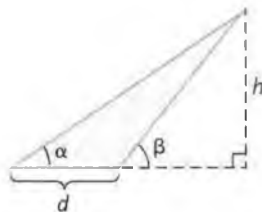
*45. **Ciencia de la vida.** Una sección transversal de la córnea de un ojo, un arco circular, como el que se muestra en la figura. Encuentre el radio *R* del arco y la longitud del arco *s*, dada la longitud de la cuerda $C = 11.8$ milímetros y el ángulo central $\theta = 98.9°$.



*46. **Ciencia de la vida.** Con respecto a la figura, encuentre el radio *R* del arco y la longitud del arco *s*, dado que la cuerda tiene una longitud $C = 10.2$ milímetros y el ángulo central $\theta = 63.2°$.

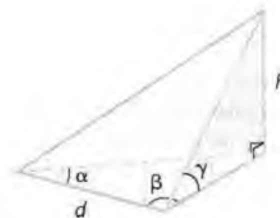
*47. **Topografía.** El procedimiento ilustrado en los problemas 37 y 38 se usa para determinar una altura inaccesible *h* cuando la línea de base *d* está en una línea perpendicular a *h*, que se puede establecer (véase figura) y los ángulos α y β que se pueden medir. Muestre que

$$h = d\left[\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}\right]$$



48. Topografía. La disposición de la figura se usa para determinar una altura inaccesible h cuando una línea de base d está en un plano perpendicular a h que se puede establecer, y se pueden medir los ángulos α, β y γ. Muestre que

$$h = d \operatorname{sen} \alpha \csc (\alpha + \beta) \tan \gamma$$



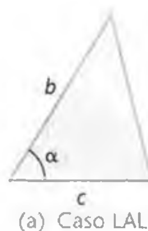
SECCIÓN 7-2 Ley de los cosenos



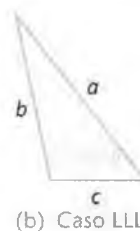
- Deducción de la ley de los cosenos
- Solución del caso LAL
- Solución del caso LLL

Si dos lados de un triángulo y el ángulo que los contiene (LAL) o tres lados (LLL), están dados, no se puede usar la ley de senos para resolver el triángulo (ningún caso implica un ángulo y su lado opuesto (figura 1)). Ambos casos se pueden resolver comenzando con la *ley de los cosenos*, que se estudiará en esta sección.

FIGURA 1



(a) Caso LAL

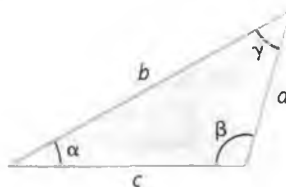


(b) Caso LLL

Deducción de la ley de los cosenos

El teorema 1 expresa la *ley de los cosenos*.

Teorema 1 Ley de los cosenos



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Las tres ecuaciones plantean en esencia lo mismo.

Los casos LAL y LLL se resuelven muy rápidamente comenzando con la ley de los cosenos.

Se establece $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Las otras dos ecuaciones se pueden obtener a partir de ésta con sólo etiquetar nuevamente la figura. Se inicia localizando un triángulo en un sistema coordenado rectangular. La figura 2 muestra tres triángulos típicos.

Para un triángulo arbitrario como los de la figura 2, se usa la fórmula de la distancia entre dos puntos para obtener

$$a = \sqrt{(h-c)^2 + (k-0)^2}$$

$$a^2 = (h-c)^2 + k^2 \qquad \text{Elevando al cuadrado ambos lados.}$$

$$= h^2 - 2hc + c^2 + k^2 \qquad (1)$$

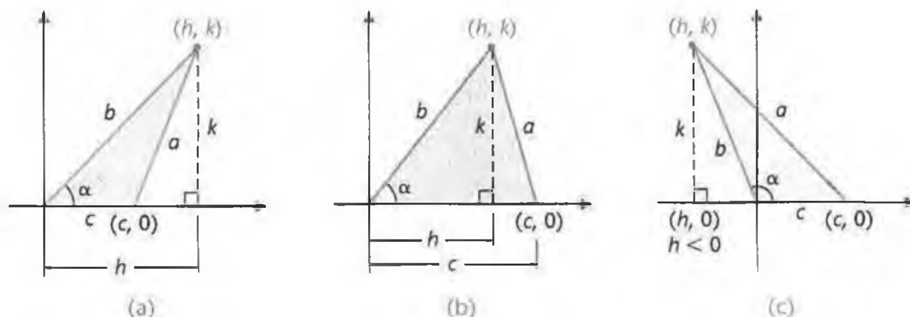


FIGURA 2 Tres triángulos representativos.

En la figura 2, se observa que

$$b^2 = h^2 + k^2$$

Sustituyendo b^2 por $h^2 + k^2$ en la ecuación (1), se obtiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2hc \qquad (2)$$

Pero

$$\cos\alpha = \frac{h}{b}$$

$$h = b\cos\alpha$$

Así, reemplazando h en la ecuación (2) con $b\cos\alpha$, se logra el objetivo:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

[*Nota:* Si α es agudo, entonces $\cos\alpha$ es positivo; si α es obtuso, entonces el $\cos\alpha$ es negativo.]

• Solución del caso LAL

Para el caso LAL, se comienza usando la ley de los cosenos para encontrar el lado de enfrente del ángulo dado. Después se usa la ley de los cosenos o la de los senos para encontrar un segundo ángulo. Debido a sus cálculos más simples, generalmente se usará la ley de los senos para encontrar al segundo ángulo.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Después de usar la ley de los cosenos para encontrar el lado opuesto al ángulo en un caso de LAL, se usa la ley de los senos para encontrar un segundo ángulo. La figura 2(a) muestra que hay dos opciones para un segundo ángulo.

(A) Si el ángulo dado es obtuso, ¿puede ser obtuso cualquiera de los ángulos restantes? Explique.

(B) Si el ángulo dado es agudo, entonces uno de los ángulos restantes puede o no ser obtuso. Explique por qué escoger el ángulo opuesto al lado más corto garantiza la selección de un ángulo agudo.

(C) Iniciando con (sen α)/a = (sen β)/b, muestre que

$$\alpha = \text{sen}^{-1}\left(\frac{a \text{ sen } \beta}{b}\right) \qquad (1)$$

(D) Explique por qué la ecuación (1) da el ángulo correcto α sólo si α es agudo.

El análisis anterior conduce a la estrategia siguiente para resolver el caso de LAL:

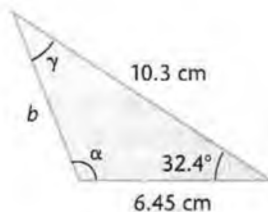
Estrategia para resolver el caso de LAL

Paso	Encuentre	Método
1.	El lado opuesto al ángulo dado.	Ley de los cosenos
2.	Segundo ángulo (Encuentre el ángulo opuesto al más corto de los dos lados dados; este ángulo siempre será agudo.)	Ley de los senos
3.	Tercer ángulo.	Reste de 180° la suma del ángulo dado y del ángulo encontrado en el paso 2.

EJEMPLO 1 **Solución del caso LAL**

Resuelva el triángulo de la figura 3.

FIGURA 3



Solución

Despeje b Use la ley de los cosenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad \text{Despeje } b.$$
$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta}$$
$$= \sqrt{(10.3)^2 + (6.45)^2 - 2(10.3)(6.45) \cos 32.4°}$$
$$= 5.96 \text{ cm}$$

Despeje γ Puesto que el lado c es más corto que el lado a, γ debe ser agudo y se usa la ley de los senos para despejar γ.

$$\frac{\text{sen}\,\gamma}{c} = \frac{\text{sen}\,\beta}{b} \quad \text{Despeje sen } \gamma.$$
$$\text{sen}\,\gamma = \frac{c\,\text{sen}\,\beta}{b} \quad \text{Despeje } \gamma.$$
$$\gamma = \text{sen}^{-1}\left(\frac{c\,\text{sen}\,\beta}{b}\right) \quad \text{Debido a que } \gamma \text{ es agudo, la función inversa del seno proporciona } \gamma \text{ directamente.}$$
$$= \text{sen}^{-1}\left(\frac{6.45\,\text{sen}\,32.4°}{5.96}\right)$$
$$= 35.4°$$

Despeje α

$$\alpha = 180° - (\beta + \gamma)$$
$$= 180° - (32.4° + 35.4°) = 112.2°$$

Problema seleccionado 1 Resuelva el triángulo con $\alpha = 77.5°$, $b = 10.4$ pies y $c = 17.7$ pies.

- **Solución del caso LLL**

Iniciando con tres lados de un triángulo, el problema será encontrar los tres ángulos. Los cálculos subsiguientes se simplifican si primero se despeja al ángulo obtuso. La ley de los cosenos se usa para este propósito. Un segundo ángulo, que debe ser agudo, se puede encontrar usando cualquiera de las leyes, aunque los cálculos son generalmente bastante más sencillos con la ley de los senos.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 (A) Iniciando con $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$, muestre que

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right) \quad (2)$$

(B) ¿La ecuación (2) da el ángulo correcto α independientemente de si α es agudo u obtuso? Explique.

El análisis anterior conduce a la siguiente estrategia para la solución del caso LLL.

Estrategia para resolver el caso de LAL

Paso	Encuentre	Método
1.	El ángulo opuesto al lado más largo (hay que tener cuidado si el ángulo es obtuso).	Ley de los cosenos
2.	En el caso de cualquiera de los ángulos restantes, cuál será agudo (¿por qué?).	Ley de los senos
3.	Tercer ángulo.	Reste de 180°, la suma de los ángulos encontrados en los pasos 1 y 2.

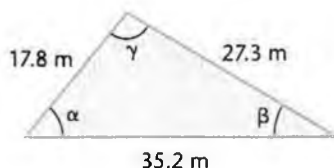
EJEMPLO 2 **Solución del caso LLL**

Resuelva el triángulo con $a = 27.3$ metros, $b = 17.8$ metros y $c = 35.2$ metros.

Solución Se dan tres lados del triángulo y se deben encontrar los tres ángulos. Éste es el caso LLL.

Se traza el triángulo (figura 4) y se usa la ley de los cosenos para encontrar el ángulo más grande, después se usa la ley de los senos para encontrar uno de los dos ángulos agudos restantes.

FIGURA 4



Debido a que γ es el ángulo más grande, para encontrarlo primero se usa la ley de los cosenos.

Despeje γ

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \qquad \text{Despeje } \cos\gamma.$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \qquad \text{Despeje } \gamma$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{(27.3)^2 + (17.8)^2 - (35.2)^2}{2(27.3)(17.8)}\right]$$

$$= 100.5°$$

Despeje α Ahora se despeja α o β, usando la ley de los senos. Se escoge α.

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a \operatorname{sen}\gamma}{c} = \frac{27.3 \operatorname{sen} 100.5}{35.2} \qquad \text{Despeje sen } \alpha.$$

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{27.3 \operatorname{sen} 100.5}{35.2}\right) \qquad \text{Despeje } \alpha.$$

$$= 49.7° \qquad \alpha \text{ es agudo.}$$

Despeje β

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$$

$$= 180° - (100.5° + 49.7°)$$

$$= 29.8°$$

Problema seleccionado 2 Resuelva el triángulo con $a = 1.25$ yardas, $b = 2.05$ yardas y $c = 1.52$ yardas.

EJEMPLO 3 **Encuentre el lado de un polígono regular**

Si un polígono regular de siete lados se inscribe en un círculo de 22.8 centímetros de radio, encuentre la longitud del lado del polígono.

Solución Trace una figura (figura 5) y use la ley de los cosenos:

FIGURA 5



$$d^2 = 22.8^2 + 22.8^2 - 2(22.8)(22.8)\cos\frac{360°}{7}$$

$$d = \sqrt{2(22.8)^2 - 2(22.8)^2 \cos\frac{360°}{7}}$$

$$= 19.8 \text{ centímetros}$$

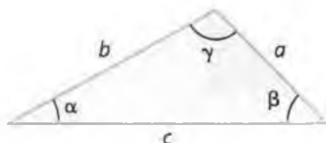
Problema seleccionado 3 Si un polígono regular de 11 lados se inscribe en un círculo con 4.63 pulgadas de radio, encuentre la longitud de un lado del polígono.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $a = 18.5$ pies, $\beta = 33.3°$, $\gamma = 69.2°$
2. $\alpha = 37.4°$, $\beta = 95.0°$, $\gamma = 47.6°$
3. 2.61 pulg.

EJERCICIO 7-2

Las etiquetas de la figura de abajo establecen la convención que se seguirá en este conjunto de ejercicios. Sus respuestas a algunos problemas pueden diferir un poco de los que se dan en el libro, dependiendo del orden en que resuelvan los lados y ángulos de un triángulo dado.



A

1. Remitiéndose a la figura anterior, si $\alpha = 47.3°$, $b = 11.7$ centímetros y $c = 6.04$ centímetros, ¿cuál de los dos ángulos, β o γ, se puede decir con toda seguridad que es agudo y por qué?
2. Con referencia a la figura de arriba, si $\alpha = 93.5°$, $b = 5.34$ pulgadas y $c = 8.77$ pulgadas, ¿cuál de los dos ángulos, β o γ, se puede decir con toda seguridad que es agudo y por qué?

Resuelva cada triángulo en los problemas del 3 al 6.

3. $\alpha = 71.2°$, $b = 5.32$ yardas, $c = 5.03$ yardas
4. $\beta = 57.3°$, $a = 6.08$ centímetros, $c = 5.25$ centímetros
5. $\gamma = 120°20'$, $a = 5.73$ milímetros, $b = 10.2$ milímetros
6. $\alpha = 135°50'$, $b = 8.44$ pulgadas, $c = 20.3$ pulgadas

B

7. Con referencia a la figura del inicio de estos ejercicios, si $a = 13.5$ pies, $b = 20.8$ pies y $c = 8.09$ pies, entonces, si el triángulo tiene un ángulo obtuso, ¿qué ángulo debe ser y por qué?
8. Suponga que a usted se le dice que un triángulo tiene los lados $a = 12.5$ centímetros, $b = 25.3$ centímetros y $c = 10.7$ centímetros. Explique por qué el triángulo no tiene solución.

Resuelva cada triángulo de los problemas del 9 al 12 si el triángulo tiene una solución. Use los grados decimales para la medida del ángulo.

9. $a = 4.00$ metros, $b = 10.2$ metros, $c = 9.05$ metros
10. $a = 10.5$ millas, $b = 20.7$ millas, $c = 12.2$ millas
11. $a = 6.00$ kilómetros, $b = 5.30$ kilómetros, $c = 5.52$ kilómetros
12. $a = 31.5$ metros, $b = 29.4$ metros, $c = 33.7$ metros

Los problemas del 13 al 26 representan una variedad de problemas que implican ambas leyes, la de los senos y la de los cosenos. Resuelva cada triángulo. Si un problema no tiene una solución, indíquelo.

13. $\alpha = 94.5°$, $\gamma = 88.3°$, $b = 23.7$ centímetros
14. $\beta = 85.6°$, $\gamma = 97.3°$, $a = 14.3$ milímetros
15. $\beta = 104.5°$, $a = 17.2$ pulgadas, $c = 11.7$ pulgadas
16. $\beta = 27.3°$, $a = 13.7$ yardas, $c = 20.1$ yardas
17. $\alpha = 57.2°$, $\gamma = 112.0°$, $c = 24.8$ metros
18. $\beta = 132.4°$, $\gamma = 17.3°$, $b = 67.6$ kilómetros
19. $\beta = 38.4°$, $a = 11.5$ pulgadas, $b = 14.0$ pulgadas
20. $\gamma = 66.4°$, $b = 25.5$ metros, $c = 25.5$ metros
21. $a = 32.9$ metros, $b = 42.4$ metros, $c = 20.4$ metros
22. $a = 10.5$ centímetros, $b = 5.23$ centímetros, $c = 8.66$ centímetros
23. $\gamma = 58.4°$, $b = 7.23$ metros, $c = 6.54$ metros
24. $\alpha = 46.7°$, $a = 18.1$ metros, $b = 22.6$ metros
25. $\beta = 39.8°$, $a = 12.5$ pulgadas, $b = 7.31$ pulgadas
26. $\gamma = 47.9°$, $b = 35.2$ pulgadas, $c = 25.5$ pulgadas

C

27. Muestre, usando la ley de los cosenos, que si $\gamma = 90°$, entonces $c^2 = a^2 + b^2$ (el teorema de Pitágoras).
28. Muestre, usando la ley de los cosenos, que si $c^2 = a^2 + b^2$, entonces $\gamma = 90°$.
29. Muestre que para cualquier triángulo,

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{\cos \alpha}{a} + \frac{\cos \beta}{b} + \frac{\cos \gamma}{c}$$

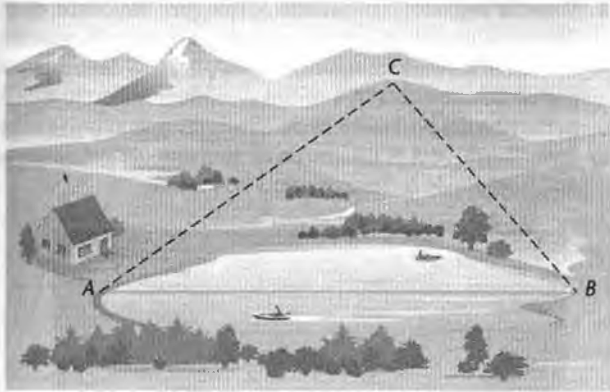
30. Muestre que para cualquier triángulo,

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta$$

APLICACIONES

31. **Topografía.** Para encontrar la longitud AB de un lago pequeño, un topógrafo midió el ángulo ACB de 96°, con AC

de 91 yardas, y BC de 71 yardas. ¿Cuál es la longitud aproximada del lago?



32. Topografía. Suponga que la figura para este problema representa la base de un afloramiento grande de piedra en el terreno de una granja. Si un topógrafo encuentra $\angle ACB = 110°$, $AC = 85$ metros y $BC = 73$ metros, ¿cuál es la longitud aproximada (con una cifra decimal) del afloramiento?

33. Geometría. Encuentre la medida en grados decimales de un ángulo subtendido central por una cuerda de longitud 112 milímetros en un círculo de radio 72.8 milímetros.

34. Geometría. Encuentre la medida en grados decimales de un ángulo subtendido central por una cuerda de longitud 13.8 pies en un círculo de radio 8.26 pies.

35. Geometría. Dos lados adyacentes de un paralelogramo se encuentran a un ángulo de 35°10′ y tienen longitudes de 3 y 8 pies. ¿Cuál es la longitud de la diagonal más corta del paralelogramo (con tres dígitos significativos)?

36. Geometría. ¿Cuál es la longitud de la diagonal más larga del paralelogramo del problema 35 (con tres dígitos significativos)?

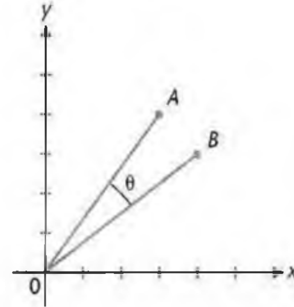
37. Navegación. Entre Los Ángeles y Las Vegas hay una distancia de aproximadamente 200 millas. Una piloto recorre 80 millas desde Los Ángeles y encuentra que está a 6°20′ con respecto de su partida en Los Ángeles. ¿A qué distancia de Las Vegas está en este tiempo? (Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.)

38. Búsqueda y rescate. Al mediodía, dos aviones de búsqueda despegan de San Francisco para encontrar un avión que cayó en el océano. El avión A viaja hacia el oeste a 400 millas por hora, y el avión B vuela hacia el noroeste a 500 millas por hora. A las 2 P.M. el avión A señala a los sobrevivientes del avión derribado y envía un mensaje de radio al avión B para que acuda y participe en el rescate. ¿A qué distancia del avión A está el avión B en este tiempo (calcule con tres dígitos significativos)?

39. Geometría. Encuentre el perímetro de un pentágono inscrito en un círculo con radio de 12.6 metros.

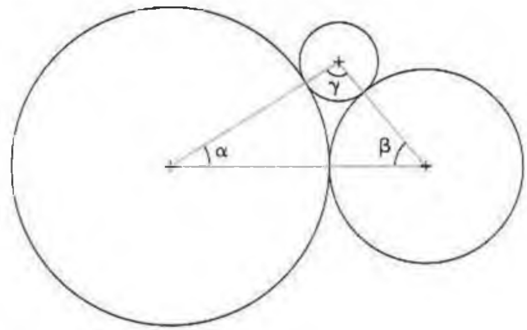
40. Geometría. Encuentre el perímetro de un polígono regular de nueve lados inscrito en un círculo con radio de 7.09 centímetros.

∫ * **41. Geometría analítica.** Si el punto A en la figura tiene coordenadas (3, 4) y el punto B tiene coordenadas (4, 3), encuentre la medida en radianes del ángulo θ con tres cifras decimales.



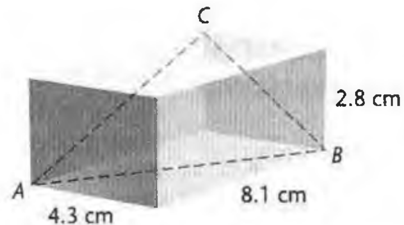
∫ * **42. Geometría analítica.** Si el punto A de la figura tiene coordenadas (4, 3) y el punto B tiene coordenadas (5, 1), encuentre la medida en radianes del ángulo θ con tres cifras decimales.

* **43. Ingeniería.** Tres círculos de radio 2.03, 5.00 y 8.20 centímetros son tangentes uno al otro (véase figura). Encuentre los tres ángulos formados por las líneas que unen sus centros (aproxime a los 10′ más cercanos).



* **44. Ingeniería.** Tres círculos con un radio de 2.00, 5.00 y 8.00 pulgadas son tangentes cada uno con respecto del otro (véase figura). Encuentre los tres ángulos formados por las líneas que unen sus centros (aproxime a los 10′ más cercanos).

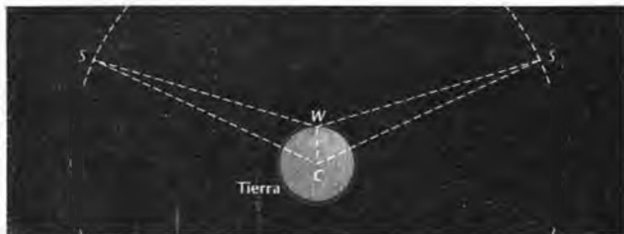
45. Geometría. Un sólido rectangular tiene los lados como se indican en la figura. Encuentre $\angle CAB$, aproxime su respuesta al grado más cercano.



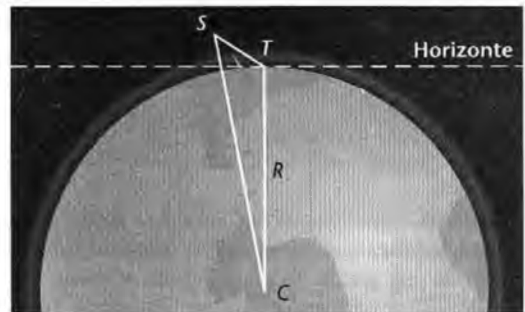
46. Geometría. Con referencia a la figura, encuentre (ACB aproxime su respuesta al grado más cercano.

* **47. Ciencia espacial.** Para establecer comunicaciones entre el transbordador espacial y la estación Arenas Blancas que

rastrea en el sur de Nuevo México, se colocan dos satélites en una órbita geoestacionaria, a 130° con respecto del centro de la Tierra y a 22 300 millas sobre la superficie de la Tierra (véase figura). (Un satélite en una órbita **geoestacionaria** permanece inmóvil arriba de un punto fijo en la superficie de la Tierra.) Las señales de radio se envían desde la estación de rastreo a través de los satélites al transbordador, y viceversa. Este sistema permite que la estación de rastreo esté en contacto con el transbordador en la mayor parte de la superficie de la Tierra. ¿A qué distancia (aproxime a las 100 millas más cercanas) está uno de los satélites de la órbita geoestacionaria de la estación de rastreo Arenas Blancas W? El radio de la Tierra es de 3 964 millas.



48. Ciencia espacial. Un satélite S, que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular, es detectado por una estación de rastreo T (véase la figura). La distancia TS determinada por el radar es de 1 034 millas, y el ángulo de elevación por arriba del horizonte es de 32.4°. ¿A qué altura, arriba de la Tierra, está el satélite en el momento de ser detectado? El radio de la Tierra es de 3 964 millas.



SECCIÓN 7-3 Vectores geométricos



- Vectores geométricos y suma vectorial
- Vectores velocidad
- Vectores fuerza
- Resolución de vectores en componentes de vector

Muchas cantidades físicas, tales como longitud, área o volumen, se pueden especificar completamente por un número real. Otras cantidades, tales como las distancias dirigidas, las velocidades y las fuerzas, requieren para su especificación completa de una magnitud y una dirección. Al primer tipo de cantidades a menudo se le llama **cantidades escalares**, y al segundo **cantidades vectoriales**.

En esta sección se limita el análisis a la idea intuitiva de vectores geométricos en un plano. En la sección 7-4 se introducen vectores algebraicos, un primer paso en la generalización de un concepto que tiene importantes consecuencias. Los vectores tienen un amplio uso en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería.

Vectores geométricos y suma vectorial

Un segmento con dirección asignada se llama **segmento de recta dirigido**. Un vector geométrico es un segmento de recta dirigido y se representa por una flecha (véase figura 1). Un vector con un *punto inicial* O y un **punto final** P (terminado en punta de flecha) se denota por $\overrightarrow{OP}$. Los vectores son denotados también por una letra negrita, tal como **v**. Debido a la dificultad para escribir letras negritas a mano, se sugiere usar una flecha sobre una sola letra, tal como $\vec{v}$, cuando se desee que la letra represente a un vector.



FIGURA 1 Vector $\overrightarrow{OP}$ o **v**.

La **magnitud** del vector $\overrightarrow{OP}$, se denota por $|\overrightarrow{OP}|$, $|\vec{v}|$ o $|\mathbf{v}|$, es la longitud del segmento de recta dirigido. Dos vectores tienen la **misma dirección** si son paralelos y apuntan en la misma dirección. Dos vectores tienen **direcciones opuestas** si son paralelos y apuntan en direcciones opuestas. El vector cero, se denota por $\vec{0}$ o por **0** tiene una magnitud de cero, y una dirección arbitraria. Dos vectores son **iguales** si tienen la mis-

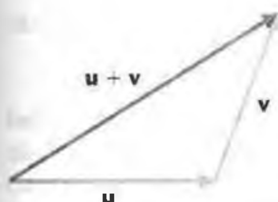


FIGURA 2 Suma vectorial: regla de cola a punta.

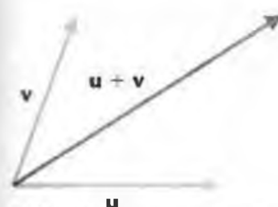


FIGURA 3 Suma vectorial: regla del paralelogramo.

ma magnitud y dirección. Así, un vector puede ser **trasladado** de un lugar a otro siempre que la magnitud y la dirección no cambien.

La **suma de dos vectores u y v** se puede definir usando la **regla de cola a punta**: Traslade **v** para que la cola (el punto inicial) esté en la punta (el punto terminal) de **u**. Entonces, el vector de la cola y de **u** a la punta y de **v** es la suma, denotada por **u** + **v**, de los vectores **u** y **v** (véase figura 2).

La suma de dos vectores no paralelos también se puede definir usando la **regla del paralelogramo**: La **suma de dos vectores u y v no paralelos** es la diagonal del paralelogramo que se forma usando **u** y **v** como lados adyacentes (véase figura 3). Si **u** y **v** son paralelos, use la regla de cola a punta.

Con ambas reglas se obtiene la misma suma. La elección de cuál regla usar depende de la situación y lo que parezca más natural.

Al vector **u** + **v** se le llama **resultante** de los dos vectores **u** y **v**, y **u** y **v** se llaman **vectores componentes** de **u** + **v**. Es conveniente observar que la suma de vectores es **conmutativa** y asociativa. Esto es **u** + **v** = **v** + **u** y **u** + (**v** + **w**) = (**u** + **v**) + **w**.

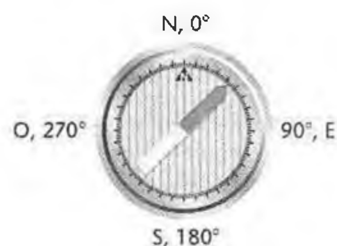
EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Si **a**, **b** y **c** representan tres vectores geométricos arbitrarios, ilustre usando cualquier definición de la suma de vectores que:

1. **a** + **b** = **b** + **a**
2. **a** + (**b** + **c**) = (**a** + **b**) + **c**

Vectores velocidad

Un vector que representa la dirección y la velocidad de un objeto en movimiento se llama **vector velocidad**. Los problemas que implican objetos en movimiento a menudo se pueden analizar usando métodos vectoriales. Muchos de estos problemas implican el uso de una **brújula de navegación**, que se marca en el sentido de las manecillas del reloj, en grados que empiezan en el norte como se indica en la figura 4.

FIGURA 4



EJEMPLO 1 **Velocidad aparente y real**

Un avión tiene una brújula que apunta (la dirección a la que apunta el avión) a 85° y una velocidad del aire (respecto al aire) de 140 millas por hora. El viento sopla de norte a sur a 66 millas por hora. La velocidad de un avión con respecto al aire se llama **velocidad aparente**, y la **resultante** de la velocidad con respecto a la tierra se llama **velocidad real**. La velocidad resultante es la suma vectorial de la velocidad aparente y de la velocidad de viento. Encuentre la velocidad resultante; esto es, encuentre la velocidad

real y la dirección del avión con respecto a la tierra. Aproxime las direcciones al grado más cercano y las magnitudes con dos dígitos significativos.

Solución Los vectores geométricos [(figura 5(a)] se usan para representar al vector velocidad aparente y al vector velocidad de viento. Sume los dos vectores usando el método de suma de vectores de cola a punta para obtener la resultante vector velocidad (real) [figura 5 (b)]. Del diagrama vectorial [figura 5(b)] se obtiene el triángulo de la figura 6 y se encuentra γ, c y α.

FIGURA 5

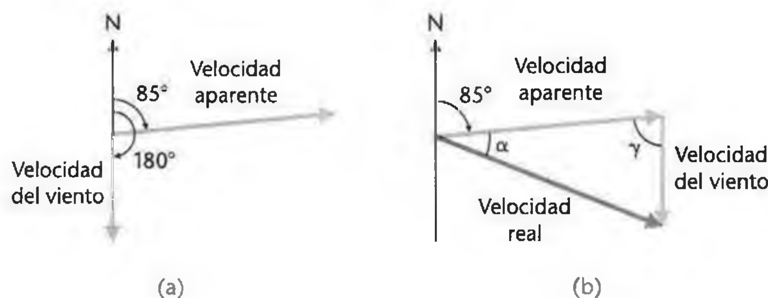
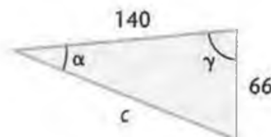


FIGURA 6



Despeje γ Puesto que el vector velocidad del viento es paralelo a la recta norte-sur, $\gamma = 85°$ [los ángulos interiores alternos de dos líneas paralelas que se cortan por una transversal son iguales, véase figura 5(b)].

Despeje c Use la ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$$

$$= \sqrt{66^2 + 140^2 - 2(66)(140)\cos 85°}$$

$$= 150 \text{ millas por hora} \quad \text{velocidad con respecto a la tierra.}$$

Despeje α Use la ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$$\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{a\operatorname{sen}\gamma}{b}\right)$$

$$= \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{66\operatorname{sen}85}{150}\right) = 26°$$

$$\text{El ángulo real} = 85° + \alpha = 85° + 26° = 111°$$

Así, la magnitud y la dirección del vector resultante de la velocidad son 150 millas por hora y 111°, respectivamente. De manera que el avión, con respecto al suelo, viaja a 150 millas por hora en una dirección de 111°.

Problema seleccionado 1

Un río fluye hacia el sudoeste (225°) a 3.0 millas por hora. Un barco cruza el río con una brújula que apunta a 90°. Si en el velocímetro del barco se lee 5.0 millas por hora (la velocidad del barco con respecto al agua), ¿cuál es la velocidad resultante? ¿Es decir, cuál es la velocidad real del barco y la dirección con respecto al suelo? Las direcciones están aproximadas al grado más cercano, y las magnitudes con dos dígitos significativos.

Vectores fuerza

Un vector que representa la dirección y la magnitud de una fuerza aplicada se llama **vector de fuerza**. Si un objeto está sujeto a dos fuerzas, entonces la suma de estas dos fuerzas, la **fuerza resultante**, es una sola fuerza. Si la fuerza resultante reemplaza a las dos fuerzas originales, actuará sobre el objeto de la misma manera que lo harían las dos fuerzas originales si actuaran juntas. En física se muestra que el vector de la fuerza resultante se puede obtener usando la suma vectorial para sumar los dos vectores de fuerza individuales. Parece natural usar la regla del paralelogramo para sumar a los vectores de fuerza individuales, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2

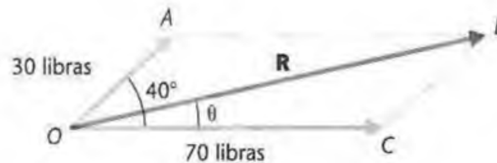
Determinación de la fuerza resultante

Dos fuerzas de 30 y 70 libras actúan en un punto de un avión. ¿Si el ángulo entre los vectores de fuerza es de 40°, ¿cuál es la magnitud y la dirección (con respecto a la fuerza de 70 libras) de la fuerza resultante? Las magnitudes de las fuerzas están aproximadas con dos dígitos significativos y los ángulos al grado más cercano.

Solución

Se comienza por hacer un esquema (figura 7), en el que los vectores geométricos representan las diferentes fuerzas:

FIGURA 7



Como los ángulos adyacentes en un paralelogramo son suplementarios, el ángulo $OCB = 180° - 40° = 140°$. Ahora se puede encontrar la magnitud del vector resultante **R** usando la ley de los cosenos (véase figura 8):

$$|\mathbf{R}|^2 = 30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 140°$$

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{30^2 + 70^2 - 2(30)(70)\cos 140°}$$

$$= 95 \text{ libras}$$

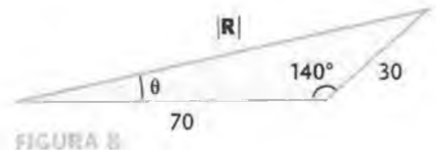


FIGURA 8

Para encontrar θ, la dirección de **R**, se usa la ley de los senos (véase figura 9)

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{30} = \frac{\operatorname{sen}140°}{95}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{30\operatorname{sen}140°}{95}$$

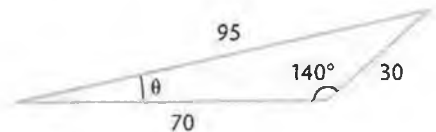


FIGURA 9

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{30\,\text{sen}\,140°}{95}\right) = 12°$$

Así, las dos fuerzas dadas son equivalentes a una sola fuerza de 95 libras en una dirección de 12° (con respecto a la fuerza de 70 libras).

Problema seleccionado 2

Repita el ejemplo 2 usando un ángulo de 100° entre las dos fuerzas.

Resolución de vectores en componentes de vector

En vez de sumar vectores, muchos problemas requieren la resolución de vectores en componentes. Como antes se indicó, cuando un vector se expresa como la suma o resultante de dos vectores, los dos vectores se llaman **componentes de vector** del vector dado. El ejemplo 3 ilustra una aplicación del proceso de resolución de un vector en componentes de vector.

EJEMPLO 3

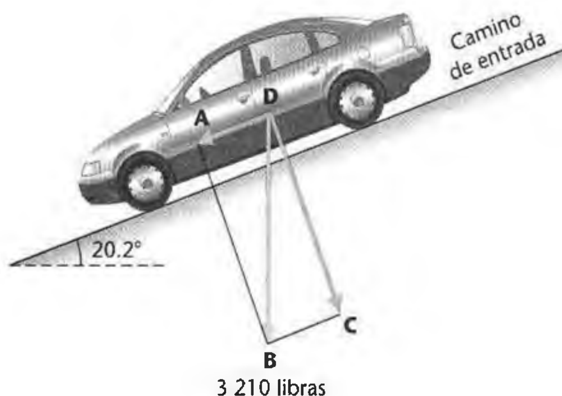
Resolución de un vector fuerza en componentes

Un coche que pesa 3 210 libras está en un camino de entrada inclinado 20.2° con respecto a la horizontal. Despreciando la fricción, encuentre la magnitud de la fuerza paralela al camino de entrada que se mantendrá al conducir el coche hacia abajo de la colina.

Solución

Se comienza por dibujar un diagrama vectorial (figura 10):

FIGURA 10



El vector de fuerza $\overrightarrow{DB}$ actúa en la dirección hacia abajo y representa el peso del coche. Observe que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$, donde $\overrightarrow{DC}$ es la componente perpendicular de $\overrightarrow{DB}$ con respecto al camino de entrada y $\overrightarrow{DA}$ es la componente paralela de $\overrightarrow{DB}$ con respecto al camino de entrada.

Para mantener al coche en D circulando hacia abajo de la colina, se necesita una fuerza de magnitud $\overrightarrow{DA}$ pero dirigida en sentido opuesto. Para encontrar $|\overrightarrow{DA}|$, se observa primero que $\angle ABD = 20.2°$. Esto es verdad porque $\angle ABD$ y el ángulo del camino de entrada tienen el mismo complemento, $\angle ADB$.

$$\text{sen } 20.2° = \frac{|\overrightarrow{DA}|}{3\ 210}$$

$$|\overrightarrow{DA}| = 3\ 210 \text{ sen } 20.2°$$

$$= 1\ 110 \text{ libras}$$

Problema seleccionado 3 Encuentre la magnitud de la componente perpendicular de $\overrightarrow{DB}$ en el ejemplo 3.

Respuestas a los problemas seleccionados

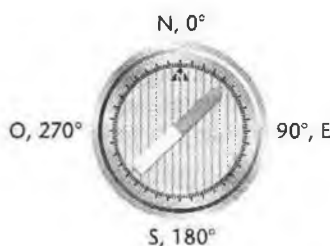
1. Velocidad resultante: magnitud = 3.6 mph, dirección = 126°

2. $|\mathbf{R}| = 71$ lb, $\theta = 25°$

3. $|\overrightarrow{DC}| = 3\ 010$ lb

EJERCICIO 7-3

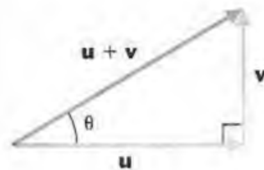
Exprese todos los ángulos en grados decimales. En los problemas de navegación, refiérase a la siguiente figura que muestra una brújula de navegación.



Brújula de navegación

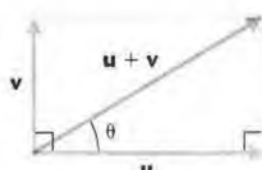
A

Los problemas del 1 al 10 se refieren a las figuras (a) y (b) que muestran que la suma de vectores **u** *y* **v** *con ángulos rectángulos cada uno con respecto al otro.*



Regla de cola a punta

(a)



Regla del paralelogramo

(b)

En los problemas del 1 al 6, encuentre $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ *y* θ, *dado* $|\mathbf{u}|$ *y* $|\mathbf{v}|$ *en las figuras (a) y (b).*

1. $|\mathbf{u}| = 37$ millas por hora, $|\mathbf{v}| = 45$ millas por hora

2. $|\mathbf{u}| = 62$ millas por hora, $|\mathbf{v}| = 34$ millas por hora

3. $|\mathbf{u}| = 38$ kilogramos, $|\mathbf{v}| = 53$ kilogramos

4. $|\mathbf{u}| = 48$ kilogramos, $|\mathbf{v}| = 31$ kilogramos

5. $|\mathbf{u}| = 434$ kilómetros por hora, $|\mathbf{v}| = 105$ kilómetros por hora

6. $|\mathbf{u}| = 143$ kilómetros por hora, $|\mathbf{v}| = 57.4$ kilómetros por hora

En los problemas del 7 al 10, encuentre $|\mathbf{u}|$ *y* $|\mathbf{v}|$, *las magnitudes de las componentes horizontal y vertical de* $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, *dado* $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ *y* θ *en las figuras (a) y (b).*

7. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 32$ libras, $\theta = 22°$

8. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 250$ libras, $\theta = 65°$

9. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 230$ millas por hora, $\theta = 72°$

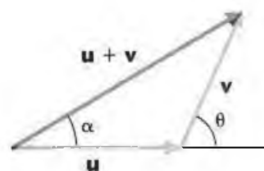
10. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 28$ millas por hora, $\theta = 12°$

11. Si dos vectores tienen la misma magnitud, ¿son éstos iguales? Explique por qué sí o por qué no.

12. ¿La magnitud de un vector nunca es negativa? Explique por qué sí o por qué no.

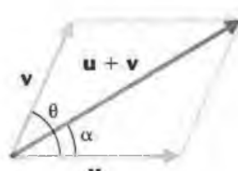
B

Los problemas del 13 al 20 se refieren a las figuras (a) y (b) que muestran al vector suma de los vectores **u** *y* **v**.



Regla de cola a punta

(a)



Regla del paralelogramo

(b)

En los problemas del 13 al 16, encuentre $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ *y* α *dando* $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$ *y* θ *en las figuras (a) y (b).*

13. $|\mathbf{u}| = 66$ gramos, $|\mathbf{v}| = 22$ gramos, $\theta = 68°$

14. $|\mathbf{u}| = 120$ gramos, $|\mathbf{v}| = 84$ gramos, $\theta = 44°$

15. $|\mathbf{u}| = 21$ nudos, $|\mathbf{v}| = 3.2$ nudos, $\theta = 53°$

16. $|\mathbf{u}| = 8.0$ nudos, $|\mathbf{v}| = 2.0$ nudos, $\theta = 64°$

En los problemas del 17 al 20, encuentre $|\mathbf{u}|$ *y* $|\mathbf{v}|$, *dado* $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$, α *y* θ *en las figuras (a) y (b).*

17. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 14$ kilogramos, $\alpha = 25°$, $\theta = 79°$

18. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 33$ kilogramos, $\alpha = 17°$, $\theta = 43°$

19. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 223$ millas por hora, $\alpha = 42.3°$, $\theta = 69.4°$

20. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 437$ millas por hora, $\alpha = 17.8°$, $\theta = 50.5°$

C

21. Explique por qué es o no correcto decir que el vector cero es perpendicular a cada vector.

22. Explique por qué es o no correcto decir que el vector cero es paralelo a cada vector.

APLICACIONES

En los problemas del 23 al 26, suponga que las direcciones norte, este, sur y oeste son exactas.

23. Navegación. Un avión está volando en una dirección de 285° y una velocidad del aire de 230 millas por hora. Un viento constante de 35 millas por hora está soplando en la dirección de 260°. ¿Cuál es la velocidad real del avión?; es decir, ¿cuál es la velocidad y la dirección con respecto al suelo?

24. Navegación. Un barco de potencia cruza un río ancho con una dirección de 25° y velocidad con respecto al agua de 15 millas por hora. El río fluye en la dirección de 135° a 3.9 millas por hora. ¿Cuál es la velocidad real del barco; esto es, cuál es la velocidad y la dirección con respecto a la tierra?

***25. Navegación.** Dos muelles están directamente uno frente al otro en un río que fluye hacia el sur. Un piloto de barco desea entrar en línea recta desde el muelle del este al muelle del oeste en un transbordador con una velocidad de crucero en aguas tranquilas de 8.0 nudos. ¿Si la corriente del río es de 2.5 nudos, qué dirección debe mantener mientras cruza el río? ¿Cuál es la velocidad real del barco con respecto a la tierra?

***26. Navegación.** Un avión puede ir a 255 millas por hora en aire tranquilo. Si un viento constante de 46.0 millas por hora sopla desde el oeste, ¿qué dirección debe mantener el piloto para mantener el curso del avión con respecto al suelo, en la dirección norte (0°)? Calcule la velocidad con respecto a la tierra para seguir este curso.

***27. Fuerza resultante.** Un barco grande sale de un muelle en una bahía jalado con cables por dos remolcadores. Si un remolcador jala en una dirección de 52° con una fuerza de 2 300 libras y otro jala en una dirección de 97° con una fuerza de 1 900 libras, ¿cuál es la dirección y la magnitud de la fuerza resultante?

***28. Fuerza resultante.** Repita el problema 27, ahora con un remolcador jalando en una dirección de 161° y con una fuerza de 2 900 kilogramos y el otro jalando en una dirección de 192° y con una fuerza de 3 600 kilogramos.

29. Resolución de fuerzas. Un automóvil que pesa 4 050 libras se está deteniendo en un camino de entrada inclinado 5.5° con respecto a la horizontal.

(A) Encuentre la magnitud de la fuerza paralela al camino de entrada necesaria para mantener el coche circulando hacia abajo de la colina.

(B) Encuentre la magnitud de la fuerza perpendicular al camino de entrada.

30. Resolución de fuerzas. Repita el problema 29 para un coche que pesa 2 500 libras estacionado en una colina inclinada 15° con respecto a la horizontal.

***31. Resolución de fuerzas.** ¿Si se mantienen dos pesas juntas y se colocan en planos inclinados como los que se muestran en la figura, despreciando la fricción, ¿de qué manera se deslizarán?



***32. Resolución de fuerzas.** Si dos pesas se mantienen juntas y se colocan en planos inclinados como los que se muestran en la figura, despreciando la fricción, ¿de qué manera se deslizarán?



SECCIÓN 7-4 Vectores algebraicos



- De vectores geométricos a vectores algebraicos
- La suma de vectores y la multiplicación por un escalar
- Vectores unitarios
- Propiedades algebraicas
- Equilibrio estático

Los vectores geométricos en un plano se generalizan rápidamente al espacio tridimensional. Sin embargo, para generalizar vectores a espacios abstractos de más dimensiones, es necesario definir el concepto de vector de manera algebraica. Esto se hace de tal manera, que los vectores geométricos se convierten en casos especiales de vectores algebraicos más generales. Los vectores algebraicos tienen muchas ventajas sobre los vectores geométricos. Se mostrará una de estas ventajas cuando se consideren problemas de equilibrio estático al final de esta sección.

El desarrollo de los vectores algebraicos en este libro es de naturaleza introductoria y está restringido al plano. El estudio de vectores en espacios de tres y más dimensiones está reservado para cursos de matemáticas más avanzadas.

• De vectores geométricos a vectores algebraicos

La transición de vectores geométricos a vectores algebraicos se inicia colocando los vectores geométricos en un sistema coordenado rectangular. Un vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ en un sistema coordenado rectangular se traslada para que su punto inicial esté en el origen; es decir, para que esté en **posición estándar**. El vector $\overrightarrow{OP}$ tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ se dice que es un **vector estándar** para $\overrightarrow{AB}$ (véase figura 1).

Observe que el vector $\overrightarrow{OP}$ en la figura 1 es el vector estándar para un número infinito de vectores (todos los vectores que tengan la misma magnitud y dirección que $\overrightarrow{OP}$).

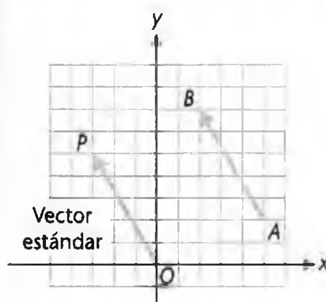


FIGURA 1 $\overrightarrow{OP}$ es el vector estándar de $\overrightarrow{AB}$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) En una copia de la figura 1, dibuje otros tres vectores que tengan $\overrightarrow{OP}$ como su vector estándar.

(B) Si la cola de un vector está en el punto $A(-3, 2)$ y su punta está en $B(6, 4)$, analice cómo encontraría las coordenadas de P tales que $\overrightarrow{OP}$ sean un vector estándar para $\overrightarrow{AB}$.

Dadas las coordenadas de los puntos finales de un vector geométrico en un sistema coordenado rectangular, ¿cómo se encontraría al vector estándar correspondiente? El proceso no es difícil. Las coordenadas del punto inicial, O, de $\overrightarrow{OP}$ son siempre $(0, 0)$. Así, sólo se tiene que encontrar las coordenadas de P, el punto terminal de $\overrightarrow{OP}$. Las coordenadas de P están dadas por

$$(x_p, y_p) = (x_b - x_a, y_b - y_a) \qquad (1)$$

donde las coordenadas de A son (x_a, y_a) y las coordenadas de B son (x_b, y_b). El ejemplo 1 ilustra el uso de la ecuación (1).

EJEMPLO 1

Determinación de un vector estándar para un vector dado

Dado el vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ con el punto inicial $A(3, 4)$ y el punto terminal $B(7, -1)$, encuentre el vector estándar $\overrightarrow{OP}$ para $\overrightarrow{AB}$. Esto es, encuentre las coordenadas del punto P tales que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$.

Solución

Las coordenadas de P están dadas por

$$\begin{aligned}(x_p, y_p) &= (x_b - x_a, y_b - y_a)\\ &= (7 - 3, -1 - 4)\\ &= (4, -5)\end{aligned}$$

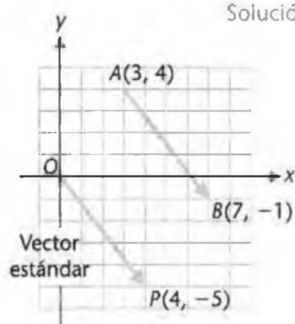


FIGURA 2

Observe en la figura 2 que si se inicia en A, y después se mueve cuatro unidades a la derecha y cinco hacia abajo, se estará en B. Si se inicia en el origen, y se mueve cuatro unidades a la derecha y cinco hacia abajo, se estará en P.

Problema seleccionado 1

Dado el vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ con el punto inicial $A(8, -3)$ y el punto final $B(4, 5)$, encuentre el vector estándar $\overrightarrow{OP}$ para $\overrightarrow{AB}$.

El análisis anterior sugiere otra manera de observar a los vectores. Puesto que, dado cualquier vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ en un sistema coordenado rectangular, siempre existe un punto $P(x_p, y_p)$ tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$, el punto $P(x_p, y_p)$ especifica completamente al vector $\overrightarrow{AB}$, excepto su posición, la cual no se conoce porque se es libre de trasladarlo $\overrightarrow{AB}$ a cualquier lugar que se desee. Por el contrario, dado cualquier punto $P(x_p, y_p)$ en un sistema coordenado rectangular, el segmento de recta dirigido que une a O con P formas al vector geométrico $\overrightarrow{OP}$.

Esto conduce a la definición de un **vector algebraico** como un par ordenado de números reales. Para evitar confundir un punto (a, b) con un vector (a, b), **se usará $\langle a, b\rangle$ para representar a un vector algebraico.** Geométricamente, el vector algebraico $\langle a, b\rangle$ corresponde al vector estándar (geométrico) $\overrightarrow{OP}$ con punto terminal $P(a, b)$ y punto inicial $O(0, 0)$, como se ilustra en la figura 3.

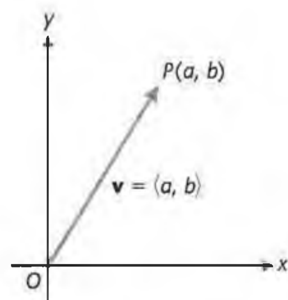


FIGURA 3 El vector algebraico $\langle a, b\rangle$ asociado con un vector geométrico $\overrightarrow{OP}$.

Los números reales a y b son las **componentes escalares** del vector $\langle a, b\rangle$. La palabra **escalar** significa un número real y a menudo se usa en el contexto de vectores donde se hace referencia a "cantidades escalares" como lo opuesto a "cantidades vectoriales". Así, se habla acerca de las "componentes escalares" y "componentes vectoriales" de un vector dado. Las palabras "escalar" y "vectorial" son a menudo omitidas si el significado de componente es claro a partir del contexto.

Se dice que dos vectores $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$ son iguales si sus componentes correspondientes son iguales; es decir, si $a = c$ y $b = d$. El **vector cero** se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle$.

Los vectores geométricos están limitados a espacios que se pueden visualizar, esto es, a espacios de dos y tres dimensiones. Los vectores algebraicos no tienen estas restricciones. Los siguientes son vectores algebraicos de espacios en dos, tres, cuatro y cinco dimensiones:

$$\langle -2, 5\rangle \quad \langle 3, 0, -8\rangle \quad \langle 5, 1, 1, -2\rangle \quad \langle -1, 0, 1, 3, 4\rangle$$

Como antes se mencionó, el análisis en este libro se limita a vectores algebraicos en espacios de dos dimensiones, que representan un plano.

Ahora se define la *magnitud* de un vector algebraico:

DEFINICIÓN 1 **Magnitud de $v = \langle a, b\rangle$**

La **magnitud**, o **norma**, de un vector $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$ se denota por $|\mathbf{v}|$ y está dada por

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

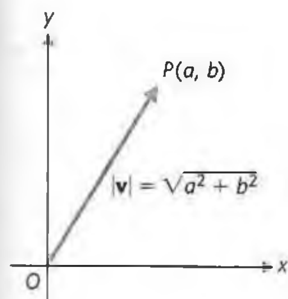


FIGURA 4 Magnitud de un vector $\langle a, b\rangle$ geométricamente interpretado

Geométricamente, $\sqrt{a^2 + b^2}$ es la longitud del vector geométrico estándar $\overrightarrow{OP}$ que está asociado con el vector algebraico $\langle a, b\rangle$ (véase figura 4).

La definición de la magnitud se generaliza rápidamente a espacios de vectores de más alto orden dimensional. Por ejemplo, si $|\mathbf{v}| = \langle a, b, c, d\rangle$, entonces la magnitud, o la norma, está dada por $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. Pero ahora no se está capacitado para interpretar los resultados en términos de vectores geométricos.

EJEMPLO 2 **Determinación de la magnitud de un vector**

Encuentre la magnitud del vector $\mathbf{v} = \langle 3, -5\rangle$.

Solución

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

Problema seleccionado 2 Encuentre la magnitud del vector $\mathbf{v} = \langle -2, 4\rangle$

• **La suma de vectores y la multiplicación por un escalar**

Para sumar dos vectores algebraicos, se deben sumar las componentes correspondientes como se indica en la siguiente definición de la suma:

DEFINICIÓN 2 **Suma vectorial**

Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a + c, b + d\rangle$$

La definición de la suma de vectores algebraicos es consistente con las definiciones del paralelogramo y la cola a la punta que se dieron para sumar vectores geométricos en la sección 7-3 (véase Exploración y análisis 2).

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Si $\mathbf{u} = \langle -3, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 7, 3\rangle$, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle -3 + 7, 2 + 3\rangle = \langle 4, 5\rangle$. Localice **u**, **v**, y **u** + **v** en un sistema coordenado rectangular e interprete geométricamente en términos de las reglas del paralelogramo y de la cola a la punta analizadas en la sección anterior.

Para multiplicar un vector por un escalar (un número real) multiplique cada componente por el escalar:

DEFINICIÓN 3 **Multiplicación por un escalar**

Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ y k es un escalar, entonces

$$k\mathbf{u} = k\langle a, b\rangle = \langle ka, kb\rangle$$

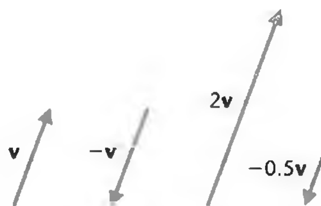


FIGURA 5 Multiplicación escalar geométricamente interpretada.

Geométricamente, si un vector **v** se multiplica por un escalar k, la magnitud del vector **v** se multiplica por $|k|$. Si k es positiva, entonces $k\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que **v**. Si k es negativa, entonces la dirección de $k\mathbf{v}$ es opuesta a **v**. Estas relaciones se ilustran en la figura 5.

EJEMPLO 3 **Suma de vectores y multiplicación por un escalar**

Sea $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 3\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 0, -5\rangle$, encuentre:

(A) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (B) $-2\mathbf{u}$ (C) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ (D) $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - \mathbf{w}$

Soluciones

(A) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle 4, -3\rangle + \langle 2, 3\rangle = \langle 6, 0\rangle$

(B) $-2\mathbf{u} = -2\langle 4, -3\rangle = \langle -8, 6\rangle$

(C) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 2\langle 4, -3\rangle - 3\langle 2, 3\rangle$
$= \langle 8, -6\rangle + \langle -6, -9\rangle = \langle 2, -15\rangle$

(D) $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v} - \mathbf{w} = 3\langle 4, -3\rangle + 2\langle 2, 3\rangle - \langle 0, -5\rangle$
$= \langle 12, -9\rangle + \langle 4, 6\rangle + \langle 0, 5\rangle$
$= \langle 16, 2\rangle$

Problema seleccionado 3 Sea $\mathbf{u} = \langle -5, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, -6\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -2, 0\rangle$, encuentre:

(A) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (B) $-3\mathbf{u}$ (C) $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$ (D) $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 3\mathbf{w}$

• **Vectores unitarios** Si $|\mathbf{v}| = 1$, entonces **v** se llama **vector unitario**. Un vector unitario se puede formar de un vector distinto de cero arbitrario como sigue:

Un vector unitario con la misma dirección que v

Si **v** es un vector distinto de cero, entonces

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

es un vector unitario con la misma dirección que **v**.

EJEMPLO 4

Determinación de un vector unitario con la misma dirección que el vector dado

Dado un vector $\mathbf{v} = \langle 1, -2 \rangle$, encuentre un vector unitario **v** con la misma dirección que **v**.

Solución

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 1, -2 \rangle$$

$$= \left\langle \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

Comprobación

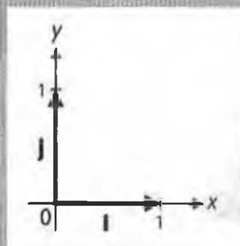
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{4}{5}} = \sqrt{1} = 1$$

Y se ve que **u** es vector unitario con la misma dirección que **v**.

Problema seleccionado 4 Dado un vector $\mathbf{v} = \langle 3, 1 \rangle$, encuentre un vector unitario **u** con la misma dirección que **v**.

Ahora se definen dos vectores unitarios muy importantes, los vectores unitarios **i** y **j**.

Los vectores unitarios i y j



$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$

$\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$

¿Por qué los vectores unitarios **i** y **j** son importantes? Una de las razones es que cualquier vector $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ puede ser expresado como una combinación lineal de esos dos vectores; es decir, como $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = \langle a, b \rangle &= \langle a, 0 \rangle + \langle 0, b \rangle \\ &= a\langle 1, 0 \rangle + b\langle 0, 1 \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\end{aligned}$$

EJEMPLO 5 **Expresión de un vector en términos de los vectores unitarios i y j**

Exprese cada vector como una combinación lineal de los vectores unitarios **i** y **j**.

(A) $\langle -2, 4 \rangle$ (B) $\langle 2, 0 \rangle$ (C) $\langle 0, -7 \rangle$

Soluciones

(A) $\langle -2, 4 \rangle = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
(B) $\langle 2, 0 \rangle = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = 2\mathbf{i}$
(C) $\langle 0, -7 \rangle = 0\mathbf{i} - 7\mathbf{j} = -7\mathbf{j}$

Problema seleccionado 5 Exprese cada vector como una combinación lineal de los vectores unitarios **i** y **j**.

(A) $\langle 5, -3 \rangle$ (B) $\langle -9, 0 \rangle$ (C) $\langle 0, 6 \rangle$

Propiedades algebraicas

La suma de vectores y la multiplicación por un escalar poseen propiedades algebraicas semejantes a las de los números reales. Estas propiedades nos habilitan para manipular los símbolos vectoriales que representan a los vectores y escalares, de la misma manera que se manipulan los símbolos que representan los números reales en el álgebra. En seguida se proporciona la lista de estas propiedades para una referencia adecuada.

Propiedades algebraicas de vectores

A. Propiedades de la suma. Para todos los vectores **u**, **v** y **w**:

1.	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	**Propiedad conmutativa**
2.	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	**Propiedad asociativa**
3.	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$	**Identidad aditiva**
4.	$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$	**El inverso aditivo**

B. Las propiedades de la multiplicación por un escalar. Para todos los vectores **u** y **v** y todos los escalares m y n:

1.	$m(n\mathbf{u}) = (mn)\mathbf{u}$	**Propiedad asociativa**
2.	$m(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = m\mathbf{u} + m\mathbf{v}$	**Propiedad distributiva**
3.	$(m + n)\mathbf{u} = m\mathbf{u} + n\mathbf{u}$	**Propiedad distributiva**
4.	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	**Identidad multiplicativa**

EJEMPLO 6 **Operaciones algebraicas de vectores expresados en términos de los vectores i y j**

Para $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, calcule cada una de las operaciones siguientes:

(A) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (B) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (C) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

Soluciones

(A) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$
$= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = 6\mathbf{i} + 0\mathbf{j} = 6\mathbf{i}$

(B) $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) - (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$
$= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = -4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

(C) $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 2(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + 3(5\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$
$= 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 15\mathbf{i} + 6\mathbf{j} = 17\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

Problema seleccionado 6 Para $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, calcule cada una de las operaciones siguientes:

(A) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (B) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (C) $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$

• Equilibrio estático

Los vectores algebraicos se pueden usar para resolver muchos tipos de problemas en física e ingeniería. Se termina esta sección considerando algunos problemas de *equilibrio estático*. Como fundamentos de este enfoque hay dos principios básicos con respecto a las fuerzas y a los objetos sobre los que éstas actúan:

Condiciones para el equilibrio estático

1. Un objeto en reposo se dice que está en **equilibrio estático**.
2. Para que un objeto localizado en el origen en un sistema coordenado rectangular permanezca en equilibrio estático, en reposo, es necesario que la suma de todos los vectores de la fuerza que actúa sobre el objeto sea el vector cero.

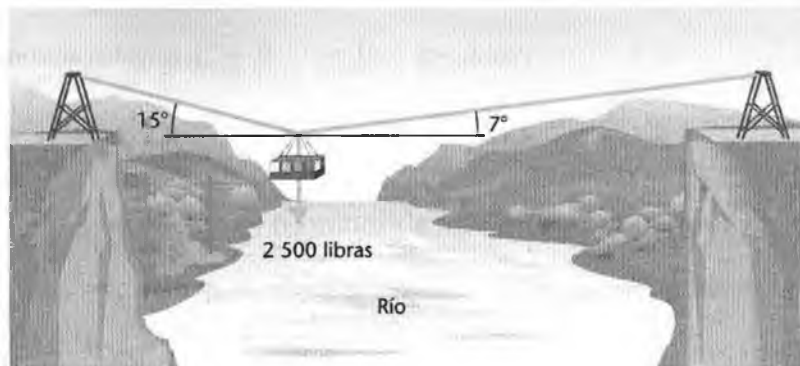
En el ejemplo 7 se muestran algunos problemas importantes de física e ingeniería que se pueden resolver usando vectores algebraicos y las condiciones para el equilibrio estático. Se supone que usted sabe cómo resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables. En caso de que necesite recordar el procedimiento repase lo planteado en la sección 1-2.

EJEMPLO 7 **Tensión en los cables**

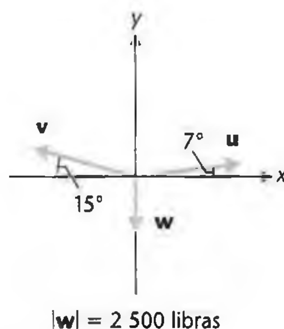
Un teleférico, que se usa para cruzar un río transportando gente y suministros, pesa 2 500 libras cuando está completamente cargado. El carro se detiene cuando ha cruza-

do parte del camino y hace que el cable cuelgue con respecto a la horizontal, como se indica en la figura 6. ¿Cuál es la tensión en cada parte del cable que va a cada torre?

FIGURA 6



Solución *Paso 1.* Dibuje un diagrama de fuerzas con todos los vectores fuerza en la posición estándar en el origen (figura 7). El objetivo es encontrar $|\mathbf{u}|$ y $|\mathbf{v}|$.



$|\mathbf{w}| = 2\,500$ libras

FIGURA 7

Paso 2. Escriba cada vector fuerza en términos de los vectores unitarios **i** y **j**.

$$\mathbf{u} = |\mathbf{u}|(\cos 7°)\mathbf{i} + |\mathbf{u}|(\text{sen}\, 7°)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|(-\cos 15°)\mathbf{i} + |\mathbf{v}|(\text{sen}\, 15°)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{w} = -2\,500\mathbf{j}$$

Paso 3. Para que el sistema esté en equilibrio estático, la suma de los vectores de fuerza debe ser el vector cero. Esto es,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

Reemplazando los vectores **u**, **v** y **w** del paso 2, se obtiene

$$[|\mathbf{u}|(\cos 7°)\mathbf{i} + |\mathbf{u}|(\text{sen}\, 7°)\mathbf{j}] + [|\mathbf{v}|(-\cos 15°)\mathbf{i} + |\mathbf{v}|(\text{sen}\, 15°)\mathbf{j}] - 2\,500\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

la cual, combinando los vectores **i** y **j** será

$$[|\mathbf{u}|(\cos 7°) + |\mathbf{v}|(-\cos 15°)]\mathbf{i} + [|\mathbf{u}|(\text{sen}\, 7°) + |\mathbf{v}|(\text{sen}\, 15°) - 2\,500]\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

Puesto que los dos vectores son iguales si y sólo si sus correspondientes componentes son iguales, se obtiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con dos variables $|\mathbf{u}|$ y $|\mathbf{v}|$:

$$(\cos 7°)|\mathbf{u}| + (-\cos 15°)|\mathbf{v}| = 0$$
$$(\text{sen}\, 7°)|\mathbf{u}| + (\text{sen}\, 15°)|\mathbf{v}| - 2\,500 = 0$$

Resolviendo este sistema por métodos estándares, se encuentra que

$$|\mathbf{u}| = 6\,400 \text{ libras} \quad \text{y} \quad |\mathbf{v}| = 6\,600 \text{ libras}$$

¿Usted esperaría que la tensión en cada parte del cable sea mayor que el peso que cuelga de él?

Problema seleccionado 7 Repita el ejemplo 7 reemplazando 15° por 13°, 7° por 9° y las 2 500 libras por 1 900 libras.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $P(-4, 8)$ **2.** $2\sqrt{5}$
3. (A) $\langle -1, -3\rangle$ (B) $\langle 15, -9\rangle$ (C) $\langle -23, 21\rangle$ (D) $\langle -20, 12\rangle$
4. $\mathbf{u} = \langle 3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}\rangle$
5. (A) $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ (B) $-9\mathbf{i}$ (C) $6\mathbf{j}$
6. (A) $6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ (B) $-2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ (C) $-2\mathbf{i} - 13\mathbf{j}$
7. $|\mathbf{u}| = 4\,900$ lb, $|\mathbf{v}| = 5\,000$ lb

EJERCICIO 7-4

A

En los problemas del 1 al 6, se representa cada vector geométrico $\overrightarrow{AB}$, con los puntos finales en la forma que se indica, como un vector algebraico en la forma $\langle a, b\rangle$.

1. $A(3, -2), B(0, -5)$ **2.** $A(-1, 7), B(1, -1)$
3. $A(6, 0), B(0, 7)$ **4.** $A(0, -1), B(-2, 0)$
5. $A(0, 0), B(3, 5)$ **6.** $A(0, 0), B(-2, -1)$

En los problemas del 7 al 12, encuentre la magnitud de cada vector.

7. $\langle 4, -3\rangle$ **8.** $\langle -3, 4\rangle$ **9.** $\langle 3, -5\rangle$
10. $\langle -5, -2\rangle$ **11.** $\langle -25, 0\rangle$ **12.** $\langle 0, -67\rangle$

13. Explique cuándo dos vectores algebraicos son iguales.

14. Explique cuándo dos vectores geométricos son iguales.

B

En los problemas del 15 al 18, encuentre:

(A) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (B) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (C) $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 3\mathbf{w}$

15. $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle, \mathbf{v} = \langle -1, 3\rangle, \mathbf{w} = \langle 3, 0\rangle$
16. $\mathbf{u} = \langle -1, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle 3, -2\rangle, \mathbf{w} = \langle 0, -2\rangle$
17. $\mathbf{u} = \langle -4, -1\rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 2\rangle, \mathbf{w} = \langle 0, 1\rangle$
18. $\mathbf{u} = \langle -3, 2\rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 2\rangle, \mathbf{w} = \langle -3, 0\rangle$

En los problemas del 19 al 24, exprese **v** *en términos de los vectores unitarios* **i** *y* **j**.

19. $\mathbf{v} = \langle -3, 4\rangle$ **20.** $\mathbf{v} = \langle 2, -5\rangle$
21. $\mathbf{v} = \langle 3, 0\rangle$ **22.** $\mathbf{v} = \langle 0, -27\rangle$
23. $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, donde $A = (2, 3)$ y $B = (-3, 1)$
24. $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$, donde $A = (-2, -1)$ y $B = (0, 2)$

En los problemas del 25 al 30, sea $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, y $\mathbf{w} = 2\mathbf{i}$, y realice las operaciones indicadas.

25. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ **26.** $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **27.** $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$
28. $3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ **29.** $2\mathbf{u} - \mathbf{v} - 2\mathbf{w}$ **30.** $\mathbf{u} - 3\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

En los problemas del 31 al 34, encuentre un vector unitario **u** *con la misma dirección que* **v**.

31. $\mathbf{v} = \langle -3, 4\rangle$ **32.** $\mathbf{v} = \langle 4, -3\rangle$
33. $\mathbf{v} = \langle -5, 3\rangle$ **34.** $\mathbf{v} = \langle 2, -3\rangle$

35. Si exactamente tres vectores de fuerza distintas de cero, con direcciones diferentes, están actuando sobre un objeto en reposo, ¿cómo está cualquiera de los vectores fuerza relacionado con los otros dos, si el objeto permanece en reposo?

36. Si exactamente dos vectores fuerza, distintos de cero, actúan sobre un objeto en reposo, ¿qué se puede decir de los vectores para que el objeto permanezca en reposo?

C

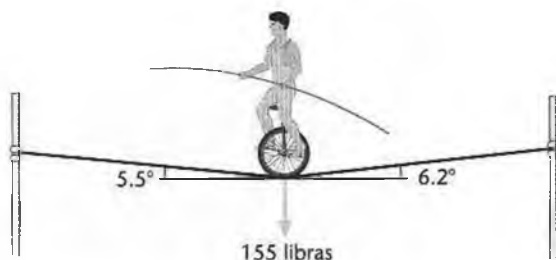
En los problemas del 37 al 44, sean $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$, $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$ y $\mathbf{w} = \langle e, f\rangle$ vectores y m y n escalares, pruebe cada una de las siguientes propiedades de vector usando las propiedades apropiadas de números reales, las definiciones de la suma vectorial y la multiplicación por un escalar.

37. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
38. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ **39.** $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
40. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ **41.** $(m + n)\mathbf{u} = m\mathbf{u} + n\mathbf{u}$
42. $m(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = m\mathbf{u} + m\mathbf{v}$ **43.** $m(n\mathbf{u}) = (mn)\mathbf{u}$
44. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

APLICACIONES

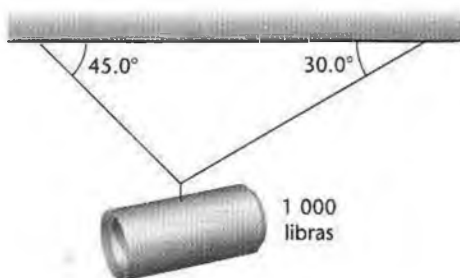
En los problemas del 45 al 52, calcule todas las respuestas con tres dígitos significativos.

45. Equilibrio estático. Un acróbata se detiene en un cierto punto de una cuerda tensa y la cuelga como se indica en la figura. ¿Si el peso total del ciclista y del uniciclo es de 155 libras, ¿cuánta tensión hay en cada parte del cable?

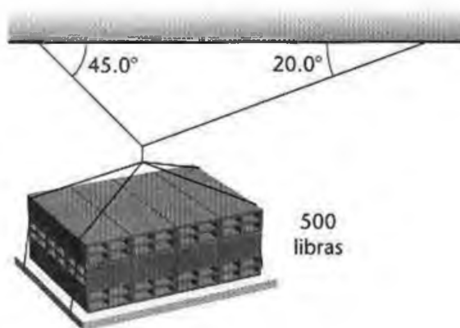


46. Equilibrio estático. Repita el problema 45 con el ángulo izquierdo de 4.2°, el ángulo derecho de 5.3° y el peso total de 112 libras.

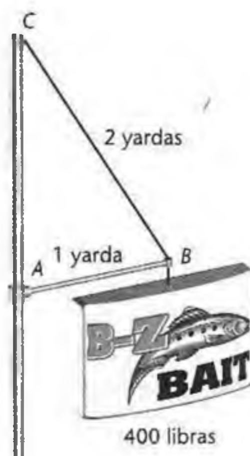
47. Equilibrio estático. Un peso de 1 000 libras se suspende de dos cables como se muestra en la figura. ¿Cuál es la tensión en cada cable?



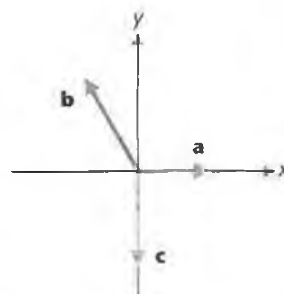
48. Equilibrio estático. Un peso de 500 libras está sostenido por dos cables como se ilustra. ¿Cuál es la tensión en cada cable?



49. Equilibrio estático. Un anuncio de 400 libras está suspendido como se muestra en la figura (a). El correspondiente diagrama de fuerzas (b) se forma observando lo siguiente: El lado AB "empuja" en B y éste está bajo compresión. Esta fuerza de "empuje" se puede pensar también como el vector de fuerza **a** que está "empujando" a la derecha en B. El vector de fuerza **b** refleja el hecho de que el lado CB está bajo tensión (esto es, "empuja" en B). El vector de fuerza **c** corresponde al peso del anuncio "empujando" hacia abajo en B. Encuentre las magnitudes de las fuerzas en los lados rígidos que soportan al peso; esto es, encuentre $|\mathbf{a}|$ y $|\mathbf{b}|$ en el diagrama de fuerzas (b).

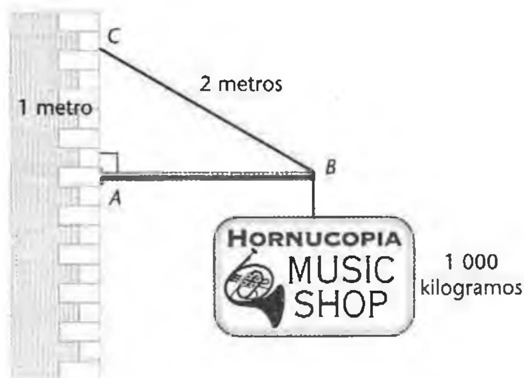


(a)



(b)

50. Equilibrio estático. Un peso de 1 000 kilogramos se sostiene como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las magnitudes de las fuerzas en los lados AB y BC?



51. Equilibrio estático. Un peso de 1 250 libras cuelga de un torno como se indica en la figura. ¿Cuáles son las magnitudes de las fuerzas en los lados AB y BC?

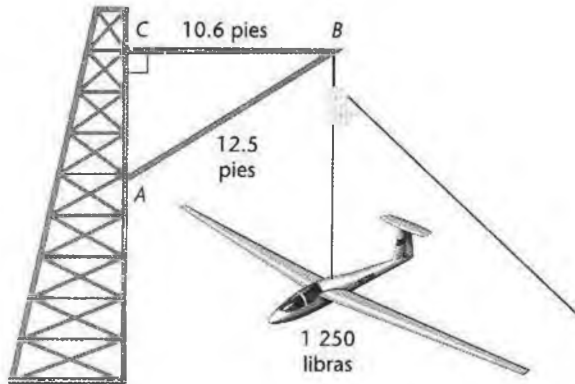


Figura para el ejercicio 51

52. Equilibrio estático. Un peso de 5 000 kilogramos se sostiene como se muestra en la figura. ¿Cuáles son las magnitudes de las fuerzas en los lados AB y BC?

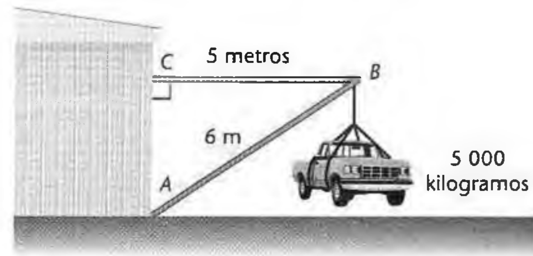


Figura para el ejercicio 52

SECCIÓN 7-5 Coordenadas polares y gráficas



- Sistema de coordenadas polares
- Conversión de la forma polar a la forma rectangular, y viceversa
- Graficación de las ecuaciones polares
- Algunas curvas polares estándares
- Aplicación

Hasta ahora se ha usado sólo el sistema coordenado rectangular. Otro sistema de coordenadas tiene ventajas particulares en ciertas situaciones. De los muchos que son posibles, el *sistema de coordenadas polares* es el segundo en importancia después del sistema coordenado rectangular y es el tema que se abordará en esta sección.

Sistema de coordenadas polares

Para formar un **sistema de coordenadas polares** en un plano (véase figura 1), se inicia con un punto fijo O llamado **polo** u **origen**. Partiendo de este punto se dibuja una media línea, o rayo (generalmente horizontal y a la derecha), a la que se llama línea al **eje polar**.

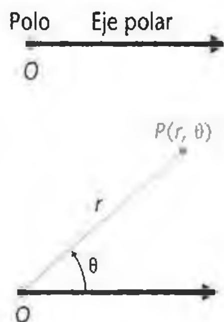
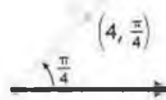


FIGURA 1 Sistema coordenado polar.

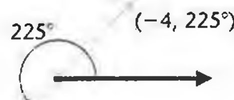
Si P es un punto arbitrario en un plano, entonces se le asocian las coordenadas polares (r, θ) como sigue: Se inicia con el eje polar como el lado inicial de un ángulo, se gira hasta el lado terminal, o la extensión de un extremo a otro del polo, pasando por el punto. La coordenada θ en (r, θ) es este ángulo, medido en grados o radianes. El ángulo θ es positivo si la rotación es a la izquierda y negativo si la rotación es a la derecha. La coordenada r en (r, θ) es la distancia dirigida del polo al punto P. Es positivo si se mide del polo al lado terminal θ y negativo si se mide del lado terminal extendido de un extremo a otro del polo.

La figura 2 ilustra un punto P con tres conjuntos diferentes de coordenadas polares. Estudie esta figura detenidamente. El polo tiene coordenadas polares $(0, \theta)$ con θ arbitrario. Por ejemplo, $(0, 0°)$, $(0, \pi/3)$ y $(0, -371°)$ son todas coordenadas del polo.

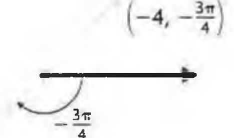
FIGURA 2 Coordenadas polares de un punto.



(a)



(b)



(c)

Ahora se ve una diferencia clara entre las coordenadas rectangulares y las polares para el punto dado. Para un punto dado en un sistema coordenado rectangular, existe exactamente un conjunto de coordenadas rectangulares. Por otro lado, en un sistema de coordenadas polares, un punto tiene un número infinito de conjuntos de coordenadas polares.

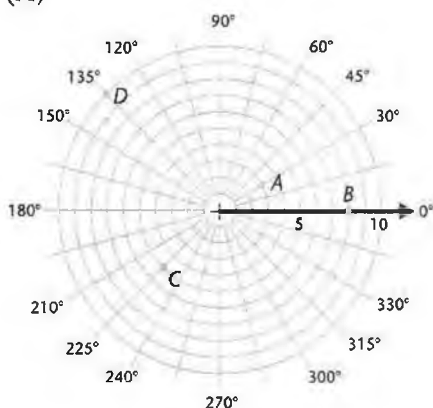
Así como se dispone de papel gráfico con una cuadrícula rectangular para dibujar coordenadas rectangulares, también hay papel para gráficas polares y en el que se pueden dibujar coordenadas polares.

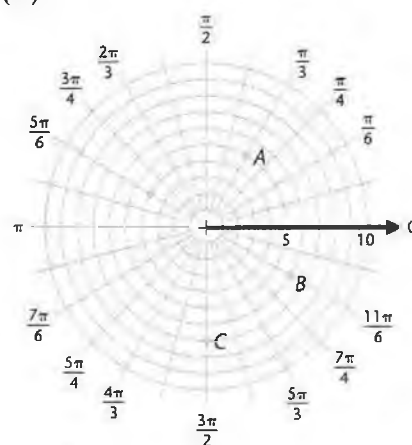
EJEMPLO 1 **Dibujando puntos en un sistema coordenado polar**

Trace los puntos siguientes en un sistema coordenado polar:

(A) $A(3, 30°)$, $B(-8, 180°)$, $C(5, -135°)$, $D(-10, -45°)$
(B) $A(5, \pi/3)$, $B(-6, 5\pi/6)$, $C(7, -\pi/2)$, $D(-4, -\pi/6)$

Soluciones (A) (B)





Problema seleccionado 1 Trace los puntos siguientes en un sistema coordenado polar:

(A) $A(9, 45°)$, $B(-6, 150°)$, $C(5, -210°)$, $D(-7, -90°)$
(B) $A(10, \pi/6)$, $B(-4, -\pi)$, $C(-8, 7\pi/4)$, $D(6, -5\pi/6)$

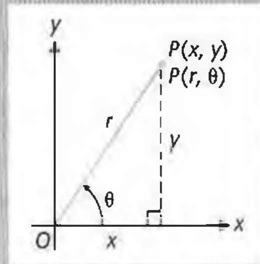
EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Un punto en un sistema coordenado polar tiene coordenadas (5, 30°). ¿Cuántas otras coordenadas polares tienen la coordenada θ restringida a $-360° \leq \theta \leq 360°$? Encuentre las otras coordenadas del punto y explique cómo se encuentran.

Conversión de la forma polar a la forma rectangular, y viceversa

A menudo, es necesario transformar coordenadas o ecuaciones de la forma rectangular a la forma polar o viceversa. Las siguientes relaciones polar-rectangular son útiles en este caso:

Relaciones polar-rectangular

Se tienen las siguientes relaciones entre las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ):



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{y}{r} \quad \text{o} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{o} \quad x = r\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

[*Nota:* Los signos de x y y determinan el cuadrante para θ. El ángulo θ se elige tal que $-\pi < \theta \leq \pi$ o $-180° < \theta \leq 180°$, a menos que se indique de otra manera.]

Muchas calculadoras pueden convertir automáticamente las coordenadas rectangulares a la forma polar y viceversa. (Lea el manual para su calculadora.) El ejemplo 2 ilustra conversiones de calculadora en ambas direcciones.

EJEMPLO 2 **Conversión de la forma polar a la rectangular y viceversa**

(A) Convierta las coordenadas polares $(-4, 1.077)$ a las coordenadas rectangulares con tres cifras decimales.

(B) Convierta las coordenadas rectangulares $(-3.207, -5.719)$ a coordenadas polares con θ medido en grados, $-180° < \theta \leq 180°$ y $R \geq 0$.

Solución (A) Use la calculadora en el modo de radián.

$$(r, \theta) = (-4, 1.077)$$

$$x = r\cos\theta = (-4)\cos 1.077 = -1.896$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = (-4)\,\text{sen}\,1.077 = -3.522$$

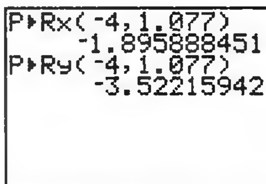


FIGURA 3

Las coordenadas rectangulares son $(-1.896, -3.522)$

La figura 3 muestra la misma conversión hecha con un dispositivo de graficación con una rutina preconstruida de conversión.

(B) Use la calculadora en el modo de grado.

$$(x, y) = (-3.207, -5.719)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-3.207)^2 + (-5.719)^2} = 6.557$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-5.719}{-3.207}$$

θ es un ángulo del tercer cuadrante y debe ser elegido de modo que $-180° < \theta \leq 180°$.

```
R▸Pr(-3.207,-5.7
19)
       6.556814013
R▸Pθ(-3.207,-5.7
19)
      -119.2820682
```

FIGURA 4

$$\theta = -180° + \tan^{-1}\frac{-5.719}{-3.207} = -119.28°$$

Las coordenadas polares son $(6.557, -119.28°)$.

La figura 4 muestra la misma conversión hecha en un dispositivo de graficación con una rutina preconstruida de conversión.

Problema seleccionado 2

(A) Convierta las coordenadas polares $(8.677, -1.385)$ a coordenadas rectangulares con tres cifras decimales.

(B) Convierta las coordenadas rectangulares $(-6.434, 4.023)$ a coordenadas polares con θ medido en grados, $-180° < \theta \leq 180°$ y $R \geq 0$.

Generalmente, un uso más importante de la relación rectangular polar es el de la conversión de ecuaciones de la forma rectangular a la forma polar, y viceversa.

EJEMPLO 3

Conversión de una ecuación de la forma rectangular a la forma polar

Cambie $x^2 + y^2 - 4y = 0$ a la forma polar.

Solución Use $r^2 = x^2 + y^2$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$.

$$x^2 + y^2 - 4y = 0$$
$$r^2 - 4r \operatorname{sen} \theta = 0$$
$$r(r - 4 \operatorname{sen} \theta) = 0$$
$$r = 0 \quad \text{o} \quad r - 4 \operatorname{sen} \theta = 0$$

La gráfica de $r = 0$ es el polo. Ya que el polo está incluido en la gráfica de $r - 4 \operatorname{sen} \theta = 0$ (sea $\theta = 0$), se puede descartar $r = 0$ y mantener sólo

$$r - 4 \operatorname{sen} \theta = 0$$

o

$$r = 4 \operatorname{sen} \theta$$ La forma polar de $x^2 + y^2 - 4y = 0$

Problema seleccionado 3 Cambie $x^2 + y^2 - 6x = 0$ a la forma polar.

EJEMPLO 4

Conversión de una ecuación de la forma polar a la forma rectangular

Cambie $r = -3\cos\theta$ a la forma rectangular.

Solución

La transformación de una ecuación como ésta a la forma rectangular es bastante difícil. Sin embargo, con un pequeño truco, se vuelve muy fácil. Se multiplican ambos lados por r, lo cual equivale a simplemente sumar el polo a la gráfica. Pero el polo ya es parte de la gráfica de $r = -3\cos\theta$ (sea $\theta = \pi/2$), así que en realidad no se ha cambiado nada.

$$r = -3\cos\theta$$

$$r^2 = -3r\cos\theta \qquad \text{Multiplique ambos lados por } r$$

$$x^2 + y^2 = -3x \qquad r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } r\cos\theta = x$$

$$x^2 + y^2 + 3x = 0$$

Problema seleccionado 4

Cambie $r + 2\,\text{sen}\,\theta = 0$ a la forma rectangular.

Graficación de las ecuaciones polares

Ahora se considerará la graficación de una ecuación polar. La **gráfica** de una ecuación polar, tal como $r = 3\theta$ o $r = 6\cos\theta$, en un sistema coordenado polar es el conjunto de todas las coordenadas que satisfacen a la ecuación polar. Ciertas curvas tienen representaciones más simples en coordenadas polares, y otras curvas tienen las representaciones más simples en coordenadas rectangulares.

Para establecer los fundamentos en una graficación de ecuaciones polares, se inicia con una gráfica punto por punto. Después se considera una manera más rápida de hacer dibujos burdos de ciertas curvas polares. Y, finalmente, se muestra cómo graficar curvas polares con un dispositivo de graficación.

Para graficar una ecuación polar usando la **gráfica punto por punto**, de igual manera que con coordenadas rectangulares, se hace una tabla de valores que satisfagan la ecuación, se dibujan estos puntos, y después se unen con una curva suave. El ejemplo 5 ilustra el proceso.

EJEMPLO 5

Graficación punto por punto

(A) Grafique $r = 8\cos\theta$ con θ en radianes.

(B) Convierta la ecuación polar del inciso (A) a la forma rectangular, e identifique la gráfica.

Solución

(A) Se construye una tabla usando múltiplos de $\pi/6$, dibuje estos puntos y después únalos con una curva suave (figura 5):

θ	r
0	8.0
π/6	6.9
π/3	4.0
π/2	0.0
2π/3	−4.0
5π/6	−6.9
π	8.0
Repeticiones gráficas	

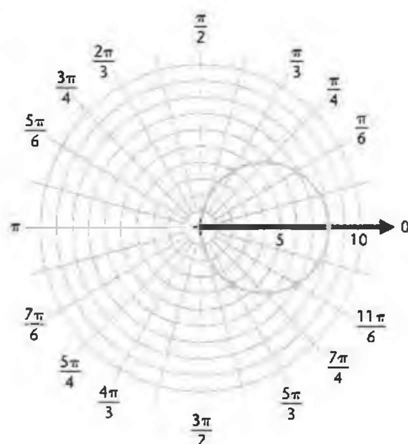


FIGURA 5

(B)

$$r = 8\cos\theta$$

$$r^2 = 8r\cos\theta \quad \text{Multiplique ambos lados por } r.$$

$$x^2 + y^2 = 8x \quad \text{Cambie a la forma rectangular.}$$

$$x^2 - 8x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 16 \quad \text{Complete el cuadrado en el lado izquierdo.}$$

$$(x-4)^2 + y^2 = 4^2 \quad \text{Ecuación estándar de un círculo}$$

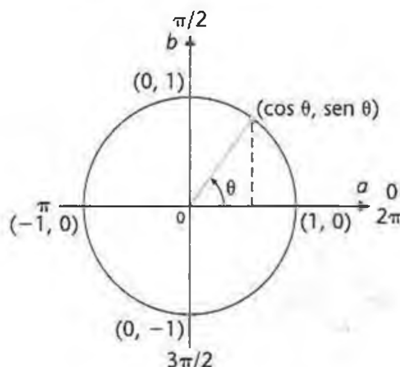
La gráfica del inciso (A) es un círculo con centro en (4, 0) y radio 4 (véase la sección 2-1).

Problema seleccionado 5

(A) Grafique $r = 8$ sen θ con θ en grados.
(B) Convierta la ecuación polar en el inciso (A) a la forma rectangular, e identifique la gráfica.

Si sólo se desea hacer un burdo dibujo de una ecuación polar que implique a sen θ o cos θ, se puede dibujar más rápido con el proceso de graficación punto por punto aprovechando la variación uniforme de sen θ y cos θ conforme θ se mueve alrededor del círculo unitario. Este proceso se llama **graficación polar rápida**. Es conveniente observar la figura 6 durante el proceso. Con un poco de práctica se puede hacer mentalmente la mayor parte del trabajo de graficación rápida, y se puede hacer un dibujo burdo a partir de la ecuación.

FIGURA 6



EJEMPLO 6 Graficación polar rápida

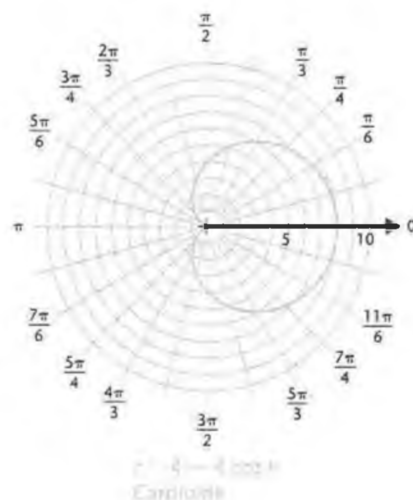
Dibuje $r = 4 + 4 \cos \theta$ usando técnicas de graficación rápida con θ en radianes.

Solución Se hace una tabla que indique cómo varía r conforme θ varía por cada conjunto de valores del cuadrante.

θ varía de	$\cos \theta$ varía de	$4 \cos \theta$ varía de	$r = 4 + 4 \cos \theta$ varía de
0 a $\pi/2$	1 a 0	4 a 0	8 a 4
$\pi/2$ a π	0 a -1	0 a -4	4 a 0
π a $3\pi/2$	-1 a 0	-4 a 0	0 a 4
$3\pi/2$ a 2π	0 a 1	0 a 4	4 a 8

Observe que como θ aumenta de 0 a $\pi/2$, $\cos \theta$ disminuye de 1 a 0, $4 \cos \theta$ disminuye de 4 a 0 y $r = 4 + 4 \cos \theta$ disminuye de 8 a 4 y así sucesivamente. Trazando estos valores, se obtiene la gráfica de la figura 7, llamada **cardioide**.

FIGURA 7



$r = 4 + 4 \cos \theta$
Cardioide

Problema seleccionado 6 Grafique $r = 5 + 5 \operatorname{sen} \theta$ usando técnicas de graficación rápida con θ en radianes.

EJEMPLO 7 Graficación polar rápida

Grafique $r = 8 \cos 2\theta$ con θ en radianes.

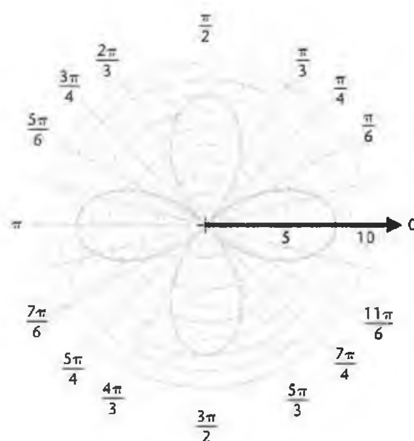
Solución Se inicia con valores de 2θ (en lugar de θ) pasando por cada conjunto de valores del cuadrante. Esto es, se inicia con valores para 2θ en la segunda columna de la tabla, se llena la tabla y después se llena la primera columna para θ.

Se inicia con la segunda columna

θ varía de	2θ varía de	$\cos 2\theta$ varía de	$r = 8 \cos 2\theta$ varía de
0 a $\pi/4$	0 a $\pi/2$	1 a 0	8 a 0
$\pi/4$ a $\pi/2$	$\pi/2$ a π	0 a -1	0 a -8
$\pi/2$ a $3\pi/4$	π a $3\pi/2$	-1 a 0	-8 a 0
$3\pi/4$ a π	$3\pi/2$ a 2π	0 a 1	0 a 8
π a $5\pi/4$	2π a $5\pi/2$	1 a 0	8 a 0
$5\pi/4$ a $3\pi/2$	$5\pi/2$ a 3π	0 a -1	0 a -8
$3\pi/2$ a $7\pi/4$	3π a $7\pi/2$	-1 a 0	-8 a 0
$7\pi/4$ a 2π	$7\pi/2$ a 4π	0 a 1	0 a 8

Observe que conforme 2θ aumenta de 0 a $\pi/2$, θ aumenta de 0 a $\pi/4$, y r disminuye de 8 a 0. Conforme 2θ aumenta de $\pi/2$ a π, θ aumenta de $\pi/4$ a $\pi/2$ y r disminuye de 0 a -8 y así sucesivamente. Se continúa con la gráfica hasta que se repite. Graficando los valores se obtiene la gráfica de la figura 8, llamada **rosa de cuatro pétalos**:

FIGURA 8



Problema seleccionado 7 Dibuje $r = 6$ sen 2θ con θ en radianes.

En seguida se aborda la **graficación de ecuaciones polares con un dispositivo de graficación**. El ejemplo 8 ilustra este proceso.



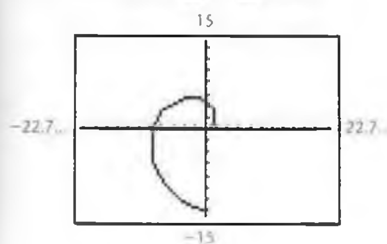
EJEMPLO 8 Graficación de ecuaciones polares con un dispositivo de graficación

Grafique cada una de las ecuaciones polares siguientes con un dispositivo de graficación (los incisos (B) y (C) son de los ejemplos 6 y 7).

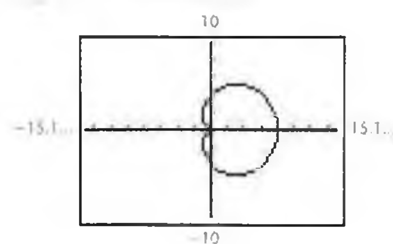
(A) $r = 3\theta$, $0 \leq \theta \leq 3\pi/2$ (la espiral de Arquímedes)
(B) $r = 4 + 4 \cos \theta$ (cardioide)
(C) $r = 8 \cos 2\theta$ (rosa de cuatro pétalos)

Solución Use un dispositivo de graficación en el modo polar, y seleccione coordenadas polares medidas en radianes. Ajuste los valores de la ventana para acomodar la gráfica completa. A menudo es deseable una gráfica cuadrada para mostrar la forma verdadera de la curva como la que aquí se usa. Muchos dispositivos de graficación, incluyendo el usado aquí, no muestran una cuadrícula polar. Cuando se usa la función TRACE, muchos dispositivos de graficación ofrecen una opción entre coordenadas polares y rectangulares para puntos en la curva polar. Las gráficas de las ecuaciones polares de arriba se muestran en la figura 9.

(A) $r = 3\theta$, $0 \leq \theta \leq 3\pi/2$



(B) $r = 4 + 4 \cos \theta$



(C) $r = 8 \cos 2\theta$

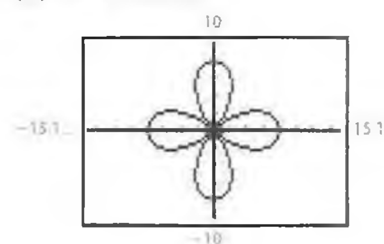


FIGURA 9



Problema seleccionado 8 Grafique cada una de las siguientes ecuaciones polares con un dispositivo de graficación.

(A) $r = 2\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
(B) $r = 5 + 5 \operatorname{sen} \theta$ (C) $r = 6 \operatorname{sen} 2\theta$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2

(A) Grafique $r1 = 10 \operatorname{sen} \theta$ y $r2 = 10 \cos \theta$ en la misma ventana de visión. Use la función TRACE en $r1$, y estime las coordenadas polares donde las dos gráficas se intersectan. Haga lo mismo para $r2$. ¿Cuál punto de intersección parece tener las mismas coordenadas polares en cada curva y representa, consecuentemente, una solución simultánea a ambas ecuaciones? ¿Cuál punto de intersección parece tener diferentes coordenadas polares en cada curva y, por consiguiente, no representa una solución simultánea? Resuelva el sistema para r y θ.

(B) Explique cómo los sistemas coordenados rectangulares difieren del sistema coordenado polar, con respecto al punto de intersección y a las soluciones simultáneas de sistemas de ecuaciones en los sistemas respectivos.

Algunas curvas polares estándares

En un sistema coordenado rectangular los tipos más sencillos de ecuaciones para graficar se encuentran usando las variables rectangulares x y y iguales a constantes:

$$x = a \qquad \text{y} \qquad y = b$$

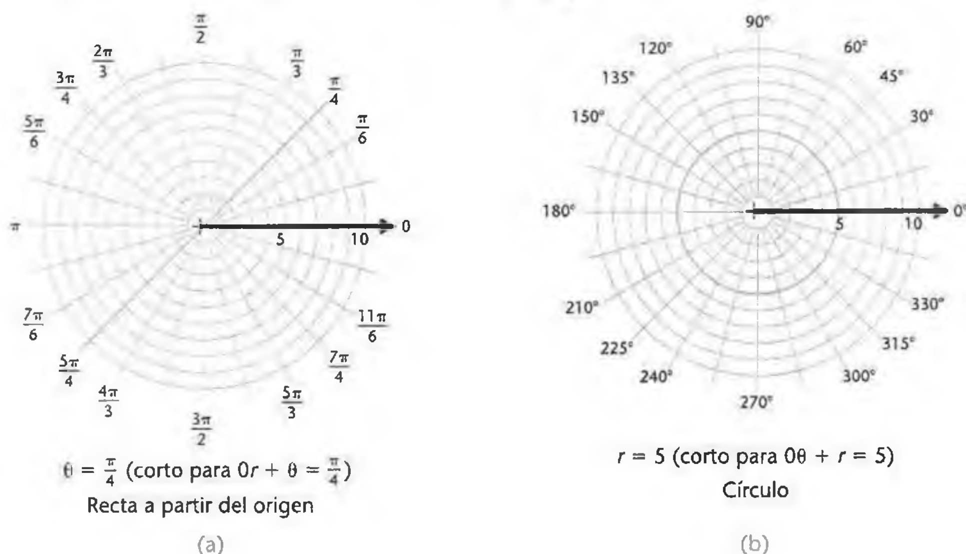
Las gráficas son líneas rectas: La gráfica de $x = a$ es una recta vertical, y la gráfica de $y = b$ es una recta horizontal. Una mirada a la tabla 1 muestra que las rectas vertical y horizontal no tienen ecuaciones simples en coordenadas polares.

Dos de los tipos más sencillos de las ecuaciones polares para graficar en un sistema coordenado polar se encuentran haciendo las variables polares r y θ iguales a constantes:

$$r = a \qquad \text{y} \qquad \theta = b$$

La figura 10 ilustra las gráficas de $\theta = \pi/4$ y $r = 5$.

FIGURA 10



$\theta = \frac{\pi}{4}$ (corto para $0r + \theta = \frac{\pi}{4}$)
Recta a partir del origen
(a)

$r = 5$ (corto para $0\theta + r = 5$)
Círculo
(b)

La tabla 1 ilustra varias gráficas polares estándares y sus ecuaciones. La graficación polar a menudo es más fácil si se tiene alguna idea de la forma final.

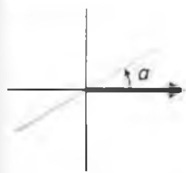
Aplicación

Corredores de velero profesionales hacen gráficas polares de la velocidad del barco en diferentes ángulos con el viento y con diferentes combinaciones de velas a diferentes velocidades de viento. Con varias gráficas polares para diferentes tamaños y tipos de velas, a diferentes velocidades de viento, pueden escoger exactamente una vela para el desempeño óptimo en diferentes puntos con respecto a cualquier fuerza del viento dada. La figura 11 ilustra una de tales gráficas polares, donde la velocidad máxima parece ser de aproximadamente 7.5 nudos a 105° del viento (con la vela *spinnaker*).



FIGURA 11 Diagrama polar que muestra la velocidad óptima de veleo en diferentes ángulos con respecto al viento

TABLA 1 Gráficas polares



Recta que pasa por el origen: $\theta = a$

(a)



Recta vertical: $r = a/\cos\theta = a\sec\theta$

(b)



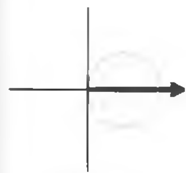
Recta horizontal: $r = a/\operatorname{sen}\theta = a\csc\theta$

(c)



Círculo: $r = a$

(d)



Círculo: $r = a\cos\theta$

(e)



Círculo: $r = a\operatorname{sen}\theta$

(f)



Cardioide: $r = a + a\cos\theta$

(g)



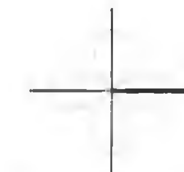
Cardioide: $r = a + a\operatorname{sen}\theta$

(h)



Rosa de tres pétalos $r = a\cos 3\theta$

(i)



Rosa de cuatro pétalos $r = a\cos 2\theta$

(j)



Lemniscata: $r^2 = a^2\cos 2\theta$

(k)

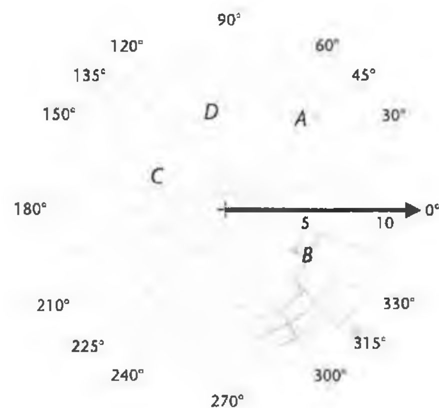


Espiral de Arquímedes: $r = a\theta$, $a > 0$

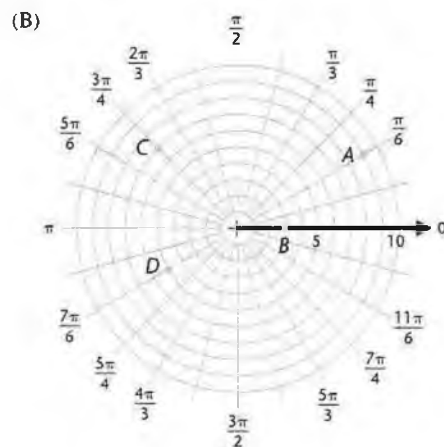
(l)

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A)



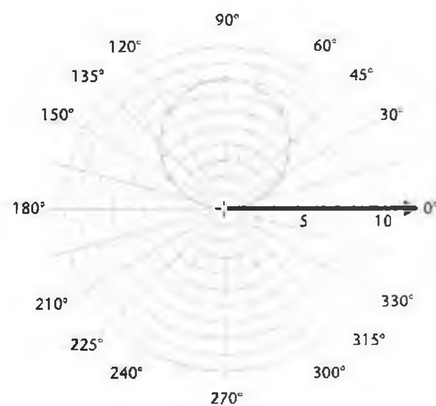
(B)



2. (A) (1.603, −8.528) (B) (7.588, 147.98°)
3. $r = 6 \cos \theta$ **4.** $x^2 + y^2 + 2y = 0$
5. (A)

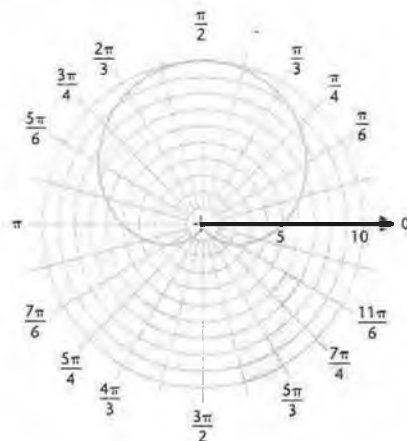
θ	r
0°	0.0
30°	4.0
60°	6.9
90°	8.0
120°	6.9
150°	4.0
180°	0.0

Repeticiones gráficas

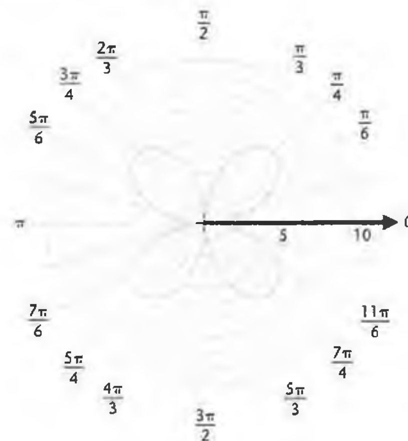


(B) $x^2 + (y - 4)^2 = 4^2$
A Un círculo con centro en (0, 4) y radio 4.

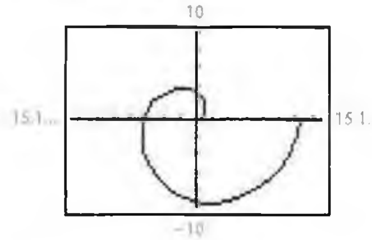
6. $r = 5 + 5 \operatorname{sen} \theta$
Cardioide



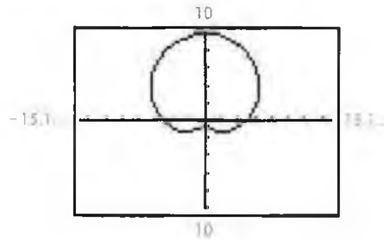
7. $r = 6 \operatorname{sen} 2\theta$
Rosa de cuatro pétalos



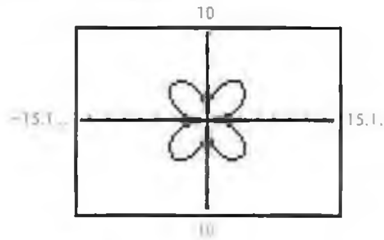
8. (A) $r = 2\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$



(B) $r = 5 + 5 \operatorname{sen} \theta$



(C) $r = 6 \operatorname{sen} 2\theta$



EJERCICIO 7-5

A

Dibuje A, B y C en los problemas del 1 al 8 en un sistema coordenado polar.

1. $A(4, 0°), B(7, 180°), C(9, 45°)$
2. $A(8, 0°), B(5, 90°), C(6, 30°)$
3. $A(-4, 0°), B(-7, 180°), C(-9, 45°)$
4. $A(-8, 0°), B(-5, 90°), C(-6, 30°)$
5. $A(8, -\pi/3), B(4, -\pi/4), C(10, -\pi/6)$
6. $A(6, -\pi/6), B(5, -\pi/2), C(8, -\pi/4)$
7. $A(-6, -\pi/6), B(-5, -\pi/2), C(-8, -\pi/4)$
8. $A(-6, -\pi/2), B(-5, -\pi/3), C(-8, -\pi/4)$

9. Un punto en un sistema coordenado polar tiene coordenadas $(-5, 3\pi/4)$. Encuentre todas las otras coordenadas polares para el punto, $-2\pi \le \theta \le 2\pi$, y describa verbalmente cómo se asocian las coordenadas con el punto.

10. Un punto en un sistema coordenado polar tiene coordenadas $(6, -30°)$. Encuentre todas las coordenadas polares para el punto, $-360° \le \theta \le 360°$, y describa verbalmente cómo las coordenadas están asociadas con el punto.

Grafique los problemas 11 y 12 en un sistema coordenado polar usando graficación punto por punto y los valores especiales 0, π/6, π/4, π/3, π/2, 2π/3, 3π/4, 5π/6, y para π = θ.

Verifique las gráficas de los problemas 11 y 12 con un dispositivo de graficación.

11. $r = 10 \operatorname{sen} \theta$
12. $r = 10 \cos \theta$

Grafique los problemas del 13 al 16 en un sistema coordenado polar.

13. $r = 8$
14. $r = 5$
15. $\theta = \pi/3$
16. $\theta = \pi/6$

En los problemas del 17 al 22, convierta las coordenadas polares a coordenadas rectangulares con tres cifras decimales.

17. $(6, \pi/6)$
18. $(7, 2\pi/3)$
19. $(-2, 7\pi/8)$
20. $(3, -3\pi/7)$
21. $(-4.233, -2.084)$
22. $(-9.028, -0.663)$

B

En los problemas del 23 al 28, convierta las coordenadas rectangulares a coordenadas polares con θ medido en grados. $-180° < \theta \le 180°$ y $R \ge 0$.

23. $(3.5, 7.1)$
24. $(6.9, 4.7)$
25. $(22, -14)$
26. $(16, -27)$
27. $(-7.33, -2.04)$
28. $(-8.33, 4.29)$

En los problemas del 29 al 38, use técnicas de graficación rápida para dibujar la gráfica de cada ecuación polar.

Verifique las gráficas de los problemas del 29 al 38 con un dispositivo de graficación.

29. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$
30. $r = 4 \cos \theta$
31. $r = 10 \operatorname{sen} 2\theta$
32. $r = 8 \cos 2\theta$
33. $r = 5 \cos 3\theta$
34. $r = 6 \operatorname{sen} 3\theta$
35. $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$
36. $r = 3 + 3 \cos \theta$
37. $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$
38. $r = 2 + 4 \cos \theta$

Los problemas del 39 al 44 son problemas de exploración que requieren del uso de un dispositivo de graficación.

39. Grafique cada ecuación polar en su propia ventana de visión: $r = 2 + 2 \text{ sen } \theta$, $r = 4 + 2 \text{ sen } \theta$, $r = 2 + 4 \text{ sen } \theta$

40. Grafique cada ecuación polar en su propia ventana de visión: $r = 2 + 2 \cos \theta$, $r = 4 + 2 \cos \theta$, $r = 2 + 4 \cos \theta$

41. (A) Grafique cada ecuación polar en su propia ventana de visión: $r = 4 \text{ sen } \theta$, $r = 4 \text{ sen } 3\theta$, $r = 4 \text{ sen } 5\theta$
(B) ¿Podría usted adivinar el número de pétalos para $r = 4 \text{ sen } 7\theta$?
(C) ¿Podría usted adivinar el número de pétalos para $r = a \text{ sen } n\theta$, $a > 0$ y n impar?

42. (A) Grafique cada ecuación polar en su propia ventana de visión: $r = 4 \cos \theta$, $r = 4 \cos 3\theta$, $r = 4 \cos 5\theta$
(B) ¿Podría usted adivinar el número de pétalos para $r = 4 \cos 7\theta$?
(C) ¿Podría usted adivinar el número de pétalos para $r = a \cos n\theta$, $a > 0$ y n impar?

43. (A) Grafique cada ecuación polar en su propia ventana de visión: $r = 4 \text{ sen } 2\theta$, $r = 4 \text{ sen } 4\theta$, $r = 4 \text{ sen } 6\theta$
(B) ¿Podría usted adivinar el número de pétalos para $r = 4 \text{ sen } 8\theta$?
(C) ¿Podría usted adivinar el número de pétalos para $r = a \text{ sen } n\theta$, $a > 0$ y n par?

44. (A) Grafique cada ecuación polar en su propia ventana de visión: $r = 4 \cos 2\theta$, $r = 4 \cos 4\theta$, $r = 4 \cos 6\theta$
(B) ¿Podría usted adivinar el número de pétalos para $r = 4 \cos 8\theta$?
(C) Podría usted adivinar el número de pétalos para $r = a \cos n\theta$, $a > 0$ y n par?

En los problemas del 45 al 50, cambie cada ecuación rectangular a la forma polar.

45. $y^2 = 5y - x^2$ **46.** $6x - x^2 = y^2$

47. $y = x$ **48.** $x^2 + y^2 = 9$

49. $y^2 = 4x$ **50.** $2xy = 1$

En los problemas del 51 al 56, cambie cada ecuación polar a la forma rectangular.

51. $r(3 \cos \theta - 4 \text{ sen } \theta) = -1$

52. $r(2 \cos \theta + \text{sen } \theta) = 4$ **53.** $r = -2 \text{ sen } \theta$

54. $r = 8 \cos \theta$ **55.** $\theta = \pi/4$ **56.** $r = 4$

C

Los problemas 57 y 58 son problemas de exploración que requieren del uso de un dispositivo de graficación.

57. Grafique $r = 1 + 2 \text{ sen } (n\theta)$ para diferentes valores de n, n es un número natural. Describa cómo está relacionado n con el número de pétalos largos y con el número de pétalos pequeños de la gráfica y cómo están relacionados entre sí y con respecto a n los pétalos largos y pequeños.

58. Grafique $r = 1 + 2 \cos (n\theta)$ para diferentes valores de n, n es un número natural. Describa cómo está relacionado n con el número de pétalos largos y con el número de pétalos pequeños en la gráfica y cómo están relacionados los pétalos largos y pequeños entre sí y con respecto a n.

En los problemas del 59 al 62, grafique cada sistema de ecuaciones en el mismo conjunto de ejes coordenados polares. Después resuelva simultáneamente al sistema. [Nota: Cualquier solución (r_1, θ_1) para el sistema debe satisfacer cada ecuación en el sistema y así se identifica un punto de intersección de las dos gráficas. Sin embargo, puede haber otros puntos de intersección de las dos gráficas que no tengan coordenadas que satisfagan ambas ecuaciones. Esto representa la mayor diferencia entre el sistema coordenado rectangular y el sistema coordenado polar.]

59. $r = 4 \cos \theta$
$r = -4 \text{ sen } \theta$
$0 \leq \theta \leq \pi$

60. $r = 2 \cos \theta$
$r = 2 \text{ sen } \theta$
$0 \leq \theta \leq \pi$

61. $r = 6 \cos \theta$
$r = 6 \text{ sen } 2\theta$
$0° \leq \theta \leq 360°$

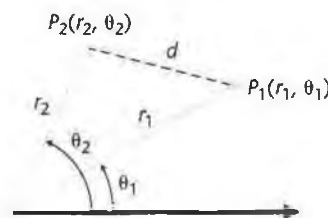
62. $r = 8 \text{ sen } \theta$
$r = 8 \cos 2\theta$
$0° \leq \theta \leq 360°$

63. Geometría analítica. La fórmula de la distancia para la distancia entre dos puntos en un sistema coordenado polar se sigue directamente de la ley de los cosenos:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

Encuentre la distancia (con tres cifras decimales) entre los dos puntos $P_1(4, \pi/4)$ y $P_2(1, \pi/2)$.



64. Geometría analítica. Remítase al problema 63. Encuentre la distancia (con tres cifras decimales) entre los dos puntos $P_1(2, 30°)$ y $P_2(3, 60°)$

Los problemas 65 y 66 se refieren al diagrama polar de la figura. Los diagramas polares de este tipo son usados ampliamente por corredores de velero profesionales, y este diagrama polar representa velocidades en nudos de una navegación de alto desempeño de velero para diferentes ángulos de un viento soplando a 20 nudos.



65. Competencia de veleros. Con referencia a la figura, aproxime al nudo más cercano la velocidad del velero que navega formando los ángulos siguientes con el viento: 30°, 75°, 135° y 180°

66. Competencia de veleros. Con referencia a la figura, aproxime al nudo más cercano la velocidad del velero que navega formando los ángulos siguientes con el viento: 45°, 90°, 120° y 150°

67. Secciones cónicas. Usando un dispositivo de graficación, grafique la ecuación

$$r = \frac{8}{1 - e\cos\theta}$$

para los valores siguientes de e (llamada **excentricidad** de la cónica), e identifique cada curva como una hipérbola, elipse o parábola.

(A) $e = 0.4$ (B) $e = 1$ (C) $e = 1.6$

(Es instructivo explorar la gráfica para otros valores positivos de e.)

68. Secciones cónicas. Usando un dispositivo de graficación, grafique la ecuación

$$r = \frac{8}{1 - e\cos\theta}$$

para los valores siguientes de e, e identifique cada curva como una hipérbola, elipse o parábola.

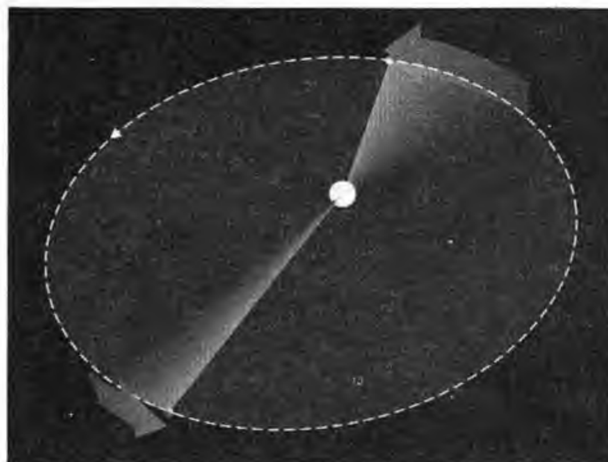
(A) $e = 0.6$ (B) $e = 1$ (C) $e = 2$

69. Astronomía. (A) El planeta Mercurio viaja alrededor del Sol en una órbita elíptica dada aproximadamente por

$$r = \frac{3.442 \times 10^7}{1 - 0.206\cos\theta}$$

r está medido en millas y el Sol está en un polo. Grafique la órbita. Use la función TRACE para encontrar la distancia entre Mercurio y el Sol en el **afelio** (la distancia más grande desde el Sol) y en el **perihelio** (la distancia más corta desde el Sol).

(B) Johannes Kepler (1571-1630) mostró que una línea que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en el espacio en intervalos iguales de tiempo (véase figura). Use esta información para determinar si un planeta viaja más rápido o más lento en el afelio que en el perihelio. Explique su respuesta.



SECCIÓN 7-6 Números complejos en formas rectangulares y polares



- Forma rectangular
- Forma polar
- Multiplicación y división en forma polar
- Nota histórica

Utilizando los conceptos de coordenadas polares estudiados en la sección anterior, se mostrará que los números complejos se pueden escribir en forma polar, la cual puede ser muy útil en muchas aplicaciones. Conviene repasar en forma breve los números complejos estudiados en la sección 1-5 antes de proseguir.

Forma rectangular

Recuerde de la sección 1-5 que un número complejo es cualquier número que se puede escribir en la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria. En consecuencia, asociado con cada número complejo $a + bi$ es el único par ordenado de números reales (a, b) y viceversa. Por ejemplo,

$$3 - 5i \qquad \text{corresponde a} \qquad (3, -5)$$

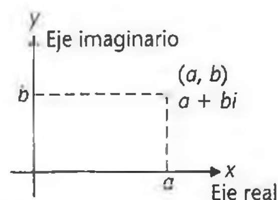


FIGURA 1 Plano complejo.

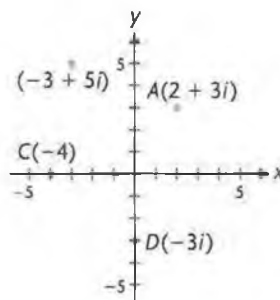
Asociando este par ordenado de números reales con puntos en un sistema coordenado rectangular, se obtiene un **plano complejo** (véase figura 1). Cuando los números complejos están asociados con puntos en un sistema coordenado rectangular, se refiere al eje x como el **eje real** y al eje y como el **eje imaginario**. Se dice que el número complejo $a + bi$ está en la **forma rectangular**.

EJEMPLO 1 **Graficación en el plano complejo**

Dibuje los siguientes números complejos en un plano complejo:

$$A = 2 + 3i \qquad B = -3 + 5i \qquad C = -4 \qquad D = -3i$$

Solución



Problema seleccionado 1 Grafique los siguientes números complejos en un plano complejo:

$$A = 4 + 2i \qquad B = 2 - 3i \qquad C = -5 \qquad D = 4i$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Sobre una *recta numérica real* hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de los números reales y el conjunto de puntos sobre la recta: Cada número real está asociado con exactamente un punto sobre la recta, y cada punto sobre la recta está asociado exactamente con un número real. ¿Hay tal correspondencia entre el conjunto de los números complejos y el conjunto de puntos en un plano extendido? Explique cómo se puede establecer una correspondencia uno a uno.

Forma polar

Los números complejos también se pueden escribir en **forma polar**. Usando las relaciones rectangular-polar de la sección 7-5,

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

se puede escribir el número complejo $z = x + iy$ en la forma polar como sigue:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta) \qquad (1)$$

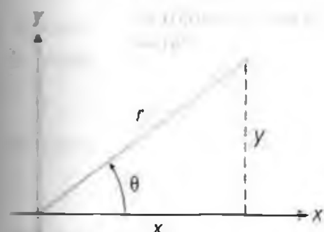


FIGURA 2 Relación polar-rectangular

Esta relación polar rectangular se ilustra en la figura 2. En un tratamiento más avanzado de este tema, se establece la famosa ecuación siguiente:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta \qquad (2)$$

donde $e^{i\theta}$ obedece todas las leyes básicas de los exponentes. En consecuencia, la ecuación (1) toma la forma

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta = re^{i\theta} \qquad (3)$$

Se usará libremente $re^{i\theta}$ como una forma polar para un número complejo. De hecho, algunos dispositivos de graficación despliegan la forma polar de $x + iy$ de esta manera (véase figura 3, donde θ está en radianes).

Como cos θ y sen θ son ambos periódicos con periodo 2π, se tiene

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$$
$$\text{sen}(\theta + 2k\pi) = \text{sen}\,\theta \qquad k \text{ cualquier entero}$$

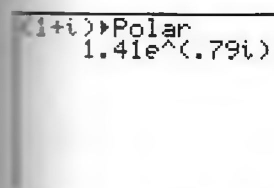


FIGURA 3 $1 + i = 1.41e^{0.79i}$

Por consiguiente, se puede escribir una forma polar más general para un número complejo $z = x + iy$, como se muestra en seguida, y se observa que $re^{i\theta}$ es periódica con periodo $2k\pi$, k es cualquier entero.

DEFINICIÓN 1 **Forma polar general de un número complejo**

Para k cualquier entero,

$$z = x + iy = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\,\text{sen}(\theta + 2k\pi)]$$
$$= re^{i(\theta + 2k\pi)}$$

El número r se llama **módulo**, o **valor absoluto**, de z y se denota por **mod z** o $|z|$. El ángulo polar que forma la recta que une a z con el origen al eje polar se llama **argumento** de z y se denota por **arg z**. En la figura 2 se ven las siguientes relaciones:

DEFINICIÓN 2 **El módulo y el argumento para $z = x + iy$**

$$\text{mod}\, z = r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{Nunca es negativa}$$
$$\arg z = \theta + 2k\pi \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

donde $\text{sen}\,\theta = y/r$ y $\cos\theta = x/r$. Por lo general se elige el argumento θ de manera que $-180° < \theta \le 180°$ o $-\pi < \theta \le \pi$.

EJEMPLO 2 **De la forma rectangular a la polar**

Escriba los incisos (A)-(C) en la forma polar, θ está en radianes, $-\pi < \theta \leq \pi$. Calcule el módulo y el argumento para cada inciso (A) y (B) exactamente; calcule también el módulo y el argumento para el inciso (C) con dos cifras decimales.

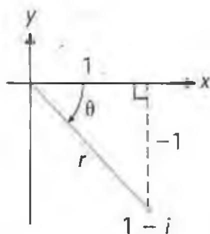
(A) $z_1 = 1 - i$ (B) $z_2 = -\sqrt{3} + i$ (C) $z_3 = -5 - 2i$

Solución Localice primero en un plano complejo; después, si x y y están asociados con ángulos especiales, r y θ a menudo se pueden determinar por examinación.

(A) Un dibujo muestra que z_1 está asociado con un triángulo especial de 45° (figura 4). Así que, por examinación, $r = \sqrt{2}$, $\theta = -\pi/4$ (no $7\pi/4$), y

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \sqrt{2}e^{(-\pi/4)i}
\end{aligned}
$$

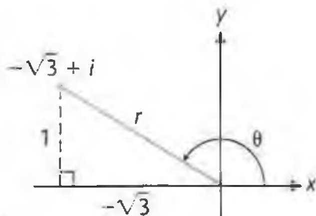
FIGURA 4



(B) Un dibujo muestra que z_2 está asociado con un triángulo especial de 30°-60° (figura 5). De manera que, por examinación, $r = 2$, $\theta = 5\pi/6$, y

$$
\begin{aligned}
z_2 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) \\
&= 2e^{(5\pi/6)i}
\end{aligned}
$$

FIGURA 5



(C) Un dibujo muestra que z_3 no está asociado con un triángulo especial (figura 6). De modo que se procede como sigue:

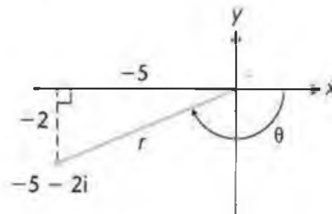
$$r = \sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = 5.39 \quad \text{Con dos cifras decimales}$$

$$\theta = -\pi + \tan^{-1}\tfrac{2}{5} = -2.76 \quad \text{Con dos cifras decimales}$$

Esto es,

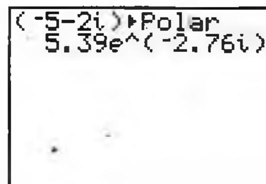
$$z_3 = 5.39\,[\cos(-2.76) + i\,\mathrm{sen}(-2.76)]$$
$$= 5.39e^{(-2.76)i}$$

FIGURA 6



La figura 7 muestra la misma conversión hecha por un dispositivo de graficación con una rutina preconstruida de conversión.

FIGURA 7 $-5 - 2i = 5.39e^{-2.76i}$.



Problema seleccionado 2 Escriba los incisos (A) a (C) en forma polar, θ está en radianes, $-\pi < \theta \leq \pi$. Calcule el módulo y el argumento para los incisos (A) y (B) exactamente; calcule también el módulo y el argumento para el inciso (C) con dos cifras decimales.

(A) $-1 + i$ (B) $1 + i\sqrt{3}$ (C) $-3 - 5i$

EJEMPLO 3 De la forma polar a la rectangular

Escriba los incisos (A)-(C) en forma rectangular. Calcule los valores exactos en los incisos (A) y (B); en el inciso (C) calcule a y b para $a + bi$ con dos cifras decimales.

(A) $z_1 = 2e^{(5\pi/6)i}$ (B) $z_2 = 3e^{(-60°)i}$ (C) $z_3 = 7.19e^{-2.13i}$

Solución (A) $x + iy = 2e^{(5\pi/6)i}$

$$= 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + i2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\sqrt{3} + i$$

(B) $x + iy = 3e^{-60°i}$

$$= 3[\cos(-60°) + i\,\mathrm{sen}(-60°)]$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}\right) + i3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

```
7.19e^(-2.13i)▸R
ect
      -3.81-6.09i
```

FIGURA 8
$7.19e^{-2.13i} = -3.81 - 6.09i$.

(C) $x + iy = 7.19e^{-2.13i}$

$$= 7.19[\cos(-2.13) + i\text{sen}(-2.13)]$$

$$= -3.81 - 6.09i$$

La figura 8 muestra la misma conversión hecha por un dispositivo de graficación con una rutina de conversión preconstruida.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Si su calculadora tiene una rutina preconstruida de conversión de polares a rectangulares, intente con $\sqrt{2}e^{45°i}$ y $\sqrt{2}e^{(\pi/4)i}$, después invierta el proceso para ver si se vuelve al punto de partida. (Para números complejos en forma polar exponencial, algunas calculadoras requieren que θ esté en modo radián para ejecutar los cálculos. Estudie su manual del usuario.)

Problema seleccionado 3

Escriba los incisos (A)-(C) en la forma rectangular. Calcule los valores exactos de los incisos (A) y (B); en el inciso (C) calcule a y b para $a + bi$ con dos cifras decimales.

(A) $z_1 = \sqrt{2}e^{(-\pi/2)i}$ (B) $z_2 = 3e^{120°i}$ (C) $z_3 = 6.49e^{-2.08i}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3 Sea $z_1 = \sqrt{3} + i$ y $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$

(A) Encuentre z_1z_2 y z_1/z_2 usando las formas rectangulares de z_1 y z_2.

(B) Encuentre z_1z_2 y z_1/z_2 usando la forma polar exponencial de z_1 y z_2, θ está en grados. (Suponga que las leyes del producto y el cociente de exponentes se cumplen para $e^{i\theta}$.)

(C) Convierta los resultados del inciso (B) de nuevo a una forma rectangular y compare con los resultados del inciso (A).

4 Multiplicación y división en forma polar

En este punto se encontrará que hay cierta ventaja de representar a los números complejos en forma polar: La división y la multiplicación son muy fáciles. El teorema 1 proporciona la razón. (La forma exponencial polar de un número complejo obedece las reglas del cociente y del producto para exponentes: $b^mb^n = b^{m+n}$ y $b^m/b^n = b^{m-n}$.)

Teorema 1 **Productos y cocientes en forma polar**

Si $z_1 = r_1e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2e^{i\theta_2}$, entonces

1. $z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

Se establece la propiedad de la multiplicación y se deja la propiedad del cociente para el problema 32 del ejercicio 7-6.

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2}$$

Escriba en forma trigonométrica.

$$= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$$

Multiplique.

$$= r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2)$$

$$= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \text{sen}\,\theta_1\,\text{sen}\,\theta_2) + i(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \text{sen}\,\theta_1\cos\theta_2)]$$

Use las identidades de la suma.

$$= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Escriba en forma exponencial

$$= r_1r_2e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

EJEMPLO 4 **Productos y cocientes**

Si $z_1 = 8e^{45°i}$ y $z_2 = 2e^{30°i}$, encuentre:

(A) z_1z_2 (B) z_1/z_2

Solución

(A) $z_1z_2 = 8e^{45°i} \cdot 2e^{30°i}$

$$= 8\cdot 2e^{i(45° + 30°)} = 16e^{75°i}$$

(B) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{8e^{45°i}}{2e^{30°i}}$

$$= \tfrac{8}{2}e^{i(45° - 30°)} = 4e^{15°i}$$

Problema seleccionado 4 Si $z_1 = 9e^{165°i}$ y $z_2 = 3e^{55°i}$, encuentre:

(A) z_1z_2 (B) z_1/z_2

Nota histórica

Es muy difícil encontrar un área en las matemáticas que no tenga la huella del famoso matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783), quien invirtió la mayor parte de su vida productiva en la New St. Petersburg Academy en Rusia y en la Prussian Academy en Berlín. Uno de los más prolíficos escritores en la historia de las matemáticas, a él se le acredita la unificación y estandarización de las siguientes notaciones familiares:

$f(x)$ notación de función

e base del logaritmo natural

i unidad imaginaria, $\sqrt{-1}$

Para el interés inmediato, él es también el responsable de la extraordinaria relación

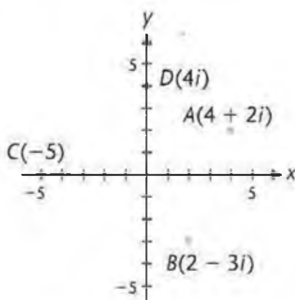
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

Si se hace $\theta = \pi$, se obtiene una ecuación que relaciona cinco de los más importantes números en la historia de las matemáticas:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Respuestas a los problemas seleccionados

1.



2. (A) $\sqrt{2}[\cos(3\pi/4) + i\operatorname{sen}(3\pi/4)] = \sqrt{2}e^{(3\pi/4)i}$
(B) $2[\cos(\pi/3) + i\operatorname{sen}(\pi/3)] = 2e^{(\pi/3)i}$
(C) $5.83[\cos(-2.11) + i\operatorname{sen}(-2.11)] = 5.83e^{-2.11i}$

3. (A) $-\sqrt{2}i$ (B) $-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ (C) $-3.16 - 5.67i$

4. (A) $z_1z_2 = 27e^{220°i}$ (B) $z_1/z_2 = 3e^{110°i}$

EJERCICIO 7-6

A

En los problemas del 1 al 8, dibuje cada conjunto de números complejos en un plano complejo.

1. $A = 3 + 4i, B = -2 - i, C = 2i$

2. $A = 4 + i, B = -3 + 2i, C = -3i$

3. $A = 3 - 3i, B = 4, C = -2 + 3i$

4. $A = -3, B = -2 - i, C = 4 + 4i$

5. $A = 2e^{(\pi/3)i}, B = \sqrt{2}e^{(\pi/4)i}, C = 4e^{(\pi/2)i}$

6. $A = 2e^{(\pi/6)i}, B = 4e^{\pi i}, C = \sqrt{2}e^{(3\pi/4)i}$

7. $A = 4e^{-150°i}, B = 3e^{20°i}, C = 5e^{-90°i}$

8. $A = 2e^{150°i}, B = 3e^{-50°i}, C = 4e^{75°i}$

B

En los problemas del 9 al 12, cambie los incisos (A)-(C) a la forma polar. Para los problemas 9 y 10, elija θ en grados, $-180° < \theta \leq 180°$; para los problemas 11 y 12, elija θ en radianes $-\pi < \theta \leq \pi$. Calcule el módulo y el argumento para los incisos

(A) y (B) exactamente; calcule el módulo y el argumento para el inciso (C) con dos cifras decimales.

9. (A) $\sqrt{3} + i$ (B) $-1 - i$ (C) $5 - 6i$

10. (A) $-1 + i\sqrt{3}$ (B) $-3i$ (C) $-7 - 4i$

11. (A) $-i\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3} - i$ (C) $-8 + 5i$

12. (A) $\sqrt{3} - i$ (B) $-2 + 2i$ (C) $6 - 5i$

En los problemas del 13 al 16, cambie los incisos (A)-(C) a una forma rectangular. Calcule los valores exactos para los incisos (A) y (B); para el inciso (C) calcule a y b para a + bi con dos cifras decimales.

13. (A) $2e^{(\pi/3)i}$ (B) $\sqrt{2}e^{-45°i}$ (C) $3.08e^{2.44i}$

14. (A) $2e^{30°i}$ (B) $\sqrt{2}e^{(-3\pi/4)i}$ (C) $5.71e^{-0.48i}$

15. (A) $6e^{(\pi/6)i}$ (B) $\sqrt{7}e^{-90°i}$ (C) $4.09e^{-122.88°i}$

16. (A) $\sqrt{3}e^{(-\pi/2)i}$ (B) $\sqrt{2}e^{135°i}$ (C) $6.83e^{-108.82°i}$

En los problemas del 17 al 22, encuentre z_1z_2 y z_1/z_2.

17. $z_1 = 7e^{82°i}$, $z_2 = 2e^{31°i}$

18. $z_1 = 6e^{132°i}$, $z_2 = 3e^{93°i}$

19. $z_1 = 5e^{52°i}$, $z_2 = 2e^{83°i}$

20. $z_1 = 3e^{67°i}$, $z_2 = 2e^{97°i}$

21. $z_1 = 3.05e^{1.76i}$, $z_2 = 11.94e^{2.59i}$

22. $z_1 = 7.11e^{0.79i}$, $z_2 = 2.66e^{1.07i}$

Simplifique los problemas del 23 al 26 directamente y usando la forma polar. Escriba las respuestas en forma rectangular y polar. θ está en grados.

23. $(-1 + i)^2$

24. $(1 + i)^2$

25. $(-1 + i)(1 + i)$

26. $(1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$

27. $(1 - i)^3$

28. $(1 + i)^3$

C

29. Muestre que $r^{1/3}e^{\theta/3}$ es una raíz cúbica de $re^{i\theta}$.

30. Muestre que $r^{1/2}e^{\theta/2}$ es una raíz cuadrada de $re^{i\theta}$.

31. Si $z = re^{i\theta}$, muestre que $z^2 = r^2e^{2\theta i}$ y $z^3 = r^3e^{3\theta i}$. ¿Qué piensa que será z^n para n un número natural?

32. Pruebe:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

APLICACIONES

33. Fuerzas y números complejos. Un objeto se localiza en el polo, y dos fuerzas **u** y **v** actúan sobre él. Sean las fuerzas vectores que van del polo a los números complejos $20e^{0°i}$ y $10e^{60°i}$, respectivamente. La fuerza **u** tiene una magnitud de 20 libras en la dirección de 0°. La fuerza **v** tiene una magnitud de 10 libras en una dirección de 60°.

(A) Convierta estos números complejos de la forma polar a la forma rectangular y sume.

(B) Convierta la suma del inciso (A) anterior a la forma polar.

(C) El vector que va del polo al número complejo del inciso (B) es la resultante de las dos fuerzas originales. ¿Cuál es su magnitud y dirección?

34. Fuerzas y números complejos. Repita el problema 33 con las fuerzas **u** y **v** asociadas con los números complejos $8e^{0°i}$ y $6e^{30°i}$, respectivamente.

SECCIÓN 7-7 El teorema de De Moivre

- El teorema de De Moivre, n es un número natural
- Raíces $n$ésimas de z

Ahora se verá uno de los más grandes teoremas de las matemáticas, el *teorema de De Moivre*. Abraham De Moivre (1667-1754), francés de nacimiento, invirtió la mayor parte de su vida en Londres dando clases privadas, escribiendo y publicando en matemáticas. Perteneció a muchas prestigiosas sociedades profesionales de Inglaterra, Alemania y Francia, y fue amigo cercano de Issac Newton.

Usando la forma polar para un número complejo, De Moivre estableció un teorema que aún lleva su nombre para elevar números complejos a potencias de números naturales. Lo que es más importante, este teorema es la base del teorema de la raíz $n$ésima, que permite encontrar todas las raíces $n$ésimas de cualquier número complejo, real o imaginario.

El teorema de De Moivre; n es un número natural

Se inicia con la exploración y análisis 1 y se generaliza a partir de esta exploración.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Repitiendo el uso de la fórmula del producto para la forma polar exponencial $re^{i\theta}$, analizada en la sección anterior, se establece lo siguiente:

1. $(x + iy)^2 = (re^{\theta i})^2 = r^2e^{2\theta i}$
2. $(x + iy)^3 = (re^{\theta i})^3 = r^3e^{3\theta i}$
3. $(x + iy)^4 = (re^{\theta i})^4 = r^4e^{4\theta i}$

Con base en las formas 1-3, y con n un número natural, ¿cómo piensa que sería la forma polar de $(x + iy)^n$?

Si usted consideró $r^ne^{n\theta i}$, ha adivinado el teorema de De Moivre, el cual ahora se expresa sin prueba. Una prueba completa de este teorema para todos los números naturales n requiere de un método de prueba llamado *inducción matemática*, que se analiza en la segunda sección de "Sucesiones y series".

Teorema 1 **El teorema de De Moivre**

Si $z = x + iy = re^{i\theta}$, y n es un número natural, entonces

$$z^n = (x + iy)^n = (re^{i\theta})^n = r^ne^{n\theta i}$$

EJEMPLO 1 **Las potencias de un número natural de un número complejo**

Use el teorema de De Moivre para encontrar $(1 + i)^{10}$. Escriba la respuesta en forma rectangular exacta.

Solución

$(1 + i)^{10} = (\sqrt{2}e^{45^\circ i})^{10}$	Convierta 1 − *i* a la forma polar.
$= (\sqrt{2})^{10}e^{(10\cdot 45^\circ)i}$	Use el teorema de De Moivre.
$= 32e^{450^\circ i}$	Cambie a la forma rectangular.
$= 32(\cos 450^\circ + i\operatorname{sen} 450^\circ)$	
$= 32(0 + i)$	
$= 32i$	Forma rectangular.

Problema seleccionado 1 Use el teorema de De Moivre para encontrar $(1 + i\sqrt{3})^5$. Escriba la respuesta en la forma polar exacta y en la forma rectangular.

EJEMPLO 2 **Las potencias de un número natural de un número complejo**

Use el teorema de De Moivre para encontrar $(-\sqrt{3} + i)^6$. Escriba la respuesta en forma exacta rectangular.

Solución

$$(-\sqrt{3} + i)^6 = (2e^{150°i})^6 \quad \text{Convierta } -\sqrt{3} + i \text{ a la forma polar.}$$
$$= 2^6 e^{(6\cdot150°)i} \quad \text{El Teorema de De Moivre}$$
$$= 64e^{900°i} \quad \text{Cambie a la forma rectangular.}$$
$$= 64(\cos 900° + i \operatorname{sen} 900°)$$
$$= 64(-1 + i0)$$
$$= -64 \quad \text{Forma rectangular}$$

[*Nota*: $-\sqrt{3} + i$ debe ser una raíz sexta de -64, ya que $(-\sqrt{3} + i)^6 = -64$.]

Problema seleccionado 2 Use el teorema de De Moivre para encontrar $(1 - i\sqrt{3})^4$. Escriba la respuesta en forma polar exacta y en forma rectangular.

• Raíces nésimas de z

Se considerarán ahora las raíces de números complejos. Se puede decir que w **es una raíz** n**ésima de** z, n es un número natural, si $w^n = z$. Por ejemplo, si $w^2 = z$, entonces w es una raíz cuadrada de z. Si $w^3 = z$, entonces w es una raíz cúbica de z. Y así sucesivamente.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Si $z = re^{i\theta}$, entonces use el teorema de De Moivre para mostrar que $r^{1/2}e^{(\theta/2)i}$ es una raíz cuadrada de z y $r^{1/3}e^{(\theta/3)i}$ es una raíz cúbica de z.

Se puede proceder de la misma manera que en la exploración y análisis 2 para mostrar que $r^{1/n}e^{(\theta/n)i}$ es una raíz $n$ésima de $re^{i\theta}$, n es un número natural:

$$[r^{1/n}e^{(\theta/n)i}]^n = (r^{1/n})^n e^{n(\theta/n)i}$$
$$= re^{\theta i}$$

Ahora se puede hacer algo aún mejor que esto. El teorema de la raíz $n$ésima (teorema 2) muestra cómo encontrar *todas* las raíces $n$ésimas de un número complejo.

Teorema 2 **Teorema de la raíz $n$ésima**

Para n un entero positivo más grande que 1,

$$r^{1/n}e^{(\theta/n + k360°/n)i} \qquad k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

son las n raíces $n$ésimas distintas de $re^{i\theta}$, y no hay otras.

La prueba del teorema 2 se deja a los problemas 31 y 32 en el ejercicio 7-7.

EJEMPLO 3 **Determinación de todas las raíces sextas de un número complejo**

Encuentre las seis distintas raíces sextas de $-1 + i\sqrt{3}$, y grafíquelas en un plano complejo.

Solución Primero escriba $-1 + i\sqrt{3}$ en la forma polar:

$$-1 + i\sqrt{3} = 2e^{120°i}$$

Usando el teorema de la raíz *n*ésima, todas las seis raíces están dadas por

$$2^{1/6}e^{(120°/6+k360°/6)i} = 2^{1/6}e^{(20°+k60°)i} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

Esto es,

$$w_1 = 2^{1/6}e^{(20° + \;\cdot 60°)i} = 2^{1/6}e^{20°i}$$
$$w_2 = 2^{1/6}e^{(20° + \;\cdot 60°)i} = 2^{1/6}e^{80°i}$$
$$w_3 = 2^{1/6}e^{(20° + \;\cdot 60°)i} = 2^{1/6}e^{140°i}$$
$$w_4 = 2^{1/6}e^{(20° + \;\cdot 60°)i} = 2^{1/6}e^{200°i}$$
$$w_5 = 2^{1/6}e^{(20° + \;\cdot 60°)i} = 2^{1/6}e^{260°i}$$
$$w_6 = 2^{1/6}e^{(20° + \;\cdot 60°)i} = 2^{1/6}e^{320°i}$$

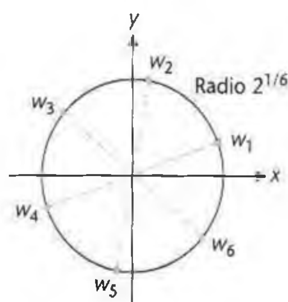


FIGURA 1

Todas las raíces son fácilmente graficadas en el plano complejo después que se localiza la primera raíz. Los puntos de las raíces están igualmente espaciados alrededor de un círculo de radio $2^{1/6}$ con incrementos angulares de 60° de una raíz a la siguiente (figura 1).

Problema seleccionado 3 Encuentre cinco raíces distintas quintas de $1 + i$. Deje todas las respuestas en la forma polar y dibújelas en un plano complejo.

EJEMPLO 4 **Solución de una ecuación cúbica**

Resuelva $x^3 + 1 = 0$. Escriba las respuestas finales en la forma rectangular y dibújelas en el plano complejo.

Solución

$$x^3 + 1 = 0$$
$$x^3 = -1$$

Se ve que x es una raíz cúbica de -1, y hay un total de tres raíces. Para encontrar las tres raíces, primero se escribe -1 en la forma polar:

$$-1 = 1e^{180°i}$$

Usando el teorema de la raíz *n*ésima, las tres raíces cúbicas de -1 están dadas por

$$1^{1/3}e^{(180°/3+k360°/3)i} = 1e^{(60°+k120°)i} \qquad k = 0, 1, 2$$

Esto es,

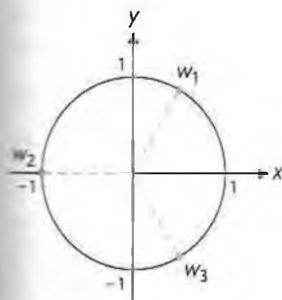


FIGURA 2

$$w_1 = 1e^{60°i} = \cos 60° + i\,\text{sen}\,60° = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = 1e^{180°i} = \cos 180° + i\,\text{sen}\,180° = -1$$

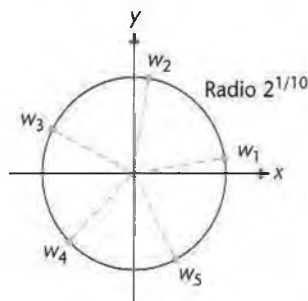
$$w_3 = 1e^{300°i} = \cos 300° + i\,\text{sen}\,300° = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[*Nota*: Este problema se puede resolver también usando factorización y la fórmula cuadrática (inténtelo).] Tres raíces están graficadas en la figura 2.

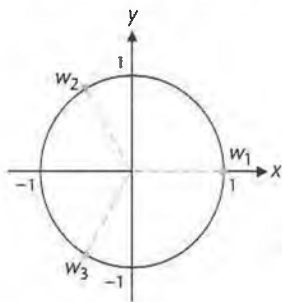
Problema seleccionado 4 Resuelva $x^3 - 1 = 0$. Escriba las respuestas finales en forma rectangular y dibújelas en un plano complejo.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $32e^{300°i} = 16 - i16\sqrt{3}$
2. $16e^{-240°i} = -8 + i8\sqrt{3}$
3. $w_1 = 2^{1/10}e^{9°i}$, $w_2 = 2^{1/10}e^{81°i}$, $w_3 = 2^{1/10}e^{153°i}$, $w_4 = 2^{1/10}e^{225°i}$, $w_5 = 2^{1/10}e^{297°i}$



4. $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



EJERCICIO 7-7

A

En los problemas del 1 al 6, use el teorema de De Moivre para evaluar cada una de las expresiones siguientes. Exprese las respuestas en forma polar.

1. $(2e^{30°i})^3$

2. $(5e^{15°i})^3$

3. $(\sqrt{2}e^{10°i})^6$

4. $(\sqrt{2}e^{15°i})^8$

5. $(1 + i\sqrt{3})^3$

6. $(\sqrt{3} + i)^8$

B

En los problemas del 7 al 12, encuentre los valores de cada expresión y escriba la respuesta final en la forma rectangular exacta. (Verifique los resultados de los problemas del 7 al 12 evaluando cada uno directamente en una calculadora.)

7. $(-\sqrt{3} - i)^4$

8. $(-1 + i)^4$

9. $(1 - i)^8$

10. $(-\sqrt{3} + i)^5$

11. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

12. $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

Para n y z como se indica en los problemas del 13 al 18, encuentre todas las raíces nésimas de z. Exprese las respuestas en forma polar.

13. $z = 8e^{30°i}$, $n = 3$

14. $z = 8e^{45°i}$, $n = 3$

15. $z = 81e^{60°i}$, $n = 4$

16. $z = 16e^{90°i}$, $n = 4$

17. $z = 1 - i$, $n = 5$

18. $z = -1 + i$, $n = 3$

Para n y z como se indica en los problemas del 19 al 24, encuentre todas las raíces nésimas de z. Escriba las respuestas en la forma polar y grafique en un plano complejo.

19. $z = 8$, $n = 3$

20. $z = 1$, $n = 4$

21. $z = -16$, $n = 4$

22. $z = -8$, $n = 3$

23. $z = i$, $n = 6$

24. $z = -i$, $n = 5$

25. (A) Muestre que $1 + i$ es una raiz de $x^4 + 4 = 0$. ¿Cuántas otras raíces tiene la ecuación?

(B) La raíz $1 + i$ está localizada en un círculo con un radio de $\sqrt{2}$ en el plano complejo como se indica en la figura. Localice las otras tres raíces de $x^4 + 4 = 0$ en la figura, y explique geométricamente cómo encontraría su ubicación.

(C) Verifique que cada número complejo encontrado en el inciso (B) es una raíz de $x^4 + 4 = 0$.

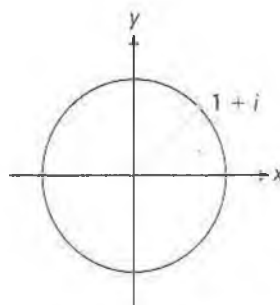
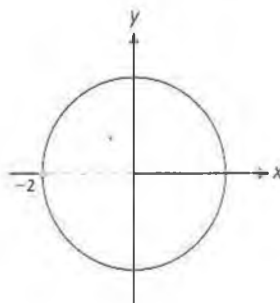


Figura para el ejercicio 25

26. (A) Muestre que -2 es una raíz de $x^3 + 8 = 0$. ¿Cuántas otras raíces tiene la ecuación?

(B) La raiz -2 está localizada en un círculo con radio de 2 en el plano complejo como se indica en la figura. Localice las otras dos raíces de $x^3 - 8 = 0$ en la figura, y explique geométricamente cómo encontró su ubicación.

(C) Verifique que cada número complejo encontrado en el inciso (B) sea una raiz de $x^3 + 8 = 0$



En los problemas del 27 al 30, resuelva cada ecuación para todas las raíces. Escriba la respuesta final en forma polar exacta y en forma rectangular.

27. $x^3 + 64 = 0$

28. $x^3 - 64 = 0$

29. $x^3 - 27 = 0$

30. $x^3 + 27 = 0$

C

31. Muestre que

$$[r^{1/n}e^{(\theta/n + k360°/n)i}]^n = re^{\theta i}$$

para cualquier número natural n y cualquier entero k.

32. Muestre que

$$r^{1/n}e^{(\theta/n+k360^\circ/n)i}$$

es el mismo número para $k = 0$ y $k = n$.

En los problemas del 33 al 36, escriba las respuestas en la forma polar:

33. Encuentre todas las raíces complejas para $P(x) = x^5 - 32$.
34. Encuentre todas las raíces complejas para $P(x) = x^6 + 1$.
35. Resuelva $x^5 + 1 = 0$ en el conjunto de los números complejos.
36. Resuelva $x^3 - i = 0$ en el conjunto de los números complejos.

En los problemas 37 y 38, escriba las respuestas usando formas rectangulares exactas.

37. Escriba $P(x) = x^6 + 64$ como un producto de factores lineales.
38. Escriba $P(x) = x^6 - 1$ como un producto de factores lineales.

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 7 Secciones cónicas y órbitas planetarias

I Secciones cónicas en forma polar

(A) Introducción a las cónicas. Para entender las órbitas de los planetas, los cometas y otros cuerpos celestes, es necesario saber algo de las propiedades y naturaleza de las secciones cónicas. (Las secciones cónicas se abordan con detalle en el capítulo 11. Aquí el tratamiento será breve y se limitará a las representaciones polares). Las **secciones cónicas** deben su nombre a las curvas que se forman al cortar un cono circular, recto y completo de dos hojas con un plano (figura 1). Cualquier plano perpendicular al eje del cono corta una sección que es un **círculo**. Incline el plano levemente y la sección será una **elipse**. Si el plano es paralelo a una de las orillas del cono, cortará sólo una hoja, y la sección será una **parábola**. Incline el plano para que esté más vertical, y entonces se cortarán ambas hojas del cono, lo que producirá una **hipérbola** con dos ramas. Las órbitas cerradas son elipses o círculos. Cuando las órbitas son abiertas (o escapan) son parábolas o hipérbolas.

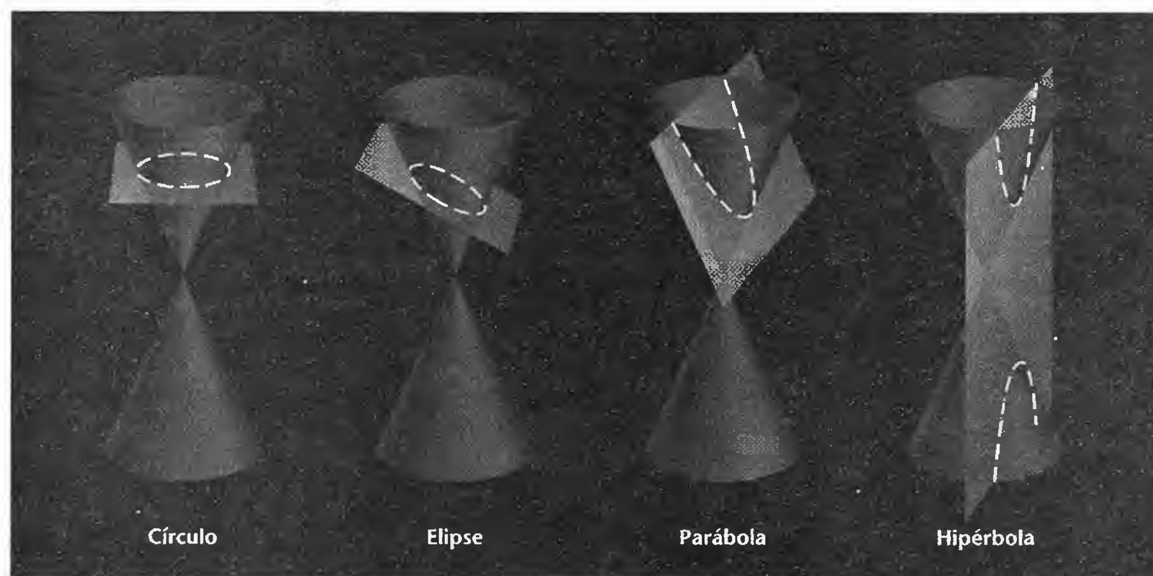


FIGURA 1 Secciones cónicas.

(B) Cónicas y excentricidad. Otra manera de definir las secciones cónicas es en términos de su excentricidad. Sea F un punto fijo, llamado **foco**, y sea d una línea fija, llamada **directriz** (véase figura 2). Para valores positivos de la **excentricidad** e, una sección cónica se puede definir como el conjunto de puntos $\{P\}$ que tienen la propiedad de que la razón de la distancia de P al foco F con la distancia de P a la

FIGURA 2 Sección cónica.



directriz d es la constante e. Como se verá, una elipse, una parábola o una hipérbola se pueden obtener eligiendo e en forma adecuada.

(C) La representación polar de cónicas. Un tratamiento unificado de las secciones cónicas se puede obtener usando un sistema coordenado polar. Las ecuaciones polares de cónicas se usan ampliamente en mecánica celeste para describir y analizar las órbitas de planetas, los cometas, los satélites y otros cuerpos celestes.

Problema 1: La ecuación polar de una cónica. Use la definición de la excentricidad de una sección cónica dada en el inciso (B) para mostrar que la ecuación polar de una cónica está dada por

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\theta} \tag{1}$$

donde p es la distancia entre los focos F y la directriz d, el polo del eje polar está en F, y el eje polar es perpendicular a d y está apuntando hacia afuera de d (véase figura 2).

Problema 2: Exploración con un dispositivo de graficación, $0 < e < 1$. Para $0 < e < 1$, use un dispositivo de graficación para explorar sistemáticamente la naturaleza de los cambios en la gráfica de la ecuación (1) cuando se cambia la excentricidad e y la distancia p. Resuma los resultados manteniendo fijo e y cambiar p, y los resultados de mantener p fijo y cambiar e. Para $0 < e < 1$, ¿qué sección cónica se produce?

Problema 3: Exploración con un dispositivo de graficación, $e = 1$. Para $e = 1$, use un dispositivo de graficación para explorar sistemáticamente la naturaleza de los cambios en la gráfica de la ecuación (1) cuando se cambia la distancia p. Resuma los resultados de mantener e igual a 1 y cambiar p. Para $e = 1$, ¿qué sección cónica se produce?

Problema 4: Exploración con un dispositivo de graficación, $e > 1$. En $e > 1$, use un dispositivo de graficación para explorar sistemáticamente la naturaleza de los cambios en la gráfica de la ecuación (1) cuando se cambia la excentricidad e y la distancia p. Resuma los resultados de mantener e fijo y cambiar p y los resultados de mantener p fijo y cambiar e. Para $e > 1$, ¿qué sección cónica se produce?

II Órbitas planetarias

Ahora se está interesado en encontrar las ecuaciones polares para las órbitas de planetas específicos donde el Sol está en el polo. Entonces estas ecuaciones se pueden graficar con un dispositivo de graficación, y se puede, además, contestar preguntas acerca de las órbitas. El material de la tabla 1, se encontró en el *Almanaque mundial* al que se puede acceder fácilmente, está redondeado con tres dígitos significativos, y proporciona suficiente información para encontrar la ecuación polar de cualquier órbita planetaria.

Problema 5: Ecuaciones polares para las órbitas de Mercurio, Tierra y Marte. En todos los casos el eje polar intersecta con la órbita del planeta en el afelio (la distancia más grande al Sol).

(A) Muestre que la órbita de Mercurio está dada aproximadamente por

$$r = \frac{3.44 \times 10^7}{1 - 0.206 \cos \theta}$$

TABLA 1 Los planetas

Planeta	Excentricidad	Máx. distancia del Sol (millones de millas)	Mín. distancia del Sol (millones de millas)
Mercurio	0.206	43.4	28.6
Venus	0.00677	67.7	66.8
Tierra	0.0167	94.6	91.4
Marte	0.0934	155	129
Júpiter	0.0485	507	461
Saturno	0.0555	938	838
Urano	0.0463	1 860	1 670
Neptuno	0.00899	2 820	2 760
Plutón	0.249	4 550	2 760

(B) Muestre que la órbita de la Tierra está dada aproximadamente por

$$r = \frac{9.30 \times 10^7}{1 - 0.0167 \cos \theta}$$

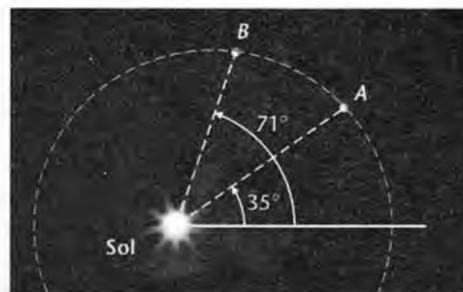
(C) Muestre que la órbita de Marte está dada aproximadamente por

$$r = \frac{1.41 \times 10^8}{1 - 0.0934 \cos \theta}$$

Problema 6: Graficando las órbitas para Mercurio, Tierra y Marte. Grafique las tres órbitas (Mercurio, Tierra y Marte) a partir de las ecuaciones de los incisos (A) al (C) en la misma ventana de visión de un dispositivo de graficación. Escoja las dimensiones de la ventana para que la órbita de Marte llene la mayor parte de la ventana.

Problema 7: Determinación de las distancias y los ángulos relacionados con las órbitas. La figura 3 representa un esquema de la Tierra en dos ubicaciones durante su órbita. Encuentre la distancia en línea recta entre la posición en A y la posición en B con tres dígitos significativos. Encuentre las medidas de los ángulos BAO y ABO medidos en grados con una cifra decimal. La órbita de la Tierra cruza al eje polar en el afelio (la distancia más grande desde el Sol).

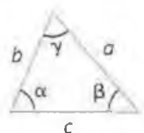
FIGURA 3 Órbita de la Tierra.



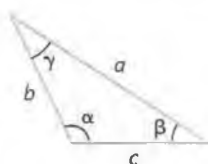
Repaso del capítulo 7

7-1 LEY DE LOS SENOS

Un **triángulo oblicuo** es un triángulo sin un ángulo rectángulo. Un triángulo oblicuo es **agudo** si todos los ángulos están entre 0 y 90° y **obtuso** si un ángulo está entre 90 y 180°. La convención mostrada en estas figuras se sigue de este capítulo.



Triángulo agudo



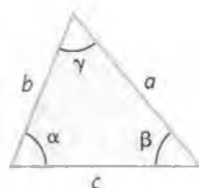
Triángulo obtuso

El objetivo de ésta y la siguiente sección será resolver un triángulo oblicuo dando tres de las seis cantidades indicadas en la figura, si existe una solución. La ley de los senos, analizada en esta sección, y la ley de los cosenos, que se analiza en la siguiente, se usan para este propósito. La precisión de los cálculos está dada en la tabla 1.

TABLA 1 Triángulos y dígitos significativos

Ángulo más cercano	Dígitos significativos para la medida de un lado
1°	2
10′ o 0.1°	3
1′ o 0.01°	4
10″ o 0.001°	5

La **ley de los senos** está dada como



$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{c}$$

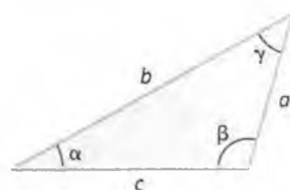
y se usa por lo general para resolver los casos ALA, AAL y LLA para triángulos oblicuos. El caso AAL se reduce fácilmente al caso ALA encontrando primero el tercer ángulo. El caso LLA tiene diferentes variaciones, incluyendo el caso ambiguo. Estas variaciones se resumen en la tabla 2. Observe que el caso ambiguo siempre da como resultado dos tipos de triángulos, un obtuso y un agudo.

TABLA 2 Variaciones LLA

α	a ($h = b \operatorname{sen} \alpha$)	Número de triángulos	Figura
Agudo	$0 < a < h$	0	
Agudo	$a = h$	1	
Agudo	$h < a < b$	2	Casos ambiguos
Agudo	$a \geq b$	1	
Obtuso	$0 < a \leq b$	0	
Obtuso	$a > b$	1	

7-2 LEY DE LOS COSENOS

La **ley de los cosenos** está dada como

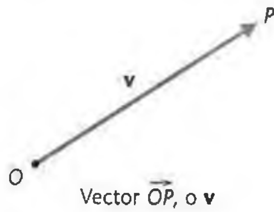


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc \cos \gamma$$

y se usa por lo general como primer paso para resolver los casos LAL y LLL para triángulos oblicuos. Después de que se encuentra un lado o un ángulo usando la ley de los cosenos, generalmente es más fácil continuar el proceso de solución con la ley de los senos.

7-3 VECTORES GEOMÉTRICOS

Un **escalar** es un número real. Un **vector geométrico** de un plano es un segmento de recta dirigido y se representa por una flecha como se indica en la figura.

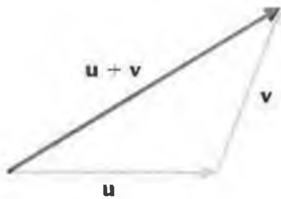


Vector $\overrightarrow{OP}$, o **v**

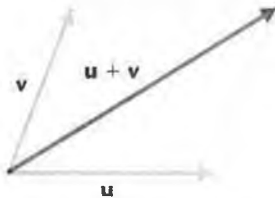
El punto O se llama **punto inicial**, y el punto P se llama **punto terminal**.

La **magnitud** del vector $\overrightarrow{AB}$, denotado por $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{v}|$, o $|\mathbf{v}|$, es la longitud del segmento de recta dirigido. Dos vectores tienen la **misma dirección** si son paralelos y apuntan en la misma dirección. Dos vectores tienen **direcciones opuestas** si son paralelos y apuntan en direcciones opuestas. El **vector cero** se denota por 0, o **0**, tiene una magnitud de cero y una dirección arbitraria. Dos vectores son **iguales** si tienen la misma magnitud y dirección. Esto es, un vector se puede **trasladar** de un lugar a otro en tanto la magnitud y la dirección no cambien.

La **suma de dos vectores u y v** se puede definir usando la **regla de cola a punta**. La suma de dos vectores no paralelos también se puede definir usando la **regla del paralelogramo**. Ambas reglas se muestran en la figura siguiente:



Suma vectorial: regla de cola a punta



Suma vectorial: regla del paralelogramo

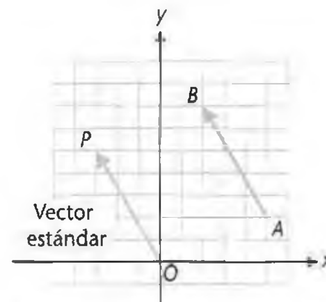
Al vector **u** + **v** se le llama también **resultante** de los dos vectores **u** y **v**, y **u** y **v** se llaman **componentes del vector de u** + **v**. La suma de vectores es **conmutativa**; es decir, **u** + **v** = **v** + **u**.

Un vector que representa la dirección y la velocidad de un objeto en movimiento se llama **vector velocidad**. La velocidad de un avión con respecto al aire se llama **velocidad aparente**, y la velocidad con respecto a la Tierra se llama **resultante**, o **velocidad real.** La velocidad resultante es la suma vectorial de la velocidad aparente y la velocidad del viento. Afirmaciones semejantes se aplican a objetos en agua sujetos a corrientes.

Un vector que representa la dirección y la magnitud de una fuerza aplicada se llama **vector fuerza.** Si un objeto está sujeto a dos fuerzas, entonces la suma de estas dos fuerzas, la **fuerza resultante,** es una sola fuerza que actúa sobre el objeto de la misma manera en que actúan las dos fuerzas originales juntas.

7-4 VECTORES ALGEBRAICOS

Un vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ en un sistema coordenado rectangular trasladado de modo que su punto inicial está en el origen, se dice que está en **posición estándar**. El vector $\overrightarrow{OP}$ tal que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ se dice que es un **vector estándar** para $\overrightarrow{AB}$. Esto se muestra en la figura siguiente.



$\overrightarrow{OP}$ es el vector estándar para $\overrightarrow{AB}$

Observe que el vector $\overrightarrow{OP}$ en la figura es un vector estándar para un número infinito de vectores (todos los vectores con la misma magnitud y dirección que $\overrightarrow{OP}$).

Con referencia a la figura anterior, si las coordenadas de A son (x_a, y_a) y las coordenadas de B son (x_b, y_b), entonces las coordenadas de P están dadas por

$$(x_p, y_p) = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

Cada vector geométrico en un sistema coordenado puede estar asociado con un par ordenado de números reales, las coordenadas del punto terminal de su vector estándar. De manera inversa, cada par ordenado de números reales puede estar asociado con un único vector geométrico estándar. Esto nos conduce a la definición de un **vector algebraico** como un par ordenado de números reales, denotado por $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$. Los números reales a y b son las **componentes escalares** del vector $\langle a, b \rangle$.

Dos vectores $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d \rangle$ se dice que son **iguales** si sus correspondientes componentes son iguales, esto es, si $a = c$ y $b = d$. El **vector cero** se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ y tiene una dirección arbitraria.

La **magnitud** o **norma**, de un vector $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ se denota por $|\mathbf{v}|$ y está dado por

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Geométricamente, $\sqrt{a^2 + b^2}$ es la longitud del vector geométrico estándar $\overrightarrow{OP}$ asociado con el vector algebraico $\langle a, b\rangle$.

Si $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$, $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$ y k es un escalar, entonces la **suma** de **u** y **v** está dada por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a + c, b + d\rangle$$

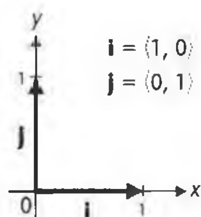
y una **multiplicación escalar** de **u** por k está dada por

$$k\mathbf{u} = k\langle a, b\rangle = \langle ka, kb\rangle$$

Si **v** es un vector diferente de cero, entonces

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v}$$

es **un vector unitario con la misma dirección que v**. Los vectores unitarios **i** y **j** están definidos como sigue:



Cada vector algebraico se puede expresar en términos de los vectores unitarios **i** y **j**:

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

Las siguientes propiedades algebraicas de la suma de vectores y multiplicación por un escalar permiten la manipulación de los símbolos que representan vectores y escalares, de la misma manera que se manipulan los símbolos que representan a los números reales en álgebra.

Propiedades algebraicas de vectores

A. Propiedades de la suma. Para todos los vectores **u, v** y **w**:

1.	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	**Propiedad conmutativa**
2.	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	**Propiedad asociativa**
3.	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$	**Identidad aditiva**
4.	$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$	**Inverso aditivo**

B. Propiedades de la multiplicación por un escalar. Para todos los vectores **u** y **v** y todos los escalares m y n:

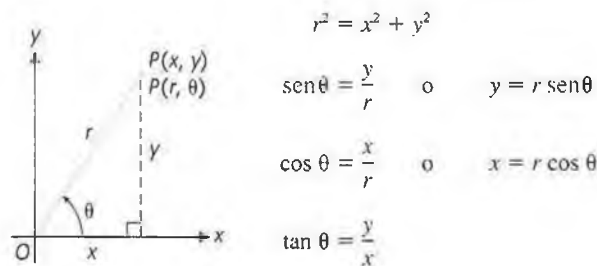
1.	$m(n\mathbf{u}) = (mn)\mathbf{u}$	**Propiedad asociativa**
2.	$m(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = m\mathbf{u} + m\mathbf{v}$	**Propiedad distributiva**
3.	$(m + n)\mathbf{u} = m\mathbf{u} + n\mathbf{u}$	**Propiedad distributiva**
4.	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$	**Identidad multiplicativa**

Algunos problemas de **equilibrio estático** se pueden resolver usando el material desarrollado en esta sección. Las condiciones para el equilibrio estático son:

1. Un objeto en reposo se dice que está en **equilibrio estático**.
2. Para un objeto localizado en el origen de un sistema coordenado rectangular que permanece en equilibrio estático, en reposo, es necesario que la suma de todos los vectores de fuerza que actúan sobre el objeto sea igual al vector cero.

7-5 COORDENADAS POLARES Y GRÁFICAS

La figura siguiente ilustra un **sistema coordenado polar**. El punto fijo O se llama **polo** u **origen**, y la flecha horizontal se llama **eje polar.** Se tiene la siguiente **relación entre las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ)**:



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} \quad \text{o} \quad y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{o} \quad x = r\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

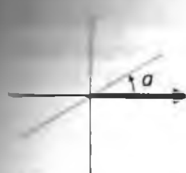
[*Nota:* Los signos de x y y determinan el cuadrante para θ. El ángulo θ se elige de tal modo que $-\pi < \theta \leq \pi$ o $-180° < \theta \leq 180°$ a menos que se indique de otra manera.]

Las gráficas polares se pueden obtener graficando **punto por punto** de la misma manera que se realizan las gráficas de coordenadas rectangulares. Haga una tabla de valores que satisfaga la ecuación polar, grafique estos puntos y después únalos con una curva suave.

Las gráficas se pueden obtener también por **técnicas rápidas de graficación.** Si sólo se desea un burdo dibujo de una ecuación polar que implique a sen θ o a cos θ, se puede acelerar el proceso de graficación punto por punto tomando ventaja de que la variación es uniforme para sen θ y cos θ conforme θ se mueve por cada conjunto de los valores del cuadrante. Los **dispositivos de graficación** pueden producir gráficas polares casi instantáneamente.

La tabla siguiente muestra algunas curvas polares estándar con sus ecuaciones:

Gráficas polares estándar



Línea que pasa por el origen: $\theta = a$

(a)



Recta vertical: $r = a/\cos\theta$ $= a \sec\theta$

(b)



Recta horizontal: $r = a/\text{sen}\,\theta$ $= a \csc\theta$

(c)



Círculo: $r = a$

(d)



Círculo: $r = a\cos\theta$

(e)



Círculo: $r = a\,\text{sen}\,\theta$

(f)



Cardioide: $r = a + a\cos\theta$

(g)



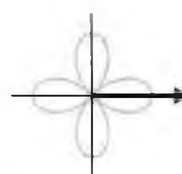
Cardioide: $r = a + a\,\text{sen}\,\theta$

(h)



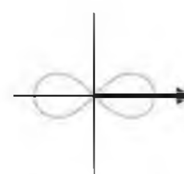
Rosa de tres pétalos $r = a\cos 3\theta$

(i)



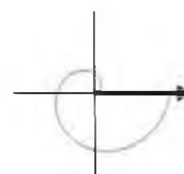
Rosa de cuatro pétalos $r = a\cos 2\theta$

(j)



Lemniscata: $r^2 = a^2\cos 2\theta$

(k)



Espiral de Arquímedes: $r = a\theta,\ a > 0$

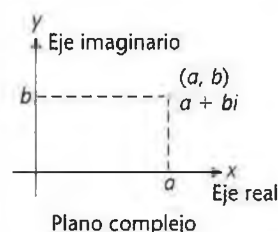
(l)

7-6 NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMAS RECTANGULARES Y POLARES

Un **número complejo** es un número de la forma

$$a + bi$$

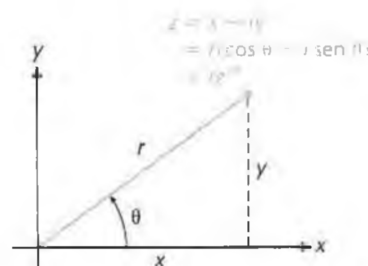
donde a y b son números reales e i es la **unidad imaginaria**. La siguiente figura muestra un número complejo $a + bi$ graficado en un **plano complejo**.



Plano complejo

Cuando los números complejos están asociados con puntos en un sistema coordenado rectangular, al eje x se le llama **eje real** y al eje y **eje imaginario**. El número complejo $a + bi$ se dice que está en la **forma rectangular**.

Los números complejos también se pueden escribir en **forma polar** o **trigonométrica**, usando $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$ como se muestra en la figura siguiente:



Relación entre las formas rectangular y polar

Debido a la naturaleza periódica de las funciones seno y coseno, se tiene la **forma polar más general** para un número complejo $z = x + iy$:

$$z = x + iy = r[\cos(\theta + 2k\pi) + i\,\text{sen}(\theta + 2k\pi)]$$
$$= re^{i(\theta + 2k\pi)}$$

donde

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$$

y el cuadrante para θ se determina por x y y.

El número r se llama **módulo**, o **valor absoluto**, de z y se denota por **mod z**, o $|z|$. El ángulo polar que la recta que une a z con el origen forma con el eje polar se llama **argumento** de z

y se denota por **arg z**. De la figura anterior se tienen las representaciones siguientes del módulo y del argumento para $z = x + iy$:

$$\text{mod } z = r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{Nunca es negativo}$$

$$\arg z = \theta + 2k\pi \qquad k \text{ es cualquier entero}$$

donde $\operatorname{sen} \theta = y/r$ y $\cos \theta = x/r$, y θ es usualmente elegido de $-\pi < \theta \leq \pi$ o $-180° < \theta \leq 180°$.

Los **productos** y **cocientes** de números complejos en formas polares se encuentran como sigue: Si

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1} \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$

entonces

1. $z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

7-7 EL TEOREMA DE DE MOIVRE

Esta sección analiza el famoso teorema de De Moivre y su relación con la raíz $n$ésima. Estos teoremas hacen que el proceso de encontrar las potencias de números naturales y todas las raíces $n$ésimas de un número complejo sea relativamente fácil. **El teorema de De Moivre** se expresa como sigue: si

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$

y n es un número natural, entonces

$$z^n = (x + iy)^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{n\theta i}$$

A partir del teorema de De Moivre, se puede deducir el **teorema de la raíz $n$ésima**: para n un entero positivo mayor que 1,

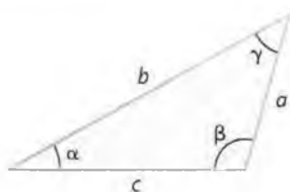
$$r^{1/n} e^{(\theta/n + k360°/n)i} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

son las n raíces distintas de las $n$ésimas raíces de $re^{i\theta}$, y no hay otras.

Ejercicio de repaso del capítulo 7

Al resolver los problemas de este capítulo revise y compruebe sus respuestas con las que se dan al final del libro. Se incluyen las respuestas a todos los problemas de repaso, y después de cada respuesta está un número en tipo itálico que indica la sección a la cual pertenece el problema que se está analizando. Si se le presentan dudas repase las secciones correspondientes en el texto.

Para resolver los problemas de este ejercicio use las siguientes etiquetas de lados y ángulos.



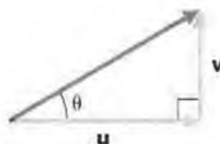
A

En los problemas del 1 al 3, determine si la información de cada problema permite construir cero, uno o dos triángulos. No resuelva el triángulo.

1. $a = 11$ metros, $b = 3.7$ metros, $\alpha = 67°$
2. $c = 15$ centímetros, $\alpha = 97°$, $\beta = 84°$
3. $a = 18$ pies, $b = 22$ pies, $\alpha = 54°$
4. Con referencia a la figura del inicio de este ejercicio, si $\alpha = 52.6°$, $b = 57.1$ centímetros y $c = 79.5$ centímetros, ¿cuál de los ángulos, β o γ, se puede asegurar que es agudo y por qué?

En los problemas del 5 al 7, resuelva cada triángulo a partir de la información dada.

5. $\alpha = 67°$, $\beta = 38°$ y $c = 49$ metros
6. $\alpha = 15°$, $b = 9.1$ pies y $c = 12$ pies
7. $\gamma = 121°$, $c = 11$ centímetros y $b = 4.2$ centímetros
8. Dados los vectores geométricos **u** y **v** como se indica en la figura. Encuentre $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ y θ, dado $|\mathbf{u}| = 160$ millas por hora y $|\mathbf{v}| = 55$ millas por hora.



9. Escriba el vector algebraico $\langle a, b \rangle$ correspondiente al vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ con los puntos terminales $A(2, 6)$ y $B(5, -1)$.
10. Encuentre la magnitud del vector $\langle -3, -5 \rangle$.
11. Trace una gráfica de $\theta = \pi/6$ en un sistema coordenado polar.
12. Trace una gráfica de $r = 6$ en un sistema coordenado polar.
13. Grafique en un plano complejo: $A = 3 + 5i$, $B = -1 - i$, $C = -3i$
14. Un punto en un sistema coordenado polar tiene las coordenadas $(10, -30°)$. Encuentre todas las otras coordena-

das polares para el punto, $-360° \le \theta \le 360°$, y describa verbalmente cómo están asociadas las coordenadas con el punto.

15. Trace en un plano complejo: $A = 5e^{30°i}$, $B = 10e^{(-\pi/2)i}$, $C = 7e^{(3\pi/4)i}$

16. (A) Cambie $1 - i\sqrt{3}$ a forma polar, $r \ge 0$, $-180° < \theta \le 180°$
(B) Cambie $4e^{(-30°)i}$ a forma rectangular exacta.

17. (A) Encuentre $[(-1/2) - (\sqrt{3}/2)i]^3$ usando el teorema de De Moivre. Escriba la respuesta final en las formas exactas rectangulares.
(B) Verifique los resultados del inciso (A) con una calculadora.

18. Encuentre $(2e^{15°i})^4$ usando el teorema de De Moivre, y escriba la respuesta final en la forma rectangular exacta.

B

19. Refiérase a la figura del principio del ejercicio, si $a = 434$ metros, $b = 302$ metros y $c = 197$ metros, entonces, si el triángulo tiene un ángulo obtuso, ¿qué ángulo debe de ser y por qué?

En los problemas del 20 al 23, resuelva cada triángulo. Si un problema no tiene solución, dígalo. Si un triángulo tiene dos soluciones, dígalo, y resuelva el caso del obtuso.

20. $\beta = 115.4°$, $a = 5.32$ centímetros, $c = 7.05$ centímetros

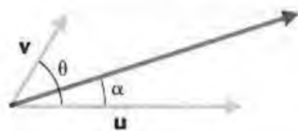
21. $\alpha = 63.2°$, $a = 179$ milímetros, $b = 205$ milímetros

22. $\alpha = 26.4°$, $a = 52.2$ kilómetros, $b = 84.6$ kilómetros

23. $a = 19.0$ pulgadas, $b = 27.8$ pulgadas, $c = 26.1$ pulgadas

24. Si cuatro vectores de fuerza diferentes de cero con distintas magnitudes y direcciones están actuando sobre un cuerpo en reposo, ¿cuál debe ser la suma de los cuatro vectores para que el objeto permanezca en reposo?

25. Dados los vectores geométricos **u** y **v** como se indica en la figura. Encuentre $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ y α, dada $|\mathbf{u}| = 75.2$ kilogramos, $|\mathbf{v}| = 34.2$ kilogramos y $\theta = 57.2°$.



26. Exprese cada vector en términos de ***i*** y ***j*** para los vectores unitarios:
(A) $\mathbf{u} = \langle -3, 9\rangle$ (B) $\mathbf{v} = \langle 0, -2\rangle$

Para los vectores indicados en los problemas 27 y 28, encuentre:

(A) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (B) $3\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

27. $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -4\rangle$, $\mathbf{w} = \langle -3, 0\rangle$

28. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = -\mathbf{j}$

29. Encuentre una unidad vectorial **u** con la misma dirección que $\mathbf{v} = \langle -1, -3\rangle$.

En los problemas del 30 al 33, use técnicas rápidas de trazado para dibujar cada gráfica en un sistema coordenado polar.

Verifique las gráficas de los problemas del 30 al 33 con un dispositivo de graficación.

30. $r = 6 + 4\cos\theta$ **31.** $r = 8 + 8\,\text{sen}\,\theta$

32. $r = 10\cos 2\theta$ **33.** $r = 8\,\text{sen}\,3\theta$

34. Grafique $r = 6\cos(\theta/7)$ para $0 \le \theta \le 7\pi$.

35. Grafique $r = 6\cos(\theta/9)$ para $0 \le \theta \le 9\pi$.

36. Grafique $r = 8(\text{sen}\,\theta)^{2n}$ para $n = 1, 2$ y 3. ¿Cuántos pétalos espera que tendrá la gráfica para la n arbitraria?

37. Grafique $r = 3/(1 - e\cos\theta)$ para los siguientes valores de e, identifique a cada curva como una elipse, parábola o hipérbola.
(A) $e = 0.55$ (B) $e = 1$ (C) $e = 1.7$

38. Convierta $x^2 + y^2 = 6x$ a la forma polar.

39. Convierta $r = 5\cos\theta$ a la forma rectangular.

40. Cambie los siguientes números complejos a la forma polar, $r \ge 0$, $-180° < \theta \le 180°$: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_3 = 5$.

41. Cambie los siguientes números complejos a la forma rectangular exacta: $z_1 = \sqrt{2}e^{(\pi/4)i}$, $z_2 = 3e^{210°i}$, $z_3 = 2e^{(-2\pi/3)i}$

42. Si $z_1 = 8e^{25°i}$ y $z_2 = 4e^{19°i}$, encuentre:
(A) z_1z_2 (B) z_1/z_2
Exprese las respuestas en forma polar.

43. (A) Escriba $(1 + i\sqrt{3})^4$ a formas exactas rectangulares. Use el teorema de De Moivre.
(B) Verifique el inciso (A) evaluando $(1 + i\sqrt{3})^4$ directamente con una calculadora.

44. Encuentre todas las raíces cúbicas de i. Escriba las respuestas finales en forma rectangular exacta, y localice a las raíces en un círculo en el plano complejo.

45. Encuentre todas las raíces cúbicas de $-4\sqrt{3} + 4i$ exactamente. Deje las respuestas en formas polares.

46. Muestre que $4e^{15°i}$ es una raíz cuadrada de $8\sqrt{3} + 8i$.

47. Cambie las coordenadas rectangulares $(5.17, -2.53)$ a coordenadas polares con dos cifras decimales, $r \ge 0$, $-180° < \theta \le 180°$.

48. Cambie las coordenadas polares $(5.81, -2.72)$ a coordenadas rectangulares con dos cifras decimales.

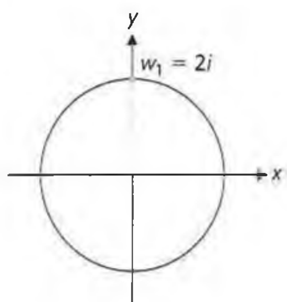
49. Cambie el número complejo $-3.18 + 4.19i$ a las formas polares con dos cifras decimales, $r \ge 0$, $-180° < \theta \le 180°$.

50. Cambie el número complejo $7.63e^{-162.27°i}$ a las formas rectangulares $a + bi$, donde a y b se calculan con dos cifras decimales.

51. (A) La raíz cúbica de un número complejo se muestra en la figura. Localice geométricamente todas las otras raíces cúbicas del número en la siguiente figura y explique cómo se localizaron.

(B) Determine geométricamente las otras raíces cúbicas y el número en formas exactas rectangulares.

(C) Eleve al cubo cada raíz cúbica de los incisos (A) y (B).



C

52. Para un triángulo oblicuo con $\alpha = 23.4°$, $b = 44.6$ milímetros y a el lado opuesto al ángulo α, determine un valor k de modo que si $0 < a < k$, no tiene solución; si $a = k$, tiene una solución, y si $k < a < b$, tiene dos soluciones.

53. Muestre que para cualquier triángulo

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} = \frac{\cos \alpha}{a} + \frac{\cos \beta}{b} + \frac{\cos \gamma}{c}$$

54. Sea $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle c, d \rangle$ dos vectores y m un escalar; pruebe que:
(A) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (\mathbf{v} + \mathbf{u})$
(B) $m(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = m\mathbf{u} + m\mathbf{v}$

55. Dada la ecuación polar $r = 4 + 4 \cos (\theta/2)$.
(A) Trace una gráfica de la ecuación usando las técnicas rápidas de graficación.
(B) Verifique la gráfica del inciso (A) con un dispositivo de graficación.

56. (A) Grafique $r = -8 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 8 \cos \theta$, $0 \le \theta \le \pi$, en la misma ventana de visión. Use la función TRACE para determinar cuál punto de intersección tiene las coordenadas que satisfacen ambas ecuaciones simultáneamente.
(B) Resuelva las ecuaciones en forma simultánea para verificar los resultados del inciso (B).
(C) Explique por qué el polo no es una solución simultánea, aunque las dos curvas se intersecan en el polo.

57. Encuentre todas las soluciones, reales e imaginarias, para $x^8 - 1 = 0$. Escriba las raíces en la forma rectangular exacta.

58. Escriba $P(x) = x^3 - 8i$ como un producto de factores lineales.

APLICACIONES

Para los problemas del 59 al 61, use la brújula de navegación. Suponga que las direcciones dadas en términos de norte, este, sur y oeste son exactas.



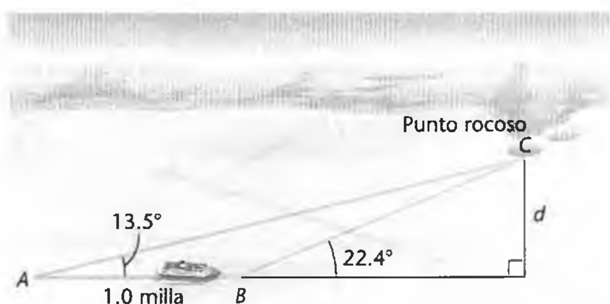
Brújula de navegación

59. **Navegación.** Un avión vuela al este a 256 millas por hora, y otro avión vuela hacia el sudeste a 304 millas por hora. Después de dos horas, ¿qué distancia de separación hay entre los dos aviones?

60. **Navegación.** Un avión vuela contra una velocidad del aire de 450 millas por hora y una brújula indica 75°. Si el viento sopla a 65 millas por hora hacia el norte (de norte a sur), ¿cuál es la verdadera dirección del avión y la velocidad relativa con respecto al suelo? Calcule la dirección al grado más cercano y la velocidad a la milla por hora más cercana.

61. **Navegación.** Un avión que puede viajar a 500 millas por hora en aire tranquilo, debe volar hacia el este. Si el viento sopla del nordeste a 50 millas por hora, ¿qué dirección deberá escoger el piloto? ¿Cuál será la velocidad real del avión con respecto del suelo? Calcule la dirección al grado más cercano y la velocidad a la milla por hora más cercana.

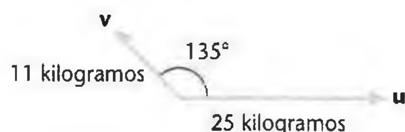
62. **Navegación costera.** El dueño de un barco de recreo que atraviesa una costa quiere pasar por un punto rocoso a una distancia segura (véase la figura). Las vistas del punto rocoso están realizadas desde A y desde B, a 1.0 milla de distancia. Si el barco sigue el mismo curso, ¿qué tan cerca estará del punto? Esto es, encuentre d en la figura a la décima de milla más cercana.



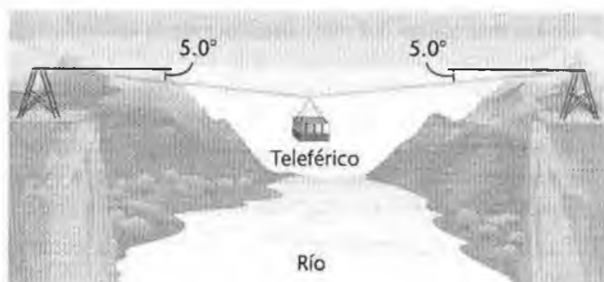
63. **Fuerzas.** Dos fuerzas $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ actúan sobre un objeto como se indica en la figura. Encuentre la dirección y la magnitud de la fuerza resultante $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ respecto a la fuerza $\mathbf{v}$.



64. Equilibrio constante. Dos fuerzas **u** y **v** actúan sobre un objeto como se indica en la figura. ¿Qué tercera fuerza **w** se debe sumar para lograr el equilibrio estático? Dé la dirección con respecto a **u**.



65. Ingeniería. El peso de un teleférico, usado para cruzar un río, es de 1 000 libras (véase figura). ¿Cuál es la tensión en cada mitad del cable cuando el carro se localiza en el lugar que se indica? Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.



66. Astronomía. (A) El planeta Marte viaja alrededor del Sol en una órbita elíptica dada aproximadamente por

$$r = \frac{1.41 \times 10^8}{1 - 0.0934 \cos \theta} \qquad (1)$$

donde r se mide en millas y el Sol está en el polo. Grafique la órbita. Use la función TRACE para encontrar la distancia (con tres dígitos significativos) desde Marte al Sol en el **afelio** (distancia más grande desde el Sol) y al **perihelio** (la distancia más corta desde el Sol).

(B) Con referencia a la ecuación (1), r es máximo cuando el denominador es mínimo, y r es mínimo cuando el denominador es máximo. Use esta información para encontrar la distancia de Marte al Sol en el afelio y en el perihelio.

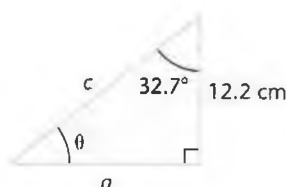
Ejercicio de repaso acumulativo de los capítulos 5 a 7

Resuelva los problemas de este repaso acumulativo y compruebe sus respuestas con las indicadas al final del libro en donde se incluyen las respuestas para todos. Después de cada una hay un número en tipo itálico que indica la sección a la que pertenece el problema. Si tiene dificultad para resolverlos, repase las secciones correspondientes en el texto.

A

1. En un círculo con radio de 6 metros, encuentre la longitud de un arco frente a un ángulo de 0.31 radián.

2. Resuelva el triángulo:



3. ¿En cuál(es) cuadrante(s) es positiva cada una de las siguientes expresiones?

(A) $\operatorname{sen}\theta$ (B) $\cos\theta$ (C) $\tan\theta$

4. Si $(-3, 4)$ está en el lado terminal de un ángulo θ, encuentre:

(A) $\cos\theta$ (B) $\csc\theta$ (C) $\tan\theta$

5. Encuentre al ángulo de referencia asociado con cada ángulo θ:

(A) $-3\pi/4$ (B) $245°$ (C) $-30°$

6. Indique el dominio, el rango y el periodo de cada función:

(A) $y = \operatorname{sen} x$ (B) $y = \cos x$ (C) $y = \tan x$

7. Trace una gráfica de $y = \cos x$, $-\pi/2 \le x \le 5\pi/2$.

8. Trace una gráfica de $y = \tan x$, $-\pi/2 < x < 3\pi/2$.

9. Describa el significado de un ángulo central en un círculo cuya medida en radianes es de 2.

10. Describa el cambio más pequeño de la gráfica de $y = \cos x$ para producir la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$.

Demuestre cada identidad de los problemas del 11 al 14.

11. $\cot\theta \sec\theta = \csc\theta$

12. $\sec x - \cos x = \tan x \operatorname{sen} x$

13. $\operatorname{sen}(x - \pi/2) = -\cos x$

14. $\csc 2x = \frac{1}{2}\csc x \sec x$

15. Utilice un dispositivo de graficación para probar si cada una de las expresiones siguientes es una identidad. Si una

ecuación parece ser una identidad, demuéstrela. Si no lo parece, encuentre un valor de x para la cual ambos lados estén definidos pero no sean iguales.

(A) $\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x = \csc x$

(B) $\dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x = \sec x$

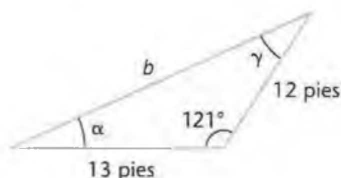
16. En un triángulo, si $a = 32.5$ pies, $c = 77.2$ pies y $\beta = 61.3°$, sin resolver el triángulo o dibujar cualquier imagen, ¿cuál de los dos ángulos, α o γ, se puede asegurar que es agudo y por qué?

Resuelva los problemas 17 y 18 con cuatro cifras decimales.

17. $\text{sen}\, x = 0.3188,\ 0 \le x \le 2\pi$

18. $\tan \theta = -4.076,\ -90° < \theta < 90°$

19. Resuelva el triángulo:



20. Escriba el vector algebraico $\langle a, b\rangle$ correspondiente al vector geométrico $\overrightarrow{AB}$ cuyos puntos extremos son $A(-3, 2)$ y $B(3, -1)$.

21. Un punto en un sistema coordenado polar tiene como coordenadas $(-5, 150°)$. Encuentre todas las otras coordenadas polares para el punto, $-360° \le \theta \le 360°$, y describa verbalmente cómo están asociadas las coordenadas con el punto.

22. Trace una gráfica de $r = 6 \cos \theta$ en un sistema coordenado polar.

23. Grafique en un plano complejo: $A = -3 + 4i$ y $B = 4e^{60°i}$.

24. Encuentre $(2e^{10°i})$. Escriba la respuesta final en la forma rectangular exacta.

B

25. ¿Cuáles de los ángulos siguientes son coterminales con 150°: 30°, $-7\pi/6$, 870°?

26. Cambie 1.31 radianes a grados decimales con dos cifras decimales.

27. ¿Cuáles de las siguientes expresiones tienen el mismo valor de cos 8?

(A) cos(8 rad) (B) cos 8° (C) $\cos(8 - 4\pi)$

Evalúe exactamente los problemas del 28 al 37 sin calculadora. Si la función no se define en el valor, dígalo.

28. $\text{sen}(-5\pi/6)$ **29.** $\tan(\pi/2)$ **30.** $\cot 7\pi/4$

31. sec 330° **32.** $\cos^{-1}(-1)$ **33.** $\text{sen}^{-1}\, 1.5$

34. $\arccos(-\frac{1}{2})$ **35.** $\text{sen}(\text{sen}^{-1}\, 0.55)$

36. $\cos[\text{sen}^{-1}(-\frac{4}{5})]$ **37.** $\cos[\tan^{-1}(-2)]$

38. Evalúe con cuatro dígitos significativos utilizando calculadora. Si una función no está definida, dígalo.

(A) tan 84°12′55″ (B) sec(−1.8409)

(C) $\tan^{-1}(-84.32)$ (D) $\cos^{-1}(\tan 2.314)$

39. Trace una gráfica de $y = 2 - 2\cos(\pi x/2)$, $-1 \le x \le 5$.

40. (A) Encuentre la medida exacta en grados de $\theta = \cos^{-1}(-\sqrt{3}/2)$ sin usar calculadora.

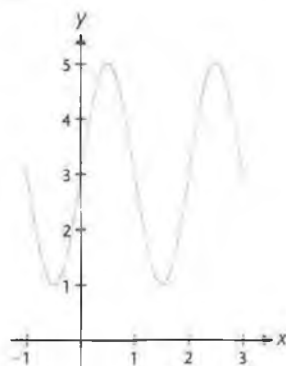
(B) Encuentre la medida en grados de $\theta = \text{sen}^{-1}(-0.338)$ con tres cifras decimales usando calculadora.

41. Evalúe sen^{-1} (sen 3) con una calculadora en modo radián, y explique por qué esto no ilustra la identidad de seno y del seno inverso.

42. Un punto circular $P(a, b)$ se mueve en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia de un círculo unitario empezando en (1, 0) y se detiene después de recorrer una distancia de 11.205 unidades. Explique cómo encontraría las coordenadas del punto P en su posición final y cómo determinaría en qué cuadrante se encuentra P. Encuentre las coordenadas de P con tres cifras decimales y el cuadrante de la posición final de P.

43. Explique la diferencia entre la solución de la ecuación $\tan x = -24.5$ y la evaluación de $\tan^{-1}(-24.5)$.

44. Encuentre una ecuación de la forma $y = k + a\, \text{sen}\, Bx$ que produzca la gráfica:



45. Trace la gráfica de $y = 3\, \text{sen}\, (2x - \pi)$, $-\pi \le x \le 2\pi$. Indique la amplitud A, el periodo P y el corrimiento de fase $C.F.$

46. Trace la gráfica de $y = 2\tan(\pi x/2 - \pi/2)$, $0 < x < 4$. Indique el periodo P, y el corrimiento de fase $C.F.$

47. Trace la gráfica de $y = \text{sen}\, x$ y de $y = \csc x$ en el mismo sistema coordenado.

48. Describa el menor corrimiento de fase a la izquierda y/o la reflexión que transforma la gráfica de $y = \cot x$ en la gráfica de $y = \tan x$.

49. Grafique $y = 1/(\cot^2 x + 1)$ en un dispositivo de graficación que despliegue por lo menos dos periodos completos de la gráfica. Encuentre una ecuación de la forma $y = k + A\, \text{sen}\, Bx$ o $y = k + A \cos Bx$ que tengan la misma gráfica. Grafique ambas ecuaciones en la misma ventana, y utilice

la función TRACE para verificar que ambas gráficas sean las mismas.

50. Grafique $y = (2 - 2\,\text{sen}^2\,x)/(\text{sen}\,2x)$ en un dispositivo de graficación que muestre por lo menos dos de los periodos de la gráfica completos. Encuentre una ecuación de la forma $y = A\tan Bx$ o de $y = A\cot Bx$ que tenga la misma gráfica. Grafique ambas ecuaciones en la misma ventana, y utilice la función TRACE para verificar que ambas gráficas son iguales.

51. Dada la ecuación $\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x$.
(A) ¿Son $x = 0$ y $x = \pi$ soluciones?
(B) ¿Es la ecuación una identidad o una ecuación condicional? Explique.

Demuestre cada identidad de los problemas del 52 al 57.

52. $\dfrac{\text{sen}\,u}{1 + \cos u} + \cot u = \csc u$

53. $\sec x + \tan x = \dfrac{\cos x}{1 - \text{sen}\,x}$

54. $\tan \dfrac{x}{2} = \csc x - \cot x$

55. $\csc^2 \dfrac{x}{2} = 2\csc x\,(\csc x + \cot x)$

56. $\dfrac{2}{1 + \cos 2x} = \sec^2 x$

57. $\dfrac{\cos x + \cos y}{\text{sen}\,x - \text{sen}\,y} = \cot \dfrac{x - y}{2}$

[*Sugerencia:* Utilice las identidades suma-producto.]

58. Utilice un dispositivo de graficación para probar si cada una de las siguientes expresiones es una identidad. Si una ecuación parece ser una identidad, demuéstrela. Si no lo parece, encuentre un valor de x para la cual ambos lados están definidos pero no son iguales.
(A) $\dfrac{\tan x}{2\tan x - \text{sen}\,x} = \dfrac{1}{2 + \text{sen}\,x}$
(B) $\dfrac{\tan x}{2\tan x - \text{sen}\,x} = \dfrac{1}{2 - \cos x}$

59. Encuentre el $\cos(x - y)$ exactamente sin una calculadora, dado $\text{sen}\,x = (-2/\sqrt{5})$, $\cos y = (-2/\sqrt{5})$, x es un ángulo del cuadrante IV y y un ángulo del cuadrante III.

60. Calcule el valor exacto de $\text{sen}\,2x$ y $\cos(x/2)$ sin una calculadora, dado que $\text{sen}\,x = \frac{3}{5}$, $\pi/2 \le x \le \pi$

Resuelva los problemas 61 y 62 exactamente sin una calculadora, θ en grados y x en reales.

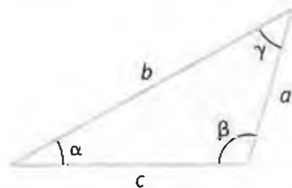
61. $2\,\text{sen}^2\,\theta + \text{sen}\,\theta = 1$, $0 \le \theta < 360°$

62. $\text{sen}\,2x = \text{sen}\,x$, todas las soluciones reales.

63. (A) Resuelva $\cot x = -2\cos x$ exactamente, $0 \le x \le 2\pi$.
(B) Resuelva $\cot x = -2\cos x$ con tres cifras decimales utilizando un dispositivo de graficación, $0 \le x \le 2\pi$.

64. Resuelva $2\cos x = x - \cos 2x$ con tres cifras decimales para todas las soluciones reales utilizando un dispositivo de graficación.

En los problemas del 65 al 67, resuelva cada triángulo etiquetado como en la figura. Si un problema no tiene solución, dígalo. Si un triángulo tiene dos soluciones, resuelva el caso obtuso.



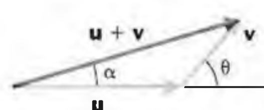
65. $\alpha = 21.3$ metros, $b = 37.4$ metros, $c = 48.2$ metros

66. $\alpha = 125.4°$, $b = 25.4$ milímetros, $a = 20.3$ milímetros

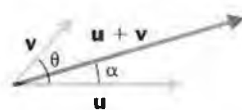
67. $\alpha = 52.9°$, $b = 37.1$ pulgadas, $a = 34.4$ pulgadas

68. Suponiendo en un triángulo que γ es agudo, $a = 92.5$ centímetros y $b = 43.3$ centímetros. ¿Cuál de los ángulos, α o β, se puede decir con seguridad que es agudo y por qué?

69. Dados los vectores geométricos que se indican en las figuras, encuentre $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ y α, dado que $|\mathbf{u}| = 25.3$ libras, $|\mathbf{v}| = 13.4$ libras y $\theta = 48.3°$.



Regla de cola a punta
(a)



Regla del paralelogramo
(b)

70. Encuentre $2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 3\mathbf{w}$ para:
(A) $\mathbf{u} = \langle -1, 2\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, -2\rangle$, $\mathbf{w} = \langle 1, -1\rangle$
(B) $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = 2\mathbf{j}$

71. Convierta a una forma polar: $x^2 + y^2 = 8y$

72. Convierta $r = -4\cos\theta$ a una forma rectangular.

Use las técnicas rápidas de trazado para graficar los problemas 73 y 74 en un sistema coordenado polar.

Verifique las gráficas de los problemas 73 y 74 en un dispositivo de graficación.

73. $r = 4 + 4\cos\theta$ **74.** $r = 6\,\text{sen}\,3\theta$

75. Grafique $r = 5(\cos 2\theta)^{2n}$, para $n = 1, 2$ y 3. ¿Cuántos pétalos espera que tenga la gráfica para una n arbitraria?

76. Grafique $r = e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta)$ usando una ventana cuadrada y 0.05 para el tamaño del paso de θ. A la curva resultante a menudo se le llama *curva de mariposa*.

77. Cambie las coordenadas rectangulares $(-2.78, -3.19)$ a coordenadas polares con dos cifras decimales, $r \ge 0$, $-180° < \theta \le 180°$.

78. Cambie las coordenadas polares $(6.22, -4.08)$ a coordenadas rectangulares con dos cifras decimales.

79. Cambie $2e^{(-\pi/6)i}$ a una forma rectangular exacta.

80. Cambie $z = -1 + i\sqrt{3}$ a una forma polar, θ en grados.

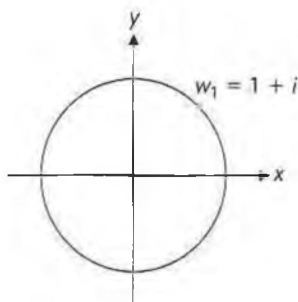
81. Calcule $(1 - i\sqrt{3})^6$ usando el teorema de De Moivre, y escriba la respuesta final en la forma $a + bi$.

82. Encuentre todas las raíces cúbicas de $-i$ exactamente. Escriba las respuestas finales de la forma $a + bi$, y localice las raíces en el círculo del plano complejo.

83. Cambie el número complejo $-4.88 - 3.17i$ a una forma polar con dos cifras decimales, $r \geq 0$, $-180° < \theta \leq 180°$.

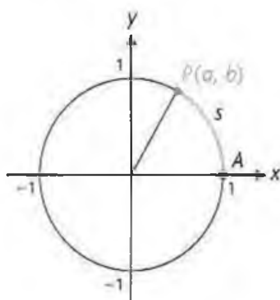
84. Cambie el número complejo $6.97e^{163.87°i}$ a la forma rectangular $a + bi$, donde a y b están calculadas con dos cifras decimales.

85. (A) La cuarta raíz de un número complejo se muestra en la figura. Localice geométricamente todas las otras cuartas raíces del número en la figura, explique cómo se localizaron.
(B) Determine geométricamente las otras cuartas raíces del número en forma rectangular exacta.
(C) Aumente cada raíz cuarta de los incisos (A) y (B) a la cuarta potencia.



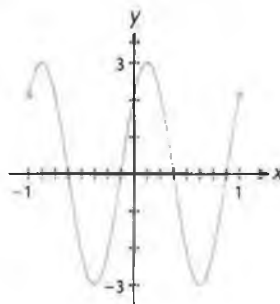
C

86. Si, en la figura, las coordenadas de A son $(1, 0)$ y la longitud de arco s es 1.2 unidades, encuentre las coordenadas de P con tres dígitos significativos.



87. Dibuje una gráfica de $y = 1 + \sec x$, $-3\pi/2 < x < 3\pi/2$.

88. La gráfica siguiente es una gráfica de una ecuación de la forma $y = A \cos (Bx + C)$, $0 < -C/B < 1$. Encuentre la ecuación buscando A, B y C exactamente. ¿Cuál es el periodo, la amplitud y el corrimiento de fase?



89. Grafique $1.6 \text{ sen } 2x - 1.2 \cos 2x$ en un dispositivo de graficación. (Seleccione las dimensiones de una ventana de visión de tal manera que al menos dos periodos sean visibles.) Encuentre una ecuación de la forma $y = A \text{ sen } (Bx + C)$ que tenga la misma gráfica de la ecuación dada. Encuentre A y B exactamente y C con tres cifras decimales. Use la intersección con el eje x más cercano al origen como el corrimiento de fase. Para comprobar sus resultados grafique ambas ecuaciones en la misma ventana de visión, y use la función TRACE mientras cambia hacia atrás y hacia adelante entre las dos gráficas.

90. Escriba $\csc (\cos^{-1} x)$ como una expresión algebraica en x, que esté libre de funciones trigonométricas y de funciones trigonométricas inversas.

Resuelva los problemas 91 y 92 sin usar calculadora.

91. $\text{sen } (2 \cot^{-1} \frac{3}{4}) = ?$

92. Dada $\sec x = -\frac{5}{3}$, $\pi/2 \leq x \leq \pi$, encuentre
(A) $\text{sen}(x/2)$ (B) $\cos 2x$

93. (A) Resuelva $2 \text{ sen}^2 x = 3 \cos x$ exactamente para todas las soluciones reales, $0 \leq x \leq 2\pi$.
(B) Resuelva $2 \text{ sen}^2 x = 3 \cos x$ con cuatro cifras decimales usando un dispositivo de graficación, $0 \leq x \leq 2\pi$.

94. (A) Use técnicas de graficación rápida para dibujar una gráfica de la ecuación polar $r^2 = 36 \cos 2\theta$.
(B) Verifique la gráfica del inciso (A) usando un dispositivo de graficación.

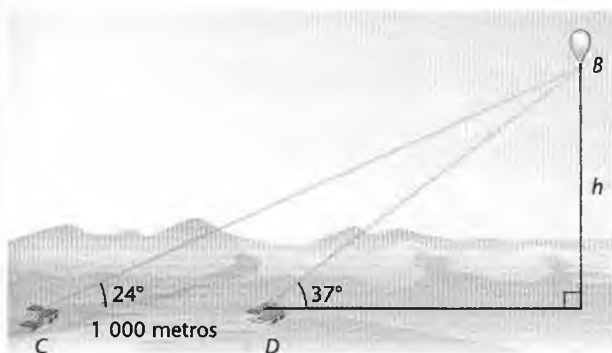
95. (A) Grafique $r1 = 2 + 2 \cos \theta$ y $r2 = 6 \cos \theta$ en la misma ventana de visión, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
(B) Use TRACE para determinar cuántas veces la gráfica de $r2$ intersecta a la gráfica de $r1$ conforme θ varía de 0 a 2π.
(C) Resuelva las dos ecuaciones simultáneamente para encontrar las soluciones exactas para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
(D) Explique por qué el número de soluciones encontradas en el inciso (C) no coincide con el número de veces que $r1$ intersecta a $r2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

96. Escriba $P(x) = x^3 + i$ como un producto de factores lineales.

APLICACIONES

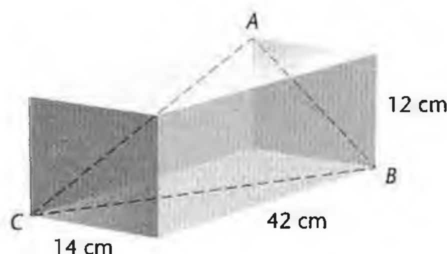
97. Astronomía. ¿Qué ángulo en radianes barre una línea que va desde el Sol a la Tierra en 5 días?

98. Meteorología. Un globo meteorológico se suelta y sube verticalmente. Dos estaciones meteorológicas C y D en el mismo plano vertical que el globo y a 1 000 metros de distancia una de la otra ven al globo al mismo tiempo y registran la información que se da en la figura. A la hora que ambos vieron al globo, ¿a qué altura estaba éste aproximando al metro más cercano?



99. Geometría. Encuentre la longitud con dos cifras decimales de un lado del pentágono regular inscrito en un círculo con radio de 5 pulgadas.

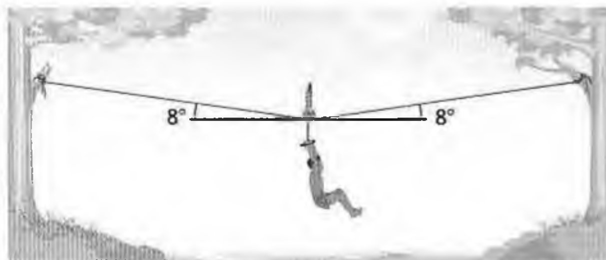
100. Geometría. Encuentre $\angle ABC$ al grado más cercano para el sólido rectangular que se muestra a continuación.



101. Circuito eléctrico. La corriente I en un circuito eléctrico de corriente alterna tiene una amplitud de 50 amperes y un periodo de $\frac{1}{110}$ segundos. Si $I = 50$ amperes cuando $t = 0$, encuentre una ecuación de la forma $I = A \cos Bt$ que indique la corriente al tiempo $t \geq 0$.

102. Navegación. Un avión vuela con una velocidad de 260 millas por hora y en una dirección de 110°. Si sopla un viento hacia el norte de 36 millas por hora, ¿cuál es la dirección y velocidad real con respecto a la tierra? Calcule la dirección al grado más cercano y la velocidad con respecto a la tierra aproxime a la milla por hora más cercana.

103. Ingeniería. Un niño que pesa 65 libras se desliza a través de un pequeño río con un rudimentario sistema de polea y cable (véase figura). ¿Cuál es la tensión en cada mitad del cable que lo soporta cuando el niño está en el centro? Calcule la respuesta a la libra más cercana.



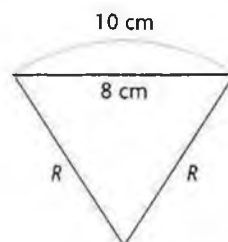
104. Geometría. Un arco circular de 10 centímetros tiene una cuerda de 8 centímetros como se muestra en la figura.

(A) Explique cómo está dado el radio por la ecuación.

$$\operatorname{sen}\frac{5}{R} = \frac{4}{R}$$

(B) ¿Qué dificultades encontrará al tratar de resolver la ecuación en el inciso (A) exactamente mediante métodos algebraicos y trigonométricos?

(C) Muestre en un dispositivo de graficación cómo aproximar el radio del círculo R, y encuentre R con tres cifras decimales.



105. Modelado para la variación de la temperatura. El promedio mensual de temperatura en 30 años, en °F, para cada mes del año en la ciudad de Washington, D.C., se indica en la tabla 1 (*Almanaque mundial*).

(A) Usando un mes como la unidad básica de tiempo, introduzca los datos para un periodo de dos años en su dispositivo de graficación y produzca una gráfica de dispersión en la ventana de visión. Elija $25 \leq y \leq 80$ para la ventana de visión.

(B) Parece que una curva senoidal de la forma

$$y = k + A \operatorname{sen}(Bx + C)$$

acercará al modelo de estos datos. Las constantes k, A y B se determinan fácilmente de la tabla 1. Para estimar C, calcule visualmente con una cifra decimal el más pequeño corrimiento de fase positivo a partir de la gráfica del inciso (A). Después de determinar

A, B, k y C, escriba la ecuación resultante. (Su valor de C puede diferir ligeramente de la respuesta del libro.)

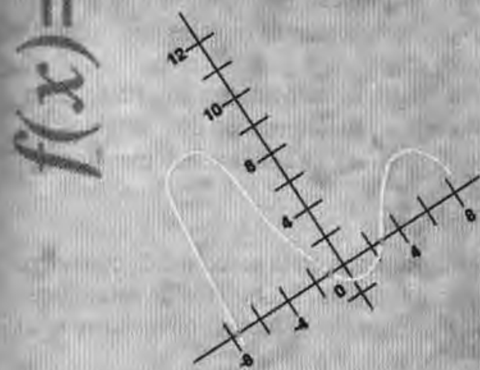
(C) Grafique los resultados de los incisos (A) y (B) en la misma ventana de visión. (Se puede obtener un mejor acercamiento ajustando un poco el valor de C.)

TABLA 1 Temperatura promedio mensual en Washington, D.C.

x (mes)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y (temp.)	31	34	43	53	62	71	76	74	67	55	45	35

CAPÍTULO 8

SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES



En capítulos anteriores se estudiaron los métodos estándar para resolver dos ecuaciones lineales con dos variables, ahora se abordará un método que se puede usar para resolver sistemas lineales con cualquier número de variables y ecuaciones. Este método es muy adecuado para resolver sistemas grandes en computadora. Se analizan también sistemas que implican ecuaciones no lineales y sistemas de desigualdades lineales. Por último, se introduce una herramienta matemática relativamente nueva y poderosa llamada programación lineal. Muchas aplicaciones en matemáticas implican sistemas de ecuaciones o desigualdades. Las técnicas matemáticas que se analizan en este capítulo son aplicables a una variedad de interesantes y significativos usos prácticos.

SECCIÓN 8-1 Sistemas de ecuaciones lineales y matrices aumentadas



- Sustitución: Un breve repaso
- Graficación
- Eliminación por suma
- Matrices
- Solución de sistemas lineales mediante matrices aumentadas

En esta sección se continuará con el análisis, que se inició en la sección 1-2, de sistemas que implican dos ecuaciones lineales con dos variables:

$$\begin{aligned} ax + by &= h \\ cx + dy &= k \end{aligned} \qquad (1)$$

donde x y y son variables, a, b, c y d son números reales llamados **coeficientes** de x y y, y h y k son números reales llamados **términos constantes** en las ecuaciones. Recuerde que un par de números $x = x_0$ y $y = y_0$, que también se puede escribir como un par ordenado (x_0, y_0), es una **solución** de este sistema si cada ecuación se satisface por dicho par. El conjunto de todos esos pares ordenados de números se denomina **conjunto solución** para el sistema.

En la sección 1-2, se usó sustitución para resolver el sistema (1). Después de un breve repaso a este método, se explorará la relación entre la gráfica de las ecuaciones en un sistema y la solución de éste. También se revisará el método estándar de *eliminación por suma.* Después se dará una introducción a las matrices aumentadas para transformar el método de eliminación por suma en un proceso de solución que es muy adecuado para usarse en computadora en la solución de sistemas lineales que implican un gran número de ecuaciones y variables.

Con objeto de mantener la introducción de matrices aumentadas en esta sección, tan simple como sea posible, el análisis se limita a dos ecuaciones con dos variables. En la sección siguiente, se generaliza el proceso de solución y se aplica a sistemas lineales más grandes.

Sustitución: Un breve repaso

Para revisar algunos conceptos básicos que se introdujeron en la sección 1-2, considere el siguiente ejemplo simple. En la rifa de una computadora, los boletos de estudiantes cuestan \$2 y los de admisión general \$3. Si se adquieren siete boletos con un costo total de \$18, ¿cuántos boletos de cada tipo se compraron?

Sea

x = Número de boletos de estudiante

y = Número de boletos de admisión general

Entonces

$$\begin{aligned} x + y &= 7 && \text{Número total de boletos comprados} \\ 2x + 3y &= 18 && \text{Costo total de la compra} \end{aligned}$$

Para resolver este sistema por sustitución, se despeja y de la primera ecuación en términos de x y se sustituye en la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x + y &= 7 & 2x + 3y &= 18 \\ y &= 7 - x & 2x + 3(7 - x) &= 18 \\ & & -x + 21 &= 18 \\ & & x &= 3 \end{aligned}$$

Ahora, x se reemplaza por 3 en $y = 7 - x$:

$$\begin{aligned} y &= 7 - x \\ &= 7 - 3 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

De manera que la solución es tres boletos de estudiante y cuatro boletos de admisión general. Usted debe comprobar este resultado en cada una de las ecuaciones originales.

Graficación

Recuerde que la gráfica de una ecuación lineal es la recta que consiste de todos los pares ordenados que satisfacen la ecuación. Si se grafican ambas ecuaciones del sistema (1) en el mismo sistema coordenado, entonces las coordenadas de cualquier punto que las rectas tengan en común deben ser las soluciones para el sistema. El ejemplo 1 ilustra este proceso para el problema de los boletos antes visto.

EJEMPLO 1

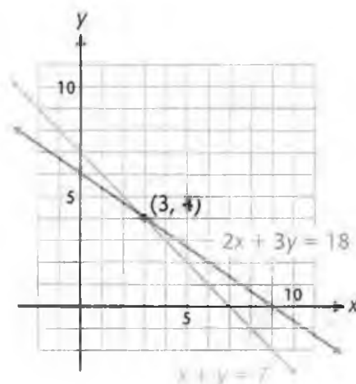
Solución de un sistema mediante graficación

Resuelva el problema de los boletos mediante graficación: $\begin{aligned} x + y &= 7 \\ 2x + 3y &= 18 \end{aligned}$

Solución

En la figura 1 se observa que:

FIGURA 1



$$\begin{aligned} x &= 3 && \text{Boletos de estudiante} \\ y &= 4 && \text{Boletos de admisión general} \end{aligned}$$

Comprobación

$$\begin{aligned} x + y &= 7 & 2x + 3y &= 18 \\ 3 + 4 &\stackrel{?}{=} 7 & 2(3) + 3(4) &\stackrel{?}{=} 18 \\ 7 &\stackrel{\checkmark}{=} 7 & 18 &\stackrel{\checkmark}{=} 18 \end{aligned}$$

Problema seleccionado 1 Resuelva mediante graficación y compruebe:

$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ x + 2y &= -3 \end{aligned}$$

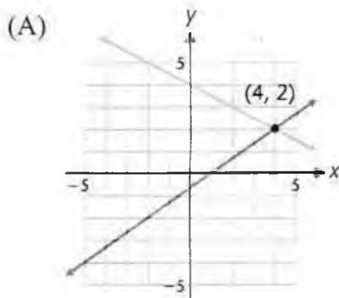
Es claro que el ejemplo anterior tiene exactamente una solución, ya que las rectas tienen exactamente un punto de intersección. En general, las rectas en un sistema coordenado rectangular están relacionadas entre sí en una de las tres formas que se ilustran en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 **Solución de tres tipos importantes de sistemas mediante graficación**

Resuelva cada uno de los sistemas siguientes mediante graficación:

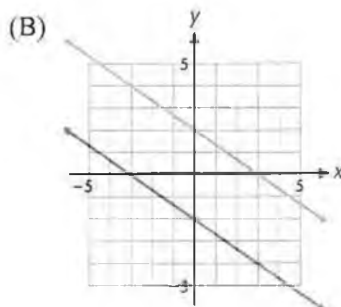
(A) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 2 \\ x + 2y &= 8 \end{aligned}$ (B) $\begin{aligned} 4x + 6y &= 12 \\ 2x + 3y &= -6 \end{aligned}$ (C) $\begin{aligned} 2x - 3y &= -6 \\ -x + \tfrac{3}{2}y &= 3 \end{aligned}$

Soluciones (A)



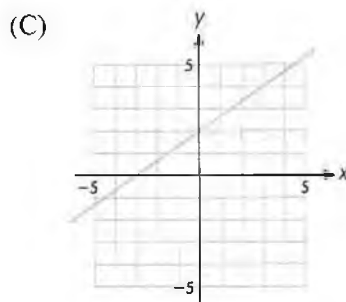
Las rectas se intersectan sólo en un punto.
Tiene exactamente una solución: $x = 4$, $y = 2$

(B)



Las rectas son paralelas (cada una tiene una pendiente $-\frac{2}{3}$). No existe solución.

(C)



Las rectas coinciden.
El número de soluciones es infinito.

Problema seleccionado 2 Resuelva cada uno de los sistemas siguientes mediante graficación:

(A) $\begin{aligned} 2x + 3y &= 12 \\ x - 3y &= -3 \end{aligned}$ (B) $\begin{aligned} x - 3y &= -3 \\ -2x + 6y &= 12 \end{aligned}$ (C) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 12 \\ -x + \tfrac{3}{2}y &= -6 \end{aligned}$

Ahora se definen algunos términos que se pueden usar para describir los diferentes tipos de soluciones de sistemas de ecuaciones ilustrados en el ejemplo 2.

Sistemas de ecuaciones lineales: Términos básicos

Un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene una o más soluciones y es **inconsistente** si no existen soluciones. Además, se dice que un sistema consistente es **independiente** si tiene exactamente una solución (a menudo referida como **solución única**) y **dependiente** si tiene más de una solución.

Refiriéndose a los tres sistemas del ejemplo 2, el sistema del inciso (A) es consistente e independiente, con la solución única $x = 4$ y $y = 2$. El sistema en el inciso (B) es inconsistente, sin solución. Y el sistema en el inciso (C) es consistente y dependiente, con un número infinito de soluciones: todos los puntos de las dos rectas coincidentes.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) ¿Puede un sistema consistente y dependiente tener exactamente dos soluciones? ¿Exactamente tres soluciones? Explique.

(B) Resuelva cada uno de los sistemas del ejemplo 2 por el método de sustitución. Con base en sus resultados, describa cómo podría reconocer un sistema dependiente o un sistema inconsistente cuando use sustitución.

Al interpretar de manera geométrica un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, se obtiene información útil acerca de la forma esperada de las soluciones del sistema. En general, dos rectas cualesquiera en un plano coordenado rectangular se deben intersectar exactamente en un punto, ser paralelas o coincidentes (con gráficas idénticas). Así, los sistemas del ejemplo 2 ilustran los únicos tres tipos posibles de soluciones para sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables. Estas conclusiones se resumen en el teorema 1.

Teorema 1 **Soluciones posibles para un sistema lineal**

El sistema lineal

$$ax + by = h$$
$$cx + dy = k$$

Debe tener:

1. Exactamente una solución — Consistente e independiente

o

2. Ninguna solución — Inconsistente

o

3. Un número infinito de soluciones — Consistente e independiente

No existen otras posibilidades.

Un inconveniente de encontrar una solución por graficación es la inexactitud de las gráficas dibujadas a mano. Las soluciones gráficas realizadas en un dispositivo de graficación, sin embargo, proporcionan tanto una interpretación geométrica útil como una aproximación exacta de la solución a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables.



EJEMPLO 3 Solución de un sistema de ecuaciones lineales con un dispositivo de graficación

Resuelva con dos cifras decimales usando un dispositivo de graficación: $5x - 3y = 13$
$2x + 4y = 15$

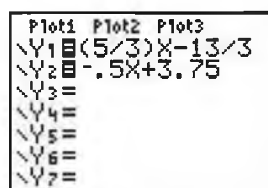
Solución

Primero despeje y de cada ecuación:

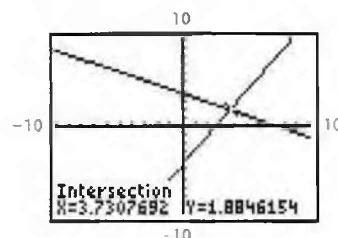
$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 13 \\ -3y &= -5x + 13 \\ y &= \tfrac{5}{3}x - \tfrac{13}{3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 4y &= 15 \\ 4y &= -2x + 15 \\ y &= -0.5x + 3.75 \end{aligned}$$

Después, introduzca cada ecuación en un dispositivo de graficación [figura 2(a)], grafique en una ventana de visión apropiada, y aproxime el punto de intersección [figura 2(b)].

FIGURA 2



(a) Definiciones de ecuación



(b) Punto de intersección

Al redondear los valores de la figura 2(b) con dos cifras decimales, se observa que la solución es

$$x = 3.73 \text{ y } y = 1.88 \qquad \text{o} \qquad (3.73, 1.88)$$

Comprobación

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 13 \\ 5(3.73) - 3(1.88) &\stackrel{?}{=} 13 \\ 13.01 &\approx 13 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 4y &= 15 \\ 2(3.73) + 4(1.88) &\stackrel{?}{=} 15 \\ 14.98 &\approx 15 \end{aligned}$$

Las comprobaciones no son exactas porque los valores de x y y son aproximaciones.

Problema seleccionado 3 Resuelva con dos cifras decimales utilizando un dispositivo de graficación:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -25 \\ 4x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

Los métodos de graficación ayudan a visualizar un sistema y sus soluciones, con frecuencia revelan relaciones que de otra manera se podrían omitir, y con la ayuda de un dispositivo de graficación, se proporcionan aproximaciones muy exactas a las soluciones.

• Eliminación por suma

Ahora se abordará la **eliminación por suma**. Éste es probablemente el método de solución más importante, ya que se generaliza con facilidad a sistemas de orden superior. El método implica el reemplazo de sistemas de ecuaciones con *sistemas equivalentes* más simples, realizando las operaciones adecuadas hasta obtener un sistema con una solución obvia. Los **sistemas equivalentes** de ecuaciones son, como se esperaba, sistemas que tienen exactamente el mismo conjunto solución. En el teorema 2 se enlistan las operaciones que producen sistemas equivalentes.

Teorema 2 **Operaciones con ecuaciones elementales que producen sistemas equivalentes**

Un sistema de ecuaciones lineales se transforma en uno equivalente si:

1. Dos ecuaciones son intercambiables.

2. Una ecuación se multiplica por una constante diferente de cero.

3. Un múltiplo constante de otra ecuación se suma a una ecuación dada.

Cada una de estas tres operaciones en el teorema 2 se puede usar para producir un sistema equivalente, pero las operaciones 2 y 3 serán las más utilizadas por ahora. Conforme se avance en la sección, la operación 1 se vuelve más importante. El uso del teorema 2 se ilustra mejor con ejemplos.

EJEMPLO 4 **Solución de un sistema mediante eliminación por suma**

Resuelva mediante eliminación por suma:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 2x + 5y &= -1 \end{aligned}$$

Solución Se utiliza el teorema 2 para eliminar una de las variables y así obtener un sistema con una solución obvia.

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 2x + 5y &= -1 \end{aligned}$$

Si se multiplica la primera ecuación por 5, la siguiente por 2, y después se suman, se puede eliminar y.

$$\begin{aligned} 15x - 10y &= 40 \\ 4x + 10y &= -2 \\ \hline 19x \qquad &= 38 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

La ecuación $x = 2$ relacionada con cualquiera de las dos ecuaciones originales produce un sistema equivalente. Así, se puede sustituir $x = 2$ en cualquiera de las dos ecuaciones originales para despejar y. Se escoge la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} 2(2) + 5y &= -1 \\ 5y &= -5 \\ y &= -1 \end{aligned}$$

Solución: $x = 2, y = -1$ o $(2, -1)$.

Comprobación

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ 3(2) - 2(-1) &\stackrel{?}{=} 8 \\ 8 &\stackrel{\checkmark}{=} 8 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 5y &= -1 \\ 2(2) + 5(-1) &\stackrel{?}{=} -1 \\ -1 &\stackrel{\checkmark}{=} -1 \end{aligned}$$

Problema seleccionado 4 Resuelva mediante eliminación por suma: $6x + 3y = 3$
$5x + 4y = 7$

Se puede ver qué sucede en el proceso de eliminación cuando un sistema no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones. Considere el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= -3 \\ x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Multiplique la segunda ecuación por -2 y al sumar, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x + 6y &= -3 \\ -2x - 6y &= -4 \\ \hline 0 &= -7 \end{aligned}$$

Se ha obtenido una contradicción. La suposición de que el sistema original tiene soluciones debe ser falsa, de otra manera, ¡se hubiera comprobado que $0 = -7$! En consecuencia, el sistema no tiene solución. Las gráficas de las ecuaciones son paralelas y el sistema es inconsistente.

Ahora, considere el sistema

$$\begin{aligned} x - \tfrac{1}{2}y &= 4 \\ -2x + y &= -8 \end{aligned}$$

Si se multiplica la primera ecuación por 2 y se suma el resultado a la segunda ecuación, se tiene

$$\begin{aligned} 2x - y &= 8 \\ -2x + y &= -8 \\ \hline 0 &= 0 \end{aligned}$$

El obtener $0 = 0$ mediante la suma, implica que las dos ecuaciones originales son equivalentes. Es decir, sus gráficas coinciden y el sistema es dependiente. Si se hace $x = t$, donde t es cualquier número real, y se despeja y en cualquiera de las ecuaciones, se obtiene $y = 2t - 8$. Así,

$$(t, 2t - 8) \qquad t \text{ es un número real}$$

describe el conjunto solución para el sistema. La variable t se llama **parámetro**, y al reemplazar t por un número real se produce una **solución particular** para el sistema. Por ejemplo, algunas soluciones particulares para este sistema son:

$t = -1$	$t = 2$	$t = 5$	$t = 9.4$
$(-1, -10)$	$(2, -4)$	$(5, 2)$	$(9.4, 10.8)$

Muchos problemas de la vida real se resuelven fácilmente aplicando métodos de dos ecuaciones con dos variables. El ejemplo 5 ilustra una de las aplicaciones de este tipo de sistemas.

EJEMPLO 5 **Dieta**

Una persona desea tomar leche y jugo de naranja para aumentar la cantidad de calcio y vitamina A en su dieta diaria. Una onza de leche contiene 41 miligramos de calcio y 59 microgramos* de vitamina A. Una onza de jugo de naranja contiene 5 miligramos de calcio y 75 microgramos de vitamina A. ¿Cuántas onzas de leche y de jugo de naranja debe tomar cada día para obtener exactamente 550 miligramos de calcio y 1 300 microgramos de vitamina A?

Solución Primero se definen las variables relevantes:

$$x = \text{Número de onzas de leche}$$

$$y = \text{Número de onzas de jugo de naranja}$$

La información dada se resume en la tabla 1. Es conveniente organizar la tabla de manera que la información relacionada con cada variable se enliste en una columna más que en un renglón.

TABLA 1

	Leche	Jugo de naranja	Requerimientos totales
Calcio (mg)	41	5	550
Vitamina A (μg)	59	75	1 300

Ahora se usa la información de la tabla para formar ecuaciones que impliquen a x y a y:

$$\begin{pmatrix}\text{Calcio en } x \text{ onzas}\\ \text{de leche}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Calcio en } y \text{ onzas}\\ \text{de jugo de naranja}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Total de calcio}\\ \text{necesario (mg)}\end{pmatrix}$$

$$41x + 5y = 550$$

$$\begin{pmatrix}\text{Vitamina A en } x \text{ onzas}\\ \text{de leche}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Vitamina A en } y \text{ onzas}\\ \text{de jugo de naranja}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Total de vitamina A}\\ \text{necesaria } (\mu\text{g})\end{pmatrix}$$

$$59x + 75y = 1\,300$$

Resuelva mediante eliminación por suma:

$$\begin{aligned} -615x - 75y &= -8\,250 \\ 59x + 75y &= 1\,300 \\ \hline -556x \quad &= -6\,950 \\ x &= 12.5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 41(12.5) + 5y &= 550 \\ 5y &= 37.5 \\ y &= 7.5 \end{aligned}$$

* Un microgramos (μg) es una millonésima (10^{-6}) de un gramo.

Tomando 12.5 onzas de leche y 7.5 onzas de jugo de naranja cada día se obtienen las cantidades requeridas de calcio y de vitamina A.

Comprobación

$$\begin{aligned} 41x + 5y &= 550 & 59x + 75y &= 1\,300 \\ 41(12.5) + 5(7.5) &\stackrel{?}{=} 550 & 59(12.5) + 75(7.5) &\stackrel{?}{=} 1\,300 \\ 550 &\stackrel{\checkmark}{=} 550 & 1\,300 &\stackrel{\checkmark}{=} 1\,300 \end{aligned}$$

Problema seleccionado 5

Una persona desea ingerir queso cottage y yogurt para aumentar la cantidad de proteína y de calcio en su dieta diaria. Una onza de queso cottage contiene 3 gramos de proteína y 15 miligramos de calcio. Una onza de yogurt contiene 1 gramo de proteína y 41 miligramos de calcio. ¿Cuántas onzas de queso cottage y de yogurt debe ingerir cada día para obtener exactamente 62 gramos de proteínas y 760 miligramos de calcio?

• Matrices

Al resolver sistemas de ecuaciones mediante eliminación por suma, los coeficientes de las variables y los términos constantes desempeñan un papel central. El proceso se puede hacer más eficiente de manera general y para un trabajo de computadora introduciendo una forma matemática denominada *matriz*. Una **matriz** es un arreglo rectangular de números escrito en paréntesis cuadrados. Dos ejemplos son

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & 6 \\ -2 & 12 & 8 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

A cada número en una matriz se le llama **elemento** de una matriz. La matriz A tiene seis elementos ordenados en dos renglones y tres columnas. La matriz B tiene 12 elementos ordenados en cuatro renglones y tres columnas. Si una matriz tiene m renglones y n columnas, se llama **matriz $m \times n$** (léase "matriz m por n"). La expresión $m \times n$ se conoce como **tamaño** de la matriz, y los números m y n se conocen como **dimensiones** de la matriz. Es importante notar que siempre se indica primero el número de renglones. Refiriéndonos a la ecuación anterior (2), A es una matriz 2×3 y B es una matriz 4×3. Una matriz con n renglones y n columnas se denomina **matriz cuadrada de orden n**. Una matriz con sólo una columna se llama **matriz columna**, y una matriz con sólo un renglón se llama **matriz renglón**. Estas definiciones se ilustran con lo siguiente:

$$\underset{\text{Matriz cuadrada de orden 3}}{\overset{3 \times 3}{\begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 1.0 \\ 0.0 & 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.0 & 0.2 \end{bmatrix}}} \qquad \underset{\text{Matriz columna}}{\overset{4 \times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}} \qquad \underset{\text{Matriz renglón}}{\overset{1 \times 4}{\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}}}$$

La **posición** de un elemento en una matriz es el renglón y columna que contiene al elemento. Esto se indica por lo general usando **notación con doble subíndice** a_{ij}, donde i es el renglón y j es la columna que contiene al elemento a_{ij}, como se ilustra a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 6 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{11} = 1, a_{12} = 5, a_{13} = -3 \\ a_{21} = 6, a_{22} = 0, a_{23} = -4 \end{matrix}$$

Note que a_{12} se lee "a subíndice uno dos" y no "a subíndice doce". Los elementos $a_{11} = 1$ y $a_{22} = 0$ conforman la *diagonal principal* de A. En general, la **diagonal principal** de una matriz A consiste de los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$.

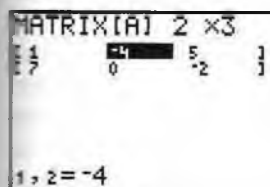


FIGURA 3 Notación de matriz en un dispositivo de graficación.

Comentario. La mayoría de los dispositivos de graficación tienen la capacidad de almacenar y realizar operaciones con matrices. La figura 3 muestra la matriz A desplegada en la pantalla de edición de una calculadora gráfica en particular. El tamaño de la matriz se presenta en la parte superior de la pantalla, y la posición del elemento seleccionado generalmente aparece en la parte inferior. Note que se usa una coma en la notación para indicar la posición. Esto es una práctica común en los dispositivos de graficación pero no en literatura matemática.

Se pueden usar los coeficientes y términos constantes en un sistema de ecuaciones lineales para formar diversas matrices de interés en nuestro trabajo. Con relación al sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 5 \\ x + 2y &= -3 \end{aligned} \tag{3}$$

se tienen las matrices siguientes:

Matriz de coeficientes	Matriz constante	Matriz aumentada de coeficientes
$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{array}\right]$

La matriz aumentada con coeficientes se usará en esta sección. Las otras matrices se usarán en secciones posteriores. La matriz aumentada de coeficientes contiene las partes esenciales del sistema, es decir, los coeficientes y las constantes. La barra vertical sólo se incluye como una ayuda visual para separar los coeficientes de los términos constantes. (Las matrices introducidas y desplegadas en una calculadora gráfica o computadora no mostrarán esta línea.)

Para facilitar la generalización de los sistemas grandes en las secciones siguientes, se va a cambiar la notación de las variables en el sistema (3) a una forma con subíndices (pronto se acabarán las literales, pero no se acabarán los subíndices). Es decir, en lugar de x y y, se usará x_1 y x_2, respectivamente, y el sistema (3) se escribirá como

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= -3 \end{aligned}$$

En general, asociado con cada sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= k_2 \end{aligned} \tag{4}$$

donde x_1 y x_2 son variables, se tiene la **matriz aumentada** del sistema:

Columna 1 (C_1)
Columna 2 (C_2)
Columna 3 (C_3)

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \text{— Renglón 1 } (R_1) \\ \text{— Renglón 2 } (R_2) \end{array}$$

Esta matriz contiene las partes esenciales del sistema (4). Nuestro objetivo es aprender cómo manejar matrices aumentadas de manera tal que resulte una solución al sistema (4), si existe una solución.

En nuestro análisis anterior del uso de la eliminación mediante suma, se dijo que dos sistemas eran equivalentes si tenían la misma solución. Y se usaron las operaciones del teorema 2 para transformar un sistema en otro equivalente. Paralelo a esta consideración, se dice que dos matrices aumentadas son de **renglón equivalente**, lo cual se denota por el símbolo ~ entre las dos matrices, si son matrices aumentadas de sistemas de ecuaciones equivalentes. Por otra parte, se utilizan las operaciones enumeradas en el teorema 3 que se muestra a continuación, para transformar matrices aumentadas en matrices de renglón equivalente. Note que el teorema 3 es una consecuencia directa del teorema 2.

Teorema 3 **Operaciones elementales de renglón que producen matrices de renglón equivalente**

Una matriz aumentada se transforma en una matriz de renglón equivalente si se realiza cualquiera de las siguientes **operaciones renglón**:

1. Dos renglones se intercambian ($R_i \leftrightarrow R_j$).
2. Se multiplica un renglón por una constante diferente de cero ($kR_i \rightarrow R_i$).
3. Se suma el múltiplo constante de un renglón con el de otro renglón ($kR_j + R_i \rightarrow R_i$)

[*Nota:* La flecha significa "reemplaza".]

• Solución de sistemas lineales mediante matrices aumentadas

El uso del teorema 3 en la solución de sistemas en la forma de (3) se ilustra mejor con ejemplos.

EJEMPLO 6 **Solución de un sistema mediante métodos de matrices aumentadas**

Resuelva, mediante métodos de matrices aumentadas:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 &= 7 \end{aligned} \qquad (3)$$

Solución Se comienza por escribir la matriz aumentada correspondiente al sistema (3):

$$\left[\begin{array}{rr|r} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \end{array}\right] \tag{4}$$

Nuestro objetivo es usar operaciones renglón a partir del teorema 3 para intentar transformar la matriz (4) en la forma

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \end{array}\right] \tag{5}$$

donde m y n son números reales. La solución del sistema (3) será entonces obvia, ya que la matriz (5) será la matriz aumentada del sistema siguiente:

$$x_1 = m \qquad x_1 + 0x_2 = m$$

$$x_2 = n \qquad 0x_1 + x_2 = n$$

Ahora se procede a usar las operaciones renglón para transformar (4) en la forma (5).

Paso 1. Para obtener un 1 en la esquina superior izquierda, se intercambian los renglones 1 y 2 (teorema 3, parte 1):

$$\left[\begin{array}{rr|r} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora se verá por qué se optó por el teorema 2, parte 1.

Paso 2. Para obtener un 0 en la esquina inferior izquierda, se multiplica R_1 por -3 y se suma a R_2 (teorema 3, parte 3). Esto cambia a R_2 pero no a R_1. Algunas personas encuentran útil escribir $(-3)R_1$ fuera de la matriz para reducir errores aritméticos:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{(-3)R_1 + R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 10 & -20 \end{array}\right]$$

$$-3 \qquad 6 \qquad -21$$

Paso 3. Para obtener un 1 en el segundo renglón, segunda columna, se multiplica R_2 por $\frac{1}{10}$ (teorema 3, parte 2):

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 10 & -20 \end{array}\right] \underset{\sim}{\tfrac{1}{10}R_2 \to R_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Paso 4. Para obtener un 0 en el primer renglón, segunda columna, se multiplica R_2 por 2 y se suma el resultado a R_1 (teorema 3, parte 3). Esto cambia a R_1 pero no a R_2.

$$0 \qquad 2 \qquad 4$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \underset{\sim}{2R_2 + R_1 \to R_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

¡Hemos cumplido nuestro objetivo! La última matriz es la matriz aumentada para el sistema

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 \\ x_2 &= -2 \end{aligned} \tag{6}$$

Como el sistema (6) es equivalente al sistema original (3), se resolvió el sistema (3). Es decir, $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$.

Comprobación

$$\begin{array}{rr} 3x_1 + 4x_2 = 1 & x_1 - 2x_2 = 7 \\ 3(3) + 4(-2) \stackrel{?}{=} 1 & 3 - 2(-2) \stackrel{?}{=} 7 \\ 1 \stackrel{\checkmark}{=} 1 & 7 \stackrel{\checkmark}{=} 7 \end{array}$$

El proceso anterior se escribe de manera más compacta como sigue:

Paso 1: Necesita un 1 aquí

$$\left[\begin{array}{rr|r} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 7 \end{array}\right] \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

Paso 2: Necesita un 0 aquí

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{array}\right] \quad (-3)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$-3 \quad 6 \quad -21$$

Paso 3: Necesita un 1 aquí

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 10 & -20 \end{array}\right] \quad \tfrac{1}{10}R_2 \rightarrow R_2$$

$$0 \quad 2 \quad -4$$

Paso 4: Necesita un 0 aquí

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad 2R_2 + R_1 \rightarrow R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Por lo tanto, $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$.

Problema seleccionado 6 Resuelva, mediante métodos de la matriz aumentada:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -7 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 El resumen al final del ejemplo 6 muestra cinco matrices aumentadas de coeficientes. Escriba el sistema lineal que representa cada matriz, resuelva cada sistema gráficamente, y analice la relación entre estas soluciones.

EJEMPLO 7 Solución de un sistema mediante métodos de matrices aumentadas

Resuelva, mediante métodos de matriz aumentada:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Solución

Paso 1: Necesita un 1 aquí

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & 7 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \qquad \tfrac{1}{2}R_1 \to R_1$$

Paso 2: Necesita un 0 aquí

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right] \qquad (-3)R_1 + R_2 \to R_2$$

$$-3 \quad \tfrac{9}{2} \quad -\tfrac{21}{2}$$

Paso 3: Necesita un 1 aquí

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & \frac{17}{2} & -\frac{17}{2} \end{array}\right] \qquad \tfrac{2}{17}R_2 \to R_2$$

$$0 \quad \tfrac{3}{2} \quad -\tfrac{3}{2}$$

Paso 4: Necesita un 0 aquí

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \qquad \tfrac{3}{2}R_2 + R_1 \to R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Así, $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$. Se debe comprobar esta solución en el sistema original.

Problema seleccionado 7 Resuelva, mediante métodos de matriz aumentada:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &= 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Solución de un sistema mediante métodos de matriz aumentada

Resuelva, mediante métodos de matriz aumentada:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4 \\ -6x_1 + 3x_2 &= -12 \end{aligned} \tag{7}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 4 \\ -6 & 3 & -12 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}R_1 \to R_1 \text{ (Esto produce un 1 en la esquina superior izquierda.)} \\ \tfrac{1}{3}R_2 \to R_2 \text{ (Esto simplifica } R_2\text{.)} \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{array}\right] \qquad 2R_1 + R_2 \to R_2 \text{ (Esto produce un 0 en la esquina inferior izquierda.)}$$

$$2 \quad -1 \quad 4$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La última matriz corresponde al sistema

$$\begin{aligned} x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 &= 2 \qquad x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 = 2 \\ 0 &= 0 \qquad 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{aligned}$$

Así, $x_1 = \frac{1}{2}x_2 + 2$. Por lo tanto, para cualquier número real t, si $x_2 = t$, entonces $x_1 = \frac{1}{2}t + 2$. Es decir, el conjunto solución está descrito por

$$(\tfrac{1}{2}t + 2, t) \qquad t \text{ es un número real} \tag{8}$$

Por ejemplo, si $t = 6$, entonces $(5, 6)$ es una solución particular; si $t = -2$, entonces $-2)$ es otra solución particular; y así en forma sucesiva. Geométricamente, las gráficas de las dos ecuaciones originales coinciden y existe un número infinito de soluciones.

> **En general, si se finaliza con un renglón de ceros en una matriz aumentada para un sistema de dos ecuaciones con dos variables, el sistema es dependiente y existe un número infinito de soluciones.**

Comprobación

Lo siguiente es una comprobación de que (8) proporciona una solución para el sistema (7) para cualquier número real t:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4 \\ 2(\tfrac{1}{2}t + 2) - t &\stackrel{?}{=} 4 \\ t + 4 - t &\stackrel{?}{=} 4 \\ 4 &\stackrel{\checkmark}{=} 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -6x_1 + 3x_2 &= -12 \\ -6(\tfrac{1}{2}t + 2) + 3t &\stackrel{?}{=} -12 \\ -3t - 12 + 3t &\stackrel{?}{=} -12 \\ -12 &\stackrel{\checkmark}{=} -12 \end{aligned}$$

Problema seleccionado 8

Resuelva, mediante métodos de matriz aumentada:

$$\begin{aligned} -2x_1 + 6x_2 &= 6 \\ 3x_1 - 9x_2 &= -9 \end{aligned}$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3

La mayoría de los dispositivos de graficación pueden realizar operaciones con renglones. La figura 4 muestra la solución del ejemplo 8 en una calculadora de graficación en particular. Consulte su manual para ver cómo realizar operaciones con renglones y resuelva el problema seleccionado 8 en su dispositivo de graficación.

FIGURA 4 Ejecución de operaciones de renglón en un dispositivo de graficación.

```
[A]
   [[2  -1 4  ]
    [-6 3   -12]]
*row(1/2,[A],1)→
[A]
  [[1  -.5 2  ]
   [-6 3   -12]]
```

```
*row(1/3,[A],2)→
[A]
   [[1  -.5 2 ]
    [-2 1   -4]]
*row+(2,[A],1,2)
→[A]
      [[1 -.5 2]
       [0 0   0]]
```

EJEMPLO 9 Solución de un sistema mediante métodos de matriz aumentada

Resuelva, mediante métodos de matriz aumentada:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -3 \end{array}\right] \quad (-2)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & -6 & -4 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -7 \end{array}\right] \quad R_2 \text{ implica la contradicción: } 0 = -7$$

Ésta es la matriz aumentada del sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 2 \qquad x_1 + 3x_2 = 2 \\ 0 &= -7 \qquad 0x_1 + 0x_2 = -7 \end{aligned}$$

No se satisface la segunda ecuación para algún par ordenado de números reales. Por lo tanto, el sistema original es inconsistente y no tiene solución. ¡De otra manera, se hubiera comprobado que $0 = -7$!

Así, si lo que se obtiene son ceros a la izquierda de la barra vertical y un número diferente de cero a la derecha de la barra en un renglón de una matriz aumentada, entonces el sistema es inconsistente y no tiene soluciones.

Problema seleccionado 9 Resuelva, mediante métodos de matrices aumentadas:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 4x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Resumen

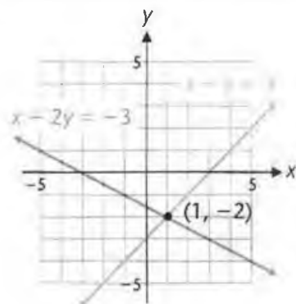
Para los números reales m, n, p: $p \neq 0$:

Forma 1: Una solución única (consistente e independiente)	**Forma 2: Muchas soluciones infinitas (consistentes y dependientes)**	**Forma 3: No hay solución (inconsistente)**
$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & m & n \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{cc\|c} 1 & m & n \\ 0 & 0 & p \end{array}\right]$

El proceso para resolver sistemas de ecuaciones descrito en esta sección se conoce como *eliminación Gauss-Jordan*. En la siguiente sección se usará este método para resolver sistemas a gran escala, que incluyen sistemas en los que el número de ecuaciones y el número de variables no son iguales.

Respuestas a los problemas seleccionados

1.



$x = 1, y = -2$

Comprobación:

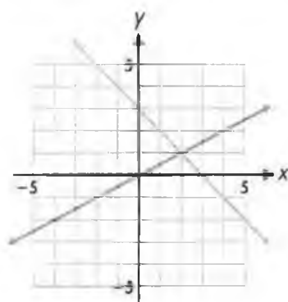
$$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 1 - (-2) &\stackrel{?}{=} 3 \\ 3 &\stackrel{\checkmark}{=} 3 \\ x + 2y &= -3 \\ 1 + 2(-2) &\stackrel{?}{=} -3 \\ -3 &\stackrel{\checkmark}{=} -3 \end{aligned}$$

2. (A) (3, 2) o $x = 3$ y $y = 2$ (B) No hay solución (C) Número infinito de soluciones
3. $(-1.92, 4.23)$ o $x = -1.92$ y $y = 4.23$ 4. $(-1, 3)$, o $x = -1$ y $y = 3$
5. 16.5 onzas de queso cottage, 12.5 onzas de yogurt
6. $x_1 = -2, x_2 = 3$ 7. $x_1 = 2, x_2 = -1$
8. El sistema es dependiente. Para cualquier número real t, $x_2 = t$, $x_1 = 3t - 3$ es una solución.
9. Inconsistente (no hay solución)

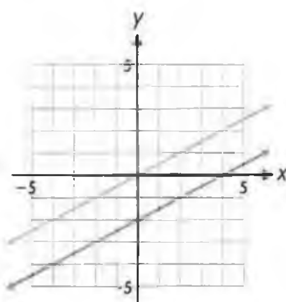
EJERCICIO 8-1

A

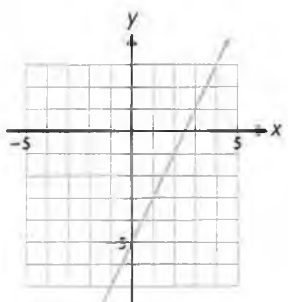
Relacione cada sistema en los problemas del 1 al 4 con una las gráficas siguientes, y use la gráfica para resolver el sistema.



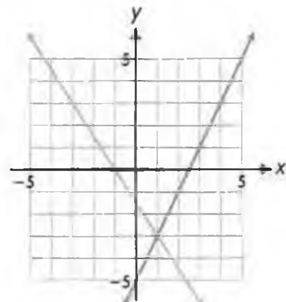
(a)



(b)



(c)



(d)

1. $2x - 4y = 8$
   $x - 2y = 0$

2. $x + y = 3$
   $x - 2y = 0$

3. $2x - y = 5$
   $3x + 2y = -3$

4. $4x - 2y = 10$
   $2x - y = 5$

Resuelva los problemas del 5 al 10 mediante graficación.

5. $x + y = 7$
   $x - y = 3$

6. $x - y = 2$
   $x + y = 4$

7. $3x - 2y = 12$
   $7x + 2y = 8$

8. $3x - y = 2$
   $x + 2y = 10$

9. $3u + 5v = 15$
   $6u + 10v = -30$

10. $m + 2n = 4$
    $2m + 4n = -8$

Resuelva los problemas del 11 al 14 mediante eliminación por suma.

11. $2x + 3y = 1$
    $3x - y = 7$

12. $2m - n = 10$
    $m - 2n = -4$

13. $4x - 3y = 15$
    $3x + 4y = 5$

14. $5x + 2y = 1$
    $2x - 3y = -11$

Los problemas del 15 al 24 se refieren a las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & -6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 0 \\ -3 & 6 & 9 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

15. ¿Cuál es el tamaño de A? ¿Y el de C?
16. ¿Cuál es el tamaño de B? ¿Y el de D?
17. Identifique a todas las matrices renglón.
18. Identifique a todas las matrices columna.
19. Identifique a todas las matrices cuadradas.
20. ¿Cuántos renglones necesitaría la matriz A para ser una matriz cuadrada?
21. Para la matriz A, encuentre a_{12} y a_{23}.
22. Para la matriz A, encuentre a_{21} y a_{13}.
23. Encuentre los elementos en la diagonal principal de la matriz B.
24. Encuentre los elementos en la diagonal principal de la matriz A.

En los problemas del 25 al 36 realice cada una de las operaciones renglón de la matriz siguiente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & -8 \end{array}\right]$$

25. $R_1 \leftrightarrow R_2$
26. $\frac{1}{2}R_2 \to R_2$
27. $-4R_1 \to R_1$
28. $-2R_1 \to R_1$
29. $2R_2 \to R_2$
30. $-1R_2 \to R_2$
31. $(-4)R_1 + R_2 \to R_2$
32. $(-\frac{1}{2})R_2 + R_1 \to R_1$
33. $(-2)R_1 + R_2 \to R_2$
34. $(-3)R_1 + R_2 \to R_2$

35. $(-1)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$ **36.** $1R_1 + R_2 \rightarrow R_2$

Resuelva los problemas 37 y 38 mediante métodos de matriz aumentada. Escriba el sistema lineal representado por cada matriz aumentada en su solución, y resuelva cada uno de estos sistemas gráficamente. Analice la relación entre las soluciones de estos sistemas.

37. $x_1 + x_2 = 7$
$x_1 - x_2 = 1$

38. $x_1 + x_2 = 5$
$x_1 - x_2 = -3$

B

Resuelva los problemas del 39 al 50 mediante métodos de matriz aumentada:

39. $x_1 - 4x_2 = -2$
$-2x_1 + x_2 = -3$

40. $x_1 - 3x_2 = -5$
$-3x_1 - x_2 = 5$

41. $3x_1 - x_2 = 2$
$x_1 + 2x_2 = 10$

42. $2x_1 + x_2 = 0$
$x_1 - 2x_2 = -5$

43. $x_1 + 2x_2 = 4$
$2x_1 + 4x_2 = -8$

44. $2x_1 - 3x_2 = -2$
$-4x_1 + 6x_2 = 7$

45. $2x_1 + x_2 = 6$
$x_1 - x_2 = -3$

46. $3x_1 - x_2 = -5$
$x_1 + 3x_2 = 5$

47. $3x_1 - 6x_2 = -9$
$-2x_1 + 4x_2 = 6$

48. $2x_1 - 4x_2 = -2$
$-3x_1 + 6x_2 = 3$

49. $4x_1 - 2x_2 = 2$
$-6x_1 + 3x_2 = -3$

50. $-6x_1 + 2x_2 = 4$
$3x_1 - x_2 = -2$

En los problemas del 51 al 54 use una rutina de intersección en un dispositivo de graficación para aproximar la solución de cada sistema con dos cifras decimales.

51. $2x - 3y = -5$
$3x + 4y = 13$

52. $7x - 3y = 20$
$5x + 2y = 8$

53. $3.5x - 2.4y = 0.1$
$2.6x - 1.7y = -0.2$

54. $5.4x + 4.2y = -12.9$
$3.7x + 6.4y = -4.5$

C

55. Los coeficientes de los tres sistemas que se muestran a continuación son muy similares. Se podría pensar que los conjuntos solución de los tres sistemas también podrían ser casi idénticos. Desarrolle la evidencia para o contra esta suposición considerando las gráficas de los sistemas y las soluciones obtenidas mediante eliminación por suma.

(A) $4x + 5y = 4$
$9x + 11y = 4$

(B) $4x + 5y = 4$
$8x + 11y = 4$

(C) $4x + 5y = 4$
$8x + 10y = 4$

56. Repita el problema 55 para los sistemas siguientes.

(A) $5x - 6y = -10$
$11x - 13y = -20$

(B) $5x - 6y = -10$
$10x - 13y = -20$

(C) $5x - 6y = -10$
$10x - 12y = -20$

Resuelva los problemas del 57 al 60 mediante métodos de matriz aumentada. Use un dispositivo de graficación para realizar las operaciones renglón.

57. $0.8x_1 + 2.88x_2 = 4$
$1.25x_1 + 4.34x_2 = 5$

58. $2.7x_1 - 15.12x_2 = 27$
$3.25x_1 - 18.52x_2 = 33$

59. $4.8x_1 - 40.32x_2 = 295.2$
$-3.75x_1 + 28.7x_2 = -211.2$

60. $5.7x_1 - 8.55x_2 = -35.91$
$4.5x_1 + 5.73x_2 = 76.17$

APLICACIONES

61. Acertijo. Una amiga suya salió de una oficina de correos después de gastar \$19.50 en timbres de 32 y 23 centavos. Si compró 75 timbres en total, ¿cuántos timbres de cada tipo compró?

62. Acertijo. Un parquímetro contiene monedas de 5 y 10 centavos que suman \$6.05. Si en total contiene 89 monedas, ¿cuántas hay de cada tipo?

63. Inversiones. El bono A paga 6% de interés compuesto anual y el B, 9%. Si una inversión de \$200 000 en los dos bonos combinados gana \$14 775 al año, ¿cuánto se invirtió en cada bono?

64. Inversiones. La historia indica que un fondo mutuo A ganará 14.6% anual y un fondo mutuo B, 9.8% en el mismo periodo. ¿Cómo se deberá dividir una inversión entre los dos fondos para producir una ganancia del 11%?

65. Química. Un químico tiene dos soluciones de ácido sulfúrico: una solución al 20% y otra al 80%. ¿Qué cantidad de cada solución se deberá usar para obtener 100 litros de una solución al 62%?

66. Química. Un químico tiene dos soluciones: una que contiene alcohol al 40% y otra que contiene alcohol al 70%. ¿Qué cantidad de cada solución se deberá usar para obtener 80 litros de una solución al 49%?

67. Nutrición. Ciertos animales en un experimento deben seguir una dieta estricta. Cada animal recibe, entre otras cosas, 54 gramos de proteína y 24 de grasa. El técnico del laboratorio puede comprar dos mezclas de comida con las composiciones siguientes: La mezcla A tiene 15% de proteína y 10% de grasa; la mezcla B tiene 30% de proteína y 5% de grasa. ¿Cuántos gramos de cada mezcla se deberán usar para obtener una dieta correcta para un solo animal?

68. Nutrición de las plantas. Un fruticultor puede usar dos tipos de fertilizante en su cultivo de naranjas, la marca A y la marca B. Cada bolsa de la marca A contiene 9 libras de nitrógeno y 5 de ácido fosfórico. Cada bolsa de la marca B contiene 8 libras de nitrógeno y 6 de ácido fosfórico. Las pruebas indican que el cultivo necesita 770 libras de nitrógeno y 490 de ácido fosfórico. ¿Cuántas bolsas de cada marca se deberán usar para proporcionar las cantidades necesarias de nitrógeno y de ácido fosfórico?

69. Cargos por entrega. Servicios Unidos, una empresa nacional de mensajería, cobra un precio base por la entrega nocturna de paquetes que pesan una libra o menos, y un cargo extra por cada libra adicional (o fracción). A un cliente se le cobra $27.75 por enviar un paquete de 5 libras y $64.50 por enviar otro de 20 libras. Encuentre el precio base y el cargo extra por cada libra adicional.

70. Cargos por entrega. Refiérase al problema 69. Envíos Federales, un servicio de la competencia para envíos nocturnos, informa al cliente del problema 69 que podría enviar el paquete de 5 libras por $29.95 y el de 20 libras por $59.20.

(A) Si Envíos Federales calcula su costo de la misma manera que Servicios Unidos, encuentre el precio base y el cargo extra que cobra esta compañía.

(B) Establezca una regla simple que pueda usar el cliente para elegir el más barato de los dos servicios por envío de paquetes. Justifique su respuesta.

71. Asignación de recursos. Una fábrica productora de café utiliza granos de café colombiano y brasileño para producir dos mezclas, fuerte y suave. Una libra de la mezcla de café fuerte necesita 12 onzas de granos colombianos y 4 de granos brasileños. Una libra de la mezcla suave necesita 6 onzas de granos colombianos y 10 de granos brasileños. El café se envía en sacos de 132 libras. La compañía dispone de 50 sacos de granos colombianos y 40 de granos brasileños. ¿Cuántas libras de cada mezcla se tendrán que producir para usar todos los granos disponibles?

72. Asignación de recursos. Refiérase al problema 71.

(A) Si la compañía decide descontinuar la producción de la mezcla fuerte y producir sólo la mezcla suave, ¿cuántas libras de la mezcla suave puede producir y cuántas onzas de granos de cada tipo usará?

(B) Repita el inciso (A) si la compañía decide descontinuar la producción de la mezcla suave y producir sólo la mezcla fuerte.

SECCIÓN 8-2 Eliminación Gauss-Jordan

- Matrices reducidas
- Resolución de sistemas mediante eliminación Gauss-Jordan
- Aplicación

Ahora que se ha adquirido algo de experiencia en operaciones renglón en matrices aumentadas simples, se considerarán sistemas que implican más de dos variables. Además, no se necesita que un sistema tenga el mismo número de ecuaciones que de variables. Resulta que los sistemas de ecuaciones lineales con dos ecuaciones y dos variables, establecidos en el teorema 1 en la sección 8-1, se cumplen de hecho para sistemas lineales de cualquier tamaño.

Posibles soluciones de un sistema lineal

Se puede demostrar que cualquier sistema lineal debe tener exactamente una solución, ninguna solución, o un número infinito de soluciones, sin importar el número de ecuaciones o de variables en el sistema. Los términos *único, consistente, inconsistente, dependiente* e *independiente* se utilizan para describir esas soluciones, como se hace para sistemas con dos variables.

Matrices reducidas

En la sección anterior se usaron operaciones renglón para transformar la matriz aumentada de coeficientes para un sistema de dos ecuaciones con dos variables

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= k_2 \end{aligned}$$

en una de las siguientes formas simplificadas:

$$\underset{\text{Forma 1}}{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \end{array}\right]} \qquad \underset{\text{Forma 2}}{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & n \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]} \qquad \underset{\text{Forma 3}}{\left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & n \\ 0 & 0 & p \end{array}\right]} \tag{1}$$

donde m, n y p son números reales, $p \neq 0$. Cada una de estas formas reducidas representa un sistema que tiene un tipo diferente de conjunto solución, y dos de estas formas no son de renglón equivalente. De esta manera, se considera que cada una de éstas es una forma simplificada diferente. Ahora se considerarán sistemas más grandes con más variables y más ecuaciones.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Las formas anteriores 1, 2 y 3 representan sistemas que tienen, respectivamente, una solución única, un número infinito de soluciones y ninguna solución. Analice el número de soluciones para los sistemas de tres ecuaciones con tres variables representados por las siguientes matrices aumentadas de coeficientes.

$$\text{(A)}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{(B)}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{(C)}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Como no existe límite superior en el número de variables o el número de ecuaciones en un sistema lineal, no es posible enlistar de manera explícita todas las posibles "formas simplificadas" para sistemas grandes, como se hizo para sistemas de dos ecuaciones con dos variables. En lugar de esto, se establece una definición general de una forma simplificada llamada *matriz reducida* que se puede aplicar a todas las matrices y sistemas, sin importar el tamaño.

DEFINICIÓN 1 **Matriz reducida**

Una matriz está en **forma reducida** si:

1. Cada renglón que consiste totalmente de ceros está debajo de cualquier renglón que tiene por lo menos un elemento diferente de cero.
2. El elemento en el extremo izquierdo diferente de 0 en cada renglón es 1.
3. La columna que contiene al 1 en el extremo izquierdo de cierto renglón tiene ceros arriba y debajo de 1.
4. El 1 en el extremo izquierdo de cualquier renglón está a la derecha del 1 del extremo izquierdo del renglón precedente.

EJEMPLO 1 **Formas reducidas**

Las matrices que se muestran a continuación no están en forma reducida. Indique qué condición se viola en la definición para cada matriz. Establezca la(s) operación(es) necesaria(s) de renglón para transformar la matriz a una forma reducida, y encuentre la forma reducida.

(A) $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$ (B) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

(C) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$ (D) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$

Soluciones

(A) Se viola la condición 4: El 1 en el extremo izquierdo en el renglón 2 no está a la derecha del 1 en el extremo izquierdo en el renglón 1. Realice la operación renglón $R_1 \leftrightarrow R_2$ para obtener la forma reducida:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

(B) Se viola la condición 3: La columna que contiene el 1 en el extremo izquierdo en el renglón 2 no tiene un cero arriba del 1. Realice la operación renglón $2R_2 + R_1 \rightarrow R_1$ para obtener la forma reducida:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

(C) Se viola la condición 1: Todos los elementos son cero en el segundo renglón, y no está debajo de cualquier renglón que tenga al menos un elemento diferente de cero. Realice la operación renglón $R_2 \leftrightarrow R_3$ para obtener la forma reducida:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(D) Se viola la condición 2: El elemento en el extremo izquierdo diferente de cero en el renglón 2 no es un 1. Realice la operación renglón $\frac{1}{2} R_2 \rightarrow R_2$ para obtener la forma reducida:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

Las matrices que se muestran en seguida no están en forma reducida. Indique cuál es la condición en la definición que se viola para cada matriz. Establezca la(s) operación(es) renglón necesaria(s) para transformar la matriz a su forma reducida y encuentre la forma reducida.

(A) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -6 \end{array}\right]$ (B) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(C) $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ (D) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$

Resolución de sistemas mediante eliminación Gauss-Jordan

Ahora se está listo para bosquejar el método de eliminación Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El método transforma de manera sistemática una matriz aumentada en una reducida. El sistema correspondiente para una matriz aumentada de coeficientes se llama **sistema reducido**. Como se verá, los sistemas reducidos son fáciles de resolver.

El método de eliminación Gauss-Jordan se llama así en honor al matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1885) y al matemático francés Camille Jordan (1838-1922). Gauss, uno de los matemáticos más grandes de todos los tiempos, utilizó este método para resolver sistemas de ecuaciones, el cual después Jordan volvió de uso general.

EJEMPLO 2

Solución de un sistema mediante eliminación Gauss-Jordan

Resuelva mediante eliminación Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Solución

Escriba la matriz aumentada y siga los pasos que se indican a la derecha para producir una forma reducida.

Necesita un 1 aquí

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad R_1 \leftrightarrow R_3$$

Paso 1. Seleccione la columna en el extremo izquierdo diferente de cero y obtenga un 1 en la parte superior.

Necesita ceros aquí

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ (-3)R_1 + R_2 \to R_2 \\ (-2)R_1 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

Paso 2: Use múltiplos del renglón que contiene el 1 del paso 1 para obtener ceros en todos los lugares restantes en la columna que contenga

Necesita un 1 aquí

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -7 & 7 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right] \quad 0.1R_2 \to R_2$$

Paso 3: Repita el paso 1 con la *submatriz* formada al eliminar (mentalmente) el renglón superior.

Necesita ceros aquí

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -0.7 & 0.7 \\ 0 & 4 & -3 & 3 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 3R_2 + R_1 \to R_1 \\ \\ (-4)R_2 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

Paso 4: Repita el paso 2 con la *matriz entera*.

Necesita un 1 aquí

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.1 & 2.1 \\ 0 & 1 & -0.7 & 0.7 \\ 0 & 0 & -0.2 & 0.2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ \\ (-5)R_3 \to R_3 \end{array}$$

Paso 3: Repita el paso 1 con la *submatriz* formada al eliminar (mentalmente los dos renglones superiores.

Necesita ceros aquí

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0.1 & 2.1 \\ 0 & 1 & -0.7 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} 0.1R_3 + R_1 \to R_1 \\ 0.7R_3 + R_2 \to R_2 \\ \\ \end{array}$$

Paso 4: Repita el paso 2 con la *matriz entera*.

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

La matriz está ahora en forma reducida, y se puede proceder a resolver el sistema reducido.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= 2 \\ x_2 \quad &= 0 \\ x_3 &= -1 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -1$. Debe comprobar esta solución en el sistema original.

Eliminación Gauss-Jordan

Paso 1. Seleccione la columna del extremo izquierdo diferente de cero y use las operaciones renglón adecuadas para obtener un 1 en la parte superior.

Paso 2. Use múltiplos del renglón que contiene el 1 del paso 1 para obtener ceros en todos los lugares restantes en la columna que contiene este 1.

Paso 3. Repita el paso 1 con la **submatriz** formada al eliminar (mentalmente) el renglón usado en el paso 2 y todos los renglones arriba de este renglón.

Paso 4. Repita el paso 2 con la **matriz entera**, incluyendo los renglones eliminados mentalmente. Continúe este proceso hasta que no se pueda avanzar más.

[*Nota:* Si en cierto punto del proceso se obtiene un renglón con ceros a la izquierda de la línea vertical y un número diferente de cero a la derecha, hay que detenerse, pues se tiene una contradicción: $0 = n, n \neq 0$. Se puede concluir entonces que el sistema no tiene solución.]

Comentarios

1. Aun cuando cada matriz tenga una forma reducida única, la secuencia de pasos (algoritmo) presentada aquí para transformar una matriz en una forma reducida no es única. Es decir, también otras secuencias de pasos (que utilizan operaciones renglón) pueden producir una matriz reducida. (Por ejemplo, es posible utilizar operaciones renglón de tal manera que los cálculos que impliquen fracciones sean mínimos.) Pero se hace énfasis de nuevo en que no se está interesado en los métodos a mano más eficientes para transformar matrices pequeñas a formas reducidas. El interés principal radica en darle a usted un poco de experiencia con un método adecuado para resolver sistemas a gran escala, en una computadora o en un dispositivo de graficación.
2. La mayoría de los dispositivos de graficación tienen la capacidad de encontrar formas reducidas, directamente o con algo de programación. En la figura 1 se ilustra la solución del ejemplo 2 en una calculadora gráfica que tiene una rutina preconstruida para encontrar formas reducidas. Advierta que en el renglón 2 y columna 4 de la forma reducida la calculadora gráfica ha desplegado el número muy pequeño $-3.5E\text{-}13$ en lugar del valor exacto 0. Esto es algo que sucede a menudo en una calculadora gráfica y no causa problemas. Sólo reemplace cualquiera de los números muy pequeños desplegados en notación científica con 0.

```
A
        [[2 -2 1  3]
         [3 1  -1 7]
         [1 -3 2  0]]
rref A
    [[1 0 0 2        ]
     [0 1 0 -3.5E-13]
     [0 0 1 -1       ]]
```

FIGURA 1 Eliminación Gauss-Jordan en una calculadora gráfica.

Problema seleccionado 2 Resuelva mediante eliminación Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Solución de un sistema mediante eliminación Gauss-Jordan

Resuelva mediante eliminación Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 8x_2 + 7x_3 &= 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -4 & 1 & -4 \\ 4 & -8 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right] \quad 0.5R_1 \to R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0.5 & -2 \\ 4 & -8 & 7 & 2 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-4)R_1 + R_2 \to R_2 \\ 2R_1 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad 0.2R_2 \to R_2$$

Observe que la columna 3 es la columna en el extremo izquierdo diferente de cero en esta submatriz.

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0.5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-0.5)R_2 + R_1 \to R_1 \\ 2R_2 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

Se detiene la eliminación Gauss-Jordan, aunque la matriz no está en forma reducida, debido a que el último renglon produce una contradicción.

El sistema es inconsistente y no tiene solución.

Problema seleccionado 3 Resuelva mediante eliminación Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - x_3 &= -8 \\ 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 &= 4 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 11 \end{aligned}$$

PRECAUCIÓN

La figura 2 muestra la solución del ejemplo 3 en una calculadora gráfica con una rutina en forma reducida preconstruida. Observe que la calculadora gráfica no se detiene cuando ocurre una primera contradicción, como se hizo en la solución del ejemplo 3, sino que continúa para encontrar la forma reducida. Sin embargo, el último renglón en la forma reducida todavía produce una contradicción, lo cual indica que el sistema no tiene solución.

Reconocimiento de contradicciones en un dispositivo de graficación.

```
A
        [[2  -4 1  -4]
         [4  -8 7  2 ]
         [-2 4  -3 5 ]]
rref A
            [[1 -2 0 0]
             [0 0  1 0]
             [0 0  0 1]]
```

Solución de un sistema mediante eliminación Gauss-Jordan

Resuelva mediante eliminación Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 15 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 10 \\ -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -6 \end{aligned}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & -9 & 15 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \\ -2 & -3 & 4 & -6 \end{array}\right] \quad \tfrac{1}{3}R_1 \to R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -6 & 10 \\ -2 & -3 & 4 & -6 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-2)R_1 + R_2 \to R_2 \\ 2R_1 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \quad R_2 \leftrightarrow R_3$$

Note que se deben intercambiar los renglones 2 y 3 para obtener una entrada diferente de cero en la parte superior de la segunda columna de esta submatriz.

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad (-2)R_2 + R_1 \to R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta matriz está ahora en forma reducida. Escriba el sistema reducido correspondiente y resuélvalo.

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 &= -3 \\ x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

cuación que corresponde al tercer renglón (todos son 0) en la forma reducida, ya que se satisface para todos los valores de x_1, x_2 y x_3.

Note que la variable en el extremo izquierdo en cada ecuación aparece en una y sólo en una ecuación. Se despejan las variables en el extremo izquierdo x_1 y x_2 en términos de la variable restante x_3:

$$x_1 = -x_3 - 3$$
$$x_2 = 2x_3 + 4$$

Este sistema dependiente tiene un número infinito de soluciones. Se usará un parámetro para representar todas las soluciones. Si se hace $x_3 = t$, entonces para cualquier número real t,

$$x_1 = -t - 3$$
$$x_2 = 2t + 4$$
$$x_3 = t$$

Usted debe comprobar que $(-t - 3, 2t + 4, t)$ es una solución del sistema original para cualquier número real t. Algunas soluciones particulares son

$t = 0$	$t = -2$	$t = 3.5$
$(-3, 4, 0)$	$(-1, 0, -2)$	$(-6.5, 11, 3.5)$

Resuelva mediante eliminación Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - 6x_3 &= -3 \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$$

En general,

Hay muchas maneras de usar la matriz aumentada reducida de coeficientes para describir el número infinito de soluciones de un sistema independiente. Siempre se procederá como sigue: Resuelva cada ecuación en un sistema reducido para su variable en el extremo izquierdo y después introduzca un parámetro diferente para cada variable restante. Como lo ilustra la solución del ejemplo 4, este método produce una representación concisa y útil de las soluciones para un sistema dependiente. El ejemplo 5 ilustra un sistema dependiente donde se necesitan dos parámetros para describir la solución.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Explique por qué la definición de una forma reducida asegura que cada variable en el extremo izquierdo en un sistema reducido aparece en una y sólo en una ecuación, y que ninguna ecuación contiene más de una variable del extremo izquierdo. Analice los métodos para determinar si un sistema consistente es independiente o dependiente examinando la forma reducida.

EJEMPLO 5 Solución de un sistema mediante eliminación Gauss-Jordan

Resuelva mediante eliminación Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_5 &= -2 \end{aligned}$$

Solución

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \\ (-2)R_1 + R_2 \to R_2 \\ (-1)R_1 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & -3 \end{array}\right] \quad R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 4 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad (-2)R_2 + R_1 \to R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 3 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-3)R_3 + R_1 \to R_1 \\ R_3 + R_2 \to R_2 \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & -2 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \quad \text{La matriz está en forma reducida.}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 - 3x_5 &= 7 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_5 &= -3 \\ x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Despeje las variables en el extremo izquierdo x_1, x_2 y x_4 en términos de las variables restantes x_3 y x_5:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2x_3 + 3x_5 + 7 \\ x_2 &= -3x_3 - 2x_5 - 3 \\ x_4 &= 2x_5 \end{aligned}$$

Si se hace $x_3 = s$ y $x_5 = t$, entonces para cualesquiera de los números reales s y t,

$$\begin{aligned} x_1 &= 2s + 3t + 7 \\ x_2 &= -3s - 2t - 3 \\ x_3 &= s \\ x_4 &= 2t \\ x_5 &= t \end{aligned}$$

es una solución. Se deja que usted realice la comprobación.

Problema seleccionado

Resuelva mediante eliminación Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 &= 3 \\ -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 &= -5 \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 - 4x_5 &= 6 \end{aligned}$$

♦ Aplicación

Considere ahora una aplicación que implique un sistema dependiente de ecuaciones.

EJEMPLO 6

Compras

Un fabricante de productos químicos quiere comprar una flotilla de 24 vagones con una capacidad de carga combinada de 250 000 galones. Se dispone de carros tanque con tres diferentes capacidades de carga: 6 000 galones, 8 000 galones y 18 000 galones. ¿Cuántos carros tanque de cada tipo se deben comprar?

Solución

Sea

x_1 = Número de carros tanque de 6 000 galones

x_2 = Número de carros tanque de 8 000 galones

x_3 = Número de carros tanque de 18 000 galones

Entonces

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 24 && \text{Número total de carros tanque} \\ 6\,000x_1 + 8\,000x_2 + 18\,000x_3 &= 250\,000 && \text{Capacidad total de carga} \end{aligned}$$

Ahora se puede formar una matriz aumentada del sistema y resolverla mediante eliminación Gauss-Jordan:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 6\,000 & 8\,000 & 18\,000 & 250\,000 \end{array}\right] \quad \tfrac{1}{1\,000}R_2 \to R_2 \text{ (simplifique } R_2\text{)}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 6 & 8 & 18 & 250 \end{array}\right] \quad (-6)R_1 + R_2 \to R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 2 & 12 & 106 \end{array}\right] \quad \tfrac{1}{2}R_2 \to R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 24 \\ 0 & 1 & 6 & 53 \end{array}\right] \quad (-1)R_2 + R_1 \to R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -29 \\ 0 & 1 & 6 & 53 \end{array}\right] \quad \text{La matriz está en forma reducida}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= -29 \quad \text{o} \quad x_1 = 5x_3 - 29 \\ x_2 + 6x_3 &= 53 \quad \text{o} \quad x_2 = -6x_3 + 53 \end{aligned}$$

Sea $x_3 = t$. Entonces, para cualquier número real t,

$$x_1 = 5t - 29$$
$$x_2 = -6t + 53$$
$$x_3 = t$$

es una solución, ¿o no? Como las variables en este sistema representan el número de carros tanque comprados, los valores de x_1, x_2 y x_3 deben ser enteros no negativos. Así, la tercera ecuación necesita que t sea un entero no negativo. La primera ecuación necesita que $5t - 29 \geq 0$, de manera que t debe ser por lo menos 6. La ecuación de enmedio necesita que $-6t + 53 \geq 0$, de manera que t no pueda ser mayor que 8. Así, 6, 7 y 8 son los únicos valores posibles para t. Sólo hay tres combinaciones posibles que cumplen las especificaciones de la compañía de 24 carros tanque con una capacidad total de carga de 250 000 galones, como se muestra en la tabla 1:

TABLA 1

t	Carros tanque 6 000 galones x_1	Carros tanque 8 000 galones x_2	Carros tanque 18 000 galones x_3
6	1	17	6
7	6	11	7
8	11	5	8

La elección final será probablemente influenciada por otros factores. Por ejemplo, la compañía podría querer minimizar el costo de los 24 carros tanque.

Problema seleccionado 6

Una línea aérea quiere comprar una flotilla de 30 aviones con una capacidad total de carga combinada de 960 pasajeros. Los tres tipos disponibles de aviones transportan 18, 24 y 42 pasajeros, respectivamente. ¿Cuántos aviones de cada tipo se deben de comprar?

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) Se viola la condición 2: El 3 en el renglón 2 y la columna 2 debe ser un 1. Realice la operación $\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2$ para obtener:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

(B) Se viola la condición 3: El 5 en el renglón 1 columna 2 debe ser un 0. Realice la operación $(-5)R_2 + R_1 \rightarrow R_1$ para obtener:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -6 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

(C) Se viola la condición 4: El 1 en el extremo izquierdo en el segundo renglón no está a la derecha del 1 en el extremo izquierdo en el primer renglón. Realice la operación $R_1 \leftrightarrow R_2$ para obtener:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

(D) Se viola la condición 1: Todos los ceros en el segundo renglón deben estar en la parte inferior. Realice la operación $R_2 \leftrightarrow R_3$ para obtener:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

2. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 0$
3. Inconsistente; no hay solución
4. $x_1 = 5t + 4, x_2 = 3t + 5, x_3 = t$, t es cualquier número real
5. $x_1 = s + 7, x_2 = s, x_3 = t - 2, x_4 = -3t - 1, x_5 = t$, s y t son dos números reales cualesquiera
6.

t	Aviones de 18 pasajeros x_1	Aviones de 24 pasajeros x_2	Aviones de 42 pasajeros x_3
14	2	14	14
15	5	10	15
16	8	6	16
17	11	2	17

EJERCICIO 8-2

A

En los problemas del 1 al 8 indique si cada matriz está en forma reducida.

1. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

2. $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$

3. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right]$

4. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

5. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

6. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

7. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$

8. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right]$

En los problemas del 9 al 16, escriba el sistema lineal correspondiente para cada matriz aumentada reducida y resuélvala.

9. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

10. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

11. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

12. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

13. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

14. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

15. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$

16. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right]$

B

En los problemas del 17 al 22 utilice operaciones renglón para cambiar cada matriz a su forma reducida.

17. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

18. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \end{array}\right]$

19. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right]$

20. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right]$

21. $\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$ **22.** $\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 8 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 4 & \frac{1}{2} \end{array}\right]$

Resuelva los problemas del 23 al 42 mediante eliminación Gauss-Jordan.

23. $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 9x_2 - 21x_3 &= 0 \\ x_1 + 5x_2 - 12x_3 &= 1 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - x_3 &= -7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 11x_3 &= 7 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 - x_3 &= -18 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -4 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 15x_3 &= -12 \\ 4x_1 + 7x_2 + 13x_3 &= -10 \\ 3x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= -9 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 8 \\ x_1 - 2x_2 &= 7 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 10 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 6 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 - x_2 &= -1 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 7 \\ x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$

31. $\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 - x_3 &= 11 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 10 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= -7 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= -7 \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 9 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$

35. $\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - 4x_3 &= -2 \\ -3x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 3 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} 2x_1 + 8x_2 - 6x_3 &= 4 \\ -3x_1 - 12x_2 + 9x_3 &= -6 \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -4x_1 + x_2 - 3x_3 &= -10 \\ 8x_1 - 2x_2 + 9x_3 &= -1 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -6x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 10x_1 - 5x_2 + 9x_3 &= 4 \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 &= 7 \\ -4x_1 + 10x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 6x_1 - 15x_2 - x_3 &= -19 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} -4x_1 + 8x_2 + 10x_3 &= -6 \\ 6x_1 - 12x_2 - 15x_3 &= 9 \\ -8x_1 + 14x_2 + 19x_3 &= -8 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 13 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 12 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -10 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$

43. Considere un sistema consistente de tres ecuaciones lineales con tres variables. Analice la naturaleza del conjunto solución para el sistema si la forma reducida de la matriz aumentada de coeficientes tiene

(A) Un 1 en el extremo izquierdo
(B) Dos 1 en el extremo izquierdo
(C) Tres 1 en el extremo izquierdo
(D) Cuatro 1 en el extremo izquierdo

44. Considere un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables. Dé ejemplos de dos formas reducidas que sean de renglón equivalente si el sistema es

(A) Consistente y dependiente
(B) Inconsistente

C

Resuelva los problemas del 45 al 50 mediante eliminación Gauss-Jordan.

45. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 4x_4 &= 16 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 &= 13 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 &= 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$

47. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0.5 \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 - 4x_4 &= 2.9 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 2x_4 &= 0.6 \end{aligned}$

48. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 &= 1.3 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1.1 \\ 2x_1 + x_3 + 3x_4 &= -4.4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 3x_4 &= 5.6 \end{aligned}$

49. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2 \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}$

50. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 2 \\ -x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 - x_5 &= -3 \end{aligned}$

APLICACIONES

Resuelva los problemas del 51 al 72 mediante eliminación Gauss-Jordan.

* **51. Acertijo.** Una amiga suya sale de una oficina de correos después de gastar $14.00 en timbres de 15, 20 y 35 centavos. Si compró 45 timbres en total, ¿cuántos de cada tipo adquirió?

* **52. Acertijo.** Un parquímetro contiene 32 monedas de 5, 10 y 25 centavos, que suman en total $6.80. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay?

** **53. Química.** Un químico puede comprar una solución salina al 10% en recipientes de 500 centímetros cúbicos, una solución salina al 20% en recipientes de 500 centímetros cúbicos y una solución salina al 50% en recipientes de 1 000 centímetros cúbicos. Necesita 12 000 centímetros cúbicos

de solución salina al 30%. ¿Cuántos recipientes de cada tipo de solución tendrá que comprar para preparar esta solución?

** 54. **Química.** Repita el problema 53 suponiendo ahora que sólo se dispone de la solución salina al 50% en recipientes de 1 500 centímetros cúbicos.

55. **Geometría.** Encuentre a, b y c de manera que la gráfica de la parábola con la ecuación $y = a + bx + cx^2$ pase por los puntos $(-2, 3)$, $(-1, 2)$ y $(1, 6)$.

56. **Geometría.** Encuentre a, b y c de manera que la gráfica de la parábola con la ecuación $y = a + bx + cx^2$ pase por los puntos $(1, 3)$, $(2, 2)$ y $(3, 5)$.

57. **Geometría.** Encuentre a, b y c de manera que la gráfica del círculo con la ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ pase por los puntos $(6, 2)$, $(4, 6)$ y $(-3, -1)$.

58. **Geometría.** Encuentre a, b y c de manera que la gráfica del círculo con la ecuación $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ pase por los puntos $(-4, 1)$, $(-1, 2)$ y $(3, -6)$.

59. **Producción planificada.** Una pequeña fábrica produce tres modelos de botes inflables: en modelos para una, dos y cuatro personas. Cada bote necesita el servicio de tres departamentos, como se muestra en la tabla. Los departamentos de corte, ensamble y empaque disponen como máximo de 380, 330 y 120 horas de mano de obra por semana, respectivamente. ¿Cuántos botes de cada tipo se deben producir cada semana para que la planta opere a su máxima capacidad?

	Bote para una persona	**Bote para dos personas**	**Bote para cuatro personas**
Departamento de corte	0.5 h	1.0 h	1.5 h
Departamento de ensamble	0.6 h	0.9 h	1.2 h
Departamento de empaque	0.2 h	0.3 h	0.5 h

60. **Producción planificada.** Repita el problema 59 suponiendo que los departamentos de corte, ensamble y empaque disponen de un máximo de 350, 330 y 115 horas de mano de obra por semana, respectivamente.

* 61. **Producción planificada.** Resuelva otra vez el problema 59 suponiendo ahora que ya no se utiliza el departamento de empaque.

* 62. **Producción planificada.** Repita el problema 60 suponiendo que ya no se utiliza el departamento de empaque.

* 63. **Producción planificada.** Ahora resuelva otra vez el problema 59 suponiendo que ya no se produce el bote para cuatro personas.

* 64. **Producción planificada.** Resuelva nuevamente el problema 60 suponiendo que se dejó de producir el bote para cuatro personas.

65. **Nutrición.** Un dietista en un hospital va a diseñar una dieta especial utilizando tres alimentos básicos. La dieta es para incluir exactamente 340 unidades de calcio, 180 unidades de hierro y 220 unidades de vitamina A. El número de unidades por onza de cada ingrediente especial para cada una de las comidas se indica en la tabla. ¿Cuántas onzas de cada alimento se tendrán que usar para cumplir los requerimientos de la dieta?

	Unidades por onza		
	Comida A	**Comida B**	**Comida C**
Calcio	30	10	20
Hierro	10	10	20
Vitamina A	10	30	20

66. **Nutrición.** Repita el problema 65 si la dieta es para incluir exactamente 400 unidades de calcio, 160 de hierro y 240 de vitamina A.

* 67. **Nutrición.** Resuelva el problema 65 suponiendo que ya no se dispone del alimento *C*.

* 68. **Nutrición.** Vuelva a resolver el problema 66 suponiendo que el alimento *C* ya no está disponible.

* 69. **Nutrición.** Resuelva el problema 65 suponiendo que ya no se requiere la vitamina A.

* 70. **Nutrición.** Resuelva el problema 66 suponiendo que ya no es necesaria la vitamina A.

71. **Sociología.** Dos sociólogos tienen una beca para financiar sus estudios en una escuela formal de una ciudad en particular. Quieren realizar una encuesta de opinión haciendo 600 llamadas telefónicas y visitando 400 casas. La compañía investigadora *A* tiene personal para hacer hasta 30 llamadas telefónicas y visitar 10 casas por hora, la compañía investigadora *B* puede manejar 20 telefonemas y 20 visitas a casas por hora. ¿Cuántas horas deberá programar cada compañía para producir exactamente el número de contactos necesarios?

72. **Sociología.** Repita el problema 71 suponiendo ahora que se necesitan 650 contactos por teléfono y 350 por visita en casas.

SECCIÓN 8-3 Sistemas que implican ecuaciones de segundo grado

- Solución por sustitución
- Otros métodos de solución

Si un sistema de ecuaciones contiene ciertas ecuaciones que no son lineales, entonces el sistema se llama **sistema no lineal**. En esta sección se estudian sistemas no lineales que implican términos de segundo grado tales como

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^2 - 2y^2 &= 2 \\ xy &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x^2 + 3xy + y^2 &= 20 \\ xy - y^2 &= 0 \end{aligned}$$

Se puede demostrar que tales sistemas tienen a lo más cuatro soluciones, de las que algunas pueden ser imaginarias. Como se está interesado en encontrar soluciones reales e imaginarias para los sistemas considerados, se supone ahora que el conjunto de reemplazo para cada variable es el conjunto de los números complejos, en lugar del conjunto de los números reales.

• Solución por sustitución

El método por sustitución usado para resolver sistemas lineales de dos ecuaciones con dos variables es también un método efectivo para resolver sistemas no lineales. Este proceso se ilustra mejor con ejemplos.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema no lineal por sustitución

Resuelva el sistema:
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}$$

Solución Despeje y de la segunda ecuación en términos de x; luego sustituya y en la primera ecuación para obtener una ecuación que sólo implique a x.

$$3x + y = 1$$
$$y = 1 - 3x \quad \text{Sustituya esta expresión por } y \text{ en la primera ecuación.}$$
$$x^2 + y^2 = 5$$
$$x^2 + (1 - 3x)^2 = 5$$
$$10x^2 - 6x - 4 = 0 \quad \text{Simplifique y escriba en forma cuadrática estándar.}$$
$$5x^2 - 3x - 2 = 0 \quad \text{Divida todo entre 2 para simplificar más.}$$
$$(x - 1)(5x + 2) = 0$$
$$x = 1, -\tfrac{2}{5}$$

Si se vuelven a sustituir estos valores en la ecuación $y = 1 - 3x$, se obtienen dos soluciones para el sistema:

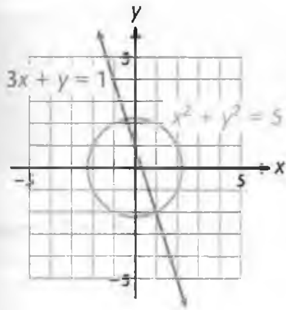


FIGURA 1

$$x = 1 \qquad\qquad x = -\tfrac{2}{5}$$
$$y = 1 - 3(1) = -2 \qquad y = 1 - 3(-\tfrac{2}{5}) = \tfrac{11}{5}$$

Una comprobación que se debe de realizar, verifica que $(1, -2)$ y $(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5})$ son soluciones del sistema. Estas soluciones se ilustran en la figura 1. Sin embargo, si se sustituyen los valores de x en la ecuación $x^2 + y^2 = 5$, se obtiene

$$\begin{array}{rr} x = 1 & x = -\tfrac{2}{5} \\ 1^2 + y^2 = 5 & (-\tfrac{2}{5})^2 + y^2 = 5 \\ y^2 = 4 & y^2 = \tfrac{121}{25} \\ y = \pm 2 & y = \pm\tfrac{11}{5} \end{array}$$

Parece que se han encontrado dos soluciones más, $(1, 2)$ y $(-\frac{2}{5}, -\frac{11}{5})$. Pero ninguna de ellas satisface la ecuación $3x + y = 1$, que se debe verificar. De manera que ninguna es solución del sistema original. Se han producido dos **raíces extrañas**, que en apariencia son soluciones pero en realidad no satisfacen las dos ecuaciones del sistema. Esto ocurre a menudo cuando se resuelven sistemas no lineales.

Es muy importante comprobar siempre las soluciones de cualquier sistema no lineal para asegurarse de no incluir raíces extrañas.

Problema seleccionado 1

Resuelva el sistema: $\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 10 \\ 2x + y = 1 \end{array}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

En el ejemplo 1, se vio que la recta $3x + y = 1$ intersecta el círculo $x^2 + y^2 = 5$ en dos puntos.

(A) Considere el sistema

$$\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 5 \\ 3x + y = 10 \end{array}$$

Grafique ambas ecuaciones en el mismo sistema coordenado. ¿Existen algunas soluciones reales para este sistema? ¿Son soluciones complejas? Encuentre cualquier solución real o compleja.

(B) Considere la familia de rectas dada por

$$3x + y = b \qquad b \text{ es cualquier número real}$$

¿Qué tienen todas estas rectas en común? Ilustre gráficamente las rectas de esta familia que intersectan el círculo $x^2 + y^2 = 5$ en exactamente un punto. ¿Cuántas rectas hay? ¿Cuál(es) es (son) el (los) valor(es) correspondiente(s) de b? ¿Cuáles son los puntos de intersección? ¿Cómo están relacionadas estas rectas con el círculo?

EJEMPLO 2 **Solución de un sistema no lineal por sustitución**

Resuelva: $x^2 - 2y^2 = 2$
$xy = 2$

Solución Despeje y de la segunda ecuación, sustitúyala en la primera ecuación, y proceda como antes.

$$xy = 2$$
$$y = \frac{2}{x}$$
$$x^2 - 2\left(\frac{2}{x}\right)^2 = 2$$
$$x^2 - \frac{8}{x^2} = 2$$
$$x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \quad \text{Multiplique ambos lados por } x^2 \text{ y simplifique.}$$
$$u^2 - 2u - 8 = 0 \quad \text{Sustituya } u = x^2 \text{ para transformar a una forma cuadrática y resuélvala.}$$
$$(u - 4)(u + 2) = 0$$
$$u = 4, -2$$

Así,

$$x^2 = 4 \qquad \text{o} \qquad x^2 = -2$$
$$x = \pm 2 \qquad\qquad x = \pm\sqrt{-2} = \pm i\sqrt{2}$$

Para $x = 2$, $y = \frac{2}{2} = 1$. Para $x = i\sqrt{2}$, $y = \frac{2}{i\sqrt{2}} = -i\sqrt{2}$.

Para $x = -2$, $y = \frac{2}{-2} = -1$. Para $x = -i\sqrt{2}$, $y = \frac{2}{-i\sqrt{2}} = i\sqrt{2}$.

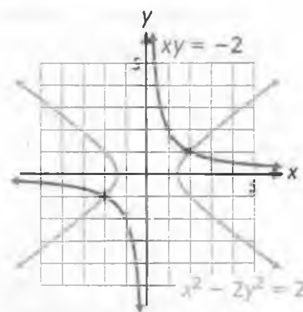


FIGURA 2

Así, las cuatro soluciones para este sistema son $(2, 1)$, $(-2, -1)$, $(i\sqrt{2}, -i\sqrt{2})$ y $(-i\sqrt{2}, i\sqrt{2})$. Note que dos de las soluciones implican números imaginarios. Estas soluciones imaginarias no se pueden ilustrar gráficamente (véase figura 2); sin embargo, pueden satisfacer ambas ecuaciones en el sistema (verifique esta afirmación).

Problema seleccionado 2 Resuelva: $3x^2 - y^2 = 6$
$xy = 3$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 (A) Refiérase al sistema del ejemplo 2. ¿Puede usarse un dispositivo de graficación para encontrar soluciones reales de este sistema? ¿Para soluciones imaginarias?

(B) En general, explique por qué se pueden usar las técnicas de aproximación gráfica para aproximar las soluciones reales de un sistema, pero no para soluciones complejas.

EJEMPLO 3 **Diseño**

Un ingeniero va a diseñar una pantalla rectangular para computadora con una diagonal de 19 pulgadas y un área de 175 pulgadas cuadradas. Encuentre las dimensiones de la pantalla a la décima de pulgada más próxima.

Solución Dibuje un rectángulo en el que el ancho sea x y la altura y (figura 3). Se obtiene el siguiente sistema usando el teorema de Pitágoras y la fórmula para el área de un rectángulo:

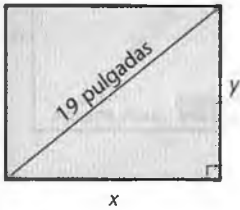


FIGURA 3

$$x^2 + y^2 = 19^2$$
$$xy = 175$$

Este sistema se resolvió utilizando los procedimientos esbozados en el ejemplo 2. Sin embargo, en este caso, sólo se tiene interés en las soluciones reales. Se comienza por despejar y de la segunda ecuación en términos de x y se sustituye el resultado en la primera ecuación.

$$y = \frac{175}{x}$$

$$x^2 + \frac{175^2}{x^2} = 19^2$$

$$x^4 + 30\,625 = 361x^2$$ Multiplique ambos lados por x^2 y simplifique.

$$x^4 - 361x^2 + 30\,625 = 0$$ Cuadrática en x^2.

Despeje x^2 de la última ecuación usando la fórmula cuadrática, después despeje x:

$$x = \sqrt{\frac{361 \pm \sqrt{361^2 - 4(1)(30\,625)}}{2}}$$

$$= 15.0 \text{ pulgadas u } 11.7 \text{ pulgadas}$$

Sustituya cada opción de x en $y = 175/x$ para encontrar los valores correspondientes de y:

Para $x = 15.0$ pulgadas,

$$y = \frac{175}{15} = 11.7 \text{ pulgadas}$$

Para $x = 11.7$ pulgadas,

$$y = \frac{175}{11.7} = 15.0 \text{ pulgadas}$$

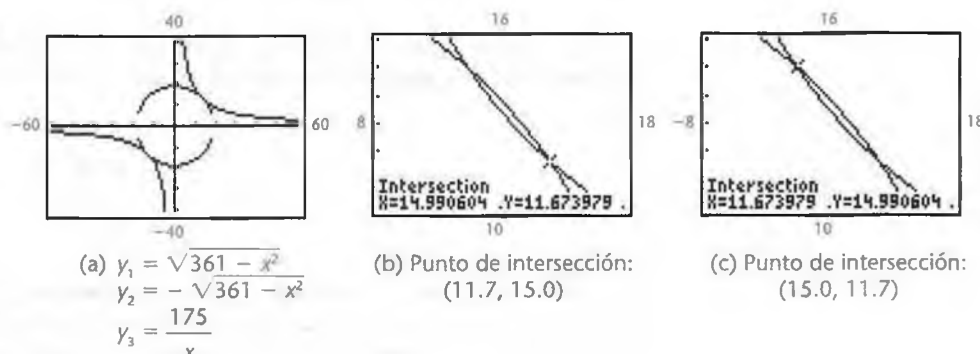
Suponiendo que el ancho de la pantalla es mayor que su altura, las dimensiones son 15.0 y 11.7 pulgadas.

Problema seleccionado 3 Un ingeniero va a diseñar una pantalla de televisión rectangular con una diagonal de 21 pulgadas y un área de 209 pulgadas cuadradas. Encuentre las dimensiones de la pantalla al décimo de pulgada más cercana.



Igual que en el ejemplo 3 sólo se tiene interés en las soluciones reales, así que se pueden usar las técnicas gráficas para aproximar las soluciones (véase figura 4). Como se vio en la sección 2-1, la graficación de un círculo con un dispositivo de graficación requiere de dos funciones, una para la mitad superior del círculo y otra para la mitad inferior. [*Nota:* como x y y deben ser números reales no negativos, se ignoran los puntos de intersección en el tercer cuadrante, véase figura 4(a).]

FIGURA 4 Solución gráfica de $x^2 + y^2 = 19^2, xy = 175$.



(a) $y_1 = \sqrt{361 - x^2}$
$y_2 = -\sqrt{361 - x^2}$
$y_3 = \dfrac{175}{x}$

(b) Punto de intersección: (11.7, 15.0)

(c) Punto de intersección: (15.0, 11.7)

Otros métodos de solución

Ahora se verán algunas otras técnicas para resolver sistemas de ecuaciones no lineales.

EJEMPLO 4 Solución de un sistema no lineal por eliminación

Resuelva:
$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 5 \\ x^2 + 2y^2 &= 17 \end{aligned}$$

Solución Este tipo de sistema se puede resolver mediante eliminación por suma. Multiplique la segunda ecuación por -1 y sume:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 5 \\ -x^2 - 2y^2 &= -17 \\ \hline -3y^2 &= -12 \\ y^2 &= 4 \\ y &= \pm 2 \end{aligned}$$

Ahora sustituya $y = 2$ y $y = -2$ en la ecuación original para encontrar x.

Para $y = 2$,

$$x^2 - (2)^2 = 5$$
$$x = \pm 3$$

Para $y = -2$,

$$x^2 - (-2)^2 = 5$$
$$x = \pm 3$$

Así, $(3, -2)$, $(3, 2)$, $(-3, -2)$ y $(-3, 2)$, son las cuatro soluciones del sistema. Se deja al lector la comprobación de las soluciones.

Problema seleccionado 4 Resuelva:

$$2x^2 - 3y^2 = 5$$
$$3x^2 + 4y^2 = 16$$

EJEMPLO 5 Solución de un sistema no lineal por factorización y sustitución

Resuelva:

$$x^2 + 3xy + x^2 = 20$$
$$xy - y^2 = 0$$

Solución Factorice el lado izquierdo de la ecuación que tiene un término constante 0:

$$xy - y^2 = 0$$
$$y(x - y) = 0$$
$$y = 0 \quad \text{o} \quad y = x$$

Así, el sistema original es equivalente a los dos sistemas:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ x^2 + 3xy + y^2 &= 20 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} y &= x \\ x^2 + 3xy + y^2 &= 20 \end{aligned}$$

Estos sistemas se resuelven por sustitución.

Primer sistema

$$y = 0$$
$$x^2 + 3xy + y^2 = 20$$

Sustituya $y = 0$ en la segunda ecuación, y despeje x.

$$x^2 + 3x(0) + (0)^2 = 20$$
$$x^2 = 20$$
$$x = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$$

Segundo sistema

$$y = x$$
$$x^2 + 3xy + y^2 = 20$$

Sustituya $y = x$ en la segunda ecuación, y despeje x.

$$x^2 + 3xx + x^2 = 20$$
$$5x^2 = 20$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

Sustituya estos valores en $y = x$, para encontrar y.

Para $x = 2, y = 2$. Para $x = -2, y = -2$

Las soluciones del sistema original son $(2\sqrt{5}, 0)$, $(-2\sqrt{5}, 0)$, $(2, 2)$ y $(-2, -2)$. Se deja al lector la comprobación de las soluciones.

Problema seleccionado 5 Resuelva:

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 9 \\ 2x^2 - xy &= 0 \end{aligned}$$

El ejemplo 5 es algo especializado. Sin embargo, se sugiere un procedimiento que funciona para resolver algunos problemas.



EJEMPLO 6 Aproximaciones gráficas de soluciones reales

Use un dispositivo de graficación para aproximar las soluciones reales con dos cifras decimales:

$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + y^2 &= 12 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 &= 6 \end{aligned}$$

Solución Antes de introducir estas ecuaciones en un dispositivo de graficación, se debe despejar y:

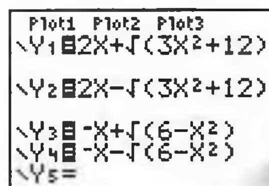
$$\begin{aligned} x^2 - 4xy + y^2 &= 12 & 2x^2 + 2xy + y^2 &= 6 \\ y^2 - 4xy + (x^2 - 12) &= 0 & y^2 + 2xy + (2x^2 - 6) &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula cuadrática a cada ecuación, se tiene

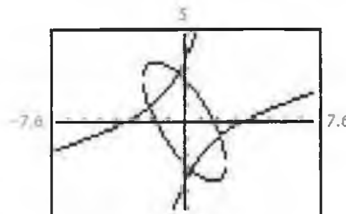
$$\begin{aligned} y &= \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 - 4(x^2 - 12)}}{2} & y &= \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 - 4(2x^2 - 6)}}{2} \\ &= \frac{4x \pm \sqrt{12x^2 + 48}}{2} & &= \frac{-2x \pm \sqrt{24 - 4x^2}}{2} \\ &= 2x \pm \sqrt{3x^2 + 12} & &= -x \pm \sqrt{6 - x^2} \end{aligned}$$

Como cada ecuación tiene dos soluciones, se debe introducir cuatro funciones en el dispositivo de graficación, como se muestra en la figura 5(a). Examinando la gráfica de la figura 5(b), se observa que hay cuatro puntos de intersección. Usando la rutina preconstruida de intersección de manera repetida (se omiten los detalles), se encuentra que las soluciones con dos cifras decimales son $(-2.10, 0.83)$, $(-0.37, 2.79)$, $(0.37, -2.79)$ y $(2.10, -0.83)$.

FIGURA 5



(a)



(b)

Problema seleccionado 6 Use un dispositivo de graficación para aproximar soluciones reales con dos cifras decimales:

$$x^2 + 8xy + y^2 = 70$$
$$2x^2 - 2xy + y^2 = 20$$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $(-1, 3), (\frac{9}{5}, -\frac{13}{5})$ **2.** $(\sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (i, -3i), (-i, 3i)$ **3.** 17.1 por 12.2 pulg.
4. $(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$ **5.** $(0, 3), (0, -3), (\sqrt{3}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$
6. $(-3.89, -1.68), (-0.96, -5.32), (0.96, 5.32), (3.89, 1.68)$

EJERCICIO 8-3

A

En los problemas del 1 al 12 resuelva cada sistema.

1. $x^2 + y^2 = 169$, $x = -12$

2. $x^2 + y^2 = 25$, $y = -4$

3. $8x^2 - y^2 = 16$, $y = 2x$

4. $y^2 = 2x$, $x = y - \frac{1}{2}$

5. $3x^2 - 2y^2 = 25$, $x + y = 0$

6. $x^2 + 4y^2 = 32$, $x + 2y = 0$

7. $y^2 = x$, $x - 2y = 2$

8. $x^2 = 2y$, $3x = y + 2$

9. $2x^2 + y^2 = 24$, $x^2 - y^2 = -12$

10. $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 5$

11. $x^2 + y^2 = 10$, $16x^2 + y^2 = 25$

12. $x^2 - 2y^2 = 1$, $x^2 + 4y^2 = 25$

B

En los problemas del 13 al 24 resuelva cada sistema.

13. $xy - 4 = 0$, $x - y = 2$

14. $xy - 6 = 0$, $x - y = 4$

15. $x^2 + 2y^2 = 6$, $xy = 2$

16. $2x^2 + y^2 = 18$, $xy = 4$

17. $2x^2 + 3y^2 = -4$, $4x^2 + 2y^2 = 8$

18. $2x^2 - 3y^2 = 10$, $x^2 + 4y^2 = -17$

19. $x^2 - y^2 = 2$, $y^2 = x$

20. $x^2 + y^2 = 20$, $x^2 = y$

21. $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 = 9 - 2y$

22. $x^2 + y^2 = 16$, $y^2 = 4 - x$

23. $x^2 - y^2 = 3$, $xy = 2$

24. $y^2 = 5x^2 + 1$, $xy = 2$

Un tipo importante de problemas de cálculo es encontrar el área entre las gráficas de dos funciones. Para resolver algunos de estos problemas es necesario encontrar las coordenadas de los puntos de intersección de las dos gráficas. En los problemas del 25 al 32, encuentre las coordenadas de los puntos de intersección de las dos ecuaciones dadas.

25. $y = 5 - x^2, y = 2 - 2x$

26. $y = 5x - x^2, y = x + 3$

27. $y = x^2 - x, y = 2x$

28. $y = x^2 + 2x, y = 3x$

29. $y = x^2 - 6x + 9, y = 5 - x$

30. $y = x^2 + 2x + 3, y = 2x + 4$

31. $y = 8 + 4x - x^2, y = x^2 - 2x$

32. $y = x^2 - 4x - 10, y = 14 - 2x - x^2$

33. Considere el círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = 5$ y la familia de rectas dada por $2x - y = b$, donde b es cualquier número real.

(A) Ilustre gráficamente las rectas de esta familia que intersectan el círculo en exactamente un punto, y describa la relación entre el círculo y estas rectas.

(B) Encuentre los valores de b que corresponden a las rectas del inciso (A), y encuentre los puntos de intersección de las rectas y del círculo.

(C) ¿Cómo se relaciona la recta de la ecuación $x + 2y = 0$ con esta familia de rectas? ¿Cómo se podría usar esta recta para encontrar los puntos de intersección del inciso (B)?

34. Considere el círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ y la familia de rectas dada por $3x + 4y = b$, donde b es cualquier número real.

(A) Ilustre gráficamente las rectas de esta familia que intersectan el círculo en exactamente un punto, y describa la relación entre éstas y el círculo.

(B) Encuentre los valores de b que corresponden a las rectas del inciso (A), y encuentre los puntos de intersección de las rectas y del círculo.

(C) ¿Cómo se relaciona la recta con la ecuación $4x - 3y = 0$ con esta familia de rectas? ¿Cómo se podría usar esta recta para encontrar los puntos de intersección y los valores de b del inciso (B)?

C

En los problemas del 35 al 42 resuelva cada sistema.

35. $2x + 5y + 7xy = 8$
$xy - 3 = 0$

36. $2x + 3y + xy = 16$
$xy - 5 = 0$

37. $x^2 - 2xy + y^2 = 1$
$x - 2y = 2$

38. $x^2 + xy - y^2 = -5$
$y - x = 3$

39. $2x^2 - xy + y^2 = 8$
$x^2 - y^2 = 0$

40. $x^2 + 2xy + y^2 = 36$
$x^2 - xy = 0$

41. $x^2 + xy - 3y^2 = 3$
$x^2 + 4xy + 3y^2 = 0$

42. $x^2 - 2xy + 2y^2 = 16$
$x^2 - y^2 = 0$



En los problemas del 43 al 48, use un dispositivo de graficación para aproximar con dos cifras decimales las soluciones reales de cada sistema.

43. $-x^2 + 2xy + y^2 = 1$
$3x^2 - 4xy + y^2 = 2$

44. $-x^2 + 4xy + y^2 = 2$
$8x^2 - 2xy + y^2 = 9$

45. $3x^2 - 4xy - y^2 = 2$
$2x^2 + 2xy + y^2 = 9$

46. $5x^2 + 4xy + y^2 = 4$
$4x^2 - 2xy + y^2 = 16$

47. $2x^2 - 2xy + y^2 = 9$
$4x^2 - 4xy + y^2 + x = 3$

48. $2x^2 + 2xy + y^2 = 12$
$4x^2 - 4xy + y^2 + x + 2y = 9$

APLICACIONES



49. Números. Encuentre dos números cuya suma sea 3 y su producto 1.

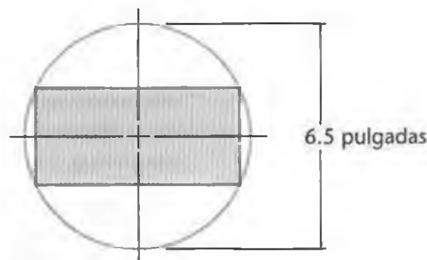
50. Números. Encuentre dos números tales que su diferencia sea 1 y su producto 1. (Sea x el número mayor y y el menor.)

51. Geometría. Encuentre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo con un área de 30 pulgadas cuadradas si su hipotenusa es de 13 pulgadas.

52. Geometría. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un área de 32 metros cuadrados si su perímetro es de 36 metros.

53. Diseño. Un ingeniero diseña una televisión portátil pequeña. De acuerdo con las especificaciones de diseño, la televisión debe tener una pantalla rectangular con una diagonal de 7.5 pulgadas y un área de 27 pulgadas cuadradas. Encuentre las dimensiones de la pantalla.

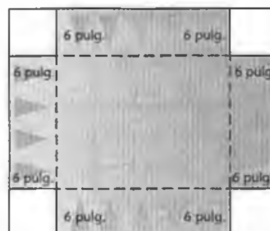
54. Diseño. Un artista está diseñando el logotipo de una empresa que tiene la forma de un círculo dentro de un rectángulo. El diámetro del círculo mide 6.5 pulgadas, y el área del rectángulo 15 pulgadas cuadradas. Encuentre las dimensiones del rectángulo.



★55. Construcción. Una piscina rectangular tiene una banqueta de 5 pies de ancho y está rodeada por una cerca como se muestra en la figura. El área que ocupa la piscina es de 572 pies cuadrados, y el área total rodeada por la cerca (incluyendo la piscina y la banqueta) es de 1 152 pies cuadrados. Encuentre las dimensiones de la piscina.



★56. Construcción. Se forma una caja rectangular, abierta en su parte superior, cortando cuadros de 6 pulgadas en cada esquina de un rectángulo de cartón y doblando los lados hacia arriba. Si el área del cartón antes de cortar sus esquinas es de 768 pulgadas cuadradas, y el volumen de la caja es de 1 440 pulgadas cúbicas. Encuentre las dimensiones originales del rectángulo de cartón.





57. **Transportación. Dos botes parten al mismo tiempo del puerto de Bournemouth, Inglaterra, y siguen la misma ruta en un viaje de 75 millas náuticas a través del canal inglés a Cherbourg, Francia. La velocidad promedio del bote A es 5 millas por hora mayor que la velocidad promedio del bote B. En consecuencia, el bote A llega a Cherbourg 30 minutos antes que el bote B. Encuentre la velocidad promedio de cada bote.

58. **Transportación. El autobús A parte a medio día de Milwaukee y viaja hacia el oeste por la carretera interestatal 94. El autobús B parte 30 minutos más tarde, recorre la misma ruta y rebasa al autobús A en un punto a 210 millas al oeste de Milwaukee. Si la velocidad promedio del autobús B es 10 millas por hora mayor que la velocidad promedio del autobús A, ¿a qué hora el autobús B rebasó al autobús A?

SECCIÓN 8-4 Sistemas de desigualdades lineales con dos variables

- Graficación de desigualdades lineales con dos variables
- Solución gráfica de sistemas de desigualdades lineales
- Aplicación

Muchas aplicaciones matemáticas implican sistemas de desigualdades en vez de sistemas de ecuaciones. Una gráfica es a menudo el modo más conveniente de representar las soluciones de un sistema de desigualdades con dos variables. En esta sección se analizan las técnicas para graficar tanto una sola desigualdad lineal con dos variables como un sistema de desigualdades lineales con dos variables.

• Graficación de desigualdades lineales con dos variables

Se sabe cómo graficar ecuaciones de primer grado tales como

$$y = 2x - 3 \qquad \text{y} \qquad 2x - 3y = 5$$

pero, cómo se grafican desigualdades de primer grado tales como

$$y \leq 2x - 3 \qquad \text{y} \qquad 2x - 3y > 5$$

De hecho, la graficación de estas desigualdades es casi tan fácil como la graficación de ecuaciones. Pero antes de comenzar, se deben analizar algunos subconjuntos importantes de un plano en un sistema coordenado rectangular.

Una recta divide un plano en dos mitades llamadas **semiplanos**. Una recta vertical divide un plano en **semiplanos a la izquierda** y **a la derecha** [figura 1(a)]; una recta no vertical divide un plano en **semiplanos superior** e **inferior** [figura 1(b)].

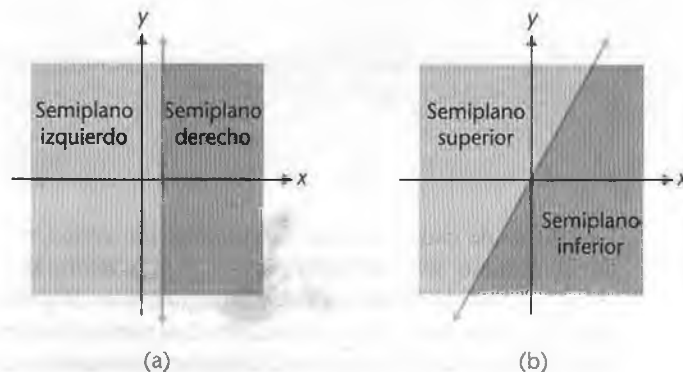


FIGURA 1 Semiplanos.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Considere las siguientes ecuaciones lineales y relacione las desigualdades lineales:

(1) $2x - 3y = 12$ (2) $2x - 3y < 12$ (3) $2x - 3y > 12$

(A) Grafique la recta con la ecuación (1).

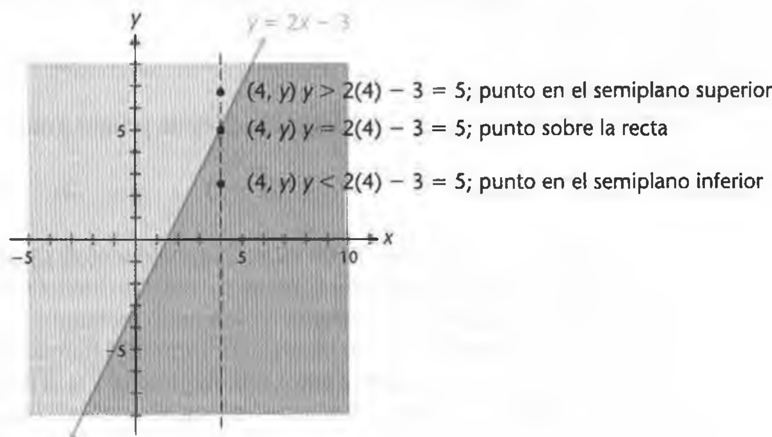
(B) Encuentre el punto sobre esta recta con coordenada en x igual a 3 y dibuje una recta vertical que pase por este punto. Analice la relación entre las coordenadas y de los puntos sobre esta recta y los postulados (1), (2) y (3).

(C) Repita el inciso (B) para $x = -3$. Para $x = 9$.

(D) Con base en sus observaciones de los incisos (B) y (C), escriba una descripción verbal de todos los puntos en el plano que satisfagan la ecuación (1), para aquellos que satisfagan la desigualdad (2) y para los que satisfagan la desigualdad (3).

Ahora se estudiarán los semiplanos determinados por la ecuación lineal $y = 2x - 3$. Se empezará por graficar $y = 2x - 3$ (figura 2). Para cualquier valor dado de x, existe exactamente un valor para y tal que (x, y) se encuentre sobre la recta. Para la misma x, si el punto (x, y) está debajo de la recta, entonces $y < 2x - 3$. Así, el semiplano inferior corresponde a la solución de la desigualdad $y < 2x - 3$. De manera similar, el semiplano superior corresponde a la solución de la desigualdad $y > 2x - 3$, como se muestra en la figura 2.

FIGURA 2

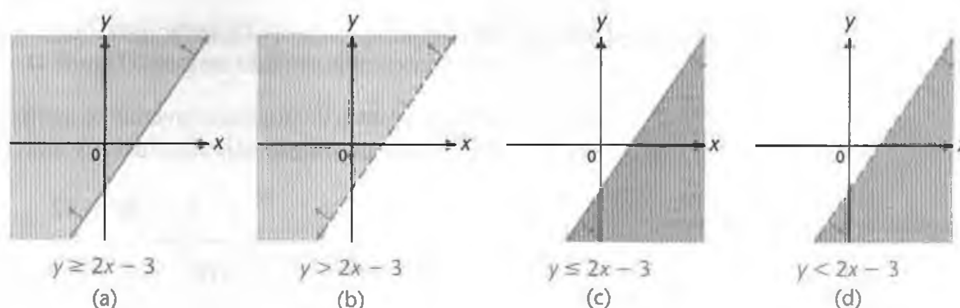


Las cuatro desigualdades formadas a partir de $y = 2x - 3$ al reemplazar el signo = por $\geq$, >, $\leq$ y <, respectivamente, son

$$y \geq 2x - 3 \qquad y > 2x - 3 \qquad y \leq 2x - 3 \qquad y < 2x - 3$$

La gráfica de cada una es un semiplano. La recta $y = 2x - 3$, llamada **recta frontera** del semiplano, está incluida para $\geq$ y $\leq$ y excluida para > y <. En la figura 3, los semiplanos se indican con flechas pequeñas en la gráfica de $y = 2x - 3$ y después se grafican como regiones sombreadas. Las rectas frontera se muestran como líneas continuas, y las rectas frontera excluidas se muestran como líneas discontinuas.

FIGURA 3



Teorema 1 **Gráficas de desigualdades lineales con dos variables**

La gráfica de una desigualdad lineal

$$Ax + By < C \quad \text{o} \quad Ax + By > C$$

donde $B \neq 0$, es el semiplano superior o el semiplano inferior (pero no ambos) determinado por la recta $Ax + By = C$.

Si $B = 0$, entonces la gráfica de

$$Ax < C \quad \text{o} \quad Ax > C$$

es el semiplano izquierdo o el derecho (pero no ambos) determinado por la recta $Ax = C$.

Como una consecuencia del teorema 1, se establece un procedimiento mecánico simple y rápido para graficar desigualdades lineales.

Procedimiento para graficar desigualdades lineales con dos variables

Paso 1. Grafique $Ax + By = C$ con una línea discontinua si la igualdad no está incluida en el postulado original o como una línea sólida si la desigualdad está incluida.

Paso 2. Elija un punto de prueba en cualquier lugar del plano, excepto sobre la recta, y sustituya las coordenadas en la desigualdad. El origen (0, 0) a menudo requiere de un último cálculo.

Paso 3. La gráfica de la desigualdad original incluye el semiplano que contiene el punto de prueba si la desigualdad se satisface por ese punto, o el semiplano no contiene ese punto si la desigualdad no se satisface por ese punto.

EJEMPLO 1 **Graficación de una desigualdad lineal.**

Grafique: $3x - 4y \leq 12$

Solución *Paso 1.* Grafique $3x - 4y = 12$ como una línea continua, ya que la igualdad está incluida en el postulado original (figura 4).

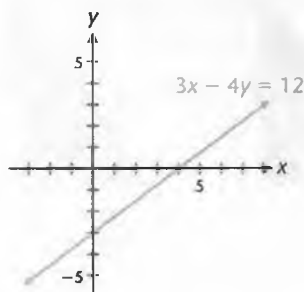


FIGURA 4

Paso 2. Tome un punto de prueba conveniente arriba o abajo de la recta. El origen (0, 0) requiere un último cálculo. Sustituyendo (0, 0) en la desigualdad

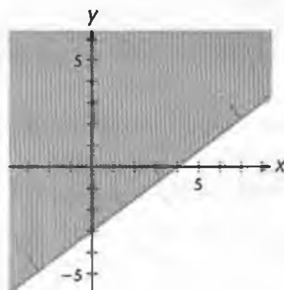
$$3x - 4y \leq 12$$

$$3(0) - 4(0) = 0 \leq 12$$

produce un postulado verdadero; por lo tanto, (0, 0) está en el conjunto solución.

Paso 3. La recta $3x - 4y = 12$ y el semiplano que contiene la forma original de la gráfica de $3x - 4y \leq 12$ (figura 5).

FIGURA 5



Problema seleccionado 1 Grafique: $2x + 3y < 6$

EJEMPLO 2 **Graficación de una desigualdad lineal**

Grafique: (A) $y > -3$ (B) $2x \leq 5$

Soluciones (A) La gráfica de $y > -3$ se muestra en la figura 6

(B) La gráfica de $2x \leq 5$ se muestra en la figura 7

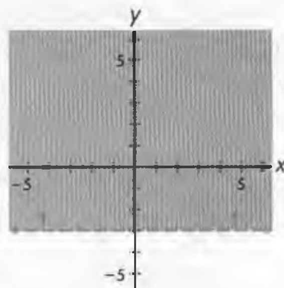


FIGURA 6

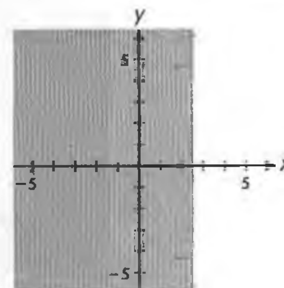


FIGURA 7

Problema seleccionado 2 Grafique: (A) $y \leq 2$ (B) $3x > -8$

• Solución gráfica de sistemas de desigualdades lineales

Ahora se consideran sistemas de desigualdades lineales tales como

$$\begin{aligned} x + y &\geq 6 \\ 2x - y &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} 2x + y &\leq 22 \\ x + y &\leq 13 \\ 2x + 5y &\leq 50 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Se quiere **resolver** tales sistemas **gráficamente**, es decir, encontrar la gráfica de todos los pares ordenados de números reales (x, y) que satisfagan en forma simultánea todas las desigualdades del sistema. La gráfica se denomina **región de solución** para el sistema. Para encontrar la región de solución, se grafica cada desigualdad en el sistema y después se toma la intersección de todas las gráficas. Para simplificar el análisis que sigue, **se considerarán sólo sistemas de desigualdades lineales donde se incluya la igualdad en cada postulado del sistema.**

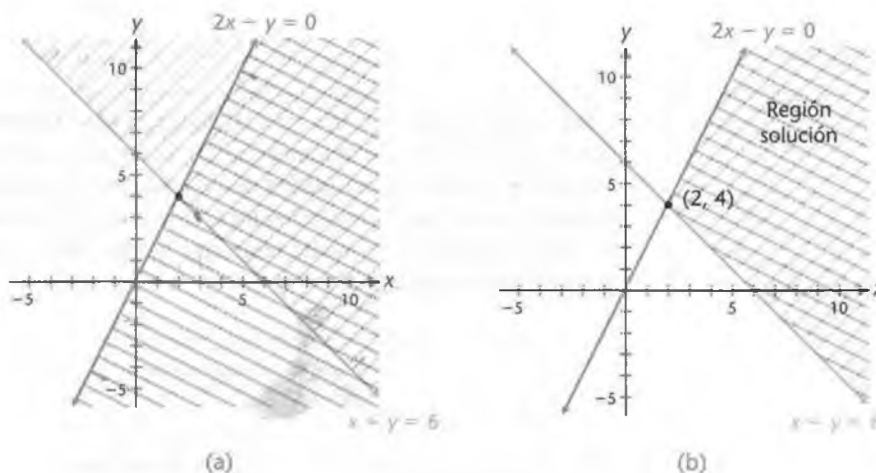
EJEMPLO 3 Solución gráfica de sistemas de desigualdades lineales

Resuelva el siguiente sistema de desigualdades lineales de forma gráfica:

$$\begin{aligned} x + y &\geq 6 \\ 2x - y &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución Primero, grafique la recta $x + y = 6$ y sombree la región que satisface la desigualdad $x + y \geq 6$. Esta región se sombrea en azul en la figura 8(a). Después, grafique la recta $2x - y = 0$ y sombree la región que satisface la desigualdad $2x - y \geq 0$. Esta región está sombreada en rojo en la figura 8(a). La región de solución para el sistema de desigualdades es la intersección de estas dos regiones. Ésta es la región sombreada en rojo y azul en la figura 8(a), que se vuelve a dibujar en la figura 8(b) en la que sólo se sombrea la región de solución por claridad. Las coordenadas de cualquier punto en la región sombreada de la figura 8(b) especifica una solución para el sistema. Por ejemplo, los puntos (2, 4), (6, 3) y (7.43, 8.56) son tres de la infinidad de soluciones que se pueden comprobar fácilmente. El punto de intersección (2, 4) se puede obtener resolviendo las ecuaciones $x + y = 6$ y $2x - y = 0$ de manera simultánea.

FIGURA 8



Problema seleccionado 3 Resuelva el sistema siguiente de desigualdades lineales de forma gráfica:

$$3x + y \leq 21$$
$$x - 2y \leq 0$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Refiérase al ejemplo 3. Grafique cada recta frontera y sombree las regiones obtenidas al invertir cada desigualdad. Es decir, sombree la región del plano que corresponda a la desigualdad $x + y < 6$ y después sombree la región que corresponda a la desigualdad $2x - y < 0$. ¿Qué parte del plano se deja sin sombrear? Compare este método con el usado en la solución del ejemplo 3.

Los puntos de intersección de las rectas que forman la frontera de una región solución desempeñan un papel fundamental en la solución de problemas de programación lineal, los cuales se analizan en la siguiente sección.

Definición 1 **Punto esquina**

Un **punto esquina** de una región solución es un punto en la región solución que es la intersección de dos rectas frontera.

El punto (2, 4) es el único punto esquina de la región solución en el ejemplo 3; véase figura (b).

EJEMPLO 4 **Solución gráfica de sistemas de desigualdades lineales**

Resuelva en forma gráfica los siguientes sistemas de desigualdades lineales, y encuentre los puntos esquina.

$$2x + y \leq 22$$
$$x + y \leq 13$$
$$2x + 5y \leq 50$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

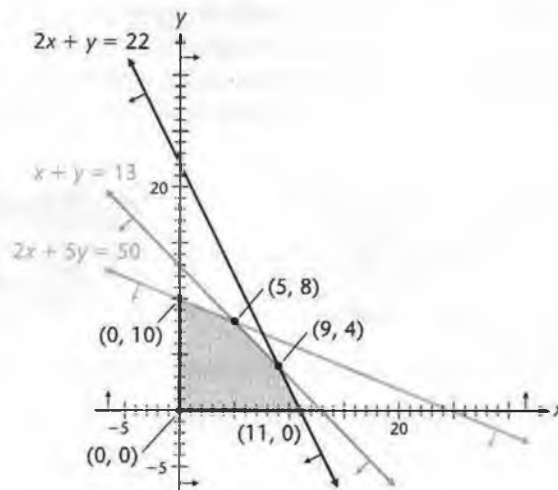
Solución Las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$, denominadas **restricciones no negativas**, ocurren con frecuencia en aplicaciones que implican sistemas de desigualdades, ya que x y y a menudo representan cantidades que no pueden ser negativas (número de unidades producidas, número de horas trabajadas, etcétera). La región de solución se encuentra en el primer cuadrante, y se puede restringir la atención a esa parte del plano. Se comienza por graficar las rectas

$$2x + y = 22$$ Encuentre las intersecciones x y y en cada recta; después trace la recta que pase por esos puntos, como se muestra en la figura 9.

$$x + y = 13$$
$$2x + 5y = 50$$

Después, elija (0,0) como un punto de prueba, se observa que la gráfica de cada una de las tres primeras desigualdades en el sistema consisten de su recta correspondiente y del semiplano que se encuentra debajo de la recta, como se indica en la figura 9. Así, la región de solución del sistema consiste de los puntos del primer cuadrante que simultáneamente se encuentran sobre o debajo de estas tres rectas (véase figura 9).

FIGURA 9



Los puntos esquina (0, 0), (0, 10) y (11, 0) se pueden determinar a partir de la gráfica. Los otros dos puntos esquina se determinan como sigue:

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 50 \\ y + y &= 13 \end{aligned}$$

para obtener (5, 8).

Resuelva el sistema

$$\begin{aligned} 2x + y &= 22 \\ x + y &= 13 \end{aligned}$$

para obtener (9, 4).

Note que las rectas $2x + 5y = 50$ y $2x + y = 22$ también se intersectan, pero el punto de intersección no forma parte de la región solución y, en consecuencia, no es un punto esquina.

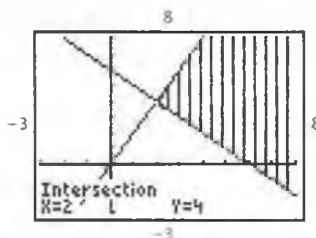
Problema seleccionado 4

Resuelva en forma gráfica el sistema siguiente de desigualdades lineales, y encuentre los puntos esquina:

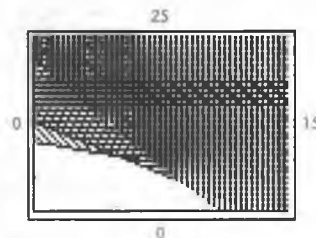
$$\begin{aligned} 5x + y &\geq 20 \\ x + y &\geq 12 \\ x + 3y &\geq 18 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Como se vio en la sección 8-1, un dispositivo de graficación es una herramienta útil para graficar rectas y encontrar puntos de intersección. La mayoría de los dispositivos de graficación tienen también algunas capacidades limitadas para sombrear regiones que satisfacen desigualdades. La figura 10(a) muestra una solución para el ejemplo 3 que se podría realizar en la mayoría de los dispositivos de graficación. En modelos recientes (por ejemplo, en las calculadoras TI-83 y TI-96), es una operación simple sombrear la región arriba o abajo de una gráfica. Usando esta opción para sombrear los puntos que no satisfacen cierta desigualdad, como se analizó en la exploración y análisis 2 anterior, se ilustra de manera clara la solución para un sistema de desigualdades. La figura 10(b) muestra el resultado de aplicar este método al ejemplo 4.

FIGURA 10



(a) La región sombreada es la solución del sistema en el ejemplo 3 [véase figura 8(b)]



(b) La región no sombreada es la solución del sistema en el ejemplo 4 (véase figura 9)

Si se comparan las regiones de solución de los ejemplos 3 y 4, se observa que hay una diferencia fundamental entre estas dos regiones. Se puede dibujar un círculo alrededor de la región de solución del ejemplo 4. Sin embargo, en cualquier círculo es imposible incluir todos los puntos de la región de solución en el ejemplo 3, sin importar qué tan grande se dibuje. Esto conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2 **Regiones de solución acotadas y sin acotar**

Una región de solución de un sistema de desigualdades lineales es **acotada** si se puede encerrar en un círculo. Si no se puede encerrar en un círculo, entonces es **no acotada**.

Por consiguiente, la región de solución del ejemplo 4 es acotada y la del ejemplo 3 es no acotada. Esta definición será importante en la sección siguiente.

• Aplicación

EJEMPLO 5 **Producción planificada**

Un fabricante de tablas para surf (deslizadores) fabrica un modelo estándar y un modelo para competición. La fabricación de cada tabla estándar necesita 6 horas de mano de obra y el acabado una hora. Fabricar cada tabla para competición requiere de 8 horas de mano de obra y el acabado 3 horas. El número máximo de horas de mano de obra disponible por semana en los departamentos de fabricación y acabado es de 120 y 30, respectivamente. ¿Qué combinaciones de tablas se pueden producir cada semana de manera que no se exceda el número de horas de mano de obra disponible en cada departamento por semana?

Solución Con objeto de clarificar las relaciones, se resume la información en la tabla siguiente:

	Modelo estándar (horas de mano de obra por tabla)	**Modelo de competición (horas de mano de obra por tabla)**	**Número máximo de horas de mano de obra disponibles por semana**
Fabricación	6	8	120
Acabado	1	3	30

Sea

x = Número de tablas estándar producidas por semana

y = Número de tablas de competición producidas por semana

Estas variables están restringidas como se indica:

Restricción en el departamento de fabricación:

$$\begin{pmatrix}\text{Tiempo de fabricación}\\ \text{por semana para } x\\ \text{tablas estándar}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Tiempo de fabricación}\\ \text{por semana para } y\\ \text{tablas de competición}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Número máximo de horas}\\ \text{de mano de obra}\\ \text{disponibles por semana}\end{pmatrix}$$

$$6x \quad + \quad 8y \quad \leq \quad 120$$

Restricción en el departamento de acabado:

$$\begin{pmatrix}\text{Tiempo de acabado}\\ \text{por semana para } x\\ \text{tablas estándar}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Tiempo de acabado}\\ \text{por semana para } y\\ \text{tablas de competición}\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}\text{Número máximo de horas}\\ \text{de mano de obra}\\ \text{disponibles por semana}\end{pmatrix}$$

$$1x \quad + \quad 3y \quad \leq \quad 30$$

Como no es posible fabricar un número negativo de tablas, x y y deben también satisfacer las restricciones no negativas

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Así, x y y deben satisfacer el siguiente sistema de desigualdades lineales:

$6x + 8y \leq 120$ Restricción del departamento de fabricación

$x + 3y \leq 30$ Restricción del departamento de acabado

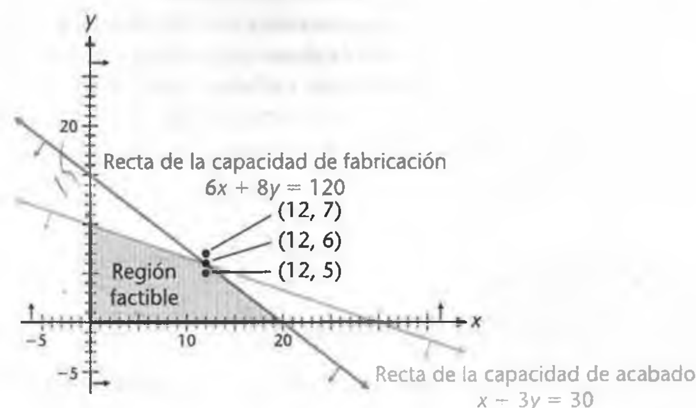
$x \geq 0$ Restricción no negativa

$y \geq 0$ Restricción no negativa

Al graficar este sistema de desigualdades lineales, se obtiene el conjunto de **soluciones factibles**, o la **región factible**, como se muestra en la figura 11. Para problemas de este tipo y para los problemas de programación lineal que se consideran en la sección siguiente, las regiones solución son a menudo referidas como regiones factibles. Cualquier punto dentro del área sombreada, incluyendo las rectas frontera, representa una posible planeación de producción. Cualquier punto fuera del área sombrea-

da representa una planeación imposible. Por ejemplo, podría ser posible producir 12 tablas estándar y cinco de competición por semana, pero no sería posible producir 12 tablas estándar y siete de competición por semana (véase la figura).

FIGURA 11

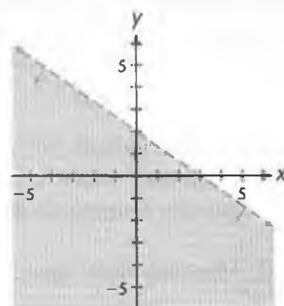


Problema seleccionado 5 Repita el ejemplo 5 usando 5 horas para la fabricación de una tabla estándar y un máximo de 27 horas de mano de obra para el departamento de acabado.

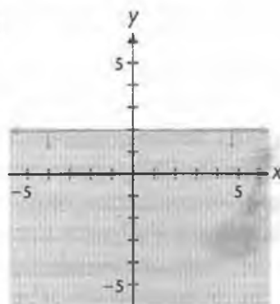
Comentario. Refiérase al ejemplo 5. ¿Cómo se interpreta una planeación de producción de 10.5 tablas estándar y 4.3 tablas para competición? No es posible fabricar una fracción de tabla. Pero es posible ***promediar*** 10.5 tablas estándar y 4.3 de competición por semana. En general, se supondrá que todos los puntos en la región factible representan soluciones aceptables, aun cuando soluciones no enteras puedan requerir de interpretación especial.

Respuestas a los problemas seleccionados

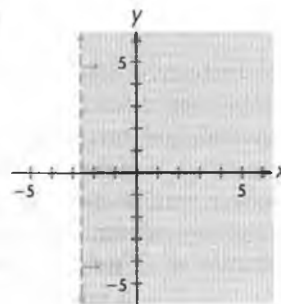
1.



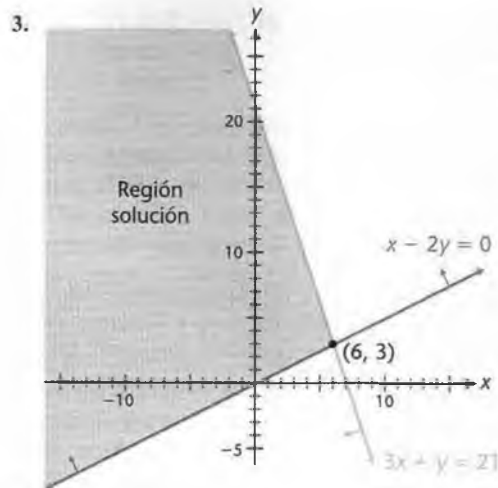
2. (A)



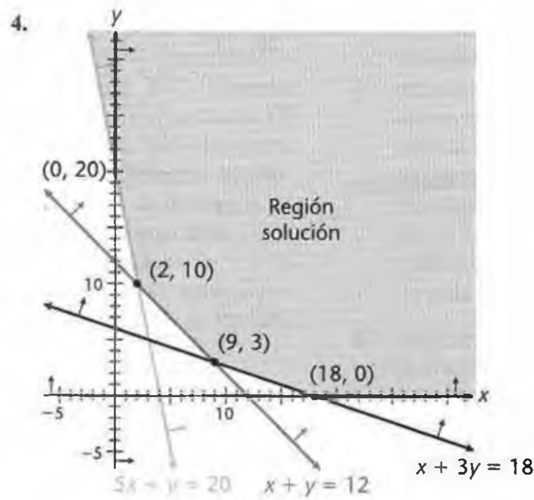
(B)



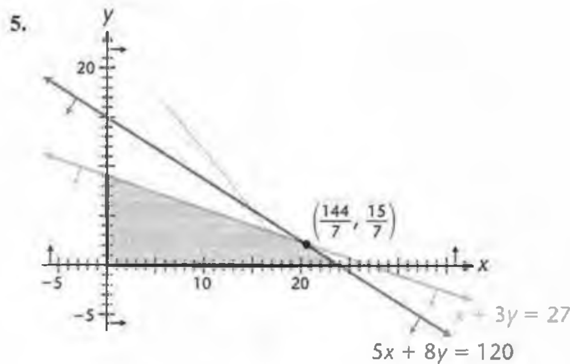
3.



4.



5.



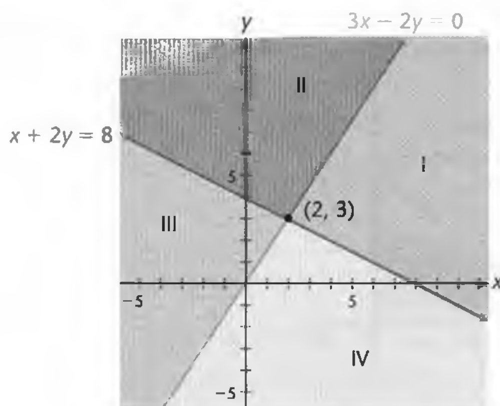
EJERCICIO 8-4

A

En los problemas del 1 al 10 grafique cada desigualdad.

1. $2x - 3y < 6$
2. $3x + 4y < 12$
3. $3x + 2y \geq 18$
4. $3y - 2x \geq 24$
5. $y \leq \frac{2}{3}x + 5$
6. $y \geq \frac{1}{3}x - 2$
7. $y < 8$
8. $x > -5$
9. $-3 \leq y < 2$
10. $-1 < x \leq 3$

En los problemas del 11 al 14, relacione la región de solución de cada sistema de desigualdades lineales con una de las cuatro regiones mostradas en la figura a continuación.



11. $x + 2y \le 8$
$3x - 2y \ge 0$

12. $x + 2y \ge 8$
$3x - 2y \le 0$

13. $x + 2y \ge 8$
$3x - 2y \ge 0$

14. $x + 2y \le 8$
$3x - 2y \le 0$

En los problemas del 15 al 20, resuelva cada sistema de desigualdades lineales en forma gráfica.

15. $x \ge 5$
$y \le 6$

16. $x \le 4$
$y \ge 2$

17. $3x + y \ge 6$
$x \le 4$

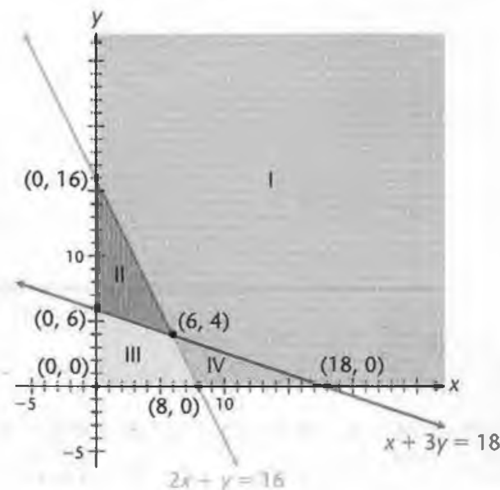
18. $3x + 4y \le 12$
$y \ge -3$

19. $x - 2y \le 12$
$2x + y \ge 4$

20. $2x + 5y \le 20$
$x - 5y \le -5$

B

En los problemas del 21 al 24, relacione la región de solución de cada sistema de desigualdades lineales con una de las cuatro regiones mostradas en la siguiente figura. Identifique los puntos esquina de cada región de solución.



21. $x + 3y \le 18$
$2x + y \ge 16$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

22. $x + 3y \le 18$
$2x + y \le 16$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

23. $x + 3y \ge 18$
$2x + y \ge 16$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

24. $x + 3y \ge 18$
$2x + y \le 16$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

En los problemas del 25 al 36, resuelva en forma gráfica los sistemas, e indique si cada región de solución es acotada o no acotada. Encuentre las coordenadas de cada punto esquina.

25. $2x + 3y \le 6$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

26. $4x + 3y \le 12$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

27. $4x + 5y \ge 20$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

28. $5x + 6y \ge 30$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

29. $2x + y \le 8$
$x + 3y \le 12$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

30. $x + 2y \le 10$
$3x + y \le 15$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

31. $4x + 3y \ge 24$
$2x + 3y \ge 18$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

32. $x + 2y \ge 8$
$2x + y \ge 10$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

33. $2x + y \le 12$
$x + y \le 7$
$x + 2y \le 10$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

34. $3x + y \le 21$
$x + y \le 9$
$x + 3y \le 21$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

35. $x + 2y \ge 16$
$x + y \ge 12$
$2x + y \ge 14$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

36. $3x + y \ge 30$
$x + y \ge 16$
$x + 3y \ge 24$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

C

En los problemas del 37 al 44, resuelva los sistemas de forma gráfica, e indique si cada región de solución es acotada o no acotada. Encuentre las coordenadas de cada punto esquina.

37. $x + y \le 11$
$5x + y \ge 15$
$x + 2y \ge 12$

38. $4x + y \le 32$
$x + 3y \le 30$
$5x + 4y \ge 51$

39. $3x + 2y \ge 24$
$3x + y \le 15$
$x \ge 4$

40. $3x + 4y \le 48$
$x + 2y \ge 24$
$y \le 9$

41. $x + y \le 10$
$3x + 5y \ge 15$
$3x - 2y \le 15$
$-5x + 2y \le 6$

42. $3x - y \ge 1$
$-x + 5y \ge 9$
$x + y \le 9$
$y \le 5$

43. $16x + 13y \le 119$
$12x + 16y \ge 101$
$-4x + 3y \le 11$

44. $8x + 4y \le 41$
$-15x + 5y \le 19$
$2x + 6y \ge 37$

APLICACIONES 

45. **Fabricación: asignación de recursos.** Una compañía fabrica dos tipos de esquíes acuáticos: el esquí acrobático y el esquí de competencia. El esquí acrobático requiere de 6 horas de mano de obra para su fabricación y 1 para el acabado. El esquí de competencia requiere de 4 horas de mano de obra para su fabricación y 1 para el acabado. El número máximo de horas de mano de obra disponibles por día en la fabricación y el acabado es de 108 y 24 horas, respectivamente. Si x es el número de esquíes acrobáticos y y él de esquíes de competencia producidos por día, escriba un sistema de desigualdades que indique las restricciones apropiadas para x y y. Encuentre en forma gráfica el conjunto de soluciones posibles para el número de cada tipo de esquí que se puede producir.

46. **Fabricación: asignación de recursos.** Una fábrica de muebles produce mesas y sillas de comedor. Una mesa requiere de 8 horas de mano de obra para el ensamble y de 2 para el acabado. Una silla requiere de 2 horas de mano de obra para el ensamble y de 1 para el acabado. El número máximo de horas disponibles por día para el ensamble y el acabado es de 400 y 120 horas, respectivamente. Si x es el número de mesas y y el de sillas producidas al día, escriba un sistema de desigualdades que indique en forma apropiada las restricciones de x y y. Encuentre de forma gráfica el conjunto de soluciones posibles para el número de mesas y sillas que se pueden producir.

47. **Fabricación: asignación de recursos.** Refiérase al problema 45. La compañía tiene una ganancia de \$50 en cada esquí acrobático y una ganancia de \$60 en cada esquí de competencia.

(A) Si la compañía produce 10 esquíes acrobáticos y 10 de competencia por día, la utilidad diaria será de \$1 100. ¿Existe otra posible producción que genere una utilidad de \$1 100? ¿Cómo se relacionan esas producciones con la gráfica de la línea $50x + 60y = 1\ 100$?

(B) Encuentre una producción factible que genere una ganancia diaria mayor de \$1 100 y repita el inciso (A) para esta planificación.

(C) Analice los métodos que utilizan líneas como éstas en los incisos (A) y (B) para encontrar la mayor utilidad diaria posible.

48. **Fabricación: asignación de recursos.** Refiérase al problema 46. La compañía obtiene una ganancia de \$50 en cada mesa y de \$15 en cada silla.

(A) Si la compañía produce 20 mesas y 20 sillas por día, la ganancia diaria será de \$1 300. ¿Existen otras planeaciones de producción factibles que generen una utilidad de \$1 300? ¿Cómo se relacionan esas producciones con la gráfica de la recta $5x + 15y = 1\ 300$?

(B) Encuentre una posible producción que genere una utilidad diaria mayor que \$1 300 y repita el inciso (A) para esta planeación.

(C) Analice los métodos que utilizan rectas de este tipo en los incisos (A) y (B) para encontrar la mayor utilidad diaria posible.

49. **Nutrición de las plantas.** Un granjero puede comprar dos tipos de abono, la mezcla A y la mezcla B. Cada yarda cúbica de la mezcla A contiene 20 libras de ácido fosfórico, 30 de nitrógeno y 5 de potasio. Cada yarda cúbica de la mezcla B contiene 220 libras de ácido fosfórico, 30 de nitrógeno y 10 de potasio. Los requerimientos mínimos son de 460 libras de ácido fosfórico, 960 libras de nitrógeno y 220 libras de potasio. Si x es el número de yardas cúbicas utilizadas de la mezcla A y y el de yardas cúbicas utilizadas de la mezcla B, escriba un sistema de desigualdades que indique las restricciones adecuadas de x y y. Encuentre en forma gráfica el conjunto de posibles soluciones para la cantidad de mezcla A y B que se puede utilizar.

50. **Nutrición.** Un dietista en un hospital desea diseñar una dieta especial utilizando dos alimentos. Cada onza del alimento M contiene 30 unidades de calcio, 10 de hierro y 10 de vitamina A. Cada onza del alimento N contiene 10 unidades de calcio, 10 de hierro y 30 de vitamina A. Los requerimientos mínimos en la dieta son de 360 unidades de calcio, 160 de hierro y 240 de vitamina A. Si x es el número de onzas utilizadas del alimento, M y y el de onzas utilizadas del alimento N, escriba un sistema de desigualdades lineales que refleje las condiciones indicadas. Encuentre en forma gráfica el conjunto de soluciones factibles para la cantidad de cada tipo de alimento que se puede utilizar.

51. **Sociología.** Un ayuntamiento votó por dirigir un estudio de los problemas de una comunidad céntrica. Se contactó una universidad cercana para contratar sociólogos y asistentes de investigación. Cada sociólogo pasará 10 horas semanales recolectando datos en la comunidad y 30 horas en el mismo periodo analizándolos en el centro de investigación. Cada investigador asistente pasará 30 horas a la semana en la comunidad y 10 en el centro de investigación. El mínimo de trabajo requerido en horas por semana son 280 en la comunidad y 360 en el centro de investigación. Si x representa el número de sociólogos contratados para el estudio y y el de investigadores asistentes, escriba un sistema de desigualdades lineales que indique las restricciones adecuadas para x y y. Encuentre en forma gráfica el conjunto de soluciones factibles.

52. **Psicología.** En un experimento de acondicionamiento, un psicólogo usa dos tipos de cajas Skinner (de acondicionamiento) con ratones y ratas. Cada ratón pasa 10 minutos al día en la caja A y 20 minutos en la caja B. Cada rata pasa 20 minutos al día en la caja A y 10 minutos en la caja B. El tiempo máximo total disponible por día es de 800 minutos para la caja A y 640 minutos para la caja B. Se tiene interés en determinar el número de ratones y ratas que se pueden utilizar en el experimento bajo las condiciones establecidas. Si x es el número de ratones utilizados y y el de ratas, escriba un sistema de desigualdades lineales que indique las restricciones adecuadas para x y y. Encuentre en forma gráfica el conjunto de posibles soluciones.

SECCIÓN 8-5 Programación lineal



- Un problema de programación lineal
- Programación lineal: Una descripción general
- Aplicación

Varios problemas de la sección 8-4 están relacionados con el tipo general de problemas llamados *problemas de programación lineal.* La programación lineal es un procedimiento matemático que se desarrolló para ayudar a tomar decisiones de tipo administrativo, y se ha convertido en una de las herramientas más ampliamente usadas y conocidas en la ciencia administrativa y la ingeniería industrial. Se utilizará un procedimiento gráfico intuitivo basado en las técnicas analizadas en la sección 8-4, para ilustrar este proceso en problemas que involucran dos variables.

El matemático estadounidense George B. Dantzig (1914 -   ) formuló el primer problema de programación lineal en 1947 y presentó una técnica de solución, denominada *método simplex*, que no depende de la graficación y se adapta fácilmente a soluciones en computadora. Hoy en día, es muy común utilizar una computadora para resolver problemas de programación lineal aplicados que involucran a miles de variables y desigualdades.

• Un problema de programación lineal

Se empezará el análisis con un ejemplo que conducirá a un procedimiento general para resolver problemas de programación lineal con dos variables.

EJEMPLO 1 Producción planificada

Un fabricante de casetas de fibra de vidrio para camionetas produce un modelo compacto y uno regular. Cada caseta compacta requiere de 5 horas en el departamento de fabricación y 2 en el de acabado. Cada caseta regular requiere de 4 horas en el departamento de fabricación y de 3 en el de acabado. El número máximo de horas de mano de obra disponibles por semana en el departamento de fabricación y en el de acabado es de 200 y 108 respectivamente. Si la compañía obtiene una utilidad de $40 en cada caseta compacta y $50 en cada caseta regular, ¿cuántas casetas de cada tipo debe producir cada semana para maximizar la ganancia total obtenida en el mismo periodo, suponiendo que todas las casetas se puedan vender? ¿Cuál es la ganancia máxima?

Solución Éste es un ejemplo de un problema de programación lineal. Para ver más claramente las relaciones, en la siguiente tabla se resumen los requerimientos de fabricación, los objetivos y las restricciones:

	Modelo compacto (horas de mano de obra por caseta)	**Modelo regular (horas de mano de obra por caseta)**	**Número máximo de horas de mano de obra disponibles por semana**
Fabricación	5	4	200
Acabado	2	3	108
Utilidad por caseta	$40	$50	

Ahora se procede a formular un *modelo matemático* para el problema y después a resolverlo utilizando métodos gráficos.

Función objetivo

El *objetivo* de la administración es *decidir* cuántos modelos de cada caseta se deben producir cada semana para *maximizar* la ganancia. Sean

x = Número de casetas compactas producidas por semana
y = Número de casetas regulares producidas por semana
} Variables de decisión

La siguiente función da una ganancia total P para x casetas compactas y y casetas regulares fabricadas cada semana:

$$P = 40x + 50y$$ Función objetivo

Matemáticamente, el administrador necesita decidir los valores para las **variables de decisión** (x y y) que logren su objetivo, esto es, maximizando la **función objetivo** (ganancia) $P = 40x + 50y$. Al parecer, la ganancia puede ser tan grande como se desee al fabricar más y más casetas, ¿es esto posible?

Restricciones

Cualquier fábrica, sin importar qué tan grande o pequeña sea, tiene restricciones impuestas por los recursos disponibles, capacidad de la planta, demanda, etcétera. Estas restricciones son referidas como **restricciones del problema**.

Restricciones del departamento de fabricación:

(Tiempo de fabricación por semana para x casetas compactas) + (Tiempo de fabricación por semana para y casetas regulares) ≤ (Máximo de horas de mano de obra disponibles por semana)

$$5x + 4y \leq 200$$

Restricciones del departamento de acabado:

(Tiempo de acabado por semana para x casetas compactas) + (Tiempo de acabado por semana para y casetas regulares) ≤ (Número máximo de horas de mano de obra disponibles por semana)

$$2x + 3y \leq 108$$

Restricciones no negativas: No es posible fabricar un número negativo de casetas; así, se tienen las **restricciones no negativas**

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

que usualmente se escriben en la forma:

$$x, y \geq 0$$

Modelo matemático

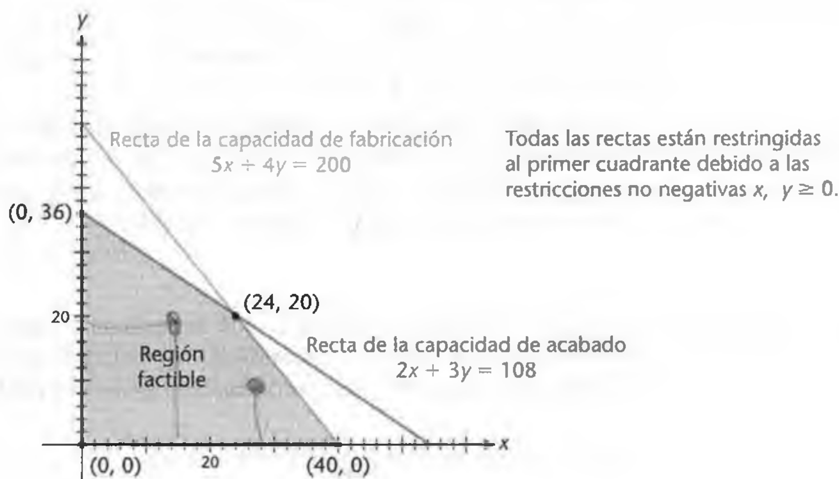
Ahora se tiene un **modelo matemático** para el problema que se está considerando.

Maximizar	$P = 40x + 50y$	Función objetivo
Sujeto a	$5x + 4y \leq 200$	Restricciones del problema
	$2x + 3y \leq 108$	
	$x, y \geq 0$	Restricciones no negativas

Solución gráfica

Al resolver el sistema de restricciones de una desigualdad lineal **de manera gráfica**, como en la sección 8-4, se obtiene una región factible para los programas de producción, como se muestra en la figura 1.

FIGURA 1



Al elegir un programa de producción (x, y) de la región factible, se puede determinar una ganancia utilizando la función objetivo $P = 40x + 50y$. Por ejemplo, si $x = 24$ y $y = 10$, entonces la ganancia semanal es

$$P = 40(24) + 50(10) = \$1\,460$$

O si $x = 15$ y $y = 20$, entonces la ganancia semanal es

$$P = 40(15) + 50(20) = \$1\,600$$

La pregunta es, además de todos los posibles programas de producción (x, y) de la región factible, ¿qué programa(s) producen la ganancia máxima? Tal programación, si existe, se llama **solución óptima** al problema porque produce el valor máximo de la función objetivo y está en una región factible. No es práctico hacer una comprobación punto por punto para encontrar la solución óptima. Aunque si se consideran sólo los puntos con coordenadas enteras, hay más de 800 puntos en la región factible para este problema. En lugar de esto, se usa la teoría desarrollada para resolver problemas de programación lineal. Utilizando técnicas avanzadas, se puede demostrar que:

Si la región factible está acotada: entonces uno o más puntos esquina de la región factible son una solución óptima del problema.

El valor máximo de la función objetivo es único; sin embargo, puede haber más de un posible programa de producción que producirá este valor único. Conforme se avance en la sección se profundizará en el tema.

Punto esquina (x, y)	Función objetivo $P = 40x + 50y$	
(0, 0)	0	
(0, 36)	1 800	
(24, 20)	1 960	Máximo valor de P
(40, 0)	1 600	

Puesto que la región factible de este problema es acotada, por lo menos uno de los puntos esquina (0, 0), (0, 36), (24, 20) o (40, 0) es una solución óptima. Para encontrar cuál es, se evalúa $P = 40x + 50y$ en cada punto esquina y se escoge el que produzca un valor más grande de P. Es conveniente organizar estos cálculos en una tabla como la que se muestra en el margen.

Al examinar los valores en esta tabla, se observa que el valor máximo de P en cada punto esquina es $P = 1\,960$ en $x = 24$ y $y = 20$. Ya que el máximo valor de P en toda la región factible siempre se debe encontrar en un punto esquina, se concluye que la ganancia máxima es de $1 960 cuando se producen 24 casetas compactas y 20 casetas regulares por semana.

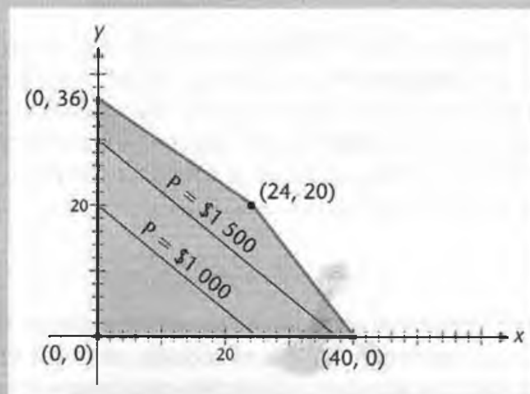
Problema seleccionado 1

Ahora se convierte el problema de las tablas de surf (deslizadores) de la sección 8-4 en un problema de programación lineal. Una fábrica de tablas de surf produce un modelo estándar y uno de competición. Cada tabla estándar requiere de 6 horas de mano de obra para la fabricación y 1 para el acabado. Cada tabla de competición requiere de 8 horas de mano de obra para la fabricación y 3 para el acabado. El número máximo de horas de mano de obra disponibles por semana en el departamento de fabricación y de acabado es de 120 y 30, respectivamente. Si la compañía obtiene una ganancia de $40 en cada tabla estándar y de $75 en cada tabla de competición, ¿cuántas tablas de cada tipo debe de producir cada semana para maximizar la ganancia total en el mismo periodo?

(A) Identifique las variables de decisión.
(B) Escriba la función objetivo P.
(C) Escriba las restricciones del problema y las restricciones no negativas.
(D) Grafique la región factible, identifique los puntos esquina y evalúe P en cada punto esquina.
(E) ¿Cuántas tablas de cada tipo se deben producir cada semana para maximizar la ganancia? ¿Cuál es la utilidad máxima?

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Refiérase al ejemplo 1. Si se asigna a la función de la ganancia P en $P = 40x + 50y$ un cierto valor y se grafica la ecuación resultante en el sistema coordenado mostrado en la figura 1, se obtiene una **recta de ganancia constante (recta de misma ganancia)**. Cada punto en la región factible en esta recta representa una producción programada que genera la misma ganancia. La figura 2 muestra las rectas de ganancia constante para $P = \$1\,000$ y $P = \$1\,500$.

FIGURA 2



(A) ¿Cómo están relacionadas todas las rectas de ganancia?

(B) Coloque una regla a lo largo de la recta de ganancia constante para $P = \$1\ 000$ y deslícela tan lejos como pueda en dirección del aumento de la ganancia sin cambiar su pendiente y sin salir de la región factible. Explique cómo se puede usar este proceso para identificar la solución óptima en un problema de programación lineal.

(C) Si P se cambia a $P = 25x + 75y$, grafique la recta de la ganancia constante para $P = \$1\ 000$ y $P = \$1\ 500$, y use una regla para identificar la solución óptima. Compruebe su respuesta evaluando P en cada punto esquina.

(D) Repita el inciso (C) para $P = 75x + 25y$.

• Programación lineal: Una descripción general

Los problemas de programación lineal considerados en el ejemplo 1 y en el problema seleccionado 1 fueron *problemas de maximización* donde se buscaba maximizar las ganancias. La misma técnica se puede usar para resolver *problemas de minimización* donde, por ejemplo, se desea minimizar los costos. Antes de considerar más ejemplos, se establecerán algunas definiciones generales.

Un **problema de programación lineal** es aquel que busca encontrar el **valor óptimo** (valor máximo o mínimo) de una **función objetivo** lineal de la forma

$$z = ax + by$$

donde las **variables de decisión** x y y están sujetas a las **restricciones del problema** en forma de desigualdades lineales y de **restricciones no negativas**, $x, y \geq 0$. Al conjunto de puntos que satisface a las restricciones del problema y a las restricciones no negativas, se le llama **región factible** del problema. Cualquier punto en la región factible que produzca un valor óptimo de la función objetivo sobre la región factible se le llama **solución óptima**.

El teorema 1 es fundamental en la solución de problemas de programación lineal.

Teorema 1 **Teorema fundamental de programación lineal**

Sea S la región factible de un problema de programación lineal, y sea $z = ax + by$ la función objetivo. Si S es la acotada, entonces z tiene un valor máximo y un valor mínimo en S y cada uno de éstos se encuentra en un punto esquina de S. Si S no está acotada, entonces el valor máximo o mínimo de z en S puede no existir. Sin embargo, si existe, entonces debe de estar en un punto esquina de S.

En esta breve introducción no se considerarán problemas con regiones factibles no acotadas. Si una región factible es acotada, entonces el teorema 1 proporciona la base para el siguiente procedimiento simple con el que se resuelve el problema asociado con la programación lineal.

Solución de problemas de programación lineal

Paso 1. Construya un modelo matemático para el problema:

(A) Introduzca variables de decisión y escriba una función objetivo lineal.
(B) Escriba las restricciones del problema en forma de desigualdades lineales.
(C) Escriba las restricciones no negativas.

Paso 2. Grafique la región factible y encuentre los puntos esquina.

Paso 3. Evalúe la función objetivo de cada punto esquina para determinar la solución óptima.

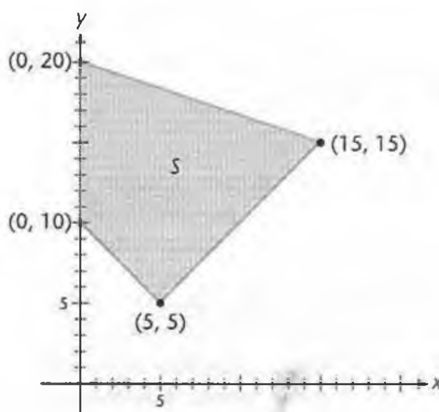
Antes de considerar más aplicaciones, se utilizará este procedimiento para resolver un problema de programación lineal donde el modelo ya se haya determinado.

EJEMPLO 2 **Solución de un problema de programación lineal**

Minimice y maximice $z = 5x + 15y$
Sujeta a $x + 3x \leq 60$
$x + y \geq 10$
$x - y \leq 0$
$x, y \geq 0$

Solución Este problema es una combinación de dos problemas de programación lineal (un problema de minimización y otro de maximización). Como la región factible es la misma para ambos problemas, se pueden resolver éstos de manera conjunta. Para empezar, se traza la gráfica de la región factible S, como se muestra en la figura 3, y se encuentran las coordenadas de cada punto esquina.

FIGURA 3



Después, se evalúa la función objetivo de cada punto esquina con los resultados que se dan en la tabla:

Punto esquina (x, y)	Función objetivo $z = 5x + 15y$		
(0, 10)	150		
(0, 20)	300	Valor máximo	Soluciones óptimas múltiples
(15, 15)	300	Valor máximo	
(5, 5)	100	Valor mínimo	

Examinando los valores de la tabla, se puede ver que el valor mínimo de z en la región factible S es 100 en (5, 5). En consecuencia, (5, 5) es la solución óptima del problema de minimización. El máximo valor de z en la región factible S es de 300, que ocurre en (0, 20) y en (15, 15). Por consiguiente, el problema de maximización tiene **soluciones óptimas múltiples**. En general:

> **Si dos puntos esquina son soluciones óptimas del mismo tipo (ambos producen el mismo valor máximo o el mismo valor mínimo) para un problema de programación lineal, entonces cualquier punto sobre el segmento de la recta que une a los dos puntos esquina es también una solución óptima de este tipo.**

Se puede mostrar que ésta es la única ocasión que ocurre un valor óptimo en más de un punto.

Problema seleccionado 2

Minimice y maximice $z = 10x + 5y$

Sujeta a

$$2x + y \geq 40$$
$$3x + y \leq 150$$
$$2x - y \geq 0$$
$$x, y \geq 0$$

Aplicación

Se considera otra aplicación donde se debe primero encontrar el modelo matemático para después encontrar su solución.

EJEMPLO 3

Agricultura

	Libras por yarda cúbica	
	Mezcla A	Mezcla B
Nitrógeno	10	5
Potasio	8	24
Ácido fosfórico	9	6

Un granjero puede utilizar dos tipos de abono, la mezcla A y la mezcla B. Las cantidades (en libras) de nitrógeno, ácido fosfórico y potasio en una yarda cúbica de cada mezcla se muestran en la tabla. Pruebas realizadas en la tierra de un cultivo grande indican que ésta necesita por lo menos 840 libras de potasio y 350 libras de nitrógeno. Las pruebas también indican que no se deberán agregar más de 630 libras de ácido fosfórico. Una yarda cúbica de la mezcla A cuesta \$7, y una de la mezcla B cuesta \$9. ¿Cuántas yardas cúbicas de cada mezcla deberá agregar el granjero a la tierra para cubrir las necesidades nutricionales a un costo mínimo?

Solución Sea

x = Número de yardas cúbicas de la mezcla A agregadas al cultivo
y = Número de yardas cúbicas de la mezcla B agregadas al cultivo
} Variables de decisión

Se forma ahora la función objetivo lineal

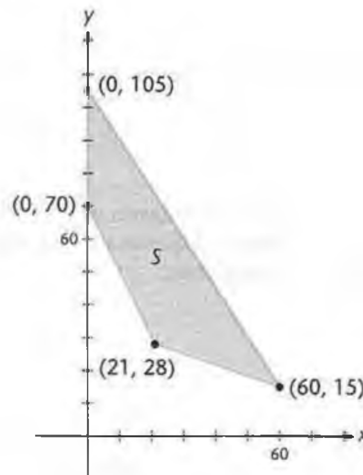
$$C = 7x + 9y$$

la cual proporciona el costo de x yardas cúbicas de la mezcla A y de y yardas cúbicas de la mezcla B agregadas al cultivo. Utilizando la información de la tabla, y procediendo como en el ejemplo 1, se formula un modelo matemático para el problema:

Minimice	$C = 7x + 9y$	Función objetivo
Sujeta a	$10x + 5y \geq 350$	Restricción del nitrógeno
	$8x + 24y \geq 840$	Restricción del potasio
	$9x + 6y \leq 630$	Restricción del ácido fosfórico
	$x, y \geq 0$	Restricciones no negativas

Resolviendo gráficamente este sistema de desigualdades restringidas, se obtiene la región factible S mostrada en la figura 4, y se encuentran las coordenadas de cada punto esquina.

FIGURA 4



Punto esquina (x, y)	Función objetivo $C = 7x + 9y$
(0, 105)	945
(0, 70)	630
(21, 28)	399 Valor mínimo de C
(60, 15)	555

En seguida, se evalúa la función objetivo de cada punto esquina como se muestra en la tabla al margen.

El valor óptimo es $C = 399$ en el punto esquina (21, 28). De manera que, el granjero deberá añadir 21 yardas cúbicas de la mezcla A y 28 de la mezcla B con un costo de $399. Esto resultará en la agregación de los nutrientes siguientes al campo:

Nitrógeno:	$10(21) + 5(28) = 350$ libras
Potasio:	$8(21) + 24(28) = 840$ libras
Ácido fosfórico:	$9(21) + 6(28) = 357$ libras

Con lo que se satisfacen todos los requerimientos nutricionales.

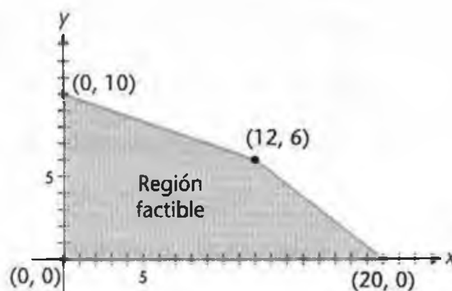
Problema seleccionado 3 Repita el ejemplo 3 si ahora las pruebas indican que el cultivo necesita de por lo menos 400 libras de nitrógeno pero todas las otras condiciones siguen siendo las mismas.

Respuestas a problemas seleccionados

1. (A) x = Número de tablas estándar producidas cada semana
   y = Número de tablas de competición producidas cada semana

   (B) $P = 40x + 75y$ (C) $6x + 8y \le 120$ Restricciones de fabricación
   $x + 3y \le 30$ Restricciones de acabado
   $x, y \ge 0$ Restricciones no negativas

   (D)



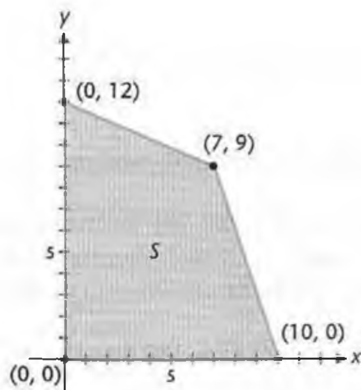
Punto esquina (x, y)	Función objetivo $P = 40x + 75y$
(0, 0)	0
(0, 10)	750
(12, 6)	930
(20, 0)	800

   (E) 12 tablas estándar y 6 de competición generan una ganancia máxima de $930.
2. El máximo es $z = 600$ en (30, 60); el mínimo es $z = 200$ en (10, 20) y en (20, 0) (soluciones óptimas múltiples)
3. 27 yardas cúbicas de la mezcla A, 26 yardas cúbicas de la mezcla B; mínimo de $C = \$423$

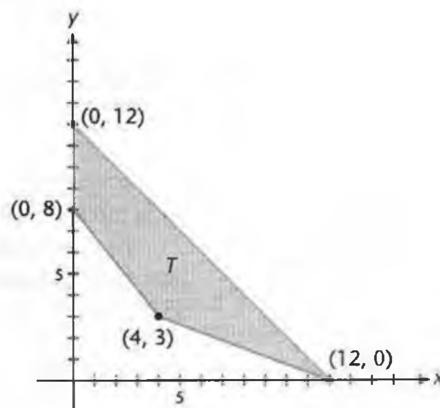
EJERCICIO 8-5

A

En los problemas del 1 al 4, encuentre el valor máximo de cada función objetivo sobre la región factible S mostrada en la figura siguiente.



En los problemas del 5 al 8, encuentre el valor mínimo de cada función objetivo sobre la región factible T mostrada en la figura siguiente.



1. $z = x + y$
2. $z = 4x + y$
3. $z = 3x + 7y$
4. $z = 9x + 3y$
5. $z = 7x + 4y$
6. $z = 7x + 9y$
7. $z = 3x + 8y$
8. $z = 5x + 4y$

B

En los problemas del 9 al 22, resuelva los problemas de programación lineal.

9. Maximice $z = 3x + 2y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} x + 2y &\le 10 \\ 3x + y &\le 15 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

10. Maximice $z = 4x + 5y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} 2x + y &\le 12 \\ x + 3y &\le 21 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

11. Minimice $z = 3x + 4y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} 2x + y &\ge 8 \\ x + 2y &\le 10 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

12. Minimice $z = 2x + y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} 4x + 3y &\ge 24 \\ 4x + y &\le 16 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

13. Maximice $z = 3x + 4y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} x + 2y &\le 24 \\ x + y &\le 14 \\ 2x + y &\le 24 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

14. Maximice $z = 5x + 3y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} 3x + y &\le 24 \\ x + y &\le 10 \\ x + 3y &\le 24 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

15. Minimice $z = 5x + 6y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} x + 4y &\ge 20 \\ 4x + y &\ge 20 \\ x + y &\le 20 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

16. Minimice $z = x + 2y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} 2x + 3y &\ge 30 \\ 3x + 2y &\ge 30 \\ x + y &\le 15 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

17. Minimice y maximice $z = 25x + 50y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} x + 2y &\le 120 \\ x + y &\ge 60 \\ x - 2y &\ge 0 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

18. Minimice y maximice $z = 15x + 30y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} x + 2y &\ge 100 \\ 2x - y &\le 0 \\ 2x + y &\le 200 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

19. Minimice y maximice $z = 25x + 15y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} 4x + 5y &\ge 100 \\ 3x + 4y &\le 240 \\ x &\le 60 \\ y &\le 45 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

20. Minimice y maximice $z = 25x + 30y$
Sujeta a
$$\begin{aligned} 2x + 3y &\ge 120 \\ 3x + 2y &\le 360 \\ x &\le 80 \\ y &\le 120 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

21. Maximice $P = 525x_1 + 478x_2$
Sujeta a
$$\begin{aligned} 275x_1 + 322x_2 &\le 3\,381 \\ 350x_1 + 340x_2 &\le 3\,762 \\ 425x_1 + 306x_2 &\le 4\,114 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

22. Maximice $P = 300x_1 + 460x_2$
Sujeta a
$$\begin{aligned} 245x_1 + 452x_2 &\le 4\,181 \\ 290x_1 + 379x_2 &\le 3\,888 \\ 390x_1 + 299x_2 &\le 4\,407 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

C

23. Los puntos esquina para la región factible determinada por las restricciones del problema

$$\begin{aligned} 2x + y &\le 10 \\ x + 3y &\le 15 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

son $O = (0, 0)$, $A = (5, 0)$, $B = (3, 4)$ y $C = (0, 5)$. Si $z = ax + by$ y $a, b > 0$, determine las condiciones de a y b que aseguren la localización del valor máximo de z:

(A) Sólo en A (B) Sólo en B
(C) Sólo en C (D) En A y B
(E) En B y C

24. Los puntos esquina para la región factible determinada por las restricciones del problema

$$\begin{aligned} x + y &\ge 4 \\ x + 2y &\ge 6 \\ 2x + 3y &\le 12 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$$

son $A = (6, 0)$, $B = (2, 2)$ y $C = (0, 4)$. Si $z = ax + by$ y $a, b > 0$, determine las condiciones de a y b que aseguren la localización del valor mínimo de z:

(A) Sólo en A (B) Sólo en B
(C) Sólo en C (D) En A y B
(E) En B y C

APLICACIONES

25. Asignación de recursos. Una fábrica produce dos tipos de esquíes, el esquí acrobático y el de competencia. La información relevante de la producción está en la tabla.

(A) Si la ganancia de producir el esquí acrobático es de $40 y la de producir el de competencia es de $30, ¿cuántos esquíes de cada tipo se deberán producir cada día para generar la máxima ganancia? ¿Cuál es la máxima ganancia?

(B) Analice el efecto de programar la producción y la máxima ganancia, si la utilidad por los esquíes de competencia disminuye a $25, pero los demás datos siguen siendo los mismos.

(C) Analice el efecto de programar la producción y la máxima ganancia si la utilidad de los esquíes de competencia aumenta a $45 pero los otros datos permanecen iguales.

	Esquí acrobático (horas de mano de obra por esquí)	Esquí de competencia (horas de mano de obra por esquí)	Número máximo de horas de mano de obra disponibles diariamente
Departamento de fabricación	6	4	108
Departamento de acabado	1	1	24

26. Psicología. En un experimento de acondicionamiento, un psicólogo utiliza dos tipos de cajas Skinner con ratones y ratas. La cantidad de tiempo (en minutos) que cada ratón y cada rata pasa en cada caja diariamente está dado en la tabla. ¿Cuál es el número total máximo de ratones y ratas que se puede utilizar en este experimento? ¿Cuántos ratones y ratas producen este valor máximo?

	Ratones (minutos)	Ratas (minutos)	Tiempo máximo disponible diariamente (minutos)
Caja Skinner *A*	10	20	800
Caja Skinner *B*	20	10	640

27. Compras. Una compañía de camiones quiere comprar un máximo de 15 camiones nuevos que proporcionen por lo menos 36 toneladas de capacidad adicional de carga. Un camión del modelo *A* tiene una capacidad de 2 toneladas y un costo de $15 000. Un camión del modelo *B* tiene una capacidad de 3 toneladas y un costo de $24 000. ¿Cuántos camiones de cada modelo debe comprar la compañía para proporcionar la capacidad adicional de carga al costo mínimo? ¿Cuál es el costo mínimo?

28. Transportación. Los administradores de una preparatoria planean rentar autobuses y camionetas para un viaje de prácticas. Cada autobús puede transportar a 40 estudiantes y tres supervisores, y la renta cuesta $1 200. Cada camioneta puede transportar a ocho estudiantes y un supervisor y su renta tiene un costo de $100. Los administradores quieren poder acomodar a por lo menos 400 estudiantes con no más de 36 supervisores. ¿Cuántos vehículos de cada tipo se deben rentar para minimizar el costo de la transportación? ¿Cuál es el costo mínimo de la transportación?

29. Asignación de recursos. Una fábrica de muebles produce mesas y sillas para comedor. Una mesa requiere de 8 horas de trabajo del departamento de ensamble y 2 horas de trabajo del departamento de acabado y genera una ganancia de $90. Una silla requiere de 2 horas de trabajo del departamento de ensamble y 1 hora de trabajo del departamento de acabado y genera una ganancia de $25. El máximo de horas disponibles por día para el ensamble y el acabado es de 400 y 120 horas, respectivamente.

(A) ¿Cuántas mesas y cuántas sillas se deben producir diariamente para maximizar la ganancia diaria? ¿Cuál es la máxima ganancia diaria?

(B) Analice el efecto de planificar la producción y la ganancia máxima si el departamento de mercadotecnia de la compañía decide que el número de sillas producidas debe ser cuatro veces menor que el número de mesas producidas.

30. Asignación de recursos. En una fábrica se producen dos tipos de computadoras, el modelo para escritorio y el modelo portátil. Si la producción de una computadora para escritorio requiere de un gasto principal de $400 y de 40 horas de trabajo. La producción de una computadora portátil requiere de un gasto principal de $250 y 30 horas de trabajo. La fábrica tiene un capital de $20 000 y dispone de 2 160 horas para la producción de las computadoras para escritorio y portátiles.

(A) ¿Cuál es el número máximo de computadoras que la compañía puede producir?

(B) Si cada computadora para escritorio genera una ganancia de $320 y cada computadora portátil genera una ganancia de $220, ¿cuánto ganará la compañía si produce el máximo número de computadoras determinado en el inciso (A)? ¿Es ésta la máxima ganancia? Si no lo es, ¿cuál es la máxima ganancia?

31. Control de la contaminación. Debido al nuevo reglamento federal referente a la contaminación, una planta química introdujo un nuevo proceso para el suplemento o reemplazo de un antiguo proceso utilizado en la producción de cierto químico. El antiguo proceso emitía 20 gramos de dióxido de azufre y 40 gramos de partículas suspendidas en la atmósfera por cada galón del químico producido. El nuevo proceso emite 5 gramos de dióxido de azufre y 20 gramos de partículas suspendidas en la atmósfera por cada galón del químico producido. La compañía genera una ganancia de 60 centavos por galón en el antiguo proceso y 20 centavos por galón en el nuevo.

(A) Si el reglamento le permite emitir a la planta diariamente no más de 16 000 gramos de dióxido de azufre y 30 000 gramos de partículas suspendidas, ¿cuántos galones del químico se deben producir por cada proceso para generar la máxima ganancia diaria? ¿Cuál es la máxima ganancia diaria?

(B) Analice el efecto de planificar la producción y la máxima ganancia si el reglamento restringe las emisiones diarias de dióxido de azufre a 11 500 gramos y los otros datos permanecen iguales.

(C) Analice el efecto de planificar la producción y la máxima ganancia si el reglamento restringe las emisiones diarias de dióxido de azufre a 7 200 gramos pero los demás datos siguen siendo los mismos.

** 32. **Sociología.** Un ayuntamiento votó por dirigir un estudio de los problemas de una comunidad céntrica. Una universidad cercana fue contactada para contratar un máximo de 40 sociólogos y asistentes de investigación. El tiempo asignado y el costo por semana se dan en la tabla.

(A) ¿Cuántos sociólogos y asistentes de investigación se emplearán para cumplir con las horas laborales requeridas por semana y para minimizar el costo semanal? ¿Cuál es el costo en ese mismo periodo?

(B) Analice el efecto de la solución del inciso (A), si el ayuntamiento decide que no se podrá emplear a más sociólogos que asistentes y si los demás datos permanecen iguales.

	Sociólogos (horas laborales)	Asistentes (horas laborales)	Mínimo de horas laborales requeridas por semana
Trabajo de campo	10	30	280
Trabajo en el centro de investigación	30	10	360
Costo semanal	$500	$300	

** 33. **Nutrición de las plantas.** Un fruticultor puede usar dos tipos de abono en su cultivo de naranjas, la marca A y la marca B. Las cantidades (en libras) de nitrógeno, ácido fosfórico, potasio y cloro en una bolsa de cada mezcla se dan en la tabla. Las pruebas indican que el cultivo necesita por lo menos 480 libras de ácido fosfórico, 540 de potasio y un máximo de 620 libras de cloro. Si el fruticultor siempre utiliza una combinación de bolsas de la marca A y de la marca B que satisfacen las restricciones de ácido fosfórico, potasio y cloro, analice el efecto que tendrá sobre la cantidad de nitrógeno añadida al cultivo.

	Libras por bolsa	
	Marca A	Marca B
Nitrógeno	6	7
Ácido fosfórico	2	4
Potasio	6	3
Cloro	3	4

** 34. **Dieta.** Un dietista en un hospital debe diseñar una dieta especial compuesta de dos tipos de alimentos, M y N. Cada onza del alimento M contiene 16 unidades de calcio, 5 de hierro, 6 de colesterol y 8 de vitamina A. Cada onza del alimento N contiene 4 unidades de calcio, 25 de hierro, 4 de colesterol y 4 de vitamina A. La dieta requiere de por lo menos 320 unidades de calcio, 575 de hierro y más de 300 de colesterol. Si el dietista siempre selecciona una combinación de alimentos M y N que deba satisfacer las restricciones de calcio, hierro y colesterol, analice el efecto que tendrá sobre la cantidad de vitamina A en la dieta.

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 8 Modelamiento con sistemas de ecuaciones lineales

En esta actividad en grupo se consideran dos problemas de la vida cotidiana que se pueden resolver utilizando sistemas de ecuaciones lineales: conducción del calor y circulación vehicular. Ambos problemas implican el uso de una cuadrícula y una suposición básica para construir el modelo (sistema de ecuaciones). La eliminación Gauss-Jordan se utiliza entonces para resolver el modelo. En el problema de la conducción del calor, la solución del modelo es fácilmente interpretada en términos del problema original. El sistema en el segundo problema es dependiente, y la solución requiere de una interpretación más cuidadosa.

I Conducción del calor

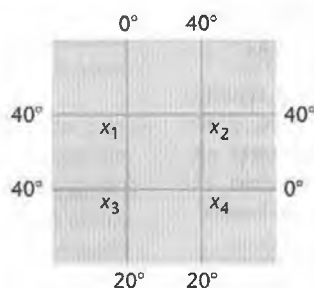
Una parrilla de metal está formada por cuatro barras delgadas de metal. El extremo de cada barra de la parrilla permanece a una temperatura constante, como se muestra en la figura 1. Se supone que la temperatura en cada punto de intersección en la parrilla es el promedio de la temperatura de los cuatro puntos adyacentes en la parrilla

(los puntos adyacentes son los otros puntos de intersección o los extremos de las barras). Así, la temperatura x_1 en el punto de intersección de la esquina superior izquierda de la cuadrícula debe satisfacer

$$\begin{array}{lccccccc} & \text{Izquierda} & & \text{Arriba} & & \text{Derecha} & & \text{Abajo} \\ x_1 = \frac{1}{4}(& 40 & + & 0 & + & x_2 & + & x_3 \;) \end{array}$$

Encuentre las ecuaciones para la temperatura en los otros tres puntos de intersección, y resuelva el sistema resultante para encontrar la temperatura de cada punto de intersección en la cuadrícula.

FIGURA 1



II Circulación vehicular

La hora de mayor flujo vehicular para una red de cuatro calles de un solo sentido en una ciudad se muestra en la figura 2. Los siguientes números de cada calle indican el número de vehículos por hora que entran y salen de la red en aquella calle. Las variables x_1, x_2, x_3 y x_4 representan la circulación vehicular entre las cuatro intersecciones de la red. Para una circulación vehicular fluida, se supone que el número de vehículos que entran en cada intersección siempre es igual al número de los que salen. Por ejemplo, como 1 500 vehículos entraron cada hora a la intersección de la Calle Quinta y la Avenida Washington, y salieron $x_1 + x_4$ vehículos, se observa que $x_1 + x_4 = 1\,500$.

FIGURA 2



(A) Encuentre las ecuaciones determinadas por la circulación vehicular en cada una de las otras cuatro intersecciones.
(B) Encuentre la solución al sistema del inciso (A).
(C) ¿Cuál es el número máximo de vehículos que pueden viajar desde la Avenida Washington a la Avenida Lincoln por la Calle Quinta? ¿Cuál es el número mínimo?
(D) Si las vías estrechas están ajustadas de tal manera que viajen 1 000 vehículos por hora de la Avenida Washington a la Avenida Lincoln por la Calle Quinta, determine la circulación en el resto de la red.

Repaso del capítulo 8

8-1 SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES AUMENTADAS

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables es un sistema de la forma

$$\begin{aligned} ax + by &= h \\ cx + dy &= k \end{aligned} \qquad (1)$$

donde x y y son las variables, a, b, c y d son números reales llamados **coeficientes** de x y y, y h y k son números reales llamados **términos constantes** en las ecuaciones. El par ordenado de los números (x_0, y_0) es una **solución** del sistema (1) si cada ecuación se satisface por el par. El conjunto de todos los pares ordenados de números se llama **conjunto solución** del sistema. **Resolver** un sistema es encontrar su conjunto solución.

En general, un sistema de ecuaciones lineales tiene exactamente una solución, ninguna solución o un número infinito de soluciones. Un sistema de ecuaciones lineales es **consistente** si tiene una o más soluciones e **inconsistente** si no tiene ninguna. Se dice que un sistema consistente es **independiente** si tiene exactamente una solución, y **dependiente** si tiene más de una.

Se analizaron dos métodos estándar para resolver el sistema (1): el de **solución por graficación** y el de **solución mediante eliminación por suma**.

Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si ambos tienen el mismo conjunto de soluciones. Un sistema de ecuaciones lineales se transforma en un sistema equivalente si:

1. Se intercambian dos ecuaciones.
2. Una ecuación se multiplica por una constante diferente de cero.
3. Un múltiplo constante de otra ecuación se suma a la ecuación dada.

Estas operaciones forman la base de la solución utilizando la eliminación por suma. El método de solución mediante eliminación por suma se puede transformar en un método más eficiente para sistemas a mayor escala por la introducción de una *matriz aumentada*. Una **matriz** es un arreglo rectangular de números escritos dentro de paréntesis cuadrados. Cada número de una matriz se denomina **elemento** de la matriz. Si una matriz tiene m renglones y n columnas, se llama **matriz $m \times n$** (léase "matriz m por n"). La expresión $m \times n$ se llama tamaño de la matriz, y los números m y n se llaman **dimensiones** de la matriz. Una matriz con n renglones y n columnas se denomina **matriz cuadrada de orden n**. Una matriz con sólo una columna se llama **matriz columna**, y una matriz con sólo un renglón se llama **matriz renglón**. La **posición** de un elemento en una matriz es el renglón y la columna que contienen al elemento. Esto se denota a menudo utilizando la **notación de doble subíndice** a_{ij}, donde i es el renglón y j es la columna que contiene al elemento a_{ij}.

Para facilitar la generalización de grandes sistemas, se cambia la notación por variables y constantes en el sistema (1) a la siguiente forma de subíndices:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 &= k_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 &= k_2 \end{aligned} \qquad (2)$$

Asociado con cada sistema lineal de la forma (2), donde x_1 y x_2 son las variables, ésta es la **matriz aumentada** del sistema:

Columna 1 (C_1)
Columna 2 (C_2)
Columna 3 (C_3)

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & k_1 \\ a_2 & b_2 & k_2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \text{Renglón 1 } (R_1) \\ \leftarrow \text{Renglón 2 } (R_2) \end{array}$$

Dos matrices aumentadas son de **renglón equivalente**, y se denotan por el símbolo ~ entre las dos matrices, si son matrices aumentadas de los sistemas equivalentes de ecuaciones. Una matriz aumentada se transforma en una matriz renglón equivalente si se realiza cualquiera de las siguientes **operaciones renglón**:

1. Se intercambian dos renglones.
2. Se multiplica un renglón por una constante diferente de cero.
3. Se suma un múltiplo constante de otro renglón al renglón dado.

Los siguientes símbolos se utilizan para describir estas operaciones de renglón:

1. $R_i \leftrightarrow R_j$ significa "intercambio del renglón i con el renglón j".
2. $kR_i \to R_i$ significa "multiplicación del renglón i por la constante k".
3. $kR_j + R_i \to R_i$ significa "multiplicación del renglón j por la constante k y se suma a R_i".

Al resolver el sistema (2) utilizando operaciones de renglón, el objetivo es transformar la matriz aumentada (3) en la forma

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \end{array}\right]$$

Si se puede hacer esto, entonces (m, n) es la única solución del sistema (2). Si (3) se transforma en la forma

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & n \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

entonces el sistema (2) tiene una infinidad de soluciones. Si (3) se transforma en la forma

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & m & n \\ 0 & 0 & p \end{array}\right] \qquad p \neq 0$$

entonces el sistema (2) no tiene solución.

8-2 ELIMINACIÓN GAUSS-JORDAN

En la última parte de la sección 8-1 se usó *eliminación Gauss-Jordan* para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos variables. El método se generaliza por completo para sistemas con más de dos variables, y el número de variables no tiene que ser el mismo número de ecuaciones.

Como antes, el objetivo será empezar con las matrices aumentadas de un sistema lineal y transformarlo mediante operaciones de renglón en una forma simple donde la solución se pueda leer por revisión. La forma simple, llamada **forma reducida**, se logra si:

1. Cada renglón que consiste por completo de ceros está debajo de cualquier renglón que tenga por lo menos un elemento diferente de cero.
2. El elemento diferente de cero en el extremo izquierdo de cada renglón es 1.
3. La columna que contiene al 1 del extremo izquierdo de un renglón dado tiene ceros arriba y abajo del 1.
4. El 1 del extremo izquierdo de cualquier renglón está a la derecha del 1 del extremo izquierdo del renglón anterior.

Un **sistema reducido** es un sistema de ecuaciones lineales que corresponde a una matriz aumentada reducida. Cuando un sistema reducido tiene más variables que ecuaciones y no tiene contradicciones, el sistema es dependiente y tiene una infinidad de soluciones.

El procedimiento de la **eliminación Gauss-Jordan** utilizado para resolver un sistema de ecuaciones lineales está dado por la forma paso por paso como se indica:

Paso 1. Elija la columna diferente de cero, y utilice las operaciones de renglón apropiadas para obtener un 1 en la parte superior.

Paso 2. Use múltiplos del renglón que contiene el 1 del paso 1 para obtener ceros en los lugares restantes en la columna que contenga a este 1.

Paso 3. Repita el paso 1 con la **submatriz** formada (mentalmente) eliminando el renglón utilizado en el paso 2 y en todos los renglones arriba de este renglón.

Paso 4. Repita el paso 2 con la **matriz entera**, incluyendo los renglones eliminados mentalmente. Continúe este procedimiento hasta que sea imposible avanzar más lejos.

Si en cierto punto del procedimiento anterior se obtiene un renglón con ceros a la izquierda de la recta vertical y un número diferente de cero n a la derecha, se puede parar, ya que se tiene una contradicción: $0 = n, n \neq 0$. Se puede entonces concluir que el sistema no tiene solución. Si esto no sucede y se obtiene a una matriz aumentada en forma reducida sin contradicciones, la solución se puede leer por revisión.

8-3 SISTEMAS QUE IMPLICAN ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Si un sistema de ecuaciones contiene ciertas ecuaciones no lineales, entonces el sistema se llama **sistema no lineal**. En esta sección se estudiaron sistemas no lineales que implican términos de segundo grado tales como:

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad x^2 - 2y^2 = 2 \qquad x^2 + 3xy + y^2 = 20$$
$$3x + y = 1 \qquad xy = 2 \qquad xy - y^2 = 0$$

Se puede demostrar que estos sistemas tienen a lo más cuatro soluciones, algunas pueden ser imaginarias.

Se usaron diversos métodos para resolver sistemas no lineales de la forma indicada: **solución por sustitución, solución mediante eliminación por suma** y **solución mediante factorización y sustitución**. Es importante siempre comprobar las soluciones de cualquier sistema no lineal para asegurarse de que no se hayan introducido raíces extrañas.

8-4 SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES CON DOS VARIABLES

A menudo el modo más conveniente para representar la solución de una desigualdad lineal con dos variables o de un sistema de desigualdades lineales con dos variables es una gráfica.

Una recta vertical divide un plano en **semiplanos a la derecha** y **a la izquierda**. Una recta no vertical divide un plano en **semiplanos superior** e **inferior**. Sean A, B y C números reales con A y B diferentes de cero, entonces la gráfica de la desigualdad lineal

$$Ax + By < C \qquad \text{o} \qquad Ax + By > C$$

con $B \neq 0$, está en el semiplano superior o en el semiplano inferior (pero no en ambos) determinados por la recta $Ax + By = C$. Si $B = 0$, entonces la gráfica de

$$Ax < C \qquad \text{o} \qquad Ax > C$$

está en el semiplano izquierdo o en el derecho (pero no en ambos) determinado por la recta $Ax = C$. A partir de estos resultados se deduce un fácil **procedimiento paso por paso para graficar una desigualdad lineal con dos variables**:

Paso 1. Grafique $Ax + By = C$ como una línea discontinua si la igualdad no está incluida en el planteamiento original o como una línea sólida si la igualdad está incluida.

Paso 2. Elija un punto de prueba en cualquier lugar del plano que no esté en la recta, y sustituya las coordenadas en la desigualdad. El origen (0, 0) a menudo requiere de un último cálculo.

Paso 3. La gráfica de la desigualdad original incluye al semiplano que contiene al punto de prueba si la desigualdad se satisface por ese punto, o el semiplano no contiene ese punto si la desigualdad no se satisface por ese punto.

Ahora se verán los sistemas de desigualdades lineales con dos variables. La **solución de un sistema de desigualdades lineales con dos variables** es el conjunto de todos los pares

ordenados de números reales que satisfacen simultáneamente todas las desigualdades del sistema. La gráfica se llama **región solución**. En muchas aplicaciones también se hace referencia a la región de solución como **región factible**. Para **encontrar la región solución**, se grafica cada desigualdad en el sistema y luego se toma la intersección de todas las gráficas. Un **punto esquina** de una región solución es un punto en la región solución que es la intersección de dos rectas acotadas. Una región solución es **acotada** si se puede encerrar dentro de un círculo. Si no se puede insertar en un círculo, entonces es **no acotada**.

8-5 PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal es un proceso matemático que se desarrolló para ayudar a la administración en la toma de decisiones, y se convirtió en una de las mejores herramientas, más conocidas y usadas en la administración y en la ingeniería industrial.

Un **problema de programación lineal** es el que busca encontrar el **valor óptimo** (valor máximo o mínimo) de una **función objetivo** lineal de la forma $z = ax + by$, donde las **variables de decisión** x y y están sujetas a las **restricciones del problema** en forma de desigualdades lineales y de **restricciones no negativas** $x, y \geq 0$. El conjunto de puntos que satisface las restricciones del problema y las restricciones no negativas se llama **región factible** del problema. Cualquier punto en la región factible que produzca un valor óptimo de la función objetivo sobre la región factible se llama **solución óptima**. El **teorema fundamental de programación lineal** es básico para resolver problemas de programación lineal: Sea S la región factible para un problema de programación lineal, y sea $z = ax + by$ la función objetivo. Si S está acotada, entonces z tiene un valor máximo y uno mínimo en S, y cada uno de éstos se encuentra en el punto esquina de S. Si S es acotada, entonces tal vez no haya un valor máximo o mínimo de z en S. Sin embargo, si lo hay, deberá estar en un punto esquina de S.

Los problemas con regiones factibles no acotadas no se consideran en esta breve introducción. El teorema conduce hacia una simple **solución de problemas de programación lineal paso por paso con una región factible acotada**:

Paso 1. Construya un modelo matemático para el problema:

(A) Introduzca las variables de decisión y escriba una función objetivo lineal.
(B) Escriba las restricciones del problema en forma de desigualdades lineales.
(C) Escriba las restricciones no negativas.

Paso 2. Grafique la región factible y encuentre los puntos esquina.

Paso 3. Evalúe la función objetivo de cada punto esquina para determinar la solución óptima.

Si dos puntos esquina son las soluciones óptimas del mismo tipo (ambos producen el mismo valor máximo o el mismo valor mínimo) para un problema de programación lineal, entonces cualquier punto del segmento de recta que une los dos puntos esquina es también una solución óptima de este tipo.

Ejercicio de repaso del capítulo 8

Al trabajar con los problemas de este capítulo revise y compruebe sus respuestas con las que se dan al final del libro. Se incluyen todas las respuestas a los problemas de repaso, y después de cada respuesta está un número en tipo itálico que indica la sección a la que corresponde el problema que se está analizando. Si se le presentan dudas repase la sección correspondiente en el texto.

A

Resuelva los problemas del 1 al 6 utilizando la eliminación por suma.

1. $2x + y = 7$
   $3x - 2y = 0$

2. $3x - 6y = 5$
   $-2x + 4y = 1$

3. $4x - 3y = -8$
   $-2x + \frac{3}{2}y = 4$

4. $y = x^2 - 5x - 3$
   $y = -x + 2$

5. $x^2 + y^2 = 2$
   $2x - y = 3$

6. $3x^2 - y^2 = -6$
   $2x^2 + 3y^2 = 29$

Resuelva los problemas del 7 al 9 por graficación.

7. $3x - 2y = 8$
   $x + 3y = -1$

8. $3x - 4y \geq 24$

9. $2x + y \leq 2$
   $x + 2y \geq -2$

Realice cada una de las operaciones renglón indicadas en los problemas del 10 al 12 en la siguiente matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 5 \\ 3 & -6 & 12 \end{array}\right]$$

10. $R_1 \leftrightarrow R_2$

11. $\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2$

12. $(-3)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$

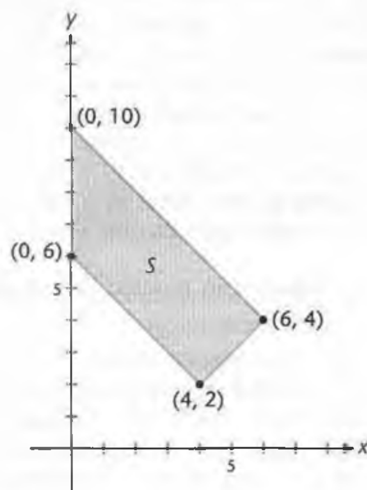
En los problemas del 13 al 15, escriba el sistema lineal correspondiente para cada una de las matrices aumentadas reducidas y resuélvalas.

13. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{array}\right]$

14. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

15. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

16. Encuentre los valores máximos y mínimos de $z = 5x + 3y$ en la región factible S mostrada en la figura.



17. Utilice la eliminación Gauss-Jordan para resolver el sistema

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Después escriba el sistema lineal representado por cada matriz aumentada en su solución, y resuelva cada uno de estos sistemas gráficamente. Analice la relación entre las soluciones de estos sistemas.



18. Utilice una rutina de intersección en un dispositivo de graficación para aproximar la solución del sistema siguiente con dos cifras decimales:

$$\begin{aligned} x + 3y &= 9 \\ -2x + 7y &= 10 \end{aligned}$$

B

Resuelva los problemas del 19 al 24 mediante la eliminación Gauss-Jordan.

19. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_3 &= -2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 &= -1 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 &= -2 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3 \end{aligned}$

Resuelva los problemas del 25 al 27

25. $\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 2 \\ y^2 &= x \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 &= 1 \\ xy &= -2 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 2x^2 + xy + y^2 &= 8 \\ x^2 - y^2 &= 0 \end{aligned}$

Resuelva gráficamente los sistemas de los problemas del 28 al 30, e indique si cada región solución es acotada o no acotada. Encuentre las coordenadas de cada punto esquina.

28. $\begin{aligned} 2x + y &\le 8 \\ 2x + 3y &\le 12 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 2x + y &\ge 8 \\ x + 3y &\ge 12 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} x + y &\le 20 \\ x + 4y &\ge 20 \\ x - y &\ge 0 \end{aligned}$

Resuelva los problemas de programación lineal en los problemas del 31 al 33.

31. Maximice $z = 7x + 9y$
Sujeta a $\begin{aligned} x + 2y &\le 8 \\ 2x + y &\le 10 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$

32. Minimice $z = 5x + 10y$
Sujeta a $\begin{aligned} x + y &\le 20 \\ 3x + y &\ge 15 \\ x + 2y &\ge 15 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$

33. Maximice y minimice
Sujeta a $\begin{aligned} x + 2y &\le 20 \\ 3x + y &\le 15 \\ x + y &\ge 7 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$

C

34. Resuelva utilizando la eliminación Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7\,000 \\ 0.04x_1 + 0.05x_2 + 0.06x_3 &= 360 \\ 0.04x_1 + 0.05x_2 - 0.06x_3 &= 120 \end{aligned}$$

35. Resuelva:

$$\begin{aligned} x^2 - xy + y^2 &= 4 \\ x^2 + xy - 2y^2 &= 0 \end{aligned}$$

36. Maximice $z = 30x + 20y$
Sujeta a $\begin{aligned} 1.2x + 0.6y &\le 960 \\ 0.04x + 0.03y &\le 36 \\ 0.2x + 0.3y &\le 270 \\ x, y &\ge 0 \end{aligned}$



37. Aproxime todas las soluciones reales con dos cifras decimales:

$$\begin{aligned} x^2 + 4xy + y^2 &= 8 \\ 5x^2 + 2xy + y^2 &= 25 \end{aligned}$$

38. Analice el número de soluciones para el sistema correspondiente a la forma reducida que se muestra a continuación si

(A) $m \neq 0$ (B) $m = 0$ y $n \neq 0$
(C) $m = 0$ y $n = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & m & n \end{array}\right]$$

APLICACIONES

39. **Negocios.** Un recipiente contiene 120 paquetes. Algunos pesan 1/2 libra cada uno, y el resto pesa 1/3 de libra cada uno. Si el contenido total del recipiente pesa 48 libras, ¿cuántos paquetes de cada tipo hay? Resuelva utilizando métodos de dos ecuaciones con dos variables.

40. **Geometría.** Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un área de 48 metros cuadrados y un perímetro de 28 metros. Resuelva utilizando métodos de dos ecuaciones con dos variables.

41. **Dieta.** Un asistente de laboratorio desea obtener una mezcla de alimentos que contenga, entre otras cosas, 27 gramos de proteína, 5.4 gramos de grasa y 19 gramos de humedad. Dispone para ello de las mezclas A, B y C que tienen las composiciones indicadas en la tabla. ¿Cuántos gramos de cada mezcla se deben utilizar para obtener la mezcla deseada de alimentos? Establezca un sistema de ecuaciones y resuelva mediante eliminación Gauss-Jordan.

Mezcla	Proteína (%)	Grasa (%)	Humedad (%)
A	30	3	10
B	20	5	20
C	10	4	10

** 42. **Acertijo.** Una alcancía contiene 30 monedas con un valor total de $1.90.

(A) Si la alcancía sólo contiene monedas de 5 y de 10 centavos, ¿cuántas monedas hay de cada tipo?
(B) Si la alcancía contiene monedas de 5, 10 y 25 centavos, ¿cuántas monedas hay de cada tipo?

* 43. **Asignación de recursos.** La compañía North Star Sail Loft fabrica velas regulares y de competición. Cada vela regular requiere de 1 hora de trabajo para el corte y de 3 para coserla. Cada vela de competición requiere de 2 horas de trabajo para el cortado y 4 para coserla. Se dispone de 140 horas de trabajo en el departamento de corte y 360 en el departamento de costura.

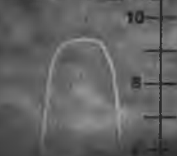
(A) Si la fábrica obtiene una ganancia de $60 en cada vela regular y $100 en cada vela de competición, ¿cuántas velas de cada tipo debe producir para maximizar su ganancia? ¿Cuál es la ganancia máxima?
(B) Un aumento en la demanda de las velas para competición provoca que la utilidad en una vela de competición se eleve hasta $125. Analice el efecto de este cambio sobre el número de velas producidas y sobre la utilidad máxima.
(C) Una disminución en la demanda de las velas para competición provoca que la utilidad en una vela de competición se reduzca hasta $75. Analice el efecto de este cambio sobre el número de velas producidas y sobre la ganancia máxima.

* 44. **Nutrición de animales.** Una dieta especial para animales de laboratorio contiene al menos 800 unidades de vitaminas, al menos 800 unidades de minerales y a lo más 1 300 calorías. Se dispone de dos combinaciones de alimentos, la mezcla A y la mezcla B. Un gramo de la mezcla A contiene 5 unidades de vitaminas, 2 de minerales y 4 calorías. Un gramo de la mezcla B contiene 2 unidades de vitaminas, 4 de minerales y 4 calorías.

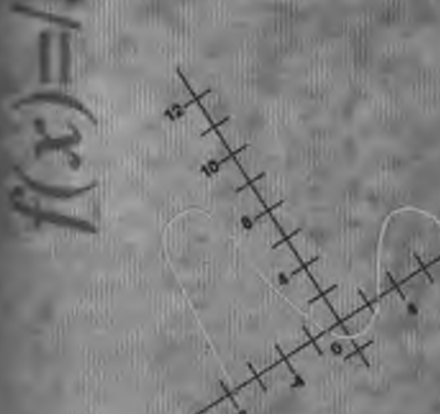
(A) Si la mezcla A cuesta $0.07 por gramo y la mezcla B $0.04 por gramo, ¿cuántos gramos de cada mezcla se deberán utilizar para satisfacer los requerimientos de la dieta al mínimo costo? ¿Cuál es el costo mínimo?
(B) Si el precio de la mezcla B disminuye a $0.02 por gramo, analice el efecto de este cambio en la solución del inciso A.
(C) Si el precio de la mezcla B se eleva a $0.15 por gramo, analice el efecto de este cambio en la solución del inciso (A).

CAPÍTULO 9

MATRICES Y DETERMINANTES







$f(x)=|3x+4|+1$

En este capítulo se analizan las matrices con más detalle. En las primeras tres secciones se definen y estudian algunas operaciones algebraicas matriciales, que incluyen suma, multiplicación e inversión. En las siguientes tres secciones se aborda el determinante de una matriz.

En el capítulo anterior se usaron las operaciones de renglón y la eliminación de Gauss-Jordan para resolver sistemas de ecuaciones lineales. En este capítulo las operaciones de renglón desempeñan un papel importante en el desarrollo de diversos temas. Una consecuencia del análisis será el desarrollo de otros dos métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales: uno de ellos implica a las matrices inversas y el otro a los determinantes.

Las matrices son un concepto matemático muy antiguo y muy actual. Se pueden encontrar referencias acerca de las matrices y sistemas de ecuaciones en manuscritos chinos que datan de alrededor del año 200 a. C. Con los años, los matemáticos y científicos han encontrado muchas aplicaciones de las matrices. Actualmente, con la llegada de computadoras personales a gran escala se ha incrementado el uso de las matrices en una amplia variedad de aplicaciones. En 1979 Dan Bricklin y Robert Frankston introdujeron VisiCalc, la primera hoja de cálculo para computadoras personales. De manera muy simple, una *hoja de cálculo* es un programa en computadora que permite al usuario introducir y manejar números, a menudo mediante notación matricial y operaciones. Al inicio las hojas de cálculo se usaron en los negocios en áreas tales como presupuestos, proyección de ventas y estimación de costos. Sin embargo, han aparecido muchas otras aplicaciones. Por ejemplo, un científico puede usar una hoja de cálculo para analizar los resultados de un experimento, o un maestro para registrar y sacar promedios de calificaciones. Inclusive existen hojas de cálculo que se usan para ayudar a calcular, de manera individual, el impuesto por ingresos.

SECCIÓN 9-1 Matrices: Operaciones básicas



- Suma y resta
- Multiplicación de una matriz por un número
- Producto matricial

En la sección 8-1 se introdujo la terminología básica matricial y se resolvieron sistemas de ecuaciones mediante operaciones de renglón en matrices con coeficientes aumentados. Las matrices tienen muchas otras aplicaciones útiles y poseen en sí mismas una estructura matemática interesante. Como se verá, la suma y multiplicación matricial se parecen a la suma y multiplicación de números reales en muchos aspectos, pero difieren de ellas en algunos aspectos importantes. Para entender mejor las similitudes y diferencias, se sugiere revisar las propiedades básicas de operaciones con números reales que se analizan en la sección A-1 del Apéndice A.

• Suma y resta

Antes de comenzar con el estudio de las operaciones aritméticas para matrices, se tiene que definir la igualdad para matrices. Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales. Por ejemplo,

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} u & v & w \\ x & y & z \end{bmatrix}} \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{matrix} a = u & b = v & c = w \\ d = x & e = y & f = z \end{matrix}$$

La **suma de dos matrices** del mismo tamaño es una matriz con elementos que son la suma de los elementos correspondientes de dos matrices dadas.

La suma no está definida por matrices de diferentes tamaños.

EJEMPLO 1 **Suma matricial**

(A) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+w) & (b+x) \\ (c+y) & (d+z) \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Problema seleccionado 1 Sume: $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

```
[A]
      [[2 -3 0 ]
       [1 2  -5]]
[B]
      [[3  1 2]
       [-3 2 5]]
[A]+[B]
      [[5  -2 2]
       [-2 4  0]]
```

FIGURA 1 Suma en una calculadora gráfica.

También se pueden usar dispositivos de graficación para resolver problemas que impliquen operaciones matriciales. La figura 1 ilustra la solución del ejemplo 1(B) en una calculadora gráfica.

Como la suma de dos matrices se obtuvo al sumar sus elementos correspondientes, se concluye de las propiedades de los números reales que las matrices del mismo tamaño son conmutativas y asociativas con respecto a la suma. Es decir, si A, B y C son matrices del mismo tamaño, entonces

$$A + B = B + A \qquad \text{Conmutativa}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad \text{Asociativa}$$

Una matriz en la cual todos los elementos son cero se denomina **matriz cero**. Por ejemplo, las siguientes son matrices cero de diferente tamaño:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[*Nota:* "0" se puede usar para denotar una matriz cero de cualquier tamaño.]

El **negativo de una matriz** M, que se denota por $-M$, es una matriz con elementos que son los negativos de los elementos de M. Así, si

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces

$$-M = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

Note que $M + (-M) = 0$ (una matriz cero).

Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces se define la **resta** como sigue:

$$A - B = A + (-B)$$

Así, para restar la matriz B de la matriz A, simplemente se restan los elementos correspondientes.

EJEMPLO 2 **Resta matricial**

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Problema seleccionado 2 Reste: $[2 \quad -3 \quad 5] - [3 \quad -2 \quad 1]$

• Multiplicación de una matriz por un número

El **producto de un número *k* por una matriz *M***, que se denota por ***kM***, es una matriz que se forma al multiplicar cada elemento de M por k.

EJEMPLO 3 **Multiplicación de una matriz por un número**

$$-2\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Problema seleccionado 3 Encuentre: $10\begin{bmatrix} 1.3 \\ 0.2 \\ 3.5 \end{bmatrix}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 La multiplicación de dos números se puede interpretar como sumas repetidas si uno de los números es un entero positivo. Es decir,

$$2a = a + a \qquad 3a = a + a + a \qquad 4a = a + a + a + a$$

y así sucesivamente. Analice esta interpretación para el producto de un entero k por una matriz M. Use ejemplos específicos para ilustrar sus observaciones.

Ahora considere una aplicación que usa varias operaciones matriciales.

EJEMPLO 4 **Ventas y comisiones**

La señora Pérez y el señor López son vendedores de una agencia nueva de autos que sólo vende dos modelos. Agosto fue el último mes para modelos de este año, y en septiembre se introdujeron los modelos del siguiente año. En las siguientes matrices se indican las ventas totales para cada mes:

VENTAS DE AGOSTO (Compacto, De lujo; filas: Pérez, López) — VENTAS DE SEPTIEMBRE (Compacto, De lujo)

$$\begin{matrix}\text{Pérez}\\ \text{López}\end{matrix}\begin{bmatrix}\$36\,000 & \$72\,000\\ \$72\,000 & \$0\end{bmatrix} = A \qquad \begin{bmatrix}\$144\,000 & \$288\,000\\ \$180\,000 & \$216\,000\end{bmatrix} = B$$

Por ejemplo, la señora Pérez obtuvo \$36 000 por las ventas de autos compactos en agosto y el señor López obtuvo \$216 000 por las ventas de carros de lujo en septiembre.

(A) ¿Cuáles fueron, en dólares, las ventas combinadas de agosto y septiembre de cada vendedor y cada modelo?
(B) ¿En cuánto aumentaron las ventas, en dólares, de agosto a septiembre?
(C) Si cada vendedor recibe un 3% de comisión sobre las ventas totales, calcule la comisión de cada vendedor para cada modelo vendido en septiembre.

Soluciones Se usa la suma matricial para el inciso (A), la resta matricial para el inciso (B) y la multiplicación de una matriz por un número para el inciso (C).

Compacto, De lujo

(A) $$A + B = \begin{bmatrix}\$180\,000 & \$360\,000\\ \$252\,000 & \$216\,000\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{Pérez}\\ \text{López}\end{matrix}$$

(B) $$B - A = \begin{bmatrix}\$108\,000 & \$216\,000\\ \$108\,000 & \$216\,000\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{Pérez}\\ \text{López}\end{matrix}$$

Compacto, De lujo

(C) $$0.03B = \begin{bmatrix}(0.03)(\$144\,000) & (0.03)(\$288\,000)\\ (0.03)(\$180\,000) & (0.03)(\$216\,000)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\$4\,320 & \$8\,640\\ \$5\,400 & \$6\,480\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{Pérez}\\ \text{López}\end{matrix}$$

Problema seleccionado 4 Repita el ejemplo 4 con

$$A = \begin{bmatrix} \$72\,000 & \$72\,000 \\ \$36\,000 & \$72\,000 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} \$180\,000 & \$216\,000 \\ \$144\,000 & \$216\,000 \end{bmatrix}$$

El ejemplo 4 implica una agencia con sólo dos vendedores y dos modelos. Un problema más realista puede involucrar 20 vendedores y 15 modelos. Problemas de este tamaño a menudo se resuelven con la ayuda de una hoja de cálculo en una computadora personal. La figura 2 muestra la solución del ejemplo 4 mediante una hoja de cálculo en computadora.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Compacto	De lujo	Compacto	De lujo	Compacto	De lujo
2		Ventas de agosto		Ventas de septiembre		Comisiones de septiembre	
3	Pérez	$36 000	$72 000	$144 000	$288 000	$4 320	$8 640
4	López	$72 000	$0	$180 000	$216 000	$5 400	$6 480
5		Ventas combinadas		Aumento en ventas			
6	Pérez	$180 000	$360 000	$108 000	$216 000		
7	López	$252 000	$216 000	$108 000	$216 000		

FIGURA 2

• Producto matricial

Se introduce ahora la multiplicación matricial, que al principio puede parecer extraña. Sin embargo, a pesar de lo rara que parece, esta operación está bien cimentada en la teoría general de matrices y, como se verá, es muy útil en muchos problemas prácticos.

De acuerdo con la historia, la multiplicación matricial fue introducida por el matemático inglés Arthur Cayley (1821-1895) en estudios acerca de las ecuaciones lineales y transformaciones lineales. En la sección 9-3, se verá que la multiplicación matricial es central en el proceso de expresión de sistemas de ecuaciones como ecuaciones matriciales y para el proceso de solución de ecuaciones matriciales. Las ecuaciones matriciales y sus soluciones proporcionan un método alterno para resolver sistemas de ecuaciones lineales que tienen el mismo número de variables que de ecuaciones.

Se empieza por definir el producto de dos matrices especiales, una matriz renglón y una matriz columna.

DEFINICIÓN 1 **Producto de una matriz renglón y de una matriz columna**

El **producto** de una matriz renglón $1 \times n$ y de una matriz columna $n \times 1$ es una matriz 1×1 dada por

$$\underset{1 \times n}{[a_1 \quad a_2 \dots a_n]} \underset{n \times 1}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}} = [a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n]$$

Note que el número de elementos en la matriz renglón y en la matriz columna debe ser el mismo para el producto a definirse.

EJEMPLO 5 **Producto de una matriz renglón y de una matriz columna**

$$[2 \quad -3 \quad 0]\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = [(2)(-5) + (-3)(2) + (0)(-2)]$$

$$= [-10 - 6 + 0] = [-16]$$

Problema seleccionado 5 $[-1 \quad 0 \quad 3 \quad 2]\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = ?$

Refiérase al ejemplo 5. La distinción entre el número real -16 y la matriz 1×1 $[-16]$ es técnico, y es común ver a las matrices 1×1 escritas como números reales sin corchetes. En la exposición siguiente, a menudo se hará referencia a matrices 1×1 como números reales y se omitirán los corchetes cuando sea conveniente.

EJEMPLO 6 **Planeación de la producción**

Una fábrica produce un esquí acuático de competencia que necesita de 4 horas de mano de obra en el departamento de fabricación y una hora de mano de obra en el departamento de acabado. Los obreros que lo fabrican reciben \$10 por hora, y los que lo terminan \$8 por hora. El costo total por esquí está dado por el producto

$$[4 \quad 1]\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = [(4)(10) + (1)(8)] = [40 + 8] = [48] \text{ o \$48 por esquí}$$

Problema seleccionado 6 Si la fábrica del ejemplo 6 produce también un esquí acuático para acrobacia que necesita de 6 horas de mano de obra para la fabricación y 1.5 para el acabado, escriba un producto adecuado entre matrices renglón y columna que indique el costo total de mano de obra para este esquí. Calcule el costo.

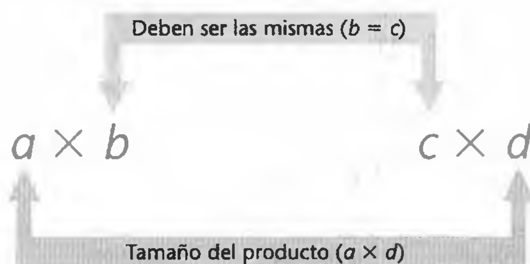
Ahora se usa el producto de una matriz renglón de $1 \times n$ y una matriz columna $n \times 1$ para ampliar la definición de producto matricial a matrices más generales.

DEFINICIÓN 2 **Producto matricial**

Si A es una matriz $m \times p$ y B es una matriz $p \times n$, entonces el **producto matricial de** A y B, que se denota por AB, es una matriz $m \times n$ donde el elemento en el $i$ésimo renglón y la $j$ésima columna es el número real que se obtuvo del producto del $i$ésimo renglón de A y la $j$ésima columna de B. Si el número de columnas en A no es igual al número de renglones en B, entonces el producto matricial AB **no está definido.**

Es importante comprobar los tamaños antes de empezar el proceso de multiplicación. Si A es una matriz $a \times b$ y B es una matriz $c \times d$, entonces si $b = c$, existirá el producto AB y será una matriz $a \times d$ (véase figura 3). Si $b \neq c$, entonces no existirá el producto AB.

FIGURA 3



La definición no es tan complicada como parece a primera vista. Un ejemplo debe clarificar el proceso. Para

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A es 2×3, B es 3×2 y, por lo tanto, AB es 2×2. Para encontrar el primer renglón de AB, se toma el producto del primer renglón de A con cada columna de B y se escribe cada resultado como un número real, no como una matriz 1×1. El segundo renglón de AB se calcula de la misma forma. Los cuatro productos de las matrices renglón y columna se usan para producir los cuatro elementos en AB que se muestran en el cuadro con líneas discontinuas de abajo. Esos productos a menudo se calculan de manera mental, o con la ayuda de una calculadora, y no es necesario escribirlas. Las partes sombreadas resaltan los pasos implicados en el cálculo del elemento en el primer renglón y segunda columna de AB.

$$\underset{2 \times 3}{\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}} \underset{3 \times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} [2 \quad 3 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & [2 \quad 3 \quad -1]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ [-2 \quad 1 \quad 2]\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} & [-2 \quad 1 \quad 2]\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \underset{2 \times 2}{\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}}$$

EJEMPLO 7 **Producto matricial**

(A)
$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} \underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}}$$

(B)
$$\underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$$

El producto no está definido

(C)
$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 40 \\ -10 & -20 \end{bmatrix}$$

(D)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(E)
$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16 \end{bmatrix}$$

(F)
$$\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 15 & 0 \\ 4 & -6 & 0 \\ -4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Problema seleccionado Encuentre cada producto, si es que está definido:

(A)
$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(B)
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

(C)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(D)
$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(E)
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(F)
$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$



La figura 4 ilustra una solución del ejemplo 7(A) en una calculadora gráfica. ¿Qué esperaría que sucediera si intentara resolver el ejemplo 7(B) en una calculadora gráfica?

En la aritmética de números reales no importa en qué orden se multiplique; por ejemplo $5 \times 7 = 7 \times 5$. En la multiplicación matricial, sin embargo, sí hay diferencia. Es decir, AB no es siempre igual a BA, aunque ambas multiplicaciones estén definidas y los dos productos sean del mismo tamaño (véase ejemplos 7(C) y 7(D). Por consiguiente,

La multiplicación matricial no es conmutativa.

También, AB podría ser cero considerando que A y B no son iguales a cero (véase ejemplo 7(D). Por lo tanto,

La propiedad cero no se cumple en la multiplicación matricial.

```
[A]
        [[2  1]
         [1  0]
         [-1 2]]
[B]
     [[1 -1 0 1]
      [2 1  2 0]]
[A]*[B]
    [[4 -1 2 2 ]
     [1 -1 0 1 ]
     [3 3  4 -1]]
```

FIGURA 1 Multiplicación en una calculadora gráfica.

(Para un análisis de la propiedad cero para los números reales véase la sección A-1 del apéndice A.)

Así como se usó la conocida notación algebraica AB para representar el producto de las matrices A y B, se usa la notación A^2 para AA, el producto de A multiplicada por sí misma, A^3 para AAA, y así sucesivamente.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Además de las propiedades conmutativa y cero, existen otras diferencias importantes entre la multiplicación de números reales y la multiplicación matricial.

(A) En la multiplicación con números reales, el único número real cuyo cuadrado es 0 es el número real 0 ($0^2 = 0$). Encuentre al menos una matriz A de 2×2 con todos los elementos diferentes de cero tal que $A^2 = 0$, donde 0 es la matriz cero de 2×2.

(B) En multiplicación con números reales, el único número real diferente de cero que es igual a su cuadrado es el número real 1 ($1^2 = 1$). Encuentre al menos una matriz A de 2×2 con todos los elementos diferentes de cero tal que $A^2 = A$.

Más adelante se continuará con el análisis de las propiedades de la multiplicación matricial. Ahora se considerará una aplicación de la multiplicación matricial.

EJEMPLO 8 Costos por mano de obra

Si se combinan en una matriz los tiempos necesarios para los esquíes acrobáticos y de competencia, que se analizaron en el ejemplo 6 y en el problema seleccionado 6, se tiene:

	Horas de mano de obra por esquí	
	Departamento de ensamble	Departamento de acabado
Esquí acrobático	6 h	1.5 h
Esquí de competencia	4 h	1 h

$$\begin{bmatrix} 6\text{ h} & 1.5\text{ h} \\ 4\text{ h} & 1\text{ h} \end{bmatrix} = L$$

Ahora suponga que la compañía tiene dos plantas de fabricación, X y Y, en diferentes partes del país, y que las tarifas por hora para cada departamento se indican en la siguiente matriz:

	Salarios por hora	
	Planta X	Planta Y
Departamento de ensamble	\$10	\$12
Departamento de acabado	\$ 8	\$10

$$\begin{bmatrix} \$10 & \$12 \\ \$\ 8 & \$10 \end{bmatrix} = H$$

Como H y L son matrices 2×2, se puede tomar el producto de H y L en cualquier orden y el resultado será una matriz 2×2:

$$HL = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1.5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 108 & 27 \\ 88 & 22 \end{bmatrix}$$

$$LH = \begin{bmatrix} 6 & 1.5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 87 \\ 48 & 58 \end{bmatrix}$$

¿Cómo se pueden interpretar los elementos en estos productos? Se comienza con el producto HL. El elemento 108 en el primer renglón y la primera columna de HL es el producto del primer renglón de la matriz de H y la primera columna de la matriz de L:

$$\begin{matrix} \text{Planta } X & \text{Planta } Y \end{matrix}$$
$$[10 \quad 12]\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Acrobático} \\ \text{De competencia} \end{matrix} = 10(6) + 12(4) = 60 + 48 = 108$$

Advierta que el costo de la mano de obra para ensamblar un esquí acrobático en la planta de California es de \$60 y el de ensamblar un esquí de competencia en la planta de Wisconsin es de \$48. Aunque las dos cantidades representan costos por mano de obra, no se pueden sumar, puesto que no pertenecen al mismo tipo de esquí o a la misma planta. De manera que, aunque el producto HL está matemáticamente definido, no tiene interpretación útil en este problema.

Si ahora se considera el producto LH. El elemento 72 en el primer renglón y la primera columna de LH está dado por el producto siguiente:

$$\begin{matrix} \text{Ensamble} & \text{Acabado} \end{matrix}$$
$$[6 \quad 1.5]\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Ensamble} \\ \text{Acabado} \end{matrix} = 6(10) + 1.5(8)$$
$$= 60 + 12 = 72$$

donde \$60 es el costo de la mano de obra para ensamblar un esquí acrobático en la planta X y \$12 es el costo por mano de obra para el terminado de un esquí acrobático en la planta X. De esta manera, la suma es el costo total por mano de obra para producir un esquí acrobático en la planta X. Los otros elementos en LH representan también los costos totales por mano de obra, como lo indican las leyendas en el renglón y columna que se muestran en seguida:

Costos de mano de obra por esquí

$$\begin{matrix} & \text{Planta } X & \text{Planta } Y & \\ LH = & \$72 & \$87 & \text{Esquí acrobático} \\ & \$48 & \$58 & \text{Esquí de competencia} \end{matrix}$$

Problema seleccionado 8 Remítase al ejemplo 8. La compañía quiere saber cuántas horas son necesarias para planear en cada departamento un pedido para producir 1 000 esquíes acrobáticos y 2 000 esquíes de competencia. Estos requerimientos de producción se pueden representar por cualquiera de las matrices siguientes:

$$\begin{matrix} \text{Esquíes acrobáticos} & \text{Esquíes de competencia} \end{matrix}$$
$$P = [1\,000 \quad 2\,000] \qquad Q = \begin{bmatrix} 1\,000 \\ 2\,000 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Esquíes acrobáticos} \\ \text{Esquíes de competencia} \end{matrix}$$

Mediante la matriz L, mano de obra-hora, del ejemplo 8, encuentre PL o LQ, la que tenga una interpretación significativa para este problema, y marque los renglones y columnas como corresponda.

PRECAUCIÓN

El ejemplo 8 y el problema 8 ilustran un punto importante acerca de la multiplicación matricial. Aunque esté usando un dispositivo de graficación para realizar los cálculos en un producto matricial, todavía es necesario que conozca la definición de multiplicación matricial de manera que pueda interpretar correctamente los resultados.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **2.** $[-1 \quad -1 \quad 4]$ **3.** $\begin{bmatrix} 13 \\ 2 \\ 35 \end{bmatrix}$

4. (A) $\begin{bmatrix} \$252\,000 & \$288\,000 \\ \$180\,000 & \$288\,000 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} \$108\,000 & \$144\,000 \\ \$108\,000 & \$144.000 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} \$5\,400 & \$6\,480 \\ \$4\,320 & \$6\,480 \end{bmatrix}$

5. [8] **6.** $[6 \quad 1.5]\begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = [72]$ o $72

7. (A) No está definida (B) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 12 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -6 & -12 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

(E) [11] (F) $\begin{bmatrix} 12 & -8 & 4 \\ 6 & -4 & 2 \\ 9 & -6 & 3 \end{bmatrix}$

8. Ensamble Acabado
$PL = [14\,000 \quad 3\,500]$ Horas de mano de obra

EJERCICIO 9-1

A

Realice las operaciones indicadas en los problemas del 1 al 18, si es posible.

1. $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & -8 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -2 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}$

9. $10\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ **10.** $5\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

11. $[2 \quad 4]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **12.** $[1 \quad 5]\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

B

Encuentre los productos de los problemas del 19 al 26.

19. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Los problemas del 27 al 44 se refieren a las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Realice las operaciones indicadas, si es posible.

27. CA **28.** AC **29.** BA

30. AB **31.** C^2 **32.** B^2

33. $C + DA$ **34.** $B + AD$ **35.** $0.2CD$

36. $0.1DB$ **37.** $2DB + 5CD$ **38.** $3BA + 4AC$

39. $(-1)AC + 3DB$ **40.** $(-2)BA + 6CD$ **41.** CDA

42. ACD **43.** DBA **44.** BAD

45. Encuentre a, b, c y d de manera que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

46. Encuentre w, x, y y z de manera que

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

47. Encuentre x y y de manera que

$$\begin{bmatrix} 3x & 5 \\ -1 & 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & -3 \\ -6 & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$$

48. Encuentre x y y de manera que

$$\begin{bmatrix} 4 & 2x \\ -4x & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -3y \\ 5y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

C

49. Encuentre x y y de manera que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 7 \\ y & -6 \end{bmatrix}$$

50. Encuentre x y y de manera que

$$\begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & y \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

51. Encuentre a, b, c y d de manera que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 7 & -7 \end{bmatrix}$$

52. Encuentre a, b, c y d de manera que

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

53. Una matriz cuadrada es una **matriz diagonal** si todos los elementos que no están sobre la diagonal principal son cero. Así, una matriz diagonal 2×2 tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

donde a y d son cualquier número real. Analice la validez de cada uno de los siguientes postulados. Si el postulado es siempre válido, explique por qué. Si no es así, dé contraejemplos.

(A) Si A y B son matrices diagonales 2×2, entonces $A + B$ es una matriz diagonal 2×2

(B) Si A y B son matrices diagonales 2×2, entonces $A + B = B + A$.

(C) Si A y B son matrices diagonales 2×2, entonces AB es una matriz diagonal 2×2.

(D) Si A y B son matrices diagonales 2×2, entonces $AB = BA$.

54. Una matriz cuadrada es una **matriz triangular superior** si todos los elementos debajo de la diagonal principal son cero. Así, una matriz triangular superior 2×2 tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

donde a, b y d son cualesquiera números reales. Analice la validez de cada uno de los postulados. Si éstos son siempre válidos, explique por qué. Si no lo son, dé contraejemplos.

(A) Si A y B son matrices triangulares superiores 2×2, entonces $A + B$ es una matriz triangular superior 2×2.

(B) Si A y B son matrices triangulares superiores 2×2, entonces $A + B = B + A$.

(C) Si A y B son matrices triangulares superiores 2×2, entonces AB es una matriz triangular superior 2×2.

(D) Si A y B son matrices triangulares superiores 2×2, entonces $AB = BA$.

APLICACIONES

55. Análisis de costos. Una compañía con dos diferentes plantas fabrica guitarras y banjos. Sus costos de producción para cada instrumento están dados en las matrices siguientes:

$$\begin{array}{l} \\ \text{Materiales} \\ \text{Mano de obra} \end{array} \begin{array}{c} \text{Planta } X \\ \text{Guitarra Banjo} \\ \begin{bmatrix} \$30 & \$25 \\ \$60 & \$80 \end{bmatrix} = A \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{Planta } Y \\ \text{Guitarra Banjo} \\ \begin{bmatrix} \$36 & \$27 \\ \$54 & \$74 \end{bmatrix} = B \end{array}$$

Encuentre $\frac{1}{2}(A + B)$, el costo promedio de producción de las dos plantas.

56. Análisis de costos. Si la mano de obra y los materiales en la planta X del problema 55 aumenta un 20%, encuentre $\frac{1}{2}(1.2A + B)$, el nuevo costo promedio de producción para las dos plantas.

57. Ganancia. Una persona vende tres modelos de autos importados. En las siguientes dos matrices se indican el precio facturado al vendedor (costo) y el precio de venta al público para los modelos básicos, así como las opciones de equipamiento (donde "Aire" significa aire acondicionado):

Precio facturado al vendedor

	Auto básico	Aire	Radio AM/FM	Control de crucero
Modelo A	\$10 400	\$682	\$215	\$182
Modelo B	\$12 500	\$721	\$295	\$182
Modelo C	\$16 400	\$827	\$443	\$192

$= M$

Precio de venta al público

	Auto básico	Aire	Radio AM/FM	Control de crucero
Modelo A	\$13 900	\$783	\$263	\$215
Modelo B	\$15 000	\$838	\$395	\$236
Modelo C	\$18 300	\$967	\$573	\$248

$= N$

Se define la matriz de ganancia como $N - M$ (**ganancia** es la diferencia entre el precio de venta al público y el precio facturado al vendedor). Suponga que el valor del dólar disminuye bruscamente y el precio facturado al vendedor va a tener un aumento general del 15% en el próximo año. Para mantener un precio competitivo con el de los autos nacionales, el vendedor sólo aumenta 10% el precio de venta al público. Calcule una matriz de ganancia para los modelos del próximo año y las opciones indicadas. (Calcule los resultados al dólar más cercano.)

58. Ganancia. Remítase al problema 57, ¿cuál es la matriz de ganancia que resulta de un aumento del 20% en los precios facturados al vendedor y de un aumento del 15% en los precios de venta al público? (Aproxime sus resultados al dólar más cercano.)

59. Costos por mano de obra. Una compañía con plantas manufactureras localizadas en diferentes partes del país tiene los requerimientos de horas de trabajo y salarios para la fabricación de los tres tipos de botes inflables que se indican en las dos matrices siguientes

Horas de trabajo por bote

$M =$	Departamento de corte	Departamento de ensamble	Departamento de empaque	
	0.6 h	0.6 h	0.2 h	Bote para una persona
	1.0 h	0.9 h	0.3 h	Bote para dos personas
	1.5 h	1.2 h	0.4 h	Bote para cuatro personas

Salario por hora

$N =$	Planta I	Planta II	
	\$8	\$9	Departamento de corte
	\$10	\$12	Departamento de ensamble
	\$5	\$6	Departamento de empaque

(A) Encuentre los costos de trabajo en la producción de un bote para una persona fabricado en la planta I.

(B) Encuentre los costos de trabajo en la producción de un bote para una persona fabricado en la planta II.

(C) Analice las posibles interpretaciones de los elementos en la matriz de productos MN y NM.

(D) Si cualquiera de los productos MN o NM tiene una interpretación significativa, encuentre el producto y marque sus renglones y columnas.

60. Valor del inventario. Un vendedor de una compañía de computadoras personales vende cinco modelos diferentes de computadoras en tres tiendas localizadas en una gran área metropolitana. En la matriz M se resume el inventario de cada modelo disponible en cada tienda. En la matriz N se resumen los valores de venta al mayoreo (W) y al menudeo (R) de cada modelo de computadora.

Modelo

$M =$	A	B	C	D	E	
	4	2	3	7	1	Tienda 1
	2	3	5	0	6	Tienda 2
	10	4	3	4	3	Tienda 3

$N =$	W	R	
	\$700	\$840	A
	\$1 400	\$1 800	B
	\$1 800	\$2 400	C
	\$2 700	\$3 300	D
	\$3 500	\$4 900	E

(A) ¿Cuál es el valor al menudeo del inventario en la tienda 2?

(B) ¿Cuál es el valor al mayoreo del inventario en la tienda 3?

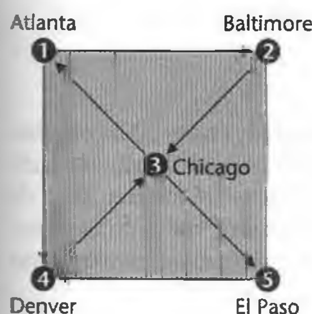
(C) Analice las posibles interpretaciones de los elementos en la matriz de productos MN y NM.

(D) Si cualquiera de los productos MN o NM tiene una interpretación significativa, encuentre el producto y marque sus renglones y columnas.

(E) Analice los métodos de la multiplicación matricial que se pueda usar para encontrar el inventario total de cada modelo disponible en las tres tiendas. Establezca las matrices que se puedan usar, y realice las operaciones necesarias.

(F) Analice los métodos de multiplicación matricial que se puedan usar para encontrar el inventario total de los cinco modelos en cada tienda. Establezca las matrices que se puedan usar, y realice las operaciones necesarias.

61. **Mensajería aérea.** Una empresa de mensajería aérea nacional tiene vuelos de conexión entre cinco ciudades, como se ilustra en la figura. Para representar este itinerario en forma matricial, se construye una **matriz de incidencia** A de 5×5, donde los renglones representan el origen de cada vuelo y las columnas representan el destino. Se coloca un 1 en el *i*ésimo renglón y en la *j*ésima columna de esta matriz si hay un vuelo de conexión de la *i*ésima ciudad a la *j*ésima ciudad, de otra manera se coloca un 0. Se colocan también ceros en la diagonal principal, ya que no tiene sentido un vuelo de conexión con el mismo origen y destino.



Destino

Origen	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0
3	1	0	0	0	1
4	0	0	1	0	0
5	0	0	0	1	0

$= A$

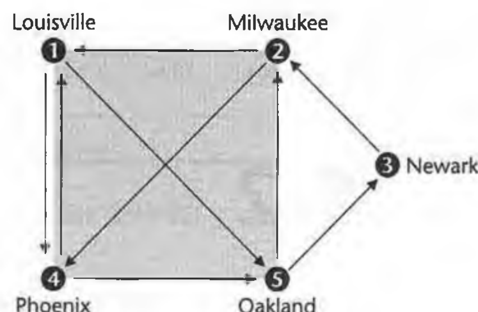
Después de representar el itinerario en la forma matemática de una matriz, se realizan las operaciones de esta matriz para obtener información acerca del recorrido.

(A) Encuentre A^2. ¿Qué indica el 1 en el renglón 2 y la columna 1 de A^2 respecto del itinerario? ¿Qué indica el 2 en el renglón 1 y la columna 3 acerca del recorrido? En general, ¿cómo se podría interpretar cada elemento fuera de la diagonal principal de A^2? [*Sugerencia:* Examine el diagrama para posibles conexiones entre la *i*ésima ciudad y la *j*ésima ciudad.]

(B) Encuentre A^3. ¿Qué indica el 1 en el renglón 4 y la columna 2 de A^3 acerca del itinerario? ¿Qué indica el 2 en el renglón 1 y la columna 5 respecto del recorrido? En general, ¿cómo se podría interpretar cada elemento fuera de la diagonal principal de A^3?

(C) Calcule $A, A + A^2, A + A^2 + A^3, \ldots$, hasta obtener una matriz con elementos diferentes de cero (excepto, tal vez, sobre la diagonal principal), y explique su interpretación.

62. **Mensajería aérea.** Encuentre la matriz de incidencia A para el itinerario de vuelo ilustrado en la figura. Calcule $A, A + A^2, A + A^2 + A^3, \ldots$ hasta obtener una matriz con elementos diferentes de cero (excepto, tal vez, sobre la diagonal principal), y explique su interpretación.



63. **Política.** En una elección local, un grupo contrató a una firma de relaciones públicas para promover a su candidato en tres formas: por teléfono, por visitas a domicilio y por carta. El costo por contacto está dado en la matriz M:

	Costo por contacto	
$M =$	\$0.80	Teléfono
	\$1.50	Visitas a domicilio
	\$0.40	Carta

El número de contactos realizados de cada tipo en dos ciudades adyacentes está dado en la matriz N:

	Teléfono	Visitas a domicilio	Carta	
$N =$	1 000	500	5 000	Berkeley
	2 000	800	8 000	Oakland

(A) Encuentre la cantidad total gastada en Berkeley.

(B) Encuentre la cantidad total gastada en Oakland.

(C) Analice las posibles interpretaciones de los elementos en la matriz de productos MN y NM.

(D) Si cualquiera de los productos MN o NM tiene una interpretación significativa, encuentre el producto y marque sus renglones y columnas.

(E) Analice los métodos de la multiplicación matricial que se pueda usar para encontrar el número total de llamadas por teléfono, visitas a domicilio y cartas. Establezca las matrices que se pueden usar, y realice las operaciones necesarias.

64. **Nutrición.** Un nutriólogo de una compañía de cereales combina dos cereales en diferentes mezclas. Las cantidades de proteína, carbohidratos y grasa (en gramos por onza) en cada cereal están dados en la matriz M. Las cantidades de cada cereal usadas en las tres mezclas están dadas en la matriz N.

$$M = \begin{bmatrix} 4 \text{ g/oz} & 2 \text{ g/oz} \\ 20 \text{ g/oz} & 16 \text{ g/oz} \\ 3 \text{ g/oz} & 1 \text{ g/oz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Proteínas} \\ \text{Carbohidratos} \\ \text{Grasa} \end{matrix}$$

(columnas: Cereal A, Cereal B)

$$N = \begin{bmatrix} 15 \text{ oz} & 10 \text{ oz} & 5 \text{ oz} \\ 5 \text{ oz} & 10 \text{ oz} & 15 \text{ oz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Cereal } A \\ \text{Cereal } B \end{matrix}$$

(columnas: Mezcla X, Mezcla Y, Mezcla Z)

(A) Encuentre la cantidad de proteína en la mezcla X.
(B) Encuentre la cantidad de grasa en la mezcla Z.
(C) Analice las posibles interpretaciones de los elementos en la matriz de productos MN y NM.
(D) Si cualquiera de los productos MN o NM tiene una interpretación significativa, encuentre el producto y marque sus renglones y columnas.

SECCIÓN 9-2 Inversa de una matriz cuadrada

- Matriz de identidad para la multiplicación
- Inversa de una matriz cuadrada
- Aplicación: Criptografía

En esta sección se introduce la matriz de identidad y la inversa de una matriz cuadrada. Estas formas matriciales, junto con la matriz de multiplicación, se usan, más tarde en la sección 9-3, para resolver algunos sistemas de ecuaciones escritos en forma matricial.

• Matriz de identidad para la multiplicación

Se sabe que para cualquier número real a

$$(1)a = a(1) = a$$

El número 1 se llama *identidad* para la multiplicación de números reales. ¿El conjunto de todas las matrices de cierta dimensión tiene un elemento de identidad para la multiplicación? Es decir, si M es una matriz arbitraria $m \times n$, ¿tiene M un elemento de identidad I de forma tal que $IM = MI = M$? La respuesta en general es no. Sin embargo, el conjunto de todas las **matrices cuadradas de orden n** (matrices con n renglones y n columnas) tiene una identidad.

DEFINICIÓN 1 **Matriz de identidad**

La **matriz de identidad para la multiplicación** para el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n es la matriz cuadrada de orden n, denotada por I, con unos a lo largo de la diagonal principal (desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha) y ceros en los lugares restantes.

Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son matrices de identidad para todas las matrices cuadradas de orden 2 y 3, respectivamente.

```
identity(2)
        [[1 0]
         [0 1]]
identity(3)
      [[1 0 0]
       [0 1 0]
       [0 0 1]]
```

FIGURA 1 Matrices de identidad.



La mayoría de los dispositivos de graficación tienen un comando preconstruido para generar la matriz de identidad de cierto orden (véase figura 1).

EJEMPLO 1 Multiplicación matricial de la identidad

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

Problema seleccionado 1 Multiplique:

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

En general, se puede demostrar que si M es una matriz cuadrada de orden n e I es la matriz de identidad de orden n, entonces

Si M es una matriz $m \times n$ que no es cuadrada ($m \neq n$), entonces todavía es posible multiplicar M a la izquierda y a la derecha de una matriz de identidad, pero no con matrices de identidad del mismo tamaño [véase ejemplos 1(C) y 1(D)]. Para evitar complicaciones involucradas con la asociación de dos diferentes matrices de identidad con cada matriz no cuadrada, en esta sección se restringe el análisis a matrices cuadradas.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Las únicas soluciones numéricas reales para la ecuación $x^2 = 1$ son $x = 1$ y $x = -1$.

(A) Demuestre que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ satisface $A^2 = I$, donde I es la identidad 2×2.

(B) Demuestre que $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ satisface $B^2 = I$.

(C) Encuentre una matriz 2×2 con todos sus elementos diferentes de cero cuyo cuadrado es la matriz de identidad 2×2.

• Inversa de una matriz cuadrada

En el conjunto de los números reales, se sabe que para cada número real a, excepto 0, existe un número real a^{-1} tal que

$$a^{-1}a = 1$$

El número a^{-1} se llama *inversa* del número a con respecto a la multiplicación, o la *inversa multiplicativa* de a. Por ejemplo, 2^{-1} es la inversa multiplicativa de 2, ya que $2^{-1}(2) = 1$. Se usa este concepto para definir la *inversa de una matriz cuadrada.*

DEFINICIÓN 2 **Inversa de una matriz cuadrada**

Si M es una matriz cuadrada de orden n y si existe una matriz M^{-1} (léase "inversa de M") tal que

$$M^{-1}M = MM^{-1} = I$$

entonces M^{-1} se llama **inversa multiplicativa de M** o, de manera más simple, **inversa de M.**

La inversa multiplicativa de un número real a diferente de cero se puede también escribir como $1/a$. Esta notación no se usa para matrices inversas.

Ahora se usará la definición 2 para encontrar M^{-1}, si existe, para

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Se está buscando para

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

tal que

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I$$

Así, se escribe

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e intente encontrar a, b, c y d de manera que el producto de M y M^{-1} sea la matriz de identidad I. Al multiplicar M y M^{-1} en el lado izquierdo, se obtiene

$$\begin{bmatrix} (2a + 3b) & (2c + 3d) \\ (a + 2b) & (c + 2d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es válida sólo si

$$\begin{aligned} 2a + 3b &= 1 \qquad & 2c + 3d &= 0 \\ a + 2b &= 0 \qquad & c + 2d &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo estos dos sistemas, se encuentra que $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$ y $d = 2$. De esta manera,

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

es fácilmente comprobada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A diferencia de los números reales diferentes de cero, la inversa no siempre existe para una matriz cuadrada diferente de cero. Por ejemplo, si

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

entonces, si se procede como antes, se obtienen los sistemas

$$\begin{aligned} 2a + b &= 1 \qquad & 2c + d &= 0 \\ 4a + 2b &= 0 \qquad & 4c + 2d &= 1 \end{aligned}$$

Estos sistemas son inconsistentes y no tienen solución. En consecuencia, N^{-1} no existe.

Poder encontrar las inversas, cuando existen, conduce a soluciones simples y directas de muchos problemas prácticos. En la sección siguiente, por ejemplo, se mostrará cómo se puede usar la inversa para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

El método antes descrito para encontrar la inversa, si existe, es muy utilizado en matrices de orden mayor de 2. Ahora que se sabe lo que se está buscando, se puede usar las matrices aumentadas como en la sección 8-2 para hacer el proceso más eficiente. Los detalles se ilustran en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Determinación de una inversa

Encuentre la inversa, si existe, de

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución Se comienza como antes y se escribe

$$\overset{M}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}} \overset{M^{-1}}{\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}} = \overset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Esto es válido sólo si

$$\begin{aligned} a - b + c &= 1 & \quad d - e + f &= 0 & \quad g - h + i &= 0 \\ 2b - c &= 0 & 2e - f &= 1 & 2h - i &= 0 \\ 2a + 3b \quad &= 0 & 2d + 3e \quad &= 0 & 2g + 3h \quad &= 1 \end{aligned}$$

Ahora se escriben las matrices aumentadas para cada uno de los tres sistemas:

$$\overset{\text{Primero}}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]} \quad \overset{\text{Segundo}}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]} \quad \overset{\text{Tercero}}{\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]}$$

Como cada matriz a la izquierda de la barra vertical es la misma, se pueden usar exactamente las mismas operaciones de renglón en cada matriz aumentada para transformarla en una forma reducida. Se puede acelerar el proceso de manera sustancial combinando las tres matrices aumentadas en una sola forma de matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [M \mid I] \tag{1}$$

Ahora se intentará realizar operaciones de renglón en la matriz (1) hasta obtener una matriz de renglón equivalente que se asemeje a la matriz (2):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a & d & g \\ 0 & 1 & 0 & b & e & h \\ 0 & 0 & 1 & c & f & i \end{array}\right] = [I \mid B] \tag{2}$$

(con I sobre el bloque izquierdo y B sobre el bloque derecho)

¡Si esto se puede realizar, entonces la nueva matriz a la derecha de la barra vertical es M^{-1}! Ahora intente transformar (1) en una forma como la (2). Se sigue la misma se

cuencia de pasos como en la solución de sistemas lineales mediante eliminación Gauss-Jordan (véase la sección 8-2):

$$\begin{array}{c} \qquad\quad M \qquad\qquad\quad I \\ \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad (-2)R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \tfrac{1}{2}R_2 \to R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} R_2 + R_1 \to R_1 \\ \\ (-5)R_2 + R_3 \to R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -2 & -\frac{5}{2} & 1 \end{array}\right] \quad 2R_3 \to R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-\frac{1}{2})R_3 + R_1 \to R_1 \\ \frac{1}{2}R_3 - R_2 \to R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -5 & 2 \end{array}\right] = [I \mid B]$$

Convirtiendo lo anterior a sistemas de ecuaciones equivalentes a las tres ecuaciones originales (no se tendrá que hacer este paso en la práctica), se tiene

$$\begin{array}{lll} a = 3 & d = 3 & g = -1 \\ b = -2 & e = -2 & h = 1 \\ c = -4 & f = -5 & i = 2 \end{array}$$

¡Y éstos son exactamente los elementos de M^{-1} que se están buscando! En consecuencia,

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Note que ésta es la matriz a la derecha de la línea vertical en la última matriz aumentada.

Comprobación Como la definición de la matriz inversa necesita que

$$M^{-1}M = I \qquad \text{y} \qquad MM^{-1} = I \tag{3}$$

parece que se debe calcular $M^{-1}M$ y MM^{-1} para comprobar el trabajo realizado. Sin embargo, se puede demostrar que si una de las ecuaciones en (3) se satisface, entonces la otra también se satisface. De esta manera, para propósitos de comprobación es suficiente calcular $M^{-1}M$ o MM^{-1} (no se necesita resolver ambas).

$$M^{-1}M = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Problema seleccionado 2 Sea: $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(A) Forme la matriz aumentada $[M \mid I]$.
(B) Use operaciones de renglón para transformar $[M \mid I]$ en $[I \mid B]$.
(C) Verifique mediante multiplicación que $B = M^{-1}$.

El procedimiento usado en el ejemplo 2 se puede usar para encontrar la inversa de cualquier matriz cuadrada, si ésta existe, y se indicará también cuando no existe. Estos conceptos se resumen en el teorema 1.

Teorema 1 **Inversa de una matriz cuadrada *M***

Si $[M \mid I]$ se transforma mediante operaciones de renglón en $[I \mid B]$, entonces la matriz resultante B es M^{-1}. Si, sin embargo, se obtienen ceros en uno o más renglones a la izquierda de la recta vertical, entonces M^{-1} no existe.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2
(A) Suponga que la matriz cuadrada M tiene un renglón donde todos los elementos son cero. Explique por qué M no tiene inversa.
(B) Suponga que la matriz cuadrada M tiene una columna donde todos los elementos son cero. Explique por qué M no tiene inversa.

EJEMPLO 3 **Determinación de una matriz inversa**

Encuentre M^{-1}, dado: $M = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

Solución

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 4 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \tfrac{1}{4}R_1 \to R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad 6R_1 + R_2 \to R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right] \quad 2R_2 \to R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \quad \tfrac{1}{4}R_2 + R_1 \to R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

Así,

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Compruebe demostrando que } M^{-1}M = I.$$

Problema seleccionado 3 Encuentre M^{-1}, dada: $M = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

EJEMPLO 4 Determinación de una inversa

Encuentre M^{-1}, si existe, dada: $M = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$

Solución

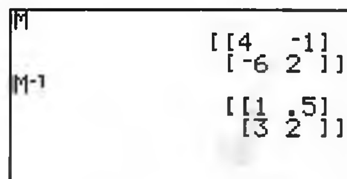
$$\left[\begin{array}{rr|rr} 10 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

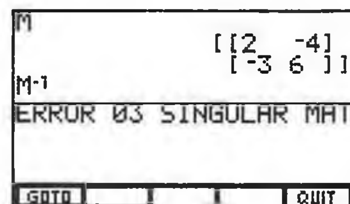
En el segundo renglón a la izquierda de la línea vertical, todos los elementos son cero. Por lo tanto, M^{-1} no existe.

Problema seleccionado 4 Encuentre M^{-1}, si existe, dada: $M = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

La mayoría de los dispositivos de graficación y computadoras pueden calcular matrices inversas y pueden también identificar aquellas matrices que no tienen inversas (véase la figura 2). Una matriz que no tiene inversa es a menudo conocida como **matriz singular**.



(a) Ejemplo 3



(b) Ejemplo 4

FIGURA 2 Determinación matricial inversa en una calculadora gráfica.

• Aplicación: Criptografía

Las matrices inversas se pueden usar para proporcionar un procedimiento simple y efectivo para codificar y decodificar mensajes. Para empezar, a los números del 1 al 26 se les asignan las letras del alfabeto, como se muestra a continuación. Al número 27 también se le asigna un espacio en blanco para dar espacio entre palabras. (Un código más sofisticado podría incluir letras mayúsculas y minúsculas y signos de puntuación.)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	Espacio en blanco
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

De esta manera el mensaje en inglés I LOVE MATH corresponde a la secuencia

9 27 12 15 22 5 27 13 1 20 8

Cualquier matriz, cuyos elementos sean enteros positivos y sea inversa se puede usar como una **matriz de codificación**. Por ejemplo, al usar la matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

para codificar el mensaje anterior, primero se dividen los números en la secuencia en grupos de dos y se usan estos grupos como las columnas de una matriz con dos renglones. (Note que se ha agregado un espacio en blanco extra al final del mensaje para que las columnas sean pares.) Después se multiplica esta matriz a la izquierda por A:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 12 & 22 & 27 & 1 & 8 \\ 27 & 15 & 5 & 13 & 20 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 117 & 93 & 103 & 147 & 64 & 113 \\ 153 & 120 & 130 & 187 & 85 & 148 \end{bmatrix}$$

El mensaje codificado es

117 153 93 120 103 130 147 187 64 85 113 148

El mensaje se puede decodificar con sólo regresarlo a su forma matricial y multiplicarlo a la izquierda por la **matriz decodificadora** A^{-1}. Como A^{-1} es fácilmente determinada si se conoce A, la matriz codificadora A es la única clave necesaria para decodificar mensajes codificados en esta forma. Aunque el concepto es simple, los códigos de este tipo pueden ser muy difíciles de descifrar.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 4 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

2. (A) $\left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (B) $\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right]$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **4.** No existe

EJERCICIO 9-2

A

Realice las operaciones indicadas en los problemas del 1 al 8.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En los problemas del 9 al 14, demuestre que las dos matrices son inversas entre sí comprobando que su producto es la matriz de identidad I.

9. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

B

En los problemas del 15 al 24 dada M encuentre M^{-1}, y demuestre que $M^{-1}M = I$.

15. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

En los problemas del 25 al 28 encuentre la inversa de cada matriz, si existe.

25. $\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

C

En los problemas del 29 al 34 encuentre la inversa de cada matriz, si existe.

29. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 15 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

35. Demuestre que $(A^{-1})^{-1} = A$ para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

36. Demuestre que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

37. Analice la existencia de M^{-1} para matrices diagonales 2×2 de la forma

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

38. Analice la existencia de M^{-1} para matrices triangulares superiores 2×2 de la forma

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

En los problemas del 39 al 42, use un dispositivo de graficación para encontrar la inversa de cada matriz, si existe.

39. $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **40.** $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -7 & -4 \end{bmatrix}$

APLICACIONES

Los problemas del 43 al 46 hacen referencia a la matriz codificadora $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

43. Criptografía. Codifique el mensaje en inglés CAT IN THE HAT con la matriz A antes indicada.

44. Criptografía. Codifique el mensaje en inglés FOX IN SOCKS con la matriz A antes indicada.

45. Criptografía. El mensaje siguiente fue codificado con la matriz A antes indicada. Decodifique este mensaje.

111 43 40 15 177 68 50 19 116 45 86
29 62 22 121 43 68 27

46. Criptografía. El mensaje siguiente fue codificado con la matriz A antes indicada. Decodifique este mensaje.

99 38 154 58 115 43 121 43 20 7 149
56 86 29 196 73 99 38

Los problemas del 47 al 50 requieren el uso de un dispositivo de graficación. Para usar una matriz codificadora B de 5 × 5 dada a continuación, forme una matriz con cinco renglones y con tantas columnas como sea necesario para acomodar cada mensaje.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

47. Criptografía. Codifique el mensaje DWIGHT DAVID EISENHOWER con la matriz B antes indicada.

48. Criptografía. Codifique el mensaje JOHN FITZGERALD KENNEDY con la matriz B antes indicada.

49. Criptografía. El mensaje siguiente fue codificado con la matriz B antes indicada. Decodifique este mensaje.

41 84 82 44 74 25 56 67 20 54 43 54
89 39 102 44 67 86 44 90 68 135 136
81 149

50. Criptografía. El mensaje siguiente fue codificado con la matriz B antes indicada. Decodifique este mensaje.

22 15 57 5 47 54 58 89 45 84 46 80
87 53 96 51 68 116 39 113 68 135 136
81 149

SECCIÓN 9-3 Ecuaciones matriciales y sistemas de ecuaciones lineales

- Ecuaciones matriciales
- Ecuaciones matriciales y sistemas de ecuaciones lineales
- Aplicación

La matriz de identidad y la matriz inversa analizadas en la sección anterior se pueden usar de inmediato para resolver algunas ecuaciones matriciales simples. Cuando se puede resolver una ecuación matricial dada, se obtiene otro método importante para resolver un sistema de ecuaciones que tienen el mismo número de variables y ecuaciones. Si el sistema tiene menos variables que ecuaciones o más variables que ecuaciones, entonces se debe regresar al método de eliminación Gauss-Jordan.

• Ecuaciones matriciales

Antes de analizar la solución de ecuaciones matriciales, tal vez sea útil repasar en forma breve las propiedades básicas de los números reales y las ecuaciones lineales analizadas en la sección 1-1 y en la sección A-1 del apéndice A.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Sean los números reales a, b y c con $a \neq 0$. Despeje x de cada ecuación.

(A) $ax = b$ (B) $ax + b = c$

La solución de ecuaciones matriciales simples es muy parecida a los procedimientos que se usaron en la solución de ecuaciones con números reales. Se tiene, sin embargo, menos libertad con las ecuaciones matriciales, debido a que la multiplicación matricial no es conmutativa. Para la solución de ecuaciones matriciales, se partirá de las propiedades matriciales que se resumen en el teorema 1.

Teorema 1 **Propiedades básicas de matrices**

Se supone que todos los productos y las sumas están definidos por las matrices indicadas A, B, C, I y 0, entonces

Propiedades de la suma

Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$
Conmutativa: $A + B = B + A$
Identidad aditiva: $A + 0 = 0 + A = A$
Inverso aditivo: $A + (-A) = (-A) + A = 0$

Propiedades de la multiplicación

Propiedad asociativa: $A(BC) = (AB)C$
Identidad multiplicativa: $AI = IA = A$
Inversa multiplicativa: Si A es una matriz cuadrada y A^{-1} existe, entonces $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Propiedades combinadas

Distributiva por la izquierda: $A(B + C) = AB + AC$
Distributiva por la derecha: $(B + C)A = BA + CA$

Igualdad

Suma: Si $A = B$, entonces $A + C = B + C$.
Multiplicación por la izquierda: Si $A = B$, entonces $CA = CB$.
Multiplicación por la derecha: Si $A = B$, entonces $AC = BC$.

El proceso para resolver ciertos tipos de ecuaciones matriciales simples se ilustra mejor mediante un ejemplo.

EJEMPLO 1 **Solución de una ecuación matricial**

Dada una matriz A, $n \times n$, y las matrices columna B y X, $n \times 1$, despeje X de $AX = B$. Suponga que existen todas las inversas necesarias.

Solución Lo que interesa es encontrar una matriz columna X que satisfaga la ecuación matricial $AX = B$. Para resolver esta ecuación, se multiplican ambos lados, por la izquierda, por A^{-1}, suponiendo que exista, para despejar X en el lado izquierdo.

$$AX = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \quad \text{Use la propiedad de multiplicación por la izquierda.}$$

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B \quad \text{Propiedad asociativa.}$$

$$IX = A^{-1}B \quad A^{-1}A = I$$

$$X = A^{-1}B \quad IX = X$$

PRECAUCIÓN No mezcle la propiedad de multiplicación por la izquierda con la propiedad de multiplicación por la derecha. Si $AX = B$, entonces

$$A^{-1}(AX) \neq BA^{-1}$$

Problema seleccionado 1 Dada una matriz A, $n \times n$, y las matrices columna B, C y X, $n \times 1$, despeje X de $AX + C = B$. Suponga que existen todas las inversas necesarias.

• Ecuaciones matriciales y sistemas de ecuaciones lineales

Ahora se mostrará cómo los sistemas independientes de ecuaciones lineales con el mismo número de variables y ecuaciones, se pueden resolver convirtiendo primero el sistema en una ecuación matricial de la forma $AX = B$ y mediante $X = A^{-1}B$ de la misma manera que en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Uso de inversas para resolver sistemas de ecuaciones

Use métodos de matriz inversa para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Solución La inversa de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

proporciona un método eficiente para resolver este sistema. Para ver cómo se realiza esto, el sistema (1) se convierte en una ecuación matricial:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \tag{2}$$

Compruebe que la ecuación matricial (2) es equivalente al sistema (1) encontrando el producto del lado izquierdo y después igualando los elementos correspondientes en el lado izquierdo con los del lado derecho. En seguida se verá otra razón importante para definir la multiplicación matricial como se hizo antes.

Nos interesa encontrar una matriz columna X que satisfaga la ecuación matricial $AX = B$. En el ejemplo 1 se encontró que si $AX = B$ y si A^{-1} existe, entonces

$$X = A^{-1}B$$

La inversa de A que se determinó en el ejemplo 2 en la sección 9-2 es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Así,

$$\overset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

y se puede concluir que $x_1 = 5$, $x_2 = -3$ y $x_3 = -7$. Compruebe este resultado en el sistema (1).

Problema seleccionado 2 Use los métodos de la matriz inversa para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 \quad\quad &= 3 \\ x_1 \quad\quad + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

[*Nota:* La inversa de la matriz de coeficientes se determinó en el problema seleccionado 2 en la sección 9-2.]

A primera vista, emplear los métodos de la matriz inversa parece necesitar la misma cantidad de esfuerzo que la eliminación Gauss-Jordan. En cualquier caso, se deben aplicar las operaciones de renglón a la matriz aumentada que implica los coeficientes del sistema. La ventaja del método de la matriz inversa es evidente cuando se resuelven diferentes sistemas con una matriz de coeficientes comunes y diferentes términos constantes.

EJEMPLO 3 **Uso de inversas para resolver sistemas de ecuaciones**

Use los métodos de la matriz inversa para resolver cada uno de los sistemas siguientes:

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}-x_3} &= 4 \end{aligned} \qquad \text{(B)}\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \\ 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \phantom{{}-x_3} &= -3 \end{aligned}$$

Soluciones Note que ambos sistemas tienen la misma matriz de coeficientes A como el sistema (1) en el ejemplo (2). Sólo se cambiaron los términos constantes. Así, se puede usar A^{-1} para resolver estos sistemas como se hizo en el ejemplo 2.

(A)

$$\overset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Así, $x_1 = 8$, $x_2 = -4$ y $x_3 = -9$

(B)

$$\overset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $x_1 = -6$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 4$

Problema seleccionado 3 Use los métodos de la matriz inversa para resolver cada uno de los sistemas siguientes (véase el problema seleccionado 2):

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= -3 \\ x_1 \phantom{{}-x_2} + x_3 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{(B)}\quad \begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \\ -x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} &= 1 \\ x_1 \phantom{{}-x_2} + x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Como lo ilustran los ejemplos 2 y 3, los métodos inversos son muy convenientes para cálculos a mano, ya que una vez que se ha encontrado la inversa, se puede usar para resolver cualquier nuevo sistema formado sólo cambiando los términos constantes. Como la mayoría de los dispositivos de graficación pueden calcular la inversa de una matriz, este método también se adapta fácilmente para obtener soluciones mediante un dispositivo de graficación. Sin embargo, si su dispositivo de graficación también tiene un procedimiento preconstruido para encontrar la forma reducida de una matriz aumentada de coeficientes, entonces es conveniente usar sólo la eliminación Gauss-Jordan. Además, se puede usar la eliminación Gauss-Jordan en todos los casos y, como se indica a continuación, los métodos de la matriz inversa no siempre se pueden usar.

Uso de métodos inversos para resolver sistemas de ecuaciones

Si el número de ecuaciones en un sistema es igual al número de variables y la matriz de coeficientes tiene una inversa, entonces el sistema siempre tendrá una solución única, que se puede encontrar usando la inversa de la matriz de coeficientes para resolver la ecuación matricial correspondiente.

Ecuación matricial	Solución
$AX = B$	$X = A^{-1}B$

Comentario. ¿Qué sucede si la matriz de coeficientes no tiene una inversa? En este caso, se puede demostrar que el sistema no tiene una solución única y es dependiente o inconsistente. La eliminación Gauss-Jordan se debe usar para determinar cuál es el caso. También, como antes se mencionó, la eliminación Gauss-Jordan se debe usar siempre si el número de variables no es el mismo que el número de ecuaciones.

• Aplicación

La aplicación siguiente ilustra la utilidad del método inverso.

EJEMPLO 4

Ubicación de la inversión

Un asesor de inversiones tiene dos tipos de inversión disponibles para sus clientes: una inversión A que paga el 10% anual y la inversión B de mayor riesgo que paga el 20% anual. Los clientes pueden dividir sus inversiones entre los dos tipos para obtener cualquier interés total deseado entre el 10 y 20%. Sin embargo, cuanto mayor sea el interés deseado mayor es el riesgo. ¿De qué manera debe invertir cada cliente enlistado en la tabla para obtener el interés indicado?

	Cliente			
	1	2	3	k
Inversión total	\$20 000	\$50 000	\$10 000	k_1
Interés anual deseado	\$2 400 (12%)	\$7 500 (15%)	\$1 300 (13%)	k_2

Solución

Primero se debe resolver el problema para un cliente k cualesquiera usando inversas, y después aplicar el resultado a los tres clientes específicos.

Sea

$$x_1 = \text{Cantidad invertida en } A$$

$$x_2 = \text{Cantidad invertida en } B$$

Entonces

$$x_1 + x_2 = k_1 \quad \text{Total invertido}$$

$$0.1x_1 + 0.2x_2 = k_2 \quad \text{Interés total anual}$$

Escriba como una ecuación matricial:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}}$$

Si existe A^{-1}, entonces

$$X = A^{-1}B$$

Ahora se determina A^{-1} comenzando con $[A \mid I]$ y procediendo como se analizó en la sección 9-2:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad 10R_2 \to R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 10 \end{array}\right] \quad R_2 + (-1)R_1 \to R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right] \quad R_1 + (-1)R_2 \to R_1$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & 10 \end{array}\right]$$

Así,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \qquad \text{Comprobación} \quad \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}} = \overset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

y

$$\overset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}}$$

Para resolver cada problema de inversión del cliente, se reemplaza k_1 y k_2 con los valores adecuados de la tabla y se multiplica por A^{-1}:

Cliente 1

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20\,000 \\ 2\,400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16\,000 \\ 4\,000 \end{bmatrix}$$

Solución: x_1 = \$16 000 en A, x_2 = \$4 000 en B

Cliente 2

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50\,000 \\ 7\,500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25\,000 \\ 25\,000 \end{bmatrix}$$

Solución: x_1 = \$25 000 en A, x_2 = \$25 000 en B

Cliente 3

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10\,000 \\ 1\,300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\,000 \\ 3\,000 \end{bmatrix}$$

Solución: x_1 = \$7 000 en A, x_2 = \$3 000 en B

Probl[illegible]

Repita el ejemplo 4 con la inversión A pagando el 8% y la inversión B pagando el 24%.

Se pueden hacer más eficientes las soluciones a mano de sistemas que implican dos ecuaciones con dos variables usando la fórmula para la inversa de una matriz 2×2.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 La inversa de

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad - bc} & \dfrac{-b}{ad - bc} \\ \dfrac{-c}{ad - bc} & \dfrac{a}{ad - bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

donde $D = ad - bc$, siempre y cuando $D \neq 0$.

(A) Use la multiplicación matricial para verificar esta fórmula. ¿Qué puede concluir acerca de A^{-1} si $D = 0$? (Se profundizará más en el número D en las tres secciones siguientes.)

(B) Use esta fórmula para encontrar la inversa de la matriz A en el ejemplo 4.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $AX + C = B$

$$(AX + C) - C = B - C$$
$$AX + (C - C) = B - C$$
$$AX + 0 = B - C$$

$$AX = B - C$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(B - C)$$
$$(A^{-1}A)X = A^{-1}(B - C)$$
$$IX = A^{-1}(B - C)$$

$$X = A^{-1}(B - C)$$

2. $x_1 = 2, x_2 = 5, x_3 = 0$ 3. (A) $x_1 = -2, x_2 = -5, x_3 = 4$ (B) $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -4$

4. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -6.25 \\ -0.5 & 6.25 \end{bmatrix}$; Cliente 1: \$15 000 en A y \$5 000 en B; Cliente 2: \$28 125 en A y \$21 875 en B; Cliente 3: \$6 875 en A y \$3 125 en B

EJERCICIO 9-3

A

Escriba los problemas del 1 al 4 como sistemas de ecuaciones lineales sin matrices.

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

En los problemas del 5 al 8 escriba cada sistema como una ecuación matricial de la forma $AX = B$.

5. $4x_1 - 3x_2 = 2$
$x_1 + 2x_2 = 1$

6. $x_1 - 2x_2 = 7$
$-3x_1 + x_2 = -3$

7. $x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$
$-x_1 + x_2 = 2$
$2x_1 + 3x_2 + x_3 = -3$

8. $2x_1 + 3x_3 = 5$
$x_1 - 2x_2 + x_3 = -4$
$-x_1 + 3x_2 = 2$

En los problemas del 9 al 12, encuentre x_1 y x_2.

9. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

B

En los problemas del 13 al 20 escriba cada sistema como una ecuación matricial y resuelva usando inversas. [Nota: Las inversas se determinaron en los problemas del 17 a 24 en los ejercicios 9-2.]

13. $x_1 + 2x_2 = k_1$
$x_1 + 3x_2 = k_2$
(A) $k_1 = 1, k_2 = 3$
(B) $k_1 = 3, k_2 = 5$
(C) $k_1 = -2, k_2 = 1$

14. $2x_1 + x_2 = k_1$
$5x_1 + 3x_2 = k_2$
(A) $k_1 = 2, k_2 = 13$
(B) $k_1 = -2, k_2 = 4$
(C) $k_1 = 1, k_2 = -3$

15. $x_1 + 3x_2 = k_1$
$2x_1 + 7x_2 = k_2$
(A) $k_1 = 2, k_2 = -1$
(B) $k_1 = 1, k_2 = 0$
(C) $k_1 = 3, k_2 = -1$

16. $2x_1 + x_2 = k_1$
$x_1 + x_2 = k_2$
(A) $k_1 = -1, k_2 = -2$
(B) $k_1 = 2, k_2 = 3$
(C) $k_1 = 2, k_2 = 0$

17. $x_1 - 2x_2 = k_1$
$x_2 + x_3 = k_2$
$2x_1 - x_2 + 2x_3 = k_3$
(A) $k_1 = 1, k_2 = 0, k_3 = 2$
(B) $k_1 = -1, k_2 = 1, k_3 = 0$
(C) $k_1 = 2, k_2 = -2, k_3 = 1$

18. $x_1 + 3x_2 = k_1$
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = k_2$
$-x_2 + 2x_3 = k_3$
(A) $k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 1$
(B) $k_1 = -2, k_2 = 0, k_3 = 1$
(C) $k_1 = 3, k_2 = 1, k_3 = 0$

19. $x_1 + x_2 = k_1$
$2x_2 - x_3 = k_2$
$x_1 + x_3 = k_3$
(A) $k_1 = 2, k_2 = 0, k_3 = 4$
(B) $k_1 = 0, k_2 = 4, k_3 = -2$
(C) $k_1 = 4, k_2 = 2, k_3 = 0$

20. $x_1 - x_3 = k_1$
$2x_1 - x_2 = k_2$
$x_1 + x_2 - 4x_3 = k_3$
(A) $k_1 = 4, k_2 = 8, k_3 = 0$
(B) $k_1 = 4, k_2 = 0, k_3 = -4$
(C) $k_1 = 0, k_2 = 8, k_3 = -8$

C

Para las matrices A y B, $n \times n$, y las matrices C, D y X, $n \times 1$, en los problemas del 21 al 26 despeje X de cada ecuación matricial. Suponga que existen todas las inversas necesarias.

21. $AX - BX = C$ **22.** $AX + BX = C$

23. $AX + X = C$ **24.** $AX - X = C$

25. $AX - C = D - BX$ **26.** $AX + C = BX + D$

Con los métodos de la matriz inversa resuelva el sistema siguiente para los valores indicados de k_1 y k_2.

$x_1 + 2.001x_2 = k_1$
$x_1 + 2x_2 = k_2$

(A) $k_1 = 1, k_2 = 1$
(B) $k_1 = 1, k_2 = 0$
(C) $k_1 = 0, k_2 = 1$

Analice los efectos de pequeños cambios en los términos constantes en el conjunto solución de este sistema.

28. Repita el problema 27 para el sistema siguiente:

$$x_1 - 3.001x_2 = k_1$$
$$x_1 - \quad 3x_2 = k_2$$

En los problemas del 29 al 32, escriba cada sistema como una ecuación matricial y resuelva mediante la matriz inversa de coeficientes. Use un dispositivo de graficación para realizar los cálculos necesarios.

29. $x_1 + 8x_2 + 7x_3 = 135$
$6x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 155$
$3x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 75$

30. $5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 112$
$7x_1 + 5x_2 = 70$
$3x_1 + x_2 - 9x_3 = 96$

31. $6x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 250$
$6x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 195$
$4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 145$
$4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 125$

32. $3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 10$
$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 15$
$3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 30$
$4x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 25$

APLICACIONES

Resuelva usando sistemas de ecuaciones e inversas.

33. **Asignación de recursos.** Una sala de conciertos tiene 10 000 asientos. Si los boletos son de $4 y $8, ¿cuántos boletos de cada tipo se deben vender (suponiendo que se vendan todos los asientos) para obtener las cantidades indicadas en la tabla? Use decimales en el cálculo de la inversa.

	Concierto		
	1	2	3
Boletos vendidos	10 000	10 000	10 000
Cantidad requerida	$56 000	$60 000	$68 000

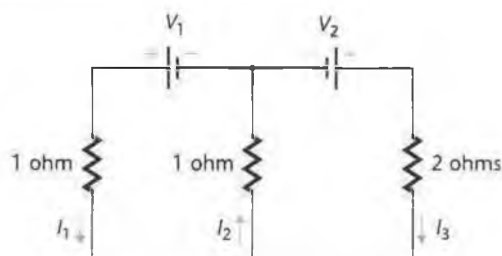
34. **Planeación de la producción.** Los costos de la mano de obra y materiales para fabricar dos modelos de guitarra se indican en la tabla siguiente:

Modelo de guitarra	Costo de la mano de obra	Costos del material
A	$30	$20
B	$40	$30

Si se autoriza un total de $3 000 a la semana para mano de obra y materiales, ¿cuántas guitarras de cada modelo se deben producir en ese periodo para usar de manera exacta las cantidades asignadas de los $3 000 indicadas en la tabla siguiente? Use decimales en el cálculo de la inversa.

	Asignación semanal		
	1	2	3
Mano de obra	$1 800	$1 750	$1 720
Material	$1 200	$1 250	$1 280

* 35. **Análisis de circuitos.** Un circuito eléctrico de corriente directa que consiste de conductores (alambres), resistencias y baterías se indica en la figura.



Si I_1, I_2 e I_3 son las corrientes (en amperes) en las tres ramas del circuito y V_1 y V_2 son los voltajes (en volts) de las dos baterías, entonces se pueden aplicar las *leyes de Kirchhoff** para demostrar que las corrientes satisfacen el sistema de ecuaciones siguiente:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$
$$I_1 + I_2 = V_1$$
$$I_2 + 2I_3 = V_2$$

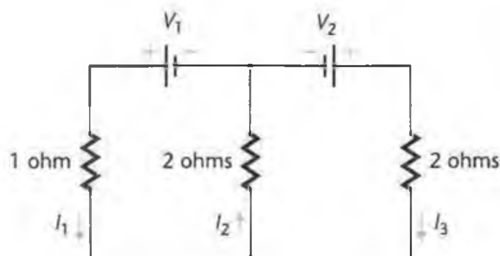
Resuelva este sistema para:

(A) $V_1 = 10$ volts, $V_2 = 10$ volts
(B) $V_1 = 10$ volts, $V_2 = 15$ volts
(C) $V_1 = 15$ volts, $V_2 = 10$ volts

* 36. **Análisis de circuitos.** Repita el problema 35 para el circuito eléctrico mostrado en la figura.

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0$$
$$I_1 + 2I_2 = V_1$$
$$2I_2 + 2I_3 = V_2$$

*Gustav Kirchhoff (1824-1887), físico alemán, fue el primero en aplicar matemática teórica a la física. Es más conocido por su desarrollo de ciertas propiedades de circuitos eléctricos, que ahora se conocen como **leyes de Kirchhoff**.



37. Geometría. La gráfica de $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $(1, k_1)$, $(2, k_2)$, $(3, k_3)$. Determine a, b y c para:

(A) $k_1 = -2, k_2 = 1, k_3 = 6$
(B) $k_1 = 4, k_2 = 3, k_3 = -2$
(C) $k_1 = 8, k_2 = -5, k_3 = 4$

38. Geometría. Repita el problema 37 si la gráfica pasa por los puntos $(-1, k_1)$, $(0, k_2)$, $(1, k_3)$.

En los problemas 37 y 38 compruebe sus respuestas graficando $y = f(x)$ en un dispositivo de graficación y verifique que la gráfica pasa por los puntos indicados.

39. Dietas. Un biólogo dispone de dos mezclas de comidas comerciales con los porcentajes de proteína y grasa siguientes:

Mezcla	Proteína (%)	Grasa (%)
A	20	2
B	10	6

¿Cuántas onzas de cada mezcla se deben usar para preparar cada una de las dietas enlistadas en la tabla siguiente?

	Dieta		
	1	**2**	**3**
Proteína	20 oz	10 oz	10 oz
Grasa	6 oz	4 oz	6 oz

SECCIÓN 9-4 Determinantes

- Determinantes
- Determinantes de segundo orden
- Determinantes de tercer orden
- Determinantes de orden superior

Determinantes

En esta sección se va a asociar con cada una de las matrices cuadradas un número real, llamado **determinante** de la matriz. Si A es una matriz cuadrada, entonces el determinante de A se denota por **det A**, o simplemente escribiendo el arreglo de elementos en A mediante líneas verticales en lugar de corchetes. Por ejemplo,

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \qquad \det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ -2 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -7 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

Un determinante de **orden n** es un determinante con n renglones y n columnas. Casi toda esta sección se concentrará en determinar los valores de determinantes de órdenes 2 y 3. Pero se pueden generalizar completamente muchos de los resultados y procedimientos analizados para determinantes de orden n.

Determinantes de segundo orden

En general, un **determinante de segundo orden** se escribe como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

y representa un número real como se indica en la definición 1.

DEFINICIÓN 1 **Valor de un determinante de segundo orden**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \qquad (1)$$

La fórmula (1) se recuerda fácilmente si se advierte que la expresión de la derecha es el producto de la **diagonal principal**, del término de la izquierda superior al término inferior derecho, menos el producto de la **diagonal secundaria**, del término inferior izquierdo al término superior derecho.

EJEMPLO 1 **Evaluación de un determinante de segundo orden**

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)(-4) - (-3)(2) = 4 - (-6) = 10$$

Problema seleccionado 1 Encuentre: $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$

Determinantes de tercer orden

Un determinante de orden 3 es un arreglo cuadrado de nueve elementos y representa un número real dado por la definición 2, la cual es un caso especial de la definición general del valor de un determinante de orden n. Observe que cada término en el desarrollo del lado derecho de la ecuación (2) contiene exactamente un elemento de cada renglón y de cada columna.

DEFINICIÓN 2 **Valor de un determinante de tercer orden**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} \qquad (2)$$

¡No se asuste! No es necesario memorizar la fórmula (2). Después de introducir los conceptos de *menor* y *cofactor*, se establecerá un teorema que se puede usar para obtener el mismo resultado con muchos menos problemas.

El **menor de un elemento** en un determinante de tercer orden es un determinante de segundo orden obtenido al eliminar el renglón y la columna que contienen al elemento. Por ejemplo, en el determinante de la fórmula (2),

$$\text{Menor de } a_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Por lo general las eliminaciones se hacen mentalmente.

$$\text{Menor de } a_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Escriba los menores de los otros siete elementos en el determinante de la fórmula (2).

Una cantidad cercanamente asociada con el menor de un elemento es el **cofactor de un elemento** a_{ij} (del *i*ésimo renglón y la *j*ésima columna), la cual es el producto del menor de a_{ij} y $(-1)^{i+j}$.

DEFINICIÓN 3 **Cofactor**

$$\text{Cofactor de } a_{ij} = (-1)^{i+j}\,(\text{Menor de } a_{ij})$$

Así, un cofactor de un elemento no es más que un menor con signo. El signo se determina elevando -1 a una potencia que sea la suma de los números que indican el renglón y la columna en los cuales aparece el elemento. Note que $(-1)^{i+j}$ es 1 si $i + j$ es par y -1 si $i + j$ es impar. De manera que, si se tiene el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

entonces

$$\text{Cofactor de } a_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\text{Cofactor de } a_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

EJEMPLO 2 **Determinación de cofactores**

Encuentre los cofactores de -2 y 5 en el determinante

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -6 & 5 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución

$$\text{Cofactor de } -2 = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-6)(0) - (2)(5) = -10$$

$$\text{Cofactor de } 5 = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -[(-2)(2) - (-1)(0)] = 4$$

Problema seleccionado 2 Encuentre los cofactores de 2 y 3 en el determinante del ejemplo 2.

[*Nota:* El signo delante del menor, $(-1)^{i+j}$, puede ser determinado mecánicamente usando la tabla de signos de + y − en el determinante, iniciando con + en la esquina superior izquierda:

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

Use la tabla de signos o el método del exponente, el que considere más fácil, para determinar el signo delante del menor.]

Ahora se está listo para el teorema clave de esta sección, el teorema 1. Este teorema proporciona un eficiente procedimiento paso por paso, llamado algoritmo, para evaluar determinantes de tercer orden.

Teorema 1 **Valor de un determinante de tercer orden**

El valor de un determinante de orden 3 es la suma de tres productos obtenidos al multiplicar cada elemento de cualquier renglón (o cada elemento de cualquier columna) por su cofactor.

Para probar este teorema se debe mostrar que los desarrollos indicados por el teorema para cualquier renglón o cualquier columna (seis casos) producen la expresión de la derecha de la fórmula (2). Las pruebas de casos especiales de este teorema se dejan al lector en la parte C de los problemas de los ejercicios 9-4.

EJEMPLO 3 **Evaluación de un determinante de tercer orden**

Evalúe

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

desarrollando:

(A) El primer renglón (B) La segunda columna

Soluciones

(A) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}\text{Cofactor}\\ \text{de } a_{11}\end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix}\text{Cofactor}\\ \text{de } a_{12}\end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix}\text{Cofactor}\\ \text{de } a_{13}\end{pmatrix}$

$$= 2\left((-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\right) + (-2)\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) + 0$$

$$= (2)(1)[(1)(-1) - (-3)(2)] + (-2)(-1)[(-3)(-1) - (1)(2)]$$

$$= (2)(5) + (2)(1) = 12$$

(B) $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix}\text{Cofactor}\\ \text{de } a_{12}\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}\text{Cofactor}\\ \text{de } a_{22}\end{pmatrix} + a_{32}\begin{pmatrix}\text{Cofactor}\\ \text{de } a_{32}\end{pmatrix}$

$$= (-2)\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) + (1)\left((-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right)$$

$$+ (-3)\left((-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-2)(-1)[(-3)(-1) - (1)(2)] + (1)(1)[(2)(-1) - (1)(0)]$$

$$+ (-3)(-1)[(2)(2) - (-3)(0)]$$

$$= (2)(1) + (1)(-2) + (3)(4) = 12$$

Problema seleccionado 3 Evalúe

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

desarrollando:

(A) El primer renglón (B) La tercera columna

```
[A]
    [[2   -2  0  ]
     [-3  1   2  ]
     [1   -3  -1]]
det([A])
              12
```

FIGURA 1



La mayoría de los dispositivos de graficación evalúan determinantes. La figura 1 muestra la evaluación del determinante del ejemplo 3.

Determinantes de orden superior

El teorema 1 y las definiciones de menor y cofactor se generalizan completamente para determinantes de orden mayor que 3. Estos conceptos están ilustrados para un determinante de cuarto orden en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 **Evaluación de un determinante de cuarto orden**

Dado el determinante de cuarto orden

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -5 & -6 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

(A) Encuentre el menor en forma de determinante del elemento 3.
(B) Encuentre el cofactor en forma de determinante del elemento -5.
(C) Encuentre el valor del determinante de cuarto orden.

Soluciones

(A) Menor de 3 = $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -5 & 0 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix}$

(B) Cofactor de $-5 = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

(C) Generalizando el teorema 1, el valor de este determinante de cuarto orden es la suma de los cuatro productos obtenidos multiplicando cada elemento de cualquier renglón (o cada elemento de cualquier columna) por su cofactor. El trabajo implicado en esta evaluación se reduce grande si se elige al renglón o columna con la mayor cantidad de elementos iguales a cero. Ya que la columna 3 tiene tres ceros, se desarrolla a través de esta columna:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ -5 & -6 & 0 & -3 \\ 4 & 5 & -2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -5 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} + 0$$

$$= (-2)\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -5 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix}$$

Desarrollando este determinante en su primera columna.

$$= (-2)\left(0 + (-5)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + 0\right)$$

$$= (-2)(-5)(-1)(-2) = 20$$

Problema seleccionado 4 Repita el ejemplo 4 para el siguiente determinante de cuarto orden:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Escriba una tabla de signos de + y − para un determinante de cuarto orden, y úselo para determinar los signos de los menores en el ejemplo 4.

Comentario. ¿Dónde se usan los determinantes? Muchas ecuaciones y fórmulas tienen formas particularmente simples y representaciones compactas en forma de determinantes que son fáciles de recordar. (Véase los problemas 50 a 54 en el ejercicio 9-5.) También, en la sección 9-6 se verá que las soluciones de ciertos sistemas de ecuaciones se pueden expresar en términos de determinantes. Además, los determinantes están implicados en el trabajo teórico de cursos de matemáticas avanzadas. Como ejemplo, se puede mostrar que la inversa de una matriz cuadrada existe si y sólo si su determinante no es igual a 0.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. 14 **2.** Cofactor de 2 = 13; cofactor de 3 = −4 **3.** (A) 3 (B) 3

4. (A) $\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & -4 \end{vmatrix}$ (B) $-\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}$ (C) −24

EJERCICIO 9-4

A

Evalúe cada determinante de segundo orden en los problemas del 1 al 6.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1.8 & -1.6 \\ -1.9 & 1.2 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 0.5 & -3.2 \\ 1.4 & -6.7 \end{vmatrix}$

Los problemas del 7 al 14 se refieren al determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & 8 \end{vmatrix}$$

Escriba el menor de cada elemento dado en los problemas del 7 al 10. Exprese la respuesta en forma de determinante.

7. a_{11} **8.** a_{22}

9. a_{32} **10.** a_{21}

Escriba el cofactor de cada elemento dado en los problemas del 11 al 14, y evalúelo.

11. a_{11} **12.** a_{22}

13. a_{32} **14.** a_{21}

Evalúe los problemas del 15 al 20 usando cofactores.

Compruebe sus respuestas a los problemas del 15 a 20 con un dispositivo de graficación.

15. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **16.** $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$



17. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -7 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$ **18.** $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 9 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$ **20.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -6 & 3 & 1 \\ 7 & -9 & -2 \end{vmatrix}$

B

Dado el determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

escriba el cofactor en forma de determinante de cada elemento en los problemas del 21 al 24.

21. a_{11} **22.** a_{44}

23. a_{43} **24.** a_{23}

Evalúe cada determinante en los problemas del 25 al 34 usando cofactores.

Compruebe sus respuestas a los problemas del 25 al 34 con un dispositivo de graficación.

25. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -8 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$ **26.** $\begin{vmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 2 & 8 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **28.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & 9 \end{vmatrix}$ **30.** $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **32.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 7 & -2 & 3 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

*Si A es una matriz 3 × 3, el det A se puede evaluar por la siguiente **expansión diagonal**. Forme una matriz 3 × 5 aumentando a la A derecha con las dos primeras columnas y calcular los productos diagonales $p_1, p_2, \ldots, p_6$ indicados por las flechas:*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$p_4 \quad p_5 \quad p_6 \qquad p_1 \quad p_2 \quad p_3$

Fórmula de la expansión diagonal

El determinante de A está dado por [compare con la fórmula (2)]

$$\begin{aligned} \det A &= p_1 + p_2 + p_3 - p_4 - p_5 - p_6 \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

[Precaución: El procedimiento de la expansión diagonal funciona sólo para matrices 3 × 3. No lo aplique a matrices de cualquier otro tamaño.]

Use la fórmula de la expansión diagonal para evaluar los determinantes en los problemas 35 y 36.

35. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 5 & 3 & -7 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ **36.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \\ -3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$

37. Una matriz con todos los elementos iguales a cero debajo de la diagonal principal se llama **matriz triangular superior**.

(A) Encuentre $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}$

(B) Con base en los resultados del inciso (A), describa verbalmente al determinante de estas matrices triangulares superiores.

38. Una matriz con todos los elementos iguales a cero arriba de la diagonal principal se llama **matriz triangular inferior**.

(A) Encuentre $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(B) Con base en los resultados del inciso (A), describa verbalmente al determinante de estas matrices triangulares inferiores.

C

En los problemas del 39 al 44, todas las letras representan números reales. Encuentre una ecuación que satisfaga cada par de determinantes, y describa la relación entre los dos determinantes.

39. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ 40. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$

41. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix}$ 42. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix}$

43. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} kc + a & kd + b \\ c & d \end{vmatrix}$

44. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & ka + b \\ c & kc + d \end{vmatrix}$

45. Demuestre que la expansión del determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

a través de la primera columna es la misma que la expansión a través del tercer renglón.

46. Repita el problema 45, usando el segundo renglón y la tercera columna.

47. Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

demuestre que $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

48. Si

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

demuestre que $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Si A es una matriz $n \times n$ e I es la matriz identidad $n \times n$, entonces la función $f(x) = |xI - A|$ se llama ***polinomio característico*** *de A, y las raíces de $f(x)$ se llaman* ***valores propios*** *de A. Los polinomios característicos y los valores propios tienen muchas aplicaciones importantes que se analizarán en tratamientos avanzados de matrices. En los problemas del 49 al 52, encuentre el polinomio característico y los valores propios de cada matriz.*

49. $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

50. $\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

51. $\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$

52. $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

SECCIÓN 9-5 Propiedades de los determinantes

- Análisis de las propiedades de los determinantes
- Resumen de las propiedades de un determinante

Los determinantes tienen varias propiedades útiles que pueden reducir en gran parte el trabajo de la evaluación de los determinantes de orden 3 o superiores. Estas propiedades y su uso son el objeto de estudio de esta sección.

• Análisis de las propiedades de los determinantes

Ahora se establecerán y analizarán cinco propiedades generales de los determinantes en forma de teoremas. Ya que las pruebas para los casos generales de estos teoremas son complicadas y con notación difícil, se bosquejarán sólo pruebas informales para los determinantes de orden 3. Los teoremas, sin embargo, se aplican a determinantes de cualquier orden.

Teorema 1 **Multiplicación de un renglón o columna por una constante**

Si cada elemento de cualquier renglón (o columna) de un determinante se multiplica por una constante k, el nuevo determinante es k veces el determinante original.

Prueba parcial

Sea C_{ij} el cofactor de a_{ij}. Después se desarrolla a través del primer renglón, se tiene

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11}C_{11} + ka_{12}C_{12} + ka_{13}C_{13}$$

$$= k(a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13})$$

$$= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

El teorema 1 también establece que un factor común a todos los elementos de un renglón (o columna) se puede tomar como un factor del determinante.

EJEMPLO 1 **Factorización del factor común de una columna**

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -2 & 7 & -2 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -1 & 7 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

donde 2 es un factor común de la primera columna.

Problema seleccionado 1 Factorice los factores comunes a cualquier renglón o cualquier columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 (A) ¿Cómo están $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix}$ relacionadas?

(B) ¿Cómo están $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{vmatrix}$ relacionadas?

Teorema 2 **Renglón o columna de ceros**

Si cada elemento en un renglón (o columna) es 0, el valor del determinante es 0.

El teorema 2 es una consecuencia inmediata del teorema 1, y su prueba se deja como ejercicio. Esto se ilustra en el siguiente ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Teorema 3 **Intercambio de renglones o columnas**

Si dos renglones (o dos columnas) de un determinante son intercambiados, el nuevo determinante es el negativo del original.

Una prueba del teorema 3, incluso para un determinante de orden 3, tiene notación complicada. Se sugiere que pruebe parcialmente al teorema por desarrollo directo de los determinantes antes y después del intercambio de dos renglones (o columnas). El teorema se ilustra con el siguiente ejemplo, donde las segundas y terceras columnas están intercambiadas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 9 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 9 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 (A) ¿Cuáles son los cofactores de cada elemento en el primer renglón del siguiente determinante? ¿Cuál es el valor del determinante?

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

(B) ¿Cuáles son los cofactores de cada elemento en la segunda columna del siguiente determinante? ¿Cuál es el valor del determinante?

$$\begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix}$$

Teorema 4 **Renglones o columnas iguales**

Si los elementos correspondientes en dos renglones (o columnas) son iguales, el valor del determinante es 0.

Prueba La prueba general del teorema 4 se deduce directamente a partir del teorema 3. Si se inicia con un determinante D que tiene dos renglones (o columnas) iguales y se intercambian los renglones (o columnas) iguales, el nuevo determinante será el mismo que el original. Pero por el teorema 3,

$$D = -D$$

de donde,

$$2D = 0$$
$$D = 0$$

Teorema 5 **Suma de renglones o columnas**

Si un múltiplo de cualquier renglón (o columna) de un determinante se suma a cualquier otro renglón (o columna), el valor del determinante no cambia.

Prueba parcial Si, en un determinante general de tercer orden, se suma un múltiplo k de la segunda columna a la primera y después se desarrolla a través de la primera columna, se obtiene (donde C_{ij} es el cofactor de a_{ij} en el determinante original)

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}+ka_{12})C_{11} + (a_{21}+ka_{22})C_{21} + (a_{31}+ka_{32})C_{31}$$

$$= (a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}) + k(a_{12}C_{11} + a_{22}C_{21} + a_{32}C_{31})$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

El siguiente determinante k es 0, ya que la primera y la segunda columnas son iguales.

Note la similitud del proceso descrito en el teorema 5 con el que se utilizó para obtener matrices de renglón equivalente. Se usa este teorema para transformar un determinante sin elementos 0 en uno que contenga un renglón o columna con todos los elementos cero excepto uno. El determinante transformado puede entonces desarrollarse fácilmente a través de este renglón (o columna). Un ejemplo ilustra mejor el proceso.

EJEMPLO 2

Evaluación de un determinante

Evalúe el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Solución Use el teorema 5 para obtener dos ceros en el primer renglón, y después desarrolle el determinante a través de este renglón. Para iniciar, reemplace la tercera columna con la suma de ésta y dos veces la segunda columna para obtener un 0 en la posición a_{13}:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad 2C_2 + C_3 \to C_3{}^*$$

Ahora, para obtener un 0 en la posición a_{11}, reemplace la primera columna con la suma de ésta y tres veces la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 5 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad 3C_2 + C_1 \to C_1$$

Ahora ésta es una manera fácil de desarrollar este último determinante a través del primer renglón para obtener

*C_1, C_2 y C_3 representan las columnas 1, 2 y 3, respectivamente.

$$0 + (-1)\left((-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\right) + 0 = 20$$

Problema seleccionado 1

Evalúe el siguiente determinante usando primero el teorema 5 para obtener ceros en las posiciones a_{11} y a_{31}, y después desarrolle a través de la primera columna.

$$\begin{vmatrix} 3 & 10 & -5 \\ 1 & 6 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

• Resumen de las propiedades de un determinante

Ahora se resumen las cinco propiedades de determinante analizadas en la tabla 1 para una referencia conveniente. Aunque estas propiedades se cumplen para determinantes de cualquier orden, por simplicidad se ilustrará cada propiedad en términos de un determinante de segundo orden.

TABLA 1 Resumen de las propiedades de los determinantes

Propiedad	Ejemplos
1. Si cada elemento de cualquier renglón (o columna) de un determinante se multiplica por una constante k, el nuevo determinante es k veces el original.	$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{vmatrix}$
2. Si cada elemento en un renglón (o columna) es 0, el valor del determinante es 0.	$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0$
3. Si dos renglones (o dos columnas) de un determinante se intercambian, el nuevo determinante es el negativo del original.	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$
4. Si los elementos correspondientes son iguales en dos renglones (o columnas), el valor del determinante es 0.	$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0$
5. Si se suma un múltiplo de cualquier renglón (o columna) de un determinante a cualquier otro renglón (o columna), el valor del determinante no cambia.	$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + kb & b \\ c + kd & d \end{vmatrix}$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $3\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ **2.** 44

EJERCICIO 9-5

A

Para cada postulado en los problemas del 1 al 10, identifique el teorema de esta sección que lo justifique. No lo evalúe.

1. $\begin{vmatrix} 16 & 8 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$

3. $-2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$

4. $4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

6. $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

7. $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-4 & 3-8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+4 & 2 \\ 5+2 & 1 \end{vmatrix}$

En los problemas del 11 al 14, se usó el teorema 5 para transformar el determinante a la izquierda en el de la derecha. Reemplace cada literal x con un número adecuado para completar la transformación.

11. $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & x \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & 13 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & x & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

Dado que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 10$$

use las propiedades de los determinantes analizados en esta sección para evaluar cada determinante en los problemas del 15 al 20.

15. $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} a & a-b \\ c & c-d \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{vmatrix}$

En los problemas del 21 al 24, transforme cada determinante en uno que contenga un renglón (o columna) con todos los elementos cero excepto uno, si es posible. Después expanda el determinante transformado por este renglón (o columna).

21. $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

B

Para cada postulado en los problemas del 25 al 30, identifique el teorema de esta sección que lo justifique.

25. $-2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -6 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 12 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

28. $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 13 \\ 1 & 7 & 12 \\ 0 & 8 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -2 & 13 \\ 7 & 1 & 12 \\ 8 & 0 & 15 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-4 & 2 & -1 \\ 2+8 & 0 & 2 \\ -3-8 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 7 & 7 & 1 \\ -3 & -3 & 11 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

En los problemas del 31 al 34 se usó el teorema 5 para transformar el determinante de la izquierda en el de la derecha. Reemplace cada literal x y y con un número adecuado para completar la transformación.

31. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ x & 5 & 1 \\ -3 & y & -2 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 10 & 4 & 7 \\ x & 5 & y \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & x & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & y & 0 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & y \end{vmatrix}$

En los problemas del 35 al 42, transforme cada determinante en uno que contenga un renglón (o columna) con todos sus elementos cero excepto uno, si es posible. Después expanda el determinante transformado por este renglón (o columna).

35. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$

38. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & -6 \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 6 & -1 & 2 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 7 \\ -4 & -6 & 2 \end{vmatrix}$

41. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

42. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

C

Transforme cada determinante de los problemas 43 y 44 en uno que contenga un renglón (o columna) con todos sus elementos cero excepto uno, si es posible. Después expanda el determinante transformado por este renglón (o columna)

43. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

44. $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -3 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

Los problemas del 45 a 48 son casos representativos de los teoremas analizados en esta sección. Use expansiones por cofactor para verificar directamente cada postulado, sin hacer referencia al teorema que representa.

45. $\begin{vmatrix} a & b & a \\ d & e & d \\ g & h & g \end{vmatrix} = 0$

46. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ kd & ke & kf \\ g & h & i \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

47. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

48. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

49. Sin desarrollar, explique por qué (2, 5) y (−3, 4) satisfacen la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

50. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación de la recta que pasa por (2, 3) y (−1, 2).

51. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

es la ecuación de la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

52. En geometría analítica se puede demostrar que el área de un triángulo con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Use este resultado para encontrar el área de un triángulo con vértices (−1, 4), (4, 8) y (1, 1).

53. ¿Qué se puede comentar acerca de los tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) si la ecuación siguiente es válida?

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

[*Sugerencia:* Véase problema 52.]

54. Si los tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) están sobre la misma recta, ¿qué puede comentar acerca del valor del determinante que sigue?

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

SECCIÓN 9-6 Regla de Cramer

- Dos ecuaciones y dos variables
- Tres ecuaciones y tres variables

Ahora se verá cómo los determinantes surgen de manera natural en el proceso de solución de sistemas de ecuaciones lineales. Se comienza por examinar dos ecuaciones y dos variables, y después se amplían los resultados a tres ecuaciones y tres variables.

Dos ecuaciones y dos variables

En lugar de pensar en cada sistema de ecuaciones lineales con dos variables como un problema diferente, veamos qué sucede cuando se intenta resolver el sistema general

$$a_{11}x + a_{12}y = k_1 \quad (1A)$$

$$a_{21}x + a_{22}y = k_2 \quad (1B)$$

una vez y para todos, en términos de las constantes reales no especificadas a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, k_1 y k_2.

Se procede multiplicando las ecuaciones (1A) y (1B) por constantes adecuadas, de manera que cuando se sumen las ecuaciones resultantes, lado izquierdo con lado izquierdo y lado derecho con lado derecho, se elimina una de las variables. Suponga que se escoge eliminar y. ¿Qué constante se debe usar para hacer que los coeficientes de y sean iguales excepto en los signos? Multiplique la ecuación (1A) por a_{22} y (1B) por $-a_{12}$; después sume:

$$\begin{aligned} a_{22}(1A):\quad & a_{11}a_{22}x + a_{12}a_{22}y = k_1a_{22} \\ -a_{12}(1B):\quad & -a_{21}a_{12}x - a_{12}a_{22}y = -k_2a_{12} \\ \hline & a_{11}a_{22}x - a_{21}a_{12}x + 0y = k_1a_{22} - k_2a_{12} \\ & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = k_1a_{22} - k_2a_{12} \\ & x = \frac{k_1a_{22} - k_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0 \end{aligned}$$

¿Qué le recuerda el numerador y el denominador? Con base en su experiencia con determinantes adquirida en las dos últimas secciones, usted debe reconocer estas expresiones como

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

De manera similar, comenzando con el sistema (1A) y (1B) y eliminando x (se deja esto como ejercicio), se obtiene

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Estos resultados se resumen en el teorema 1, **regla de Cramer**, que lleva este nombre en honor del matemático suizo G. Cramer (1704-1752).

Teorema 1 **Regla de Cramer para dos ecuaciones y dos variables**

Dado el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= k_2 \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{21} & k_2 \end{vmatrix}}{D}$$

El determinante D se llama **determinante coeficiente**. Si $D \neq 0$, entonces el sistema tiene exactamente una solución, que es la dada por la regla de Cramer. Si, por otro lado, $D = 0$, entonces se puede demostrar que el sistema puede ser inconsistente y no tener soluciones o dependiente y tener un número infinito de soluciones. Se debe usar otros métodos, tales como los analizados en el capítulo 8, para determinar la naturaleza exacta de las soluciones cuando $D = 0$.

EJEMPLO 1 Solución de un sistema con la regla de Cramer

Resuelva mediante la regla de Cramer:
$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 2 \\ -4x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

Solución

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -11$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{1}{11} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{5}{11}$$

Problema seleccionado 1 Resuelva mediante la regla de Cramer:
$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -4 \\ -4x + 3y &= -10 \end{aligned}$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Recuerde que un sistema de ecuaciones lineales debe ser cero, uno o tener un número infinito de soluciones. Analice el número de soluciones para el sistema

$$ax + 3y = b$$
$$4x + 2y = 8$$

donde a y b son números reales. Use la regla de Cramer donde sea adecuado o de otra forma use la eliminación Gauss-Jordan.

• **Tres ecuaciones y tres variables**

La regla de Cramer se puede generalizar completamente para cualquier tamaño de sistema lineal que tenga el *mismo número de variables y ecuaciones*. Sin embargo, no se puede usar para resolver sistemas donde el número de variables no sea igual al número de ecuaciones. En el teorema 2 se estableció sin prueba la regla de Cramer para tres ecuaciones y tres variables.

Teorema 2 **Regla de Cramer para tres ecuaciones y tres variables**

Dado el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= k_3 \end{aligned} \qquad \text{con} \qquad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{D}$$

Se puede recordar fácilmente estas fórmulas de determinantes para x, y y z si se observa lo siguiente:

1. El determinante D se forma a partir de los coeficientes de x, y y z, manteniendo la misma posición relativa en el determinante que se determinó en el sistema de ecuaciones.
2. El determinante D aparece en los denominadores para x, y y z.
3. Se puede obtener el numerador para x a partir de D al reemplazar los coeficientes de $x(a_{11}, a_{21}, a_{31})$ con las constantes k_1, k_2 y k_3, respectivamente. Se pueden establecer postulados similares en el caso de los numeradores para y y z.

EJEMPLO 2 **Solución de un sistema con la regla de Cramer**

Resuelva mediante la regla de Cramer:
$$\begin{aligned} x + y \quad &= 2 \\ 3y - z &= -4 \\ x \quad + z &= 3 \end{aligned}$$

Solución

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{7}{2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Problema seleccionado 2 Resuelva mediante la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 3x \phantom{{}-y} - z &= 5 \\ x - y + z &= 0 \\ x + y \phantom{{}+z} &= 1 \end{aligned}$$

En la práctica, la regla de Cramer se usa ocasionalmente para resolver a mano sistemas de orden superior a 2 o 3, ya que se dispone de métodos más eficientes para usarse en computadora. Sin embargo, la regla de Cramer es una herramienta valiosa en las matemáticas teóricas y aplicadas más avanzadas.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $x = \frac{8}{17}, y = -\frac{46}{17}$ **2.** $x = \frac{6}{5}, y = -\frac{1}{5}, z = -\frac{7}{5}$

EJERCICIO 9-6

A

Resuelva los problemas del 1 al 8 mediante la regla de Cramer.

1. $x + 2y = 1$
$x + 3y = -1$

2. $x + 2y = 3$
$x + 3y = 5$

3. $2x + y = 1$
$5x + 3y = 2$

4. $x + 3y = 1$
$2x + 8y = 0$

5. $2x - y = -3$
$-x + 3y = 3$

6. $-3x + 2y = 1$
$2x - 3y = -3$

7. $4x - 3y = 4$
$3x + 2y = -2$

8. $5x + 2y = -1$
$2x - 3y = 2$

B

Resuelva los problemas del 9 al 12 con dos dígitos significativas mediante la regla de Cramer.

9. $0.9925x - 0.9659y = 0$
$0.1219x + 0.2588y = 2.500$

10. $0.9877x - 0.9744y = 0$
$0.1564x + 0.2250y = 1,900$

11. $0.9954x - 0.9942y = 0$
$0.0958x + 0.1080y = 155$

12. $0.9973x - 0.9957y = 0$
$0.0732x + 0.0924y = 112$

Resuelva los problemas del 13 al 20 mediante la regla de Cramer:

13. $\begin{aligned} x + y \quad &= 0 \\ 2y + z &= -5 \\ -x \quad + z &= -3 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x + y \quad &= -4 \\ 2y + z &= 0 \\ -x \quad + z &= 5 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} x + y \quad &= 1 \\ 2y + z &= 0 \\ -y + z &= 1 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x + 3y \quad &= -3 \\ 2y + z &= 3 \\ -x \quad + 3z &= 7 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 3y + z &= -1 \\ x \quad + 2z &= 3 \\ x - 3y \quad &= -2 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x \quad - z &= 3 \\ 2x - y \quad &= -3 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 2y - z &= -3 \\ x - y - z &= 2 \\ x - y + 2z &= 4 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} 2x + y \quad &= 2 \\ x - y + z &= -1 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}$

C

En los problemas 21 y 22, use la regla de Cramer para despejar sólo x.

21. $\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -3 \\ -4x + 3y + 2z &= -11 \\ x - y - z &= 3 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} x + 4y - 3z &= 25 \\ 3x + y - z &= 2 \\ -4x + y + 2z &= 1 \end{aligned}$

En los problemas 23 y 24, use la regla de Cramer para despejar sólo y.

23. $\begin{aligned} 12x - 14y + 11z &= 5 \\ 15x + 7y - 9z &= -13 \\ 5x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} 2x - y + 4z &= 15 \\ -x + y + 2z &= 5 \\ 3x + 4y - 2z &= 4 \end{aligned}$

En los problemas 25 y 26, use la regla de Cramer para despejar sólo z.

25. $\begin{aligned} 3x - 4y + 5z &= 18 \\ -9x + 8y + 7z &= -13 \\ 5x - 7y + 10z &= 33 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 13x + 11y + 10z &= 2 \\ 10x + 8y + 7z &= 1 \\ 8x + 5y + 4z &= 4 \end{aligned}$

Es claro que $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ es una solución de cada uno de los sistemas dados en los problemas 27 y 28. Use la regla de Cramer para determinar si esta solución es única. [Sugerencia: Si $D \neq 0$, ¿qué se puede concluir? ¿Y si $D = 0$?]

27. $\begin{aligned} x - 4y + 9z &= 0 \\ 4x - y + 6z &= 0 \\ x - y + 3z &= 0 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 3x - y + 3z &= 0 \\ 5x + 5y - 9z &= 0 \\ -2x + y - 3z &= 0 \end{aligned}$

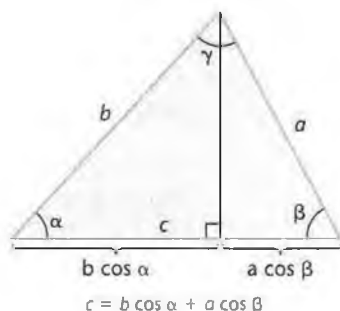
29. Pruebe el teorema 1 para y.

30. (Omita este problema si aún no ha estudiado trigonometría.) Los ángulos α, β y γ y los lados a, b y c de un triángulo (véase la figura) satisfacen

$$\begin{aligned} c &= b\cos\alpha + a\cos\beta \\ b &= c\cos\alpha \qquad\qquad + a\cos\gamma \\ a &= \qquad\quad c\cos\beta + b\cos\gamma \end{aligned}$$

Use la regla de Cramer para expresar $\cos\alpha$ en términos de a, b y c, para ello deduzca la conocida ley de los cosenos de la trigonometría:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$



$c = b\cos\alpha + a\cos\beta$

APLICACIONES

31. Análisis de ingresos. Un supermercado vende dos tipos de café: el tipo A a \$$p$ por libra y el tipo B a \$$q$ por libra. Las ecuaciones para la demanda diaria de los tipos A y B son, respectivamente,

$$\begin{aligned} x &= 200 - 6p + 4q \\ y &= 300 + 2p - 3q \end{aligned}$$

(ambas en libras). Los ingresos diarios R están dados por

$$R = xp + yq$$

(A) Para analizar el efecto del cambio de precio en los ingresos diarios, un economista desea expresar los ingresos diarios R sólo en términos de p y q. Use (1) para eliminar x y y en la ecuación de R, de manera que los ingresos diarios se expresen en términos de p y q.

(B) Para analizar el efecto de los cambios en la demanda sobre los ingresos diarios, el economista desea ahora expresarlos sólo en términos de x y y. Use la regla de Cramer para resolver el sistema (1) en p y q en términos de x y y, y después exprese los ingresos diarios R en términos de x y y.

32. **Análisis de ingresos.** Una compañía fabrica bicicletas de diez y tres velocidades. Las ecuaciones por la demanda semanal son

$$p = 230 - 10x + 5y$$
$$q = 130 + 4x - 4y \qquad (2)$$

donde \$$p$ es el precio de una bicicleta de diez velocidades, \$$q$ es el precio de una bicicleta de tres velocidades, x es la demanda semanal para las bicicletas de diez velocidades, y y es la demanda semanal para las bicicletas de tres velocidades. El ingreso semanal R está dado por

$$R = xp + yq$$

(A) Use (2) para expresar el ingreso diario sólo en términos de x y y.
(B) Use la regla de Cramer para resolver el sistema (2) para x y y en términos de p y q, y después exprese el ingreso diario R sólo en términos de p y q.

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 9 Uso de matrices para encontrar costo, ingreso y ganancia

Un distribuidor de juguetes compra componentes para diferentes modelos de trenes a varios proveedores y los empaca en tres diferentes conjuntos de trenes listos para usarse: el de colección, el imperio y el cometa. Los componentes usados en cada conjunto se enlistan en la tabla 1. Por conveniencia, el tiempo total de trabajo (en minutos) necesario para preparar un conjunto para envío se incluye como un componente.

TABLA 1 Componentes del producto

	Conjunto de trenes		
Componentes	**De colección**	**Imperio**	**Cometa**
Locomotoras	1	1	2
Vagones	5	6	8
Partes de vías	20	24	32
Interruptores de vías	1	2	4
Unidad de potencia	1	1	1
Mano de obra (por min)	15	18	24

Los costos actuales de los componentes se indican en la tabla 2, y los precios de venta al distribuidor para los conjuntos se dan en la tabla 3.

TABLA 2 Costos de los componentes

Componentes	Costo por unidad
Locomotoras	\$12.52
Vagones	\$1.43
Partes de vías	\$0.25
Interruptor de vías	\$2.29
Unidad de potencia	\$12.54
Mano de obra (por min)	\$0.15

TABLA 3 Precios de venta

Conjunto	Precio
De colección	\$54.60
Imperio	\$62.28
Cometa	\$81.15

En la tabla 4 se muestra el pedido que ha recibido el distribuidor de una tienda de juguetes al menudeo.

TABLA 4 Pedido del cliente

Conjunto	Cantidad
De colección	48
Imperio	24
Cometa	12

El distribuidor desea guardar la información de cada tabla en una matriz y usar operaciones matriciales para encontrar la información siguiente:

1. El inventario (partes y mano de obra) requerido para completar el pedido.
2. El costo (partes y mano de obra) para cubrir el pedido.
3. El ingreso (ventas) obtenido del cliente.
4. La utilidad obtenida en el pedido.

(A) Use sólo una literal para designar la matriz que representa cada tabla, y escriba las expresiones matriciales en términos de esas literales de manera que proporcione la información requerida. Analice el tamaño de la matriz que se debe usar para representar cada tabla de manera que estén definidas todas las operaciones matriciales pertinentes.

(B) Evalúe las expresiones matriciales del inciso (A).

Un poco después de completar el pedido de la tabla 4, un proveedor informa al distribuidor que ya no se tienen disponibles los vagones y locomotoras que se usan en esos conjuntos de trenes. El distribuidor tiene actualmente en existencia 30 locomotoras y 134 vagones.

(C) ¿Cuántos conjuntos de trenes de cada tipo puede producir el distribuidor usando todas las locomotoras y vagones disponibles? Suponga que el distribuidor tiene cantidades ilimitadas de los otros componentes que se usan en estos conjuntos.

(D) ¿Qué utilidad obtendrá el distribuidor si se venden todos los conjuntos? Si hay más de una forma para usar todas las locomotoras y vagones disponibles, ¿cuál producirá la máxima ganancia?

Repaso del capítulo 9

9-1 MATRICES: OPERACIONES BÁSICAS

Dos matrices son **iguales** si tienen el mismo tamaño y sus elementos correspondientes son iguales. La **suma de dos matrices** del mismo tamaño es una matriz con elementos que son las sumas de los elementos correspondientes de las dos matrices dadas. La suma matricial es **conmutativa** y **asociativa**. Una matriz sólo con elementos cero se llama **matriz cero**. El **negativo de una matriz** M, denotada por $-M$, es una matriz con elementos que son los negativos de los elementos en M. Si A y B son matrices del mismo tamaño, entonces se define la **resta** como sigue: $A - B = A + (-B)$. El **producto de un número** k **y una matriz** M, denotada por kM, es una matriz formada al multiplicar cada elemento de M por k. El **producto** de una matriz renglón $1 \times n$ y una matriz columna $n \times 1$ es una matriz 1×1 dada por

$$\overset{1 \times n}{[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]} \overset{n \times 1}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}} = \overset{1 \times 1}{[a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n]}$$

Si A es una matriz $m \times p$ y B es una matriz $p \times n$, entonces la **matriz producto** de A y B, denotada AB, es una matriz $m \times n$ cuyo elemento en el $i$ésimo renglón y la $j$ésima columna es el número real obtenido del producto del $i$ésimo renglón de A y la $j$ésima columna de B. Si el número de columnas en A no es igual al número de renglones en B, entonces el producto matricial AB **no está definido**. La **multiplicación matricial no es conmutativa**, y la **propiedad cero no se cumple para la multiplicación matricial**. Es decir, para las matrices A y B, el producto matricial AB puede ser cero sin que A o B sean la matriz cero.

9-2 INVERSA DE UNA MATRIZ CUADRADA

La **matriz de identidad para la multiplicación** en el conjunto de todas las matrices cuadradas de orden n es la matriz cuadrada de orden n, denotada por I, con unos a lo largo de la **diagonal principal** (desde la esquina superior izquierda hasta la esquina inferior derecha) y ceros en los lugares restantes. Si M es una matriz cuadrada de orden n, e I es la matriz de identidad de orden n, entonces

$$IM = MI = M$$

Si M es una matriz cuadrada de orden n, y si existe una matriz M^{-1} (léase "inversa de M") tal que

$$M^{-1}M = MM^{-1} = I$$

entonces M^{-1} se llama **inversa multiplicativa de M** o, de manera más simple, **inversa de M**. Si la matriz aumentada $[M|I]$ se transforma mediante operaciones de renglón en $[I|B]$, entonces la matriz resultante B es M^{-1}. Si, sin embargo, se obtienen sólo ceros en uno o más renglones a la izquierda de la raya vertical, entonces M^{-1} no existe y M se conoce como **matriz singular**.

9-3 ECUACIONES MATRICIALES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Las siguientes propiedades de matrices son fundamentales en el proceso de solución de ecuaciones matriciales. Suponga que todos los productos y sumas están definidos para las matrices indicadas A, B, C, I y 0, entonces:

Propiedades de suma

Asociativa:	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Conmutativa:	$A + B = B + A$
Identidad aditiva:	$A + 0 = 0 + A = A$
Inverso aditivo:	$A + (-A) = (-A) + A = 0$

Propiedades de multiplicación

Propiedad asociativa:	$A(BC) = (AB)C$
Identidad multiplicativa:	$AI = IA = A$
Inversa multiplicativa:	Si A es una matriz cuadrada y A^{-1} existe, entonces $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Propiedades combinadas

Distributiva por la izquierda:	$A(B + C) = AB + AC$
Distributiva por la derecha:	$(B + C)A = BA + CA$

Igualdad

Suma:	Si $A = B$, entonces $A + C = B + C$.
Multiplicación por la izquierda:	Si $A = B$, entonces $CA = CB$.
Multiplicación por la derecha:	Si $A = B$, entonces $AC = BC$.

Un sistema de ecuaciones lineales con el mismo número de variables que dé ecuaciones tal como

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = k_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = k_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = k_3$$

se puede escribir como la ecuación matricial

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}}$$

Si existe la inversa de A, entonces la ecuación matricial tiene una solución única dada por

$$X = A^{-1}B$$

Después de multiplicar B por A^{-1} desde la izquierda, es fácil leer la solución del sistema original de ecuaciones.

9-4 DETERMINANTES

Con cada matriz cuadrada A hay asociado un número real llamado **determinante** de la matriz. El determinante de A se denota por **det** A, o simplemente escribiendo el arreglo de los elementos en A usando líneas verticales en lugar de corchetes. Por ejemplo,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Un determinante de **orden n** es un determinante con n renglones y n columnas.

El **valor de un determinante de segundo orden** es el número real dado por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

El **valor de un determinante de tercer orden** es la suma de los tres productos obtenidos al multiplicar cada elemento de cualquiera de los renglones (o cada elemento de cualquier columna) por su cofactor. El **cofactor de un elemento a_{ij}** (del $i$ésimo renglón y la $j$ésima columna) es el producto del menor de a_{ij} y $(-1)^{i+j}$. El **menor de un elemento a_{ij}** es el determinante restante después de eliminar el $i$ésimo renglón y la $j$ésima columna. Se puede usar un proceso similar para evaluar los determinantes de orden mayor que 3.

9-5 PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

El uso de las siguientes cinco propiedades de los determinantes puede reducir considerablemente el esfuerzo para evaluar determinantes de orden 3 o mayores:

1. Si cada elemento de cualquier renglón (o columna) de un determinante se multiplica por una constante k, el nuevo determinante es k veces el original.
$$\begin{vmatrix} 2a & 2b \\ c & d \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
$$3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & b \\ 3c & d \end{vmatrix}$$
2. Si cada elemento en un renglón (o columna) es 0, el valor del determinante es 0.
$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0$$
3. Si se intercambian dos renglones (o dos columnas) de un determinante, el nuevo determinante es el negativo del original.
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$$
4. Si los elementos correspondientes son iguales en dos renglones (o columnas), el valor del determinante es 0.
$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$
$$\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} = 0$$
5. Si se suma un múltiplo de cualquier renglón (o columna) de un determinante a cualquier otro renglón (o columna), el valor del determinante no cambia.
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + kb & b \\ c + kd & d \end{vmatrix}$$

9-6 REGLA DE CRAMER

Sistemas de ecuaciones que tienen el mismo número de variables que de ecuaciones se pueden resolver también usando determinantes y la regla de Cramer. La **regla de Cramer para tres ecuaciones y tres variables** es como sigue: Dado el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= k_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= k_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= k_3 \end{aligned} \quad \text{con} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & a_{12} & a_{13} \\ k_2 & a_{22} & a_{23} \\ k_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & k_1 & a_{13} \\ a_{21} & k_2 & a_{23} \\ a_{31} & k_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 \\ a_{21} & a_{22} & k_2 \\ a_{31} & a_{32} & k_3 \end{vmatrix}}{D}$$

La regla de Cramer se puede generalizar de manera completa para cualquier tamaño de sistemas lineales que tengan el mismo número de variables que de ecuaciones. Las fórmulas son fáciles de recordar si se toma en cuenta lo siguiente:

1. El determinante D se forma de los coeficientes x, y y z, manteniendo la misma posición relativa en el determinante que se determinó en el sistema de ecuaciones.
2. El determinante D aparece en los denominadores para x, y y z.
3. El numerador para x se puede obtener a partir de D reemplazando los coeficientes de $x(a_{11}, a_{21}, a_{31})$ con las constantes k_1, k_2 y k_3, respectivamente. Se pueden establecer postulados similares para los numeradores en y y z.

La regla de Cramer rara vez se usa para resolver, a mano, sistemas de orden mayor de 3, ya que se dispone de métodos más eficientes. La regla de Cramer, sin embargo, es una herramienta valiosa en matemáticas teóricas y aplicadas más avanzadas.

Ejercicio de repaso del capítulo 9

Al trabajar con los problemas de este capítulo revise y compruebe sus respuestas con las que se dan al final del libro. Se incluyen todas las respuestas a los problemas de repaso, y después de cada respuesta está un número en tipo itálico que indica la sección a la que pertenece el problema que se está analizando. Si se le presentan dudas repase las secciones correspondientes en el texto.

A

En los problemas del 1 al 9, realice las operaciones que se indican, dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

1. $A + B$
2. $B + D$
3. $A - 2B$
4. AB
5. AC
6. AD
7. DC
8. CD
9. $C + D$
10. Encuentre la inversa de
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$
Demuestre que $A^{-1}A = I$.
11. Escriba el sistema
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= k_1 \\ 4x_1 + 3x_2 &= k_2 \end{aligned}$$
como una ecuación matricial, y resuelva mediante la inversa determinada en el problema 10 para:
(A) $k_1 = 3, k_2 = 5$ (B) $k_1 = 7, k_2 = 10$
(C) $k_1 = 4, k_2 = 2$

Evalúe los determinantes en los problemas 12 y 13.

12. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \end{vmatrix}$

14. Resuelva el sistema mediante la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 8 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

15. Use las propiedades de los determinantes para encontrar cada uno de los siguientes, dado que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$$

(A) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} a & 3b & c \\ d & 3e & f \\ g & 3h & i \end{vmatrix}$

(C) $\begin{vmatrix} a & b & a+b+c \\ d & e & d+e+f \\ g & h & g+h+i \end{vmatrix}$

B

En los problemas del 16 al 21, realice las operaciones que se indican, dadas las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

16. $A + D$ **17.** $E + DA$ **18.** $DA - 3E$

19. CD **20.** CB **21.** $AD - BC$

22. Encuentre la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Demuestre que $A^{-1}A = I$.

23. Escriba el sistema

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= k_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= k_2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= k_3 \end{aligned}$$

como una ecuación matricial, y resuelva mediante la inversa determinada en el problema 22 para:

(A) $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 3$
(B) $k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = -2$
(C) $k_1 = -3, k_2 = -4, k_3 = 1$

En los problemas 24 y 25 evalúe los determinantes.

24. $\begin{vmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

26. Resuelva sólo para y mediante la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= -6 \\ y - z &= 4 \\ 2x + 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

(Encuentre primero el numerador y el denominador; después simplifique.)

27. Analice el número de soluciones para un sistema de n ecuaciones en n variables si la matriz de coeficientes:

(A) Tiene una inversa. (B) No tiene una inversa.

28. Si A es una matriz cuadrada diferente de cero de orden n que satisface $A^2 = 0$, ¿puede existir A^{-1}? Explique.

C

29. Para las matrices A y C, $n \times n$, y matrices columna B y X, $n \times 1$, despeje X suponiendo que existan todas las inversas necesarias:

$$AX - B = CX.$$

30. Encuentre la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Demuestre que $A^{-1}A = I$.

31. Elimine los decimales en el sistema

$$\begin{aligned} 0.04x_1 + 0.05x_2 + 0.06x_3 &= 360 \\ 0.04x_1 - 0.05x_2 - 0.06x_3 &= 120 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 7\,000 \end{aligned}$$

multiplicando las dos primeras ecuaciones por 100. Después escriba el sistema resultante como una ecuación matricial y resuelva mediante la inversa determinada en el problema 30.

32. $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = ?$

33. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} u & v \\ w & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u + kv & v \\ w + kx & x \end{vmatrix}$$

34. Explique por qué los puntos $(1, 2)$ y $(-1, 5)$ deben satisfacer la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Describa el conjunto de todos los puntos que satisfagan esta ecuación.

APLICACIONES



35. Asignación de recursos. Una compañía minera de Colorado opera minas en las localidades de Big Bend y Saw Pit. De la mina de Big Bend se extrae mineral que tiene 5% de níquel y 7% de cobre. De la de Saw Pit se extrae mineral que tiene 3% de níquel y 4% de cobre. ¿Cuántas toneladas de mineral se deben extraer de cada mina para obtener las cantidades de níquel y cobre de las listas en la tabla? Establezca una ecuación matricial y resuélvala mediante matrices inversas.

	Níquel	Cobre
(A)	3.6 ton	5 ton
(B)	3 ton	4.1 ton
(C)	3.2 ton	4.4 ton

36. Costos por mano de obra. Una compañía con fábricas en el norte y sur de Carolina requiere de la mano de obra y salarios por hora que se indican en las matrices L y H para producir computadoras de escritorio e impresoras:

Requerimientos de mano de obra por hora (columnas: Departamento de fabricación, Departamento de ensamble, Departamento de empaque; renglones: Escritorio, Impresora)

$$L = \begin{bmatrix} 1.7\text{ h} & 2.4\text{ h} & 0.8\text{ h} \\ 0.9\text{ h} & 1.8\text{ h} & 0.6\text{ h} \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Escritorio} \\ \text{Impresora} \end{matrix}$$

Salarios por hora (columnas: Planta de Carolina del Norte, Planta de Carolina del Sur; renglones: Departamento de fabricación, Departamento de ensamble, Departamento de empaque)

$$H = \begin{bmatrix} \$11.50 & \$10.00 \\ \$9.50 & \$8.50 \\ \$5.00 & \$4.50 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Departamento de fabricación} \\ \text{Departamento de ensamble} \\ \text{Departamento de empaque} \end{matrix}$$

(A) Encuentre el costo de mano de obra para producir una impresora en la fábrica de Carolina del Sur.

(B) Analice las posibles interpretaciones de los elementos en la matriz de productos HL y LH.

(C) Si cualquiera de los productos HL o LH tiene una interpretación significativa, encuentre el producto y marque sus renglones y columnas.

37. Costos por mano de obra. La producción mensual de computadoras de escritorio e impresoras de la compañía en el problema 36 en los meses de enero y febrero están dadas en las matrices J y F:

Producción de enero (columnas: Planta de Carolina del Norte, Planta de Carolina del Sur)

$$J = \begin{bmatrix} 1\,500 & 1\,650 \\ 850 & 700 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Escritorios} \\ \text{Impresoras} \end{matrix}$$

Producción de febrero (columnas: Planta de Carolina del Norte, Planta de Carolina del Sur)

$$F = \begin{bmatrix} 1\,700 & 1\,810 \\ 930 & 740 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Escritorios} \\ \text{Impresoras} \end{matrix}$$

(A) Encuentre la producción promedio mensual para los meses de enero y febrero.

(B) Encuentre el aumento en producción de enero a febrero.

(C) Encuentre $J\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e interprete.

38. Criptografía. El mensaje siguiente fue codificado con la matriz B que se muestra a continuación. Decodifique el mensaje:

25 8 26 24 25 33 21 41 48 41 30 50
21 32 41 52 52 79

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio de repaso acumulativo de los capítulos 8 y 9

Al trabajar con los problemas de este repaso revise y compruebe sus respuestas con las que se dan al final del libro. Se incluyen todas las respuestas a los problemas de repaso, seguidas por un número en tipo itálico que indica la sección a la cual pertenece el problema que se está analizando. Si se le presentan dudas repase las secciones correspondientes en el texto.

A

1. Resuelva usando sustitución o eliminación por suma:

$$3x - 5y = 11$$
$$2x + 3y = 1$$

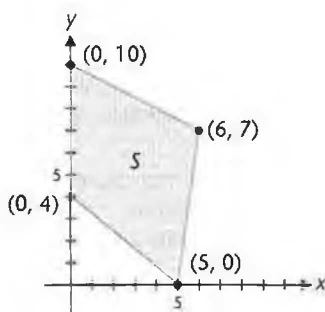
2. Resuelva mediante graficación: $2x - y = -4$
$3x + y = -1$

3. Resuelva mediante sustitución o eliminación por suma:

$$x^2 + y^2 = 2$$
$$2x - y = 1$$

4. Resuelva mediante graficación: $3x + 5y \leq 15$
$x, y \geq 0$

5. Encuentre el valor máximo y mínimo de $z = 2x + 3y$ sobre la región factible S:



6. Realice las operaciones indicadas, dadas las matrices siguientes:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(A) $M - 2N$ (B) $P + Q$ (C) PQ
(D) MN (E) PN (F) QM

7. Evalúe: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

8. Escriba el sistema lineal correspondiente para cada una de las matrices aumentadas y resuelva:

(A) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{array}\right]$ (B) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(C) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

9. Dado el sistema: $x_1 + x_2 = 3$
$-x_1 + x_2 = 5$

(A) Escriba la matriz aumentada para el sistema.
(B) Transforme la matriz aumentada en forma reducida.
(C) Escriba la solución para el sistema.

10. Dado el sistema: $x_1 - 3x_2 = k_1$
$2x_1 - 5x_2 = k_2$

(A) Escriba el sistema como una ecuación matricial de la forma $AX = B$.
(B) Encuentre la inversa de la matriz de coeficientes A.
(C) Use A^{-1} para encontrar la solución de $k_1 = -2$ y $k_2 = 1$.
(D) Use A^{-1} para encontrar la solución de $k_1 = 1$ y $k_2 = -2$.

11. Dado el sistema: $2x - 3y = 1$
$4x - 5y = 2$

(A) Encuentre el determinante de la matriz de coeficientes.
(B) Resuelva el sistema usando la regla de Cramer.

12. Use eliminación Gauss-Jordan para resolver el sistema

$$x_1 + 3x_2 = 10$$
$$2x_1 - x_2 = -1$$

Después escriba el sistema lineal representado para cada una de las matrices aumentadas en su solución, y resuelva cada uno de esos sistemas en forma gráfica. Analice la relación entre las soluciones de esos sistemas.

13. Use una rutina de intersección en un dispositivo de graficación para aproximar la solución del sistema siguiente con dos cifras decimales:

$$-2x + 3y = 7$$
$$3x + 4y = 18$$

B

Resuelva los problemas del 14 al 16 mediante eliminación Gauss-Jordan.

14. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 4x_2 + 6x_3 &= -1 \\ 6x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= -5 \end{aligned}$

En los problemas 17 y 18, resuelva cada sistema.

17. $\begin{aligned} x^2 - 3xy + 3y^2 &= 1 \\ xy &= 1 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x^2 - 3xy + y^2 &= -1 \\ x^2 - xy &= 0 \end{aligned}$

19. Dada $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $N = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encuentre:
(A) MN (B) NM

20. Dadas

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Encuentre, si están definidas: (A) $LM - 2N$ (B) $ML + N$

21. Resuelva de forma gráfica e indique si la región de solución es acotada o no acotada. Encuentre las coordenadas de cada punto esquina.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &\geq 12 \\ x + 2y &\geq 8 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

22. Resuelva el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad z &= 4x + 9y \\ \text{Sujeta a} \quad x + 2y &\leq 14 \\ 2x + y &\leq 16 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

23. Dado el sistema: $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= k_1 \\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= k_2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= k_3 \end{aligned}$

(A) Escriba el sistema como una ecuación matricial en la forma $AX = B$.
(B) Encuentre la inversa de la matriz de coeficientes A.
(C) Use A^{-1} para resolver el sistema cuando $k_1 = -1$, $k_2 = 2$ y $k_3 = 1$.
(D) Use A^{-1} para resolver el sistema cuando $k_1 = 2$, $k_2 = 0$ y $k_3 = -1$.

24. Dado el sistema: $\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \\ 2x + 8y + z &= -2 \\ -x + 3y + 5z &= 2 \end{aligned}$

(A) Evalúe el determinante coeficiente D.
(B) Despeje para z usando la regla de Cramer.

C

25. Use un dispositivo de graficación para aproximar todas las soluciones reales a dos cifras decimales:

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy - y^2 &= 1 \\ 9x^2 + 4xy + y^2 &= 15 \end{aligned}$$

26. Analice el número de soluciones para el sistema correspondiente a la forma reducida que se muestra a continuación si
(A) $m = 0$ y $n = 0$ (B) $m = 0$ y $n \neq 0$
(C) $m \neq 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & m & n \end{array}\right]$$

27. Si una matriz cuadrada A satisface la ecuación $A^2 = A$, encuentre A. Suponga que existe A^{-1}.

28. ¿Cuál de las matrices aumentadas siguientes está en forma reducida?

$$L = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$N = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \quad P = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

29. Demuestre que

$$k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix}$$

30. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + ka & d + kb \end{vmatrix}$$

31. Si $M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ y $\det M \neq 0$, demuestre que

APLICACIONES

32. **Finanzas.** Un inversionista tiene \$12 000 para invertir. Si invierte una parte al 8% y el resto en una inversión de alto riesgo al 14%, ¿cuánto debe de invertir en cada tipo de interés para obtener el mismo rendimiento que habría obtenido si hubiera invertido todo al 10%?

33. Dieta. En un experimento que involucra a ratones, una zoóloga necesita una mezcla de alimentos que contiene, entre otras cosas, 23 gramos de proteína, 6.2 gramos de grasa y 16 gramos de humedad. Dispone de mezclas con las composiciones siguientes: La mezcla A contiene 20% de proteína, 2% de grasa y 15% de humedad; la mezcla B contiene 10% de proteína, 6% de grasa y 10% de humedad; y la mezcla C contiene 15% de proteína, 5% de grasa y 5% de humedad. ¿Cuántos gramos de cada mezcla se deberán usar para obtener la mezcla de dieta deseada?

34. Compras. Un distribuidor de refrescos tiene un presupuesto de $300 000 para comprar 12 camiones nuevos. Si un modelo A de camión cuesta $18 000, un modelo B, $22 000 y un modelo C, $30 000, ¿cuántos camiones de cada modelo deberá comprar el distribuidor para usar de manera exacta los fondos de su presupuesto?

35. Geometría. Encuentre las dimensiones de un rectángulo con un perímetro de 24 metros y un área de 32 metros cuadrados.

36. Fabricación. Un fabricante elabora dos modelos de bolsas de mano, uno estándar y uno de lujo. Cada modelo estándar necesita 0.5 horas de mano de obra del departamento de fabricación y 0.3 horas del departamento de cosido. Cada modelo de lujo emplea 0.5 horas de mano de obra del departamento de fabricación y 0.6 horas del departamento de cosido. El número de horas de mano de obra máximo disponible por semana en el departamento de fabricación y cosido es de 300 y 240, respectivamente.

(A) Si la ganancia en una bolsa de mano estándar es $8 y la ganancia en una de lujo es $12, ¿cuántas bolsas de cada tipo se deben fabricar cada día para obtener la máxima ganancia? ¿Cuál es la máxima utilidad?

(B) Analice el efecto en la planeación de la producción y la máxima utilidad si ésta disminuye $3 por cada bolsa de mano estándar y aumenta $3 por cada bolsa de mano de lujo.

(C) Analice el efecto en la planeación de la producción y la máxima ganancia si ésta aumenta a $3 en una bolsa de mano estándar y disminuye $3 por cada bolsa de mano de lujo.

37. Promedios de exámenes. Un maestro aplica cuatro exámenes a una clase de cinco estudiantes y registra los resultados en la matriz siguiente:

	Exámenes 1	2	3	4
Ana	78	84	81	86
Roberto	91	65	84	92
Carolina	95	90	92	91
Daniel	75	82	87	91
Ernesto	83	88	81	76

$= M$

Analice los métodos de la multiplicación matricial que puede usar el maestro para obtener la información indicada en los incisos (A) a (C). Establezca las matrices que se van a usar en cada caso y después realice las multiplicaciones necesarias.

(A) El promedio de los cuatro exámenes para cada estudiante, suponiendo que los cuatro exámenes tienen igual valor.

(B) El promedio de los cuatro exámenes para cada estudiante, suponiendo que los tres primeros tienen el mismo valor y el cuarto vale el doble de cada uno de éstos.

(C) El promedio de la clase en cada uno de los tres exámenes.

CAPÍTULO 10

SUCESIONES Y SERIES

$f(x)=|3x+4|+1$

Si alguien le pidiera hacer una lista de todos los números naturales que son perfectos cuadrados, tendría que empezar por escribir.

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36$$

Pero usted pronto se daría cuenta de que es imposible enumerar todos los cuadrados perfectos, ya que hay un número infinito. No obstante, esta colección de números se puede representar en muchas formas diferentes. Un método común es escribir

$$1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots \qquad n \in N$$

donde N es el conjunto de números naturales. Una lista de números como ésta se llama generalmente *sucesión*. En este capítulo se estudian las sucesiones y los temas relacionados con ellas. Uno de estos temas que implican un método de prueba al que se ha hecho referencia varias veces con anterioridad en este libro es la *inducción matemática*. Este método nos capacita para probar conjeturas que implican conjuntos infinitos de enteros sucesivos.

SECCIÓN 10-1 Sucesiones y series



- Sucesiones
- Series

En esta sección se introduce la notación y fórmulas especiales para representar y generar sucesiones y sumas de sucesiones.

Sucesiones

Considere la función f dada por

$$f(n) = 2n - 1 \tag{1}$$

donde el dominio de f es el conjunto de números naturales N. Observe que

$$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 5, \ldots$$

La función f es un ejemplo de sucesión. Una **sucesión** es una función cuyo dominio es un conjunto de enteros sucesivos. Sin embargo, a veces es difícil representar una sucesión en la forma de la ecuación (1). En seguida se describe una notación especial para las sucesiones que se ha desarrollado.

Para empezar, los valores del rango $f(n)$ generalmente se simbolizan de manera más compacta mediante un símbolo como a_n. Así, en lugar de la ecuación (1) se escribe

$$a_n = 2n - 1$$

El dominio de una función se entiende como el conjunto de los números naturales N a menos que se exprese lo contrario o el contexto indique otra cosa. Los elementos en el

rango son llamados **términos de la sucesión**: a_1 es el primer término, a_2 el segundo término, y a_n el $n$ésimo término, o **término general**:

$$
\begin{aligned}
a \ &= 2(\ \ ) - 1 = 1 && \text{Primer término}\\
a \ &= 2(\ \ ) - 1 = 3 && \text{Segundo término}\\
a \ &= 2(\ \ ) - 1 = 5 && \text{Tercer término}\\
&\vdots \qquad\quad \vdots
\end{aligned}
$$

La lista ordenada de elementos

$$1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots$$

en la cual los términos de una sucesión se escriben en su orden natural con respecto de los valores del dominio, a menudo es llamada informalmente sucesión. Una sucesión se representa también por la forma abreviada $\{a_n\}$, donde el símbolo para el $n$ésimo término se coloca entre las llaves. Por ejemplo, se puede hacer referencia a la sucesión

$$1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots$$

como la sucesión $\{2n - 1\}$.

Si el dominio de una función es un conjunto finito de enteros sucesivos, entonces la sucesión se llama **sucesión finita**. Si el dominio es un conjunto infinito de enteros sucesivos, entonces la sucesión anterior se llama una **sucesión infinita**. La sucesión $\{2n - 1\}$ anterior es un ejemplo de sucesión infinita.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 La sucesión $\{2n - 1\}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de números naturales, y se puede graficar de la misma manera que cualquier función cuyo dominio y rango sean conjuntos de números reales (véase la figura 1).

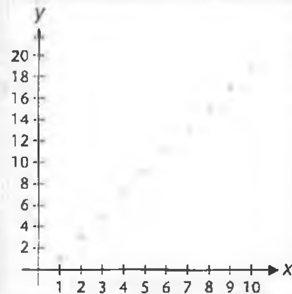


FIGURA 1 Gráfica de $\{2n - 1\}$.

(A) Explique por qué la gráfica de la sucesión $\{2n - 1\}$ no es continua.

(B) Explique por qué los puntos de la gráfica de $\{2n - 1\}$ están en una recta. Encuentre una ecuación para esta recta.

(C) Grafique la sucesión $\left\{\dfrac{2n^2 - n + 1}{n}\right\}$. ¿Cómo se relacionan las gráficas de $\{2n - 1\}$ y $\left\{\dfrac{2n^2 - n + 1}{n}\right\}$?

Algunas sucesiones se especifican por una **fórmula de recurrencia** (es decir, una fórmula que define cada término en términos de uno o más términos anteriores). La sucesión que se eligió para ilustrar una fórmula de recurrencia es una sucesión muy famosa en la historia de las matemáticas conocidas como **sucesión de Fibonacci**. la cual recibió ese nombre en honor del matemático más célebre del siglo XIII. Leonardo Fibonacci de Italia (1180?-1250?).

EJEMPLO 1

La sucesión de Fibonacci

Haga una lista de los primeros seis términos de la sucesión especificada por

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad n \geq 3$$

Solución

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ a_3 &= a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2 \\ a_4 &= a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3 \\ a_5 &= a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5 \\ a_6 &= a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8 \end{aligned}$$

La fórmula $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ es una fórmula de recurrencia que se puede usar para generar los términos de una sucesión en los términos anteriores. Por supuesto. al iniciar es necesario proporcionar los términos a_1 y a_2 ordenados para usar la fórmula. Las fórmulas de recurrencia son particularmente adecuadas para usarse con computadoras y calculadoras (véanse los problemas 57 y 58 del ejercicio 10-1).

Problema seleccionado 1

Enumere los primeros cinco términos de la sucesión especificada por

$$a_1 = 4$$
$$a_n = \tfrac{1}{2}a_{n-1} \qquad n \geq 2$$

Ahora se considera el problema inverso. Esto es. ¿se puede definir una sucesión con sólo enumerar los primeros tres o cuatro términos de la sucesión? ¿Y se pueden usar estos términos iniciales para encontrar la fórmula para el $n$ésimo término? En general, sin otra información, la respuesta a la primera pregunta es no. Muchas sucesiones diferentes pueden comenzar con los mismos términos. Por ejemplo, cada una de las siguientes sucesiones comienza con los mismos tres términos:

$$1, 3, 9, \ldots, 3^{n-1}, \ldots$$
$$1, 3, 9, \ldots, 1 + 2(n-1)^2, \ldots$$
$$1, 3, 9, \ldots, 8n + \frac{12}{n} - 19, \ldots$$

Sin embargo, éstas son ciertamente sucesiones diferentes. Es necesario verificar que estas sucesiones concuerdan para los primeros tres términos y difieren en el cuarto evaluando el término general para cada sucesión en $n = 1, 2, 3, 4$. En consecuencia, la sola enumeración de los tres primeros términos, o cualquier otro número finito de términos, no especifica una sucesión particular, de hecho, se puede mostrar que dada cualquier lista de m números, hay un número infinito de sucesiones cuyos primeros m términos concuerdan con estos números dados. Ahora bien, en cuanto a la segunda pregunta que plantea ¿si dados unos cuantos términos se puede encontrar la fórmula general para que al menos todos los primeros términos de una sucesión concuerden con los términos dados? La respuesta a esta pregunta es un calificado sí. Si se puede observar un modelo sencillo en los términos dados, entonces se puede construir un término general que reproduzca el modelo. El siguiente ejemplo ilustra este procedimiento.

EJEMPLO 2

Determinación del término general de una sucesión

Encuentre el término general de una sucesión cuyos primeros cuatro términos son:

(A) 5, 6, 7, 8, . . . (B) 2, −4, 8, −16, . . .

Soluciones

(A) Ya que estos términos son enteros consecutivos, una solución es $a_n = n, n \geq 5$. Si se quiere que el dominio de la sucesión sean todos los números naturales, entonces otra solución es $b_n = n + 4$.

(B) Cada uno de estos términos se puede escribir como el producto de una potencia de 2 y de una potencia de -1:

$$2 = (-1)^0 2^1$$
$$-4 = (-1)^1 2^2$$
$$8 = (-1)^2 2^3$$
$$-16 = (-1)^3 2^4$$

Si se elige que el dominio sean todos los números naturales, entonces una solución es

$$a_n = (-1)^{n-1} 2^n$$

Problema seleccionado 2

Encuentre el término general de una sucesión cuyos primeros cuatro términos son:

(A) 2, 4, 6, 8, . . . (B) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

En general, usualmente hay más de una manera de representar el $n$ésimo término de una sucesión dada. Esto se vio en la solución del ejemplo 2(A). Sin embargo, a menos que se exprese lo contrario, se supone que el dominio de la sucesión es el conjunto de números naturales N.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 La sucesión con término general $b_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ está cercanamente relacionada con la sucesión de Fibonacci. Calcule los primeros 20 términos de ambas sucesiones y analice su relación. (Los valores de b_1, b_2 y b_3 se muestran en la figura 2.)

FIGURA 2

```
(1+√(5))/2→A
         1.618033989
√(5)/5*A
         .7236067977
Ans*A
         1.170820393
         1.894427191
```

Series

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ es una sucesión, entonces a la expresión $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ se le llama **serie**. Si la sucesión es finita, la serie correspondiente es una **serie finita**. Si la sucesión es infinita, la serie correspondiente es una **serie infinita**. Por ejemplo

$$1, 2, 4, 8, 16$$ Sucesión finita

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16$$ Serie finita

Esta sección del análisis se restringe a las series finitas.

Las series a menudo se representan en una forma compacta llamada **notación de sumatoria** usando el símbolo $\sum$, el cual es una versión estilizada de la letra griega sigma. Considere los ejemplos siguientes:

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$\sum_{k=3}^{7} b_k = b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7$$

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n$$ Dominio es el conjunto de enteros mayores que o iguales a 0.

Los términos de la derecha se obtienen de la expresión de la izquierda al reemplazar sucesivamente al **índice de sumatoria** con k enteros, se inicia con el primer número indicado abajo de $\sum$ y se termina con el número que aparece arriba de $\sum$. De manera que, por ejemplo, si se da la sucesión

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}$$

la serie correspondiente es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

o, en forma más compacta

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

EJEMPLO 3 **Escritura de los términos de una serie**

Escriba sin la notación de sumatoria: $\sum_{k=1}^{5} \frac{k-1}{k}$

Solución

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{k-1}{k} = \frac{1-1}{1} + \frac{2-1}{2} + \frac{3-1}{3} + \frac{4-1}{4} + \frac{5-1}{5}$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$$

Problema seleccionado 3 Escriba sin la notación de sumatoria: $\sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

Si los términos de una serie son de manera alternada positivos y negativos, ésta se llama **serie alternante**. En el ejemplo 4 se representa una serie de este tipo.

EJEMPLO 4 **Escriba una serie en la notación de sumatoria**

Escriba las siguientes series usando la notación de sumatoria:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

(A) Inicie el índice de sumatoria en $k = 1$.

(B) Inicie el índice de sumatoria en $k = 0$.

Soluciones

(A) $(-1)^{k-1}$ proporciona el signo alternante, y $1/k$ proporciona la otra parte de cada término. Así, se puede escribir

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

que se puede verificar fácilmente.

(B) $(-1)^k$ proporciona el signo alternante, y $1/(k+1)$ proporciona la otra parte de cada término. Por consiguiente, se escribe

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

como se puede verificar.

Problema seleccionado 4 Escriba la siguiente serie usando notación de sumatoria:

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81}$$

(A) Inicie con $k = 1$. (B) Inicie con $k = 0$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 3 (A) Encuentre el número más pequeño de términos de la serie infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

que cuando se sumen, el resultado sea un número mayor que 3.

(B) Encuentre el número más pequeño de términos de la serie infinita

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

que cuando se sumen, se obtenga un número mayor que 0.99. Mayor que 0.999. ¿Puede la suma exceder a 1? Explique.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ **2.** (A) $a_n = 2n$ (B) $a_n = (-1)^{n-1}(\frac{1}{2})^{n-1}$ **3.** $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$

4. (A) $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ (B) $\sum_{k=0}^{4} (-1)^k\left(\frac{2}{3}\right)^k$

EJERCICIO 10-1

A

Escriba los primeros cuatro términos para cada sucesión en los problemas del 1 al 6

1. $a_n = n - 2$

2. $a_n = n + 3$

3. $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

4. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

5. $a_n = (-2)^{n+1}$

6. $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

7. Escriba el octavo término de la sucesión del problema 1.

8. Escriba el décimo término de la sucesión del problema 2.

9. Escriba el centésimo término de la sucesión del problema 3.

10. Escriba el término doscientos de la sucesión del problema 4.

En los problemas del 11 al 16. Escriba cada serie en la forma desarrollada sin notación de sumatoria.

11. $\sum_{k=1}^{5} k$

12. $\sum_{k=1}^{4} k^2$

13. $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{10^k}$

14. $\sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{3}\right)^k$

15. $\sum_{k=1}^{4} (-1)^k$

16. $\sum_{k=1}^{6} (-1)^{k+1} k$

B

Escriba los primeros cinco términos de cada sucesión en los problemas del 17 a 26.

17. $a_n = (-1)^{n+1} n^2$

18. $a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2^n}\right)$

19. $a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

20. $a_n = n[1 - (-1)^n]$

21. $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$

22. $a_n = (-\frac{3}{2})^{n-1}$

23. $a_1 = 7; a_n = a_{n-1} - 4, n \geq 2$

24. $a_1 = a_2 = 1; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n \geq 3$

25. $a_1 = 4; a_n = \frac{1}{4}a_{n-1}, n \geq 2$

26. $a_1 = 2; a_n = 2a_{n-1}, n \geq 2$

En los problemas del 27 al 38, encuentre el término general de una sucesión en la cual se dan los primeros cuatro términos.

27. $4, 5, 6, 7, \ldots$

28. $-2, -1, 0, 1, \ldots$

29. $3, 6, 9, 12, \ldots$

30. $-2, -4, -6, -8, \ldots$

31. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

32. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$

33. $1, -1, 1, -1, \ldots$

34. $1, -2, 3, -4, \ldots$

35. $-2, 4, -8, 16, \ldots$

36. $1, -3, 5, -7, \ldots$

37. $x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \ldots$

38. $x, -x^3, x^5, -x^7, \ldots$

Algunos dipositivos de graficación usan rutinas especiales para graficar sucesiones (consulte su manual). En los problemas del 39 al 42, use estas rutinas para graficar los primeros 20 términos de cada sucesión.

39. $a_n = 1/n$

40. $a_n = 2 + \pi n$

41. $a_n = (-0.9)^n$

42. $a_1 = -1, a_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{2}$

En los problemas del 43 al 48, escriba cada serie en forma desarrollada sin notación de sumatoria.

43. $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-2)^{k+1}}{k}$

44. $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1}(2k-1)^2$

45. $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}x^{k+1}$

46. $\sum_{k=1}^{5} x^{k-1}$

47. $\sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$

48. $\sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$

En los problemas del 49 al 56, escriba cada serie usando notación de sumatoria con el índice de sumatoria k iniciando en k = 1.

49. $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$

50. $2 + 3 + 4 + 5 + 6$

51. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5}$

52. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$

53. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

54. $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n}$

55. $1 - 4 + 9 - \cdots + (-1)^{n+1}n^2$

56. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

C

La sucesión

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2 + M}{2a_{n-1}} \qquad n \geq 2.\ M \text{ es un número real positivo}$$

se puede usar para encontrar $\sqrt{M}$ con cualquier cifra decimal con la exactitud deseada. Para comenzar la sucesión, elija a_1 arbitrariamente de los números reales positivos. Los problemas 57 y 58 están relacionados con esta sucesión.

57. (A) Encuentre los primeros cuatro términos de la sucesión

$$a_1 = 3 \qquad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{2a_{n-1}} \qquad n \geq 2$$

(B) Compare los términos con $\sqrt{2}$ por medio de una calculadora.

(C) Repita los incisos (A) y (B) considerando a_1 como cualquier otro número positivo, por ejemplo 1.

58. (A) Encuentre los primeros cuatro términos de la sucesión

(B) Encuentre $\sqrt{5}$ con una calculadora, y compare con los resultados del inciso (A).

(C) Repita los incisos (A) y (B) considerando que a_1 es cualquier otro número positivo, por ejemplo 3.

59. Sea $\{a_n\}$ la notación de la sucesión de Fibonacci y sea $\{b_n\}$ la notación de la sucesión definida por $b_1 = 1, b_2 = 3, b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ para $n \geq 3$. Calcule 10 términos de la sucesión $\{c_n\}$, donde $c_n = b_n/a_n$. Describa los términos de $\{c_n\}$ para valores grandes de n.

60. Defina las sucesiones $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$ por $u_1 = 1, v_1 = 0, u_n = u_{n-1} + v_{n-1}$ y $v_n = u_{n-1}$ para $n \geq 2$. Encuentre los primeros 10 términos de cada sucesión, y explique cómo se relacionan con la sucesión de Fibonacci.

En el cálculo, se puede demostrar que

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

donde la mejor aproximación es para la n más grande. Los problemas 61 y 62 se refieren a estas series. Note que n!, se lee como "n factorial", se define a 0! = 1 y n! = 1 · 2 · 3 · · · · · n para n ∈ N.

61. Aproxime $e^{0.2}$ usando los primeros cinco términos de la serie. Compare esta aproximación con la evaluación de su calculadora de $e^{0.2}$.

62. Aproxime $e^{-0.5}$ usando los primeros cinco términos de las series. Compare esta aproximación con la evaluación de su calculadora de $e^{-0.5}$.

63. Demuestre que: $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$

64. Demuestre que: $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

SECCIÓN 10-2 Inducción matemática

- Introducción
- Inducción matemática
- Ejemplos adicionales de inducción matemática
- Tres problemas famosos

Introducción

En lenguaje cotidiano, la palabra "inducción" significa la generalización de casos o hechos particulares. La habilidad para formular hipótesis generales de un número limitado de hechos es una característica distintiva de un matemático creativo. Sin embargo, el proceso creativo no se detiene aquí. Estas hipótesis deben de ser probadas o refutadas. En matemáticas, un método especial de prueba llamado **inducción matemática** se coloca entre las herramientas básicas más importantes en la caja de herramientas matemáticas. En esta sección la inducción matemática se usará para probar una variedad de expresiones matemáticas, algunas nuevas y algunas que hasta ahora acabamos suponiendo que son verdaderas.

Se ilustra el proceso de formulación de hipótesis mediante un ejemplo. Suponga que le interesa la suma de los primeros enteros impares n consecutivos, donde n es un entero positivo. Se comienza por escribir las sumas para los primeros valores de n para ver si se puede observar un patrón:

$$1 = 1 \qquad n = 1$$
$$1 + 3 = 4 \qquad n = 2$$
$$1 + 3 + 5 = 9 \qquad n = 3$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 \qquad n = 4$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 \qquad n = 5$$

¿Hay algún patrón en las sumas de 1, 4, 9, 16 y 25? Sin duda observó que cada uno es un cuadrado perfecto y, de hecho, cada uno es el cuadrado del número de términos en la suma. De modo que, la siguiente conjetura parece razonable:

Conjetura P_n: Para cada entero positivo n,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Esto es, la suma de los primeros n enteros impares es n^2 para cada entero positivo n.

Hasta ahora la inducción ordinaria se ha usado para generalizar el patrón observado en los primeros pocos casos antes enlistados. Pero en este punto la conjetura P_n es simplemente eso, una conjetura. ¿Cómo se prueba que P_n es una expresión verdadera? Se continúa enlistando casos específicos que nunca proporcionarán una prueba general ¡no sólo en el tiempo que dure su vida, sino en el que dure la vida de todos sus descendientes! La inducción matemática es la herramienta que se usará para establecer la validez de la conjetura P_n.

Antes de analizar este método de prueba, consideremos otra conjetura:

Conjetura Q_n: Para cada entero positivo n, el número $n^2 - n + 41$ es un número primo.

TABLA 1

n	$n^2 - n + 41$	¿Primo?
1	41	Sí
2	43	Sí
3	47	Sí
4	53	Sí
5	61	Sí

Es importante reconocer que se puede comprobar que una conjetura es falsa si falla en sólo un caso. Un solo caso o un ejemplo para el cual una conjetura falla se llama **contraejemplo**. Se comprueba la conjetura para algunos casos particulares en la tabla 1. Por lo que se ve en la tabla, parece que en efecto la probabilidad de que la conjetura Q_n sea verdadera es muy alta. Tal vez desee comprobar algunos casos más. Si persiste en hacerlo encontrará que la conjetura Q_n es verdadera para n hasta 41. ¿Qué pasa en $n = 41$?

$$41^2 - 41 + 41 = 41^2$$

el cual no es primo. Por consiguiente, $n = 41$ proporciona un contraejemplo, la conjetura Q_n es falsa. Aquí se ve el peligro de generalizar sin probar algunos casos especiales. Este ejemplo fue descubierto por Euler (1707-1783).

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Pruebe que la siguiente expresión es falsa dando un contraejemplo: Si $n \geq 2$, entonces por lo menos uno, el tercero de los enteros positivos que es menor o igual a n es primo.

Inducción matemática

Se comienza expresando el *principio de la inducción matemática*, sobre el cual se basa todo el trabajo de esta sección.

Teorema 1 **Principio de la inducción matemática**

Sea P_n un enunciado asociado con cada entero positivo n, y suponiendo que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. P_1 es verdadera.
2. Para algún entero positivo k, si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} también es verdadera.

Entonces la expresión P_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

El teorema 1 debe ser leído muy detenidamente. A primera vista, parece decir que si suponemos que una expresión es verdadera, entonces es verdadera. Pero no siempre es el caso. Si las dos condiciones del teorema 1 se satisfacen, entonces se puede razonar como sigue.

P_1 es verdadera.	Condición 1
P_2 es verdadera, porque P_1 es verdadera.	Condición 2
P_3 es verdadera, porque P_2 es verdadera.	Condición 2
P_4 es verdadera, porque P_3 es verdadera.	Condición 2
⋮	⋮



Condición 1: La primera ficha de dominó puede caer sobre las otras.
(a)



Condición 2: Si la $k$ésima ficha cae, entonces cae la (k + 1) ésima.
(b)



Conclusión: Todas las fichas caerán.
(c)

FIGURA 1 Interpretación de la inducción matemática.

Puesto que esta cadena de implicaciones nunca acaba, se alcanzará eventualmente a P_n para algún entero positivo n.

Para ayudar a representar este proceso, imagínese una fila de fichas de dominó que van una detrás de otra (véase figura 1) e interprete las condiciones del teorema 1 como sigue: La condición 1 dice que la primera ficha se puede empujar sobre. La condición 2 dice que si la ficha $k$ésima cae, entonces caerá la ficha $(k + 1)$ ésima. Juntas, estas dos condiciones implican que todas las fichas deben de caer.

Ahora, para ilustrar el proceso de prueba por inducción matemática, se vuelve a la conjetura P_n analizada anteriormente, la cual se vuelve a exponer en seguida.

$$P_n\colon \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \qquad n \text{ es algún entero positivo}$$

Se sabe ya que P_1 es una expresión verdadera. De hecho, se demuestra que desde P_1 hasta P_5 son todas verdaderas por cálculo directo. En consecuencia, se satisface la condición 1 del teorema 1. Para demostrar que la condición 2 se satisface, se supone que P_k es una expresión verdadera:

$$P_k\colon 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Ahora se debe demostrar que esta suposición implica que P_{k+1} también es una expresión verdadera:

$$P_{k+1}\colon \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

Como se supone que P_k es verdadera, es posible realizar las operaciones de esta ecuación. Observe que el lado izquierdo de P_{k+1} es el lado izquierdo de P_k más $(2k + 1)$. Así que se comienza sumando $(2k + 1)$ a ambos lados de P_k:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2 \qquad P_k$$

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) \qquad \text{Sume } 2k - 1 \text{ a ambos lados.}$$

Al factorizar el lado derecho de esta ecuación, se tiene

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2 \qquad P_k.$$

Pero esta última ecuación es P_{k+1}. Así, se ha comenzado con P_k, se supone que este enunciado es verdadero, y se realizan las operaciones válidas para producir P_{k+1}, el enunciado que se necesita sea verdadero. En otras palabras, se ha mostrado que si P_k es verdadero, entonces P_{k+1} es también verdadero. Puesto que ambas condiciones del teorema 1 se satisfacen, P_n es verdadero para todos los enteros positivos n.

Ejemplos adicionales de inducción matemática

Ahora se van a considerar algunos ejemplos adicionales de prueba por inducción. La primera es otra fórmula de sumatoria. La inducción matemática es la herramienta principal para probar que fórmulas de este tipo son verdaderas.

EJEMPLO 1 Prueba de una fórmula de sumatoria

Pruebe que para todos los enteros positivos n

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Prueba Establezca la conjetura:

$$P_n: \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

Parte 1 Demuestre que P_1 es verdadera.

$$P_1: \quad \frac{1}{2} = \frac{2^1 - 1}{2^1}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Así, P_1 es verdadera.

Parte 2 Demuestre que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera. Es una buena práctica siempre escribir ambas P_k y P_{k+1} al principio de cualquier prueba de inducción para ver qué se supone y qué se debe de probar:

$$P_k: \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^k}$$ Se supone que P_k es verdadera.

$$P_{k+1}: \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$ Se debe demostrar que P_{k+1} se deduce de P_k.

Se comienza con la expresión verdadera P_k, y se le suma $1/2^{k+1}$ a ambos lados, y se simplifica el lado derecho:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} = \frac{2^k - 1}{2^k} \qquad P_k$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^k - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$= \frac{2^k - 1}{2^k} \cdot \frac{2}{2} + \frac{1}{2^{k+1}}$$
$$= \frac{2^{k+1} - 2 + 1}{2^{k+1}}$$
$$= \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}$$

Así,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}} \qquad P_{k+1}$$

y se ha mostrado que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

Conclusión Ambas condiciones del teorema 1 se satisfacen. Así, P_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

Problema seleccionado 1 Pruebe que para todos los enteros positivos n

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

El siguiente ejemplo proporciona una prueba de la ley de los exponentes que previamente se tuvo que suponer como verdadera. Primero se vuelve a definir a^n para un entero positivo n, usando una fórmula de recurrencia:

DEFINICIÓN 1 **Definición de recurrencia de a^n**

Para n un entero positivo

$$a^1 = a$$

$$a^{n+1} = a^n a \qquad n > 1$$

EJEMPLO 2 **Prueba de la ley de los exponentes**

Pruebe que $(xy)^n = x^n y^n$ para todos los enteros positivos n.

Prueba Establezca la conjetura:

$$P_n\text{:} \quad (xy)^n = x^n y^n$$

Parte 1 Demuestre que P_1 es verdadera.

$$(xy)^1 = xy \qquad \text{Definición 1}$$

$$= x^1 y^1 \qquad \text{Definición 1}$$

Así, P_1 es verdadera.

Parte 2 Demuestre que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

$$P_k\text{:} \quad (xy)^k = x^k y^k \qquad \text{Suponga que } P_k \text{ es verdadera.}$$

$$P_{k+1}\text{:} \quad (xy)^{k+1} = x^{k-1} y^{k+1} \qquad \text{Demuestre que } P_{k+1} \text{ se deduce de } P_k.$$

Aquí se comienza con el lado izquierdo de P_{k+1} y se usa P_k para encontrar el lado derecho de P_{k+1}:

$$(xy)^{k+1} = (xy)^k (xy)^1 \qquad \text{Definición 1}$$

$$= x^k y^k xy \qquad \text{Se usa } P_k\text{: } (xy)^k = x^k y^k$$

$$= (x^k x)(y^k y) \qquad \text{Propiedad de los números reales}$$

$$= x^{k+1} y^{k+1} \qquad \text{Definición 1}$$

Así, $(xy)^{k+1} = x^{k+1}y^{k+1}$ y se muestra que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

Conclusión Ambas condiciones del teorema 1 se satisfacen. Así, P_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

Problema seleccionado 2 Pruebe que $(x/y)^n = x^n/y^n$ para todos enteros positivos n.

Nuestro último ejemplo trata con factores de enteros. Antes de comenzar, recuerde que un entero p es *divisible* entre un entero q si $p = qr$ para algún entero r.

EJEMPLO 3 **Prueba de una propiedad de la división**

Pruebe que $4^{2n} - 1$ es divisible entre 5 para todos los enteros positivos n.

Prueba Use la definición de divisibilidad para establecer la conjetura como se indica:

$$P_n: \quad 4^{2n} - 1 = 5r \quad \text{para algún entero } r.$$

Parte 1 Demuestre que P_1 es verdadera.

$$P_1: \quad 4^2 - 1 = 15 = 5 \cdot 3$$

Así, P_1 es verdadera.

Parte 2 Muestre que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

P_k: $4^{2k} - 1 = 5r$ para algún entero r — Suponga que P_k es verdadera.

P_{k+1}: $4^{2(k+1)} - 1 = 5s$ para algunos enteros s — Demuestre que P_{k+1} se puede deducir.

Como antes, se comienza con la expresión verdadera P_k:

$4^{2k} - 1 = 5r$	P_k
$4^2(4^{2k} - 1) = 4^2(5r)$	Multiplique ambos lados por 4^2.
$4^{2k+2} - 16 = 80r$	Simplifique.
$4^{2(k+1)} - 1 = 80r + 15$	Sume 15 a ambos lados.
$= 5(16r + 3)$	Factorice al 5.

Así,

$$4^{2(k+1)} - 1 = 5s \qquad P_{k+1}$$

donde $s = 16r + 3$ es un entero, y se demuestra que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} también lo es.

Conclusión

Ambas condiciones son satisfechas en el teorema 1. Por consiguiente, P_n es verdadera para todos los enteros positivos n.

Problema seleccionado 3

Pruebe que $8^n - 1$ es divisible entre 7 para todos los enteros positivos n.

En algunos casos, una conjetura puede ser verdadera sólo para $n \geq m$, donde m es un entero positivo, más que para todo $n \geq 0$. Por ejemplo, véase los problemas 49 y 50 del ejercicio 10-2. El principio de la inducción matemática se puede extender para cubrir casos similares a éstos como se indica en seguida:

Teorema 2

Principio extendido de la inducción matemática

Sea m un entero positivo, sea P_n un enunciado asociado con cada entero $n \geq m$, y suponga que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. P_m es verdadera.
2. Para cualquier entero $k \geq m$, si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} también es verdadera.

Entonces, la expresión P_n es verdadera para todos los enteros $n \geq m$.

• Tres problemas famosos

El problema de determinar si cierta expresión de los enteros positivos es verdadera puede ser extremadamente difícil. Las pruebas pueden requerir de profundo conocimiento e ingenio notable y del desarrollo de técnicas más avanzadas que la inducción matemática. Considere, por ejemplo, los problemas famosos para probar los enunciados siguientes:

1. **Teorema de Lagrange de los cuatro cuadrados, 1772:** Cada entero positivo se puede expresar como la suma de cuatro o menos cuadrados de enteros positivos.
2. **Último teorema de Fermat, 1637:** Para $n > 2$, $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones en los números naturales.
3. **Conjetura de Goldbach, 1742:** Cada entero par positivo mayor que 2 es la suma de dos números primos.

El primer enunciado fue establecido por los primeros griegos y finalmente probado en 1772 por Lagrange. El último teorema de Fermat desafió a las mejores mentes matemáticas de los últimos 350 años, finalmente sucumbió ante un análisis de 200 páginas realizado por Andrew Wiles de la Universidad de Princeton en 1993. Después de esta fecha nadie ha sido capaz de probar o refutar la conjetura de Goldbach.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2

(A) Explique la diferencia entre un teorema y una conjetura.

(B) ¿Por qué el nombre "el último teorema de Fermat" es inapropiado? Sugiera nombres más exactos para el resultado.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. Bosqueje la prueba. Establezca la conjetura: P_n: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Parte 1. $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$. P_1 es verdadera.

Parte 2. Demuestre que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad P_k$$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \qquad P_{k+1}$$

Conclusión: P_n es verdadera.

2. Bosqueje la prueba. Establezca la conjetura P_n: $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

Parte 1. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^1 = \dfrac{x}{y} = \dfrac{x^1}{y^1}$. P_1 es verdadera.

Parte 2. Demuestre que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{k+1} = \left(\frac{x}{y}\right)^k\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^k}{y^k}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^k x}{y^k y} = \frac{x^{k+1}}{y^{k+1}}$$

Conclusión: P_n es verdadera.

3. Bosqueje la prueba. Establezca la conjetura: P_n: $8^n - 1 = 7r$ para algún entero r.
Parte 1. $8^1 - 1 = 7 = 7 \cdot 1$. P_1 es verdadera.
Parte 2. Demuestre que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

$$8^k - 1 = 7r \qquad P_k$$

$$8(8^k - 1) = 8(7r)$$

$$8^{k+1} - 1 = 56r + 7 = 7(8r + 1) = 7s \qquad P_{k+1}$$

Conclusión: P_n es verdadera.

EJERCICIO 10-2

A

En los problemas del 1 al 4, encuentre el primer entero positivo n para el cual la expresión no se cumple.

1. $(3 + 5)^n = 3^n + 5^n$ **2.** $n < 10$

3. $n^2 = 3n - 2$ **4.** $n^3 + 11n = 6n^2 + 6$

Compruebe cada expresión P_n en los problemas del 5 al 10 para n = 1, 2 y 3.

5. P_n: $2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = 2n^2$

6. P_n: $4 + 8 + 12 + \ldots + 4n = 2n(n + 1)$

7. P_n: $a^5 a^n = a^{5-n}$ **8.** P_n: $(a^5)^n = a^{5n}$

9. P_n: $9^n - 1$ es divisible entre 4

10. P_n: $4^n - 1$ es divisible entre 3

Escriba P_k y P_{k+1} para P_n como se indicó en los problemas del 11 al 16.

11. P_n en el problema 5 **12.** P_n en el problema 6

13. P_n en el problema 7 **14.** P_n en el problema 8

15. P_n en el problema 9 **16.** P_n en el problema 10

En los problemas del 17 al 22, use inducción matemática para probar que cada P_n vale para todos los enteros positivos n.

17. P_n en el problema 5 **18.** P_n en el problema 6

19. P_n en el problema 7 **20.** P_n en el problema 8

21. P_n en el problema 9 **22.** P_n en el problema 10

B

En los problemas del 23 al 26, pruebe que la expresión es falsa encontrando un ejemplo contrario.

23. Si $n > 2$, entonces cualquier polinomio de grado n tiene por lo menos una raíz real.

24. Cualquier entero positivo $n > 7$ se puede escribir como la suma de tres o menos cuadrados de enteros positivos.

25. Si n es un entero positivo, entonces hay por lo menos un número primo p tal que $n < p < n + 6$.

26. Si a, b, c, d son enteros positivos tales que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, entonces $a = c$ o $a = d$.

En los problemas del 27 al 42, use inducción matemática para probar cada expresión para todos los enteros positivos n, a menos que exista otra restricción.

27. $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

28. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

29. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n - 1)^2 = \frac{1}{3}(4n^3 - n)$

30. $1 + 8 + 16 + \cdots + 8(n - 1) = (2n - 1)^2;\ n > 1$

31. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

32. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

33. $\frac{a^n}{a^3} = a^{n-3};\ n > 3$

34. $\frac{a^5}{a^n} = \frac{1}{a^{n-5}};\ n > 5$

35. $a^m a^n = a^{m+n};\ m, n \in N$
[*Sugerencia*: Elija m como un elemento arbitrario de N, y entonces use la inducción en n.]

36. $(a^n)^m = a^{mn};\ m, n \in N$

37. $x^n - 1$ es divisible entre $x - 1$; $x \neq 1$
[*Sugerencia*: Divisible significa que $x^n - 1 = (x - 1)Q(x)$ para algún polinomio $Q(x)$.]

38. $x^n - y^n$ es divisible entre $x - y$; $x \neq y$

39. $x^{2n} - 1$ es divisible entre $x - 1$; $x \neq 1$

40. $x^{2n} - 1$ es divisible entre $x + 1$; $x \neq -1$

41. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$
[*Sugerencia*: Véase el problema seleccionado 1 que se deduce del ejemplo 1.]

42. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n + 1)(n + 2)} = \frac{n(n + 3)}{4(n + 1)(n + 2)}$

C

En los problemas del 43 al 46, sugiera una fórmula para cada expresión, y pruebe su hipótesis usando inducción matemática, $n \in N$.

43. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$

44. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n + 1)}$

45. Del número de rectas determinadas por n puntos en un plano, no hay tres que sean colineales.

46. El número de diagonales en un polígono con n lados.

Pruebe que los problemas del 47 al 50 son verdaderos para todos los enteros n como se especifica.

47. $a > 1 \Rightarrow a^n > 1;\ n \in N$

48. $0 < a < 1 \Rightarrow 0 < a^n < 1;\ n \in N$

49. $n^2 > 2n;\ n \geq 3$

50. $2^n > n^2;\ n \geq 5$

51. Pruebe o refute la generalización de los dos siguientes hechos:

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

52. Pruebe o refute: $n^2 + 21n + 1$ es un número primo para todos los números naturales n.

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son dos sucesiones, se escribe $\{a_n\} = \{b_n\}$ si y sólo si $a_n = b_n$, $n \in N$. En los problemas del 53 al 56, use inducción matemática para demostrar que $\{a_n\} = \{b_n\}$.

53. $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2;\ b_n = 2n - 1$

54. $a_1 = 2, a_n = a_{n-1} + 2;\ b_n = 2n$

55. $a_1 = 2, a_n = 2^2 a_{n-1};\ b_n = 2^{2n-1}$

56. $a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1};\ b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

SECCIÓN 10-3 Sucesiones aritméticas y geométricas



- Sucesiones aritméticas y geométricas
- Fórmulas de términos *n*ésimos
- Fórmulas de suma para series aritméticas finitas
- Fórmulas de suma para series geométricas finitas
- Fórmula de suma para series geométricas infinitas

En la mayoría de las sucesiones es difícil sumar un número arbitrario en términos de la sucesión sin sumar término por término. Pero tipos particulares de sucesiones, *sucesiones aritméticas y sucesiones geométricas*, tienen ciertas propiedades que conducen hacia unas convenientes y útiles fórmulas para las sumas de las *series aritméticas* y *series geométricas* correspondientes.

Sucesiones aritméticas y geométricas

La sucesión 5, 7, 9, 11, 13,..., $5 + 2(n - 1)$,..., donde cada término después del primero se obtiene sumándole 2 al término anterior, es un ejemplo de una sucesión aritmética. La sucesión 5, 10, 20, 40, 80,..., $5(2)^{n-1}$,..., donde cada término después del primero se obtiene al multiplicar el término anterior por 2, es un ejemplo de una sucesión geométrica.

DEFINICIÓN 1 **Sucesión aritmética**

Una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

se llama **sucesión aritmética**, o **progresión aritmética**, si existe una constante d, llamada **diferencia común**, tal que

$$a_n - a_{n-1} = d$$

Esto es,

$$a_n = a_{n-1} + d \qquad \text{para cada } n > 1$$

DEFINICIÓN 2 **Sucesión geométrica**

Una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

se llama **sucesión geométrica**, o **progresión geométrica**, si allí existe una constante diferente de cero r, llamada **razón común**, tal que

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$$

Esto es,

$$a_n = ra_{n-1} \qquad \text{para cada } n > 1$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) Grafique la sucesión aritmética 5, 7, 9, . . .
Describa las gráficas de todas las sucesiones aritméticas con una diferencia común de 2.

(B) Grafique la sucesión geométrica 5, 10, 20, . . .
Describa las gráficas de todas las sucesiones geométricas con una razón común 2.

EJEMPLO 1 **Reconocimiento de sucesiones aritméticas y geométricas**

¿Cuáles de los siguientes números pueden ser los primeros cuatro términos de una sucesión aritmética? ¿Y de una geométrica?

(A) 1, 2, 3, 5, . . . (B) −1, 3, −9, 27, . . .
(C) 3, 3, 3, 3, . . . (D) 10, 8.5, 7, 5.5, . . .

Solución

(A) Puesto que $2 - 1 \neq 5 - 3$, no hay diferencia común, por lo tanto, la sucesión no es aritmética. Puesto que $2/1 \neq 3/2$, no hay razón común, así que la sucesión tampoco es geométrica.

(B) La sucesión es geométrica con una razón común de −3, pero no es aritmética.

(C) La sucesión es aritmética con una diferencia común de 0 y es también geométrica con una razón común de 1.

(D) La sucesión es aritmética con una diferencia común de −1.5, pero no es geométrica.

Problema seleccionado 1

¿Cuáles de los siguientes pueden ser los primeros cuatro términos de una sucesión aritmética? ¿Y de una sucesión geométrica?

(A) 8, 2, 0.5, 0.125, . . .
(B) −7, −2, 3, 8, . . .
(C) 1, 5, 25, 100, . . .

• Fórmulas de términos *n*ésimos

Si $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética con una diferencia común d, entonces

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

Esto sugiere el teorema 1, el cual se puede probar por inducción matemática (véase el problema 63 del ejercicio 10-3).

Teorema 1 **Término *n*ésimo de una sucesión aritmética**

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \quad \text{para cada } n > 1$$

Similarmente, si $\{a_n\}$ es una sucesión geométrica con una razón común r, entonces

$$a_2 = a_1 r$$
$$a_3 = a_2 r = a_1 r^2$$
$$a_4 = a_3 r = a_1 r^3$$

Esto sugiere el teorema 2, el cual se puede probar por inducción matemática (véase el problema 63 del ejercicio 10-3).

Teorema 2 **Término *n*ésimo de una sucesión geométrica**

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \text{para cada } n > 1$$

EJEMPLO 2 **Determinación de términos en sucesiones aritméticas y geométricas**

(A) Si el primero y décimo términos de una sucesión aritmética son 3 y 30, respectivamente, encuentre el quincuagésimo término de la sucesión.

(B) Si el primer y el décimo términos de una sucesión geométrica son 1 y 4, encuentre el diecisieteavo término con tres cifras decimales.

Solución (A) Primero use el teorema 1 con $a_1 = 3$ y $a_{10} = 30$ para encontrar d:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
$$a_{10} = a_1 + (10 - 1)d$$
$$30 = 3 + 9d$$
$$d = 3$$

Ahora encuentre a a_{50}:

$$a_{50} = a_1 + (50 - 1)3$$
$$= 3 + 49 \cdot 3$$
$$= 150$$

(B) Primero sea $n = 10$, $a_1 = 1$, $a_{10} = 4$ y use el teorema 2 para encontrar r.

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$
$$4 = 1 r^{10-1}$$
$$r = 4^{1/9}$$

Vuelva a usar el teorema 2, esta vez con $n = 17$.

$$a_{17} = a_1 r^{17} = 1\,(4^{1/9})^{17} = 4^{17/9} = 13.716$$

Problema seleccionado 2

(A) Si el primero y el quincuagésimo términos de una sucesión aritmética son -5 y 23, respectivamente, encuentre el término setenta y tres de la sucesión.

(B) Encuentre el octavo término de la sucesión geométrica $\frac{1}{64}, -\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \ldots$.

Fórmulas de suma para series aritméticas finitas

Si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ es una sucesión aritmética finita, entonces la serie correspondiente $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, se llama *serie aritmética*. Se deducirán dos fórmulas sencillas y muy útiles para la suma de una serie aritmética. Sea d la diferencia común de la sucesión aritmética $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y sea que S_n denote la suma de la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.

Entonces

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + \cdots + [a_1 + (n - 2)d] + [a_1 + (n - 1)d]$$

Invirtiendo el orden de la suma, se obtiene

$$S_n = [a_1 + (n - 1)d] + [a_1 + (n - 2)d] + \cdots + (a_1 + d) + a_1$$

Sumando los lados izquierdos de estas dos ecuaciones y los elementos correspondientes de los lados derechos, se ve que

$$\begin{aligned} 2S_n &= [2a_1 + (n - 1)d] + [2a_1 + (n - 1)d] + \cdots + [2a_1 + (n - 1)d] \\ &= n[2a_1 + (n - 1)d] \end{aligned}$$

Esto se retoma en el teorema 3:

Teorema 3 **Suma de una serie aritmética, primera forma**

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

Al reemplazar $a_1 + (n - 1)d$ con a_n, se obtiene una segunda útil fórmula para la suma:

Teorema 4 **Suma de una serie aritmética, segunda forma**

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

La prueba de la primera fórmula de la suma por inducción matemática se deja como ejercicio (véase el problema 64 del ejercicio 10-3).

EJEMPLO 3 **Determinación de la suma de una serie aritmética**

Encuentre la suma de los primeros 26 términos de una serie aritmética si el primer término es -7 y $d = 3$.

Solución Sea $n = 26$, $a_1 = -7$, $d = 3$, y use el teorema 3.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_{26} = \tfrac{26}{2}[2(-7) + (26-1)3]$$

$$= 793$$

Problema seleccionado 3 Encuentre la suma de los primeros 52 términos de una serie aritmética si el primer término es 23 y $d = -2$.

EJEMPLO 4 **Determinación de la suma de una serie aritmética**

Encuentre la suma de todos los números impares entre 51 y 99 inclusive.

Solución Primero, use $a_1 = 51$, $a_n = 99$, y el teorema 1 para encontrar n:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$99 = 51 + (n-1)2$$

$$n = 25$$

Ahora use el teorema 4 para encontrar S_{25}:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_{25} = \tfrac{25}{2}(51 + 99)$$

$$= 1\,875$$

Problema seleccionado 4 Encuentre la suma de todos los números pares entre -22 y 52 inclusive.

EJEMPLO 5 **Premio**

Una liga de 16 equipos de boliche tiene \$8 000 para ser concedidos como premio. Si el equipo que quede en último lugar es premiado con \$275 y el premio aumenta la misma cantidad para el siguiente lugar y así sucesivamente, ¿cuánto recibirá el equipo que obtenga el primer lugar?

Solución Si a_1 es el premio para el equipo que llegue al primer lugar, a_2 es el premio para el equipo que obtenga el segundo lugar, y así sucesivamente, entonces la cantidad de dinero premiado forma una sucesión aritmética con $n = 16$, $a_{16} = 275$ y $S_{16} = 8\,000$. Use el teorema 4 para encontrar a_1.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$8\,000 = \tfrac{16}{2}(a_1 + 275)$$

$$a_1 = 725$$

Por consiguiente, el equipo que gane el primer lugar recibe $725.

Problema seleccionado 5

Refiérase al ejemplo 5. ¿Cuánto dinero recibirá como premio el equipo que obtenga el segundo lugar?

• Fórmulas de suma para series geométricas finitas

Si $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ es una sucesión geométrica finita, entonces la serie correspondiente $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + A_n$ se llama *serie geométrica*. Como con la serie aritmética, se pueden deducir dos fórmulas sencillas y muy útiles para la suma de una serie geométrica. Sea r la razón común de la sucesión geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y sea que S_n denote la suma de la serie $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$. Entonces

$$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-2} + a_1r^{n-1}$$

Multiplique ambos lados de esta ecuación por r para obtener

$$rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \cdots + a_1r^{n-1} + a_1r^n$$

Ahora reste el lado izquierdo de la segunda ecuación del lado izquierdo de la primera, y el lado derecho de la segunda ecuación del lado derecho de la primera para obtener

$$S_n - rS_n = a_1 - a_1r^n$$

$$S_n(1 - r) = a_1 - a_1r^n$$

Así, al encontrar S_n, se obtiene la fórmula siguiente para la suma de una serie geométrica:

Teorema 5 **Suma de una serie geométrica, primera forma**

$$S_n = \frac{a_1 - a_1r^n}{1 - r} \qquad r \neq 1$$

Puesto que $a_n = a_1r^{n-1}$ o $ra_n = a_1r^n$ la fórmula de la suma también se puede escribir en la forma siguiente:

Teorema 6 **Suma de una serie geométrica, segunda forma**

$$S_n = \frac{a_1 + ra_n}{1 - r} \qquad r \neq 1$$

La prueba de la primera fórmula de la suma por inducción matemática se deja como ejercicio (véase el problema 70, del ejercicio 10-3).

Si $r = 1$, entonces

$$S_n = a_1 + a_1(1) + a_1(1^2) + \cdots + a_1(1^{n-1}) = na_1$$

EJEMPLO 6 **Determinación de la suma de una serie geométrica**

Encuentre la suma de los primeros 20 términos de una serie geométrica si el primer término es 1 y $r = 2$.

Solución Sea $n = 20$, $a_1 = 1$, $r = 2$, y use el teorema 5.

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

$$= \frac{1 - 1 \cdot 2^{20}}{1 - 2} = 1\,048\,575 \quad \text{Cálculo hecho usando calculadora}$$

Problema seleccionado 6 Encuentre la suma, con dos cifras decimales, de los primeros 14 términos de una serie geométrica si el primer término es $1/64$ y $r = -2$.

• Fórmula de suma para series geométricas infinitas

Considere una serie geométrica con $a_1 = 5$ y $r = 1/2$ ¿Qué le pasa a la suma S_n cuando n aumenta? Para contestar esta pregunta, se escribe primero la fórmula de la suma en la forma más conveniente

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1 r^n}{1 - r} \qquad (1)$$

Para $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{2}$,

$$S_n = 10 - 10\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Así,

$$S_2 = 10 - 10\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$S_4 = 10 - 10\left(\frac{1}{16}\right)$$

$$S_{10} = 10 - 10\left(\frac{1}{1\,024}\right)$$

$$S_{20} = 10 - 10\left(\frac{1}{1\,048\,576}\right)$$

Parece que $(\frac{1}{2})^n$ tiende a ser más y más pequeño cuando n aumenta y cuando la suma se acerca más a 10.

En general, es posible demostrar que si $|r| < 1$ entonces r^n se obtendrá más y más cerca de 0 cuando n aumente. Simbólicamente, $r^n \to 0$ como $n \to \infty$. Así, el término

$$\frac{a_1 r^n}{1 - r}$$

en la ecuación (1) tenderá a 0 conforme n aumente, y S_n tenderá a

$$\frac{a_1}{1 - r}$$

En otras palabras, si $|r| < 1$, entonces S_n puede ser tan cercano a

$$\frac{a_1}{1 - r}$$

como se desee tomando a n suficientemente grande. Así, se define la **suma de una serie geométrica infinita** por la fórmula siguiente:

DEFINICIÓN 3 **Suma de una serie geométrica infinita**

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} \qquad |r| < 1$$

Si $|r| \geq 1$, una serie geométrica infinita no tiene suma.

Expresión de un decimal repetitivo como fracción

Represente el decimal repetitivo $0.454\,545 \cdots = 0.\overline{45}$ como el cociente de dos enteros. Recuerde que un decimal repetitivo se llama número racional y que cualquier número racional se puede representar como el cociente de dos enteros.

Solución

$$0.\overline{45} = 0.45 + 0.0045 + 0.000\,045 + \cdots$$

El lado derecho de la ecuación es una serie geométrica infinita con $a_1 = 0.45$ y $r = 0.01$. En consecuencia,

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0.45}{1 - 0.01} = \frac{0.45}{0.99} = \frac{5}{11}$$

De aquí en adelante, $0.\overline{45}$ y $\frac{5}{11}$ son el mismo número racional. Compruebe el resultado dividiendo 5 entre 11.

Problema seleccionado 7 Repita el ejemplo 7 para $0.818\ 181 \cdots = 0.\overline{81}$

EJEMPLO 8 **Estimulación de la economía**

El gobierno de un estado usa las ganancias de una lotería para proporcionar un reembolso del impuesto para los dueños de propiedades. Suponga que un individuo recibe un reembolso de \$500 y gasta el 80% de éste, y cada una de las personas que reciben el dinero que gasta este individuo gastan también el 80% de lo que él o ella reciben, y este proceso continúa sin fin. Según la **doctrina multiplicativa** en economía, el efecto del reembolso de impuesto original de \$500 en la economía se multiplica muchas veces. ¿Cuál es el total de la cantidad gastada si el proceso continúa como se indicó?

Solución El individuo recibe \$500 y gasta 0.8(500) = \$400. Los destinatarios de estos \$400 gastan 0.8(400) = \$320, los destinatarios de estos \$320 gastan 0.8(320) = \$256, y así sucesivamente. Así, el gasto total generado por el reembolso de \$500 es

$$400 + 320 + 256 + \cdots = 400 + 0.8(400) + (0.8)^2(400) + \cdots$$

lo que se reconoce como una serie geométrica infinita con $a_1 = 400$ y $r = 0.8$. Por consiguiente, la cantidad total gastada es

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{400}{1-0.8} = \frac{400}{0.2} = \$2\,000$$

Problema seleccionado 8 Repita el ejemplo 8 si el reembolso del impuesto es de \$1 000 y el porcentaje gastado por todos los destinatarios es de 90%.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2

(A) Encuentre una serie geométrica infinita con $a_1 = 10$ cuya suma sea 1 000.

(B) Encuentre una serie geométrica infinita con $a_1 = 10$ cuya suma sea 6.

(C) Suponga que una serie geométrica infinita con $a_1 = 10$ tiene una suma. Explique por qué la suma debe ser mayor de 5.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) La sucesión es geométrica con $r = \frac{1}{4}$, pero no aritmética.
   (B) La sucesión es aritmética con $d = 5$, pero no geométrica.
   (C) La sucesión no es aritmética ni geométrica.
2. (A) 139 (B) −2 3. −1 456 4. 570 5. \$695
6. −85.33 7. $\frac{9}{11}$ 8. \$9 000

EJERCICIO 10-3

A

En los problemas 1 y 2, determine si los siguientes pueden ser los primeros tres términos de una sucesión aritmética o geométrica, y, si éste es el caso, encuentre la diferencia común o la razón común y los siguientes dos términos de la sucesión.

1. (A) $-11, -16, -21, \dots$ (B) $2, -4, 8, \dots$
(C) $1, 4, 9, \dots$ (D) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \dots$

2. (A) $5, 20, 100, \dots$ (B) $-5, -5, -5, \dots$
(C) $7, 6.5, 6, \dots$ (D) $512, 256, 128, \dots$

Sea $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ una sucesión aritmética. En los problemas del 3 al 10 encuentre las cantidades indicadas.

3. $a_1 = -5, d = 4; a_2 = ?, a_3 = ?, a_4 = ?$

4. $a_1 = -18, d = 3; a_2 = ?, a_3 = ?, a_4 = ?$

5. $a_1 = -3, d = 5; a_{15} = ?, S_{11} = ?$

6. $a_1 = 3, d = 4; a_{22} = ?, S_{21} = ?$

7. $a_1 = 1, a_2 = 5; S_{21} = ?$

8. $a_1 = 5, a_2 = 11; S_{11} = ?$

9. $a_1 = 7, a_2 = 5; a_{15} = ?$

10. $a_1 = -3, d = -4; a_{10} = ?$

Sea $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ una sucesión geométrica. En los problemas 11 al 16, encuentre cada una de las cantidades indicadas

11. $a_1 = -6, r = -\frac{1}{2}; a_2 = ?, a_3 = ?, a_4 = ?$

12. $a_1 = 12, r = \frac{2}{3}; a_2 = ?, a_3 = ?, a_4 = ?$

13. $a_1 = 81, r = \frac{1}{3}; a_{10} = ?$

14. $a_1 = 64, r = \frac{1}{2}; a_{13} = ?$

15. $a_1 = 3, a_7 = 2{,}187, r = 3; S_7 = ?$

16. $a_1 = 1, a_7 = 729, r = -3; S_7 = ?$

B

Sea $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ una sucesión aritmética. En los problemas del 17 al 24 encuentre las cantidades indicadas.

17. $a_1 = 3, a_{20} = 117; d = ?, a_{101} = ?$

18. $a_1 = 7, a_8 = 28; d = ?, a_{25} = ?$

19. $a_1 = -12, a_{40} = 22; S_{40} = ?$

20. $a_1 = 24, a_{24} = -28; S_{24} = ?$

21. $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{2}; a_{11} = ?, S_{11} = ?$

22. $a_1 = \frac{1}{6}, a_2 = \frac{1}{4}; a_{19} = ?, S_{19} = ?$

23. $a_3 = 13, a_{10} = 55; a_1 = ?$

24. $a_9 = -12, a_{13} = 3; a_1 = ?$

Sea $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ una sucesión geométrica. En los problemas del 25 al 30, encuentre cada una de las cantidades indicadas.

25. $a_1 = 100, a_6 = 1; r = ?$

26. $a_1 = 10, a_{10} = 30; r = ?$

27. $a_1 = 5, r = -2; S_{10} = ?$

28. $a_1 = 3, r = 2; S_{10} = ?$

29. $a_1 = 9, a_4 = \frac{8}{3}; a_2 = ?, a_3 = ?$

30. $a_1 = 12, a_4 = -\frac{4}{9}; a_2 = ?, a_3 = ?$

31. $S_{51} = \sum_{k=1}^{51} (3k + 3) = ?$ **32.** $S_{40} = \sum_{k=1}^{40} (2k - 3) = ?$

33. $S_7 = \sum_{k=1}^{7} (-3)^{k-1} = ?$ **34.** $S_7 = \sum_{k=1}^{7} 3^k = ?$

35. Encuentre $g(1) + g(2) + g(3) + \cdots + g(51)$ si $g(t) = 5 - t$.

36. Encuentre $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20)$ si $f(x) = 2x - 5$.

37. Encuentres $g(1) + g(2) + \cdots + g(10)$ si $g(x) = (\frac{1}{2})^x$.

38. Encuentre $f(1) + f(2) + \cdots + f(10)$ si $f(x) = 2^x$.

39. Encuentre la suma de todos los enteros pares entre 21 y 135.

40. Encuentre la suma de todos los enteros impares entre 100 y 500.

41. Demuestre que la suma de los primeros números naturales impares n es n^2, usando las fórmulas adecuadas para esta sección.

42. Demuestre que la suma de los primeros números naturales de n es $n + n^2$, usando las fórmulas adecuadas de esta sección.

43. Encuentre un número positivo x tal que $-2 + x - 6$ sea una serie geométrica de tres términos.

44. Encuentre un número positivo x tal que $6 + x + 8$ sea una serie geométrica de tres términos.

45. Para una sucesión dada en la cual $a_1 = -3$ y $a_n = a_{n-1} + 3, n > 1$, encuentre a_n en términos de n.

46. Para la sucesión del problema 45, encuentre $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ en términos de n.

En los problemas del 47 al 50, encuentre el menor entero positivo n tal que $a_n < b_n$ graficando las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con un dispositivo de graficación. Compruebe su respuesta usando un dispositivo de graficación para mostrar ambas sucesiones en forma de tabla.

47. $a_n = 5 + 8n, \ b_n = 1.1^n$

48. $a_n = 96 + 47n, \ b_n = 8(1.5)^n$

49. $a_n = 1\,000\,(0.99)^n$, $b_n = 2n + 1$

50. $a_n = 500 - n$, $b_n = 1.05^n$

En los problemas del 51 al 56 encuentre la suma de cada serie geométrica infinita que tiene una suma.

51. $3 + 1 + \frac{1}{3} + \cdots$

52. $16 + 4 + 1 + \cdots$

53. $2 + 4 + 8 + \cdots$

54. $4 + 6 + 9 + \cdots$

55. $2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \cdots$

56. $21 - 3 + \frac{3}{7} - \cdots$

En los problemas del 57 al 62, represente cada decimal repetitivo como el cociente de dos enteros.

57. $0.\overline{7} = 0.7777\cdots$

58. $0.\overline{5} = 0.5555\cdots$

59. $0.\overline{54} = 0.545\,454\cdots$

60. $0.\overline{27} = 0.272\,727\cdots$

61. $3.\overline{216} = 3.216\,216\,216\cdots$

62. $5.\overline{63} = 5.636\,363\cdots$

C

63. Pruebe, usando inducción matemática, que si $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética, entonces

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \qquad \text{para cada } n > 1$$

64. Pruebe, usando inducción matemática, que si $\{a_n\}$ es una sucesión aritmética, entonces

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

65. Si en una sucesión dada, $a_1 = -2$ y $a_n = -3a_{n-1}$, $n > 1$, encuentre a_n en términos de n.

66. Para la sucesión del problema 65, encuentre a $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ en términos de n.

67. Demuestre que $(x^2 + xy + y^2)$, $(z^2 + xz + x^2)$ y $(y^2 + yz + z^2)$ son términos consecutivos de una progresión aritmética si x, y y z forman una progresión aritmética. (De las Olimpiadas de matemáticas de la URSS, 1955-1956, Grado 9.)

68. Tome 121 términos de cada progresión aritmética 2, 7, 12,..., y 2, 5, 8,... ¿Cuántos números habrá en común? (De las Olimpiadas de Matemáticas de la URSS, 1955-1956, Grado 9.)

69. Pruebe, usando inducción matemática, que si $\{a_n\}$ es una sucesión geométrica, entonces

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad n \in N$$

70. Pruebe, usando inducción matemática, que si $\{a_n\}$ es una sucesión geométrica, entonces

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \qquad n \in N, r \neq 1$$

71. Dado el sistema de ecuaciones

$$ax + by = c$$
$$dx + ey = f$$

donde a, b, c, d, e, f es alguna progresión aritmética con una diferencia constante no cero, demuestre que el sistema tiene una solución única.

72. La suma del primer y cuarto términos de una sucesión aritmética es 2, y la suma de sus cuadrados es 20. Encuentre la suma de los primeros ocho términos de la sucesión.

APLICACIONES

73. Negocios. Al examinar diferentes oportunidades de trabajo, usted encuentra que la firma A comenzará pagándole \$25 000 por año pero le garantiza un aumento de \$1 200 cada año mientras la firma B comenzará pagándole \$28 000 por año pero le garantiza un aumento de sólo \$800 cada año. En un periodo de 15 años, ¿cuánto recibiría usted de cada firma?

74. Negocios. En el problema 73, ¿cuál sería su salario anual en cada firma en el décimo año?

75. Economía. El gobierno, a través de programa de subsidio distribuye \$1 000 000. Si se supone que cada individuo o agencia gastan 0.8 de lo que reciben, y 0.8 de esto se gasta, etcétera, ¿cuánto del aumento total del gasto resulta de esta acción del gobierno?

76. Economía. Debido a los impuestos reducidos, un individuo tiene un extra de \$600 en ingresos gastables. Si se supone que el individuo gasta el 70% de éstos en bienes de consumo, y que los productores de estos bienes gastan alternativamente el 70% de lo que reciben en bienes de consumo, y que este proceso continúa en forma indefinida, ¿cuál es la cantidad total gastada en bienes de consumo?

77. Negocios. Si \$$P$ es invertida al r% de interés compuesto anual, la cantidad A presente después de n años forma una progresión geométrica con una razón común de $1 + r$. Escriba una fórmula para la cantidad después de n años. ¿En cuánto tiempo se duplicará una suma de dinero P si se invierte al 6% de interés compuesto anual?

78. Crecimiento demográfico. Si una población de A_0 personas crece a una tasa constante de r% anual, la población después de t años forma una progresión geométrica con una razón común de $1 + r$. Escriba una fórmula para la población total después de t años. Si la población mundial aumenta a una tasa de 2% por año, ¿cuánto tiempo le tomará duplicarse?

79. Finanzas. Hace 11 años una inversión ganó \$7 000 al año. El año pasado la inversión ganó \$14 000. Si los intereses de la inversión han aumentado la misma cantidad cada año, ¿cuál es el aumento anual? y ¿cuántos intereses se han acumulado en la inversión en los últimos 11 años?

80. Temperatura del aire. Cuando el aire seco se mueve hacia arriba, se expande. En ese proceso, se enfría a una tasa de aproximadamente 5°F por cada 1 000 pies que se eleva. Esto se conoce como **proceso adiabático**.

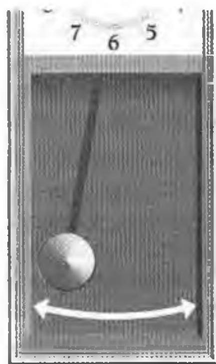
(A) ¿Qué clase de sucesión forman las temperaturas de altitudes que son múltiplos de 1 000 pies?

(B) Si la temperatura del suelo es de 80°F, escriba una fórmula para la temperatura T_n en términos de n, si n está en miles de pies.

81. Ingeniería. Una rueda que intenta llegar al reposo gira 300 revoluciones el primer minuto (véase la figura). Si en cada minuto subsiguiente gira dos tercios de lo que giró en el minuto anterior, ¿cuántas revoluciones hará la rueda antes de llegar al reposo?



82. Física. La primera oscilación de un balancín en un péndulo es de 10 pulgadas. Si en cada oscilación subsecuente se mueve una distancia de 0.9 con relación a la oscilación anterior, ¿Qué distancia oscilará el balancín antes de llegar al reposo?



83. Cadena alimenticia. Una planta es comida por un insecto, un insecto por una trucha, una trucha por un salmón, un salmón por un oso, y el oso es comido por usted. Si sólo 20% de la energía se transforma de una etapa a la otra, ¿cuántas calorías debe contener la planta para que usted obtenga 2 000 calorías al comer la carne del oso?

• **84. Genealogía.** Si existen 30 años en una generación, ¿cuántos antecesores directos tiene cada uno de nosotros desde hace 600 años? Por *antecesores directos*, se entiende a los padres, abuelos, bisabuelos, etcétera.

• **85. Física.** Un objeto que está cayendo del reposo hacia un vacío cerca de la superficie de la Tierra cae 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo, 80 pies durante el tercero, etcétera.

(A) ¿Cuánto caerá el objeto durante el onceavo segundo?

(B) ¿Cuánto caerá el objeto en 11 segundos?

(C) ¿Cuánto caerá el objeto en t segundos?

• **86. Física.** En el problema 85, ¿cuánto caerá el objeto durante:

(A) El doceavo segundo? (B) El $t$ésimo segundo?

• **87. Crecimiento de bacterias.** Una bacteria de cólera simple se divide cada media hora para producir dos bacterias de cólera completas. Si se empieza con una colonia de bacterias A_0, ¿cuántas bacterias se tendrán en t horas, suponiendo que se suministra la comida adecuada?

• **88. División celular.** Una célula de leucemia inyectada a un ratón saludable se dividirá en dos células en aproximadamente medio día. Al finalizar el día estas dos células se dividen otra vez, con el mismo proceso de duplicación continúa cada medio día hasta completar mil millones de células, tiempo en el cual muere el ratón. ¿Qué día después de comenzar el experimento va a ocurrir esto?

** **89. Astronomía.** Desde la época del astrónomo griego Hiparco, siglo II a.C., el brillo de las estrellas se ha medido en términos de magnitud. Las estrellas más brillantes, excluyendo al Sol, se clasifican en la magnitud 1, y las más difíciles de observar son clasificadas en la magnitud 6. En 1856, el astrónomo inglés N. R. Posgon mostró que las estrellas de primera magnitud son 100 veces más brillantes que las de sexta magnitud. Si la razón del brillo entre magnitudes consecutivas es constante, encuentre esta razón. [*Sugerencia*: Si b_n es el brillo de una magnitud $n$ésima, encuentre a r para la progresión geométrica $b_1, b_2, b_3, \ldots$, dado que $b_1 = 100b_6$.]

• **90. Música.** Las notas en un piano se miden en ciclos por segundo, forme una progresión geométrica.

(A) Si A es de 400 ciclos por segundo y A', 12 notas más altas, es de 800 ciclos por segundo, encuentre la razón constante r.

(B) Encuentre los ciclos por segundo de C, tres notas más altas que A.



91. Acertijo. Si se coloca 1¢ en el primer cuadro de un tablero, 2¢ en el segundo cuadro, 4¢ en el tercero, y así continúa duplicándose la cantidad hasta que se ocupan 64 cuadros, ¿cuánto dinero habrá en el cuadro 64? ¿Cuánto dinero habrá en todo el tablero?



*92. **Acertijo.** Si una hoja de papel muy delgado de 0.001 pulgadas de grosor se rompe a la mitad y cada mitad se rompe otra vez a la mitad y el proceso se repite 32 veces, ¿de qué altura será el montón de papel si los pedazos se colocan uno sobre otro? Calcule su respuesta a la milla más cercana.

*93. **Presión atmosférica.** Si la presión atmosférica disminuye bruscamente por un factor de 10 por cada 10 millas de aumento en una altitud de hasta 60 millas, y si la presión es de 15 libras por pulgada cuadrada al nivel del mar, ¿cuál será la presión en una altitud de 40 millas?

94. **Paradoja de Zeno.** Visualice una hipotética pista oval de 440 yardas que tiene cintas estiradas cruzando la pista en el punto medio y en cada punto que marca el punto medio de cada distancia restante después de aquél. Un corredor que corre alrededor de la pista tiene que romper la primera cinta antes que la segunda, la segunda antes de la tercera, etcétera. Desde este punto de vista parece que nunca acabará la carrera. Esta famosa paradoja se atribuye al filósofo griego Zeno, 495-435 a.C. Si se supone que el corredor corre a 440 yardas por minuto, los tiempos entre las rupturas de la cinta forman una progresión geométrica infinita. ¿Cuál es la suma de esta progresión?

95. **Geometría.** Si los puntos medios de los lados de un triángulo equilátero están unidos por líneas rectas, la figura nueva será un triángulo equilátero con un perímetro igual a la mitad del original. Si se comienza con un triángulo equilátero con perímetro 1 y se forma una sucesión de triángulos equiláteros "anidados" procediendo como se describe, ¿cuál será el perímetro total de todos los triángulos que se pueden formar de esta manera?

96. **Fotografía.** El tiempo de exposición y las *f* paradas de una cámara están dados como se indica:

Tiempo de exposición: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \frac{1}{30}, \frac{1}{60}, \frac{1}{125}, \frac{1}{250}, \frac{1}{500}$

f paradas: 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, 22

Éstas están muy cerca de ser progresiones geométricas. Estime sus razones comunes.

97. **Geometría. Se sabe que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Demuestre que las sumas de los ángulos interiores de polígonos con 3, 4, 5, 6, . . . lados forman una sucesión aritmética. Encuentre la suma de los ángulos interiores de un polígono de 21 lados.

SECCIÓN 10-4 Fórmula binomial

- Factorial
- Fórmula binomial

La forma binomial

$$(a + b)^n$$

donde n es un número natural, aparece más frecuentemente de lo que se podría esperar. Los coeficientes en la expansión desempeñan un papel importante en estudios de probabilidad. La *fórmula binomial*, que se deduce a continuación, permite desarrollar $(a + b)^n$ directamente para cualquier número natural n. Puesto que la fórmula implica *factoriales*, se desvía un momento el estudio para introducir este concepto importante.

Factorial

Para n un número natural, ***n* factorial** (se denota por $n!$) es el producto de la primera n en números naturales. El **cero factorial** se define como 1.

DEFINICIÓN 1 ***n* factorial**

Para n un número natural

$$n! = n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$$
$$1! = 1$$
$$0! = 1$$

Esto es también útil para notar que:

Teorema 1 **Fórmula de recurrencia para *n* factorial**

$$n! = n\cdot(n-1)!$$

EJEMPLO 1 **Evaluación de factoriales**

(A) $4! = 4\cdot 3! = 4\cdot 3\cdot 2! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

(B) $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$

(C) $\dfrac{7!}{6!} = \dfrac{7\cdot 6!}{6!} = 7$

(D) $\dfrac{8!}{5!} = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{5!} = 336$

Problema seleccionado 1 Encuentre: (A) $6!$ (B) $\dfrac{6!}{5!}$ (C) $\dfrac{9!}{6!}$

PRECAUCIÓN Cuando las fracciones reducidas impliquen factoriales, no confunda el entero simple n con el símbolo $n!$, el cual representa al producto de n enteros consecutivos.

$$\frac{6!}{3!} \neq 2! \qquad \frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3!}{3!} = 6\cdot 5\cdot 4 = 120$$

Los factoriales se usan en la definición del importante símbolo $\binom{n}{r}$, el cual se usa frecuentemente en estudios de probabilidad, se llama el **símbolo combinatorio** y se define para r y n no negativos, de la manera siguiente:

DEFINICIÓN 2 **Símbolo combinatorio**

Para enteros r y n no negativos, $0 \leq r \leq n$.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot(n-r+1)}{r(r-1)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1}$$

El símbolo combinatorio $\binom{n}{r}$ también puede denotarse por $C_{n,r}$, ${}_nC_r$ o $C(n, r)$ y se lee como "de n se eligen r". Muchas calculadoras usan ${}_nC_r$ para denotar la función que evalúa al símbolo combinatorio.

EJEMPLO 2 **Evaluación del símbolo combinatorio**

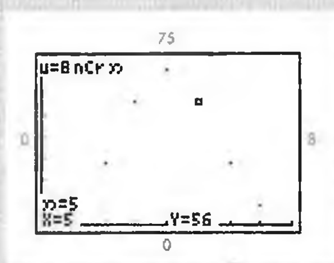
(A) $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 5!} = 56$

(B) $\binom{7}{0} = \frac{7!}{0!(7-0)!} = \frac{7!}{7!} = 1$ Recuerde, $0! = 1$.

Problema seleccionado 2 Encuentre: (A) $\binom{9}{2}$ (B) $\binom{5}{5}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 (A) Calcule los términos de la sucesión finita $\binom{8}{0}, \binom{8}{1}, \binom{8}{2}, \dots, \binom{8}{8}$ (la sucesión está graficada en la figura 1). ¿La sucesión es aritmética? ¿Geométrica? ¿Cuál término es el mayor? ¿El menor? Encuentre la suma de las series correspondientes.

FIGURA 1



(B) Conteste las mismas preguntas para la sucesión finita $\binom{9}{0}, \binom{9}{1}, \binom{9}{2}, \dots, \binom{9}{9}$

Fórmula binomial

Ahora se está listo para tratar de descubrir una fórmula para el desarrollo de $(a + b)^n$ usando la inducción ordinaria; esto es, se verán algunos casos especiales y se postulará una fórmula general de ellos. Después se tratará de probar que la fórmula es válida para todos los números naturales, usando inducción matemática. Para comenzar, se calcula directamente las potencias de los primeros cinco números naturales de $(a + b)^n$, organizando los términos en potencias decrecientes de a:

$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Observaciones

1. La expansión de $(a + b)^n$ tiene $n + 1$ términos.
2. La potencia de a disminuye en 1 para cada término conforme se mueve de izquierda a derecha.
3. La potencia de b aumenta en 1 para cada término conforme se mueve de izquierda a derecha.
4. En cada término, la suma de las potencias de a y b siempre asciende a n.
5. Comenzando con un término dado, se puede obtener el coeficiente del próximo término multiplicando el coeficiente del término dado por el exponente de a y dividiendo entre el número que representa la posición del término en la serie de términos. Por ejemplo, en la expansión de $(a + b)^4$, el coeficiente del tercer término se encuentra en el segundo término multiplicando 4 y 3 y después dividiendo entre 2. Así, el coeficiente del tercer término es $(4 \cdot 3)/2 = 6$.

Ahora se postulan las propiedades para el caso general:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{n-3}b^3 + \cdots + b^n$$

$$= \frac{n!}{0!(n-0)!}a^n + \frac{n!}{1!(n-1)!}a^{n-1}b + \frac{n!}{2!(n-2)!}a^{n-2}b^2 + \frac{n!}{3!(n-3)!}a^{n-3}b^3 + \cdots + \frac{n!}{n!(n-n)!}b^n$$

$$= \binom{n}{0}a_n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n}b^n$$

Así, se ha llegado a la **fórmula binomial** usando la inducción ordinaria:

Teorema 2 **Fórmula binomial**

Para n un entero positivo

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Ahora se procede a probar que la fórmula binomial es válida para todos los números naturales n usando inducción matemática.

Prueba Establezca la conjetura.

$$P_n: \quad (a + b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j$$

Parte 1 Demuestre que P_1 es verdadera.

$$\sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} a^{1-j} b^j = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b = (a + b)^1$$

En consecuencia, P_1 es verdadera.

Parte 2 Demuestre que si P_k es verdadera, entonces P_{k+1} es verdadera.

$$P_k: \quad (a + b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j \qquad \text{Suponga que } P_k \text{ es verdadera.}$$

$$P_{k+1}: \quad (a + b)^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} a^{k+1-j} b^j \qquad \text{Muestre que } P_{k+1} \text{ es verdadera.}$$

Se comienza multiplicando ambos lados de P_k por $(a + b)$:

$$(a + b)^k(a + b) = \left[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} b^j\right](a + b)$$

El lado izquierdo de esta ecuación es el lado izquierdo de P_{k+1}. Ahora se multiplica afuera el lado derecho de la ecuación y se trata de obtener el lado derecho de P_{k+1}:

$$\begin{aligned}
(a + b)^{k+1} &= \left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k}b^k\right](a + b) \\
&= \left[\binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k}ab^k\right] \\
&\quad + \left[\binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}\right] \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]a^k b + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2 + \cdots \\
&\quad + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}
\end{aligned}$$

Ahora se usan los siguientes hechos (las pruebas se dejan como ejercicios; véase los problemas del 55 al 57, del ejercicio 10-4):

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r} \qquad \binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} \qquad \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k-1}$$

para reescribir el lado derecho como

$$\binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots$$
$$+ \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j}a^{k+1-j}b^j$$

Puesto que el lado derecho de la última ecuación es el lado derecho de P_{k-1}, se muestra que P_{k+1} se deduce de P_k.

Conclusión P_n es verdadera. Esto es, la fórmula binomial es válida para todos los enteros positivos n.

EJEMPLO 3 **Uso de la fórmula binomial**

Use la fórmula binomial para desarrollar $(x + y)^6$.

Solución

$$(x+y)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}x^{6-k}y^k$$
$$= \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5y + \binom{6}{2}x^4y^2 + \binom{6}{3}x^3y^3 + \binom{6}{4}x^2y^4 + \binom{6}{5}xy^5 + \binom{6}{6}y^6$$
$$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

Problema seleccionado 3 Use la fórmula binomial para desarrollar $(x + 1)^5$.

EJEMPLO 4 **Uso de la fórmula binomial**

Use la fórmula binomial para desarrollar $(3p - 2q)^4$.

Solución

$$(3p - 2q)^4 = [(3p) + (-2q)]^4 \qquad a = 3p,\ b = -2q$$
$$= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}(3p)^{4-k}(-2q)^k$$
$$= \binom{4}{0}(3p)^4 + \binom{4}{1}(3p)^3(-2q) + \binom{4}{2}(3p)^2(-2q)^2$$
$$+ \binom{4}{3}(3p)(-2q)^3 + \binom{4}{4}(-2q)^4$$
$$= 81p^4 - 216p^3q + 216p^2q^2 - 96pq^3 + 16q^4$$

Problema seleccionado 4 Use la fórmula binomial para desarrollar $(2m - 5n)^3$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 (A) Calcule cada término y también la suma de las series alternantes.

$$\binom{6}{0} - \binom{6}{1} + \binom{6}{2} - \cdots + \binom{6}{6}.$$

(B) ¿Qué resultado de las series alternantes se puede deducir para $a = 1$ y $b = -1$ en la fórmula binomial?

EJEMPLO 5 **Uso de la fórmula binomial**

Use la fórmula binomial para encontrar el cuarto y decimosexto término en el desarrollo de $(x - 2)^{20}$.

Solución En el desarrollo de $(a + b)^n$ el exponente de b en el $r$ésimo término es $r - 1$ y el exponente de a es $n - (r - 1)$. Así que,

Cuarto término:

$$\binom{20}{3}x^{17}(-2)^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1}x^{17}(-8) = -9\,120x^{17}$$

Decimosexto término:

$$\binom{20}{15}x^5(-2)^{15} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}x^5(-32\,768) = 508\,035\,072x^5$$

Problema seleccionado 5 Use la fórmula binomial para encontrar el quinto y decimosegundo términos en el desarrollo de $(u - 1)^{18}$.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) 720 (B) 6 (C) 504 **2.** (A) 36 (B) 1
3. $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ **4.** $8m^3 - 60m^2n + 150mn^2 - 125n^3$
5. $3\,060u^{14}$; $-31\,824u^7$

EJERCICIO 10-4

A

Evalúe cada expresión en los problemas del 1 al 12.

1. $6!$ **2.** $4!$ **3.** $\frac{20!}{19!}$

4. $\frac{5!}{4!}$ **5.** $\frac{10!}{7!}$ **6.** $\frac{9!}{6!}$

7. $\frac{6!}{4!2!}$ **8.** $\frac{5!}{2!3!}$ **9.** $\frac{9!}{0!(9-0)!}$

10. $\dfrac{8!}{8!(8-8)!}$ 11. $\dfrac{8!}{2!(8-2)!}$ 12. $\dfrac{7!}{3!(7-3)!}$

Escriba cada expresión en los problemas del 13 al 16 como el cociente de dos factoriales.

13. 9
14. 12
15. $6 \cdot 7 \cdot 8$
16. $9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$

B

Evalúe cada expresión en los problemas del 17 al 24.

17. $\binom{9}{5}$ 18. $\binom{5}{2}$ 19. $\binom{6}{5}$

20. $\binom{7}{1}$ 21. $\binom{9}{9}$ 22. $\binom{5}{0}$

23. $\binom{17}{13}$ 24. $\binom{20}{16}$

25. Encuentre el menor entero positivo n tal que $n!$ produzca un error de capacidad (*overflow*) en su calculadora.

26. Encuentre el menor entero positivo n tal que $\binom{2n}{n}$ produzca un error de capacidad en su calculadora.

Desarrolle los problemas del 27 al 38 usando la fórmula binomial.

27. $(m+n)^3$ 28. $(x+2)^3$ 29. $(2x-3y)^3$
30. $(3u+2v)^3$ 31. $(x-2)^4$ 32. $(x-y)^4$
33. $(m+3n)^4$ 34. $(3p-q)^4$ 35. $(2x-y)^5$
36. $(2x-1)^5$ 37. $(m+2n)^6$ 38. $(2x-y)^6$

En los problemas del 39 al 46, encuentre el término indicado en cada desarrollo. no tiene 17° término.

39. $(u+v)^{15}$; [redacted]séptimo término
40. $(a+b)^{12}$; quinto término
41. $(2m+n)^{12}$; onceavo término
42. $(x+2y)^{20}$; tercer término
43. $[(w/2)-2]^{12}$; [redacted]séptimo término
44. $(x-3)^{10}$; cuarto término
45. $(3x-2y)^8$; sexto término
46. $(2p-3q)^7$; cuarto término

En los problemas del 47 al 50, use un dispositivo de graficación para graficar cada sucesión y mostrarla en forma de tabla.

47. Encuentre el número de términos de la sucesión

$$\binom{20}{0}, \binom{20}{1}, \binom{20}{2}, \ldots, \binom{20}{20}$$

que son mayores que la mitad del término más grande.

48. Encuentre el número de términos de la sucesión

$$\binom{40}{0}, \binom{40}{1}, \binom{40}{2}, \ldots, \binom{40}{40}$$

que son mayores que la mitad del término más grande.

49. (A) Encuentre el término más grande de la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ con tres cifras decimales, donde

$$a_k = \binom{10}{k}(0.6)^{10-k}(0.4)^k.$$

(B) De acuerdo con la fórmula binomial, ¿cuál es la suma de la serie $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$?

50. (A) Encuentre el término más grande de la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ con tres cifras decimales, donde

$$a_k = \binom{10}{k}(0.3)^{10-k}(0.7)^k.$$

(B) De acuerdo con la fórmula binomial, ¿cuál es la suma de la serie $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{10}$?

C

51. Evalúe $(1.01)^{10}$ con cuatro cifras decimales, mediante la fórmula binomial. [*Sugerencia*: Sea $1.01 = 1 + 0.01$.]

52. Evalúe $(0.99)^6$ con cuatro cifras decimales, usando la fórmula binomial.

53. Demuestre que: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

54. Demuestre que: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$

55. Demuestre que: $\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$

56. Demuestre que: $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$

57. Demuestre que: $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$

58. Demuestre que $\binom{n}{r}$ está dado por la fórmula de recurrencia

$$\binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r}\binom{n}{r-1}$$

donde $\binom{n}{0} = 1$.

59. Escriba $2^n = (1+1)^n$ y desarrolle, usando la fórmula binomial para obtener

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

60. ¿Puede usted adivinar qué sigue en los siguientes dos renglones del **triángulo de Pascal** que se muestra a la derecha? Compare los números del triángulo con los coeficientes binomiales obtenidos con la fórmula binomial.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

SECCIÓN 10-5 Principio de multiplicación, permutaciones y combinaciones

- Principio de multiplicación
- Permutaciones
- Combinaciones

Ahora se puede desarrollar la forma binomial $(a + b)^n$, en dos pasos: primero. desarrollamos en una suma de 2^n términos, con cada coeficiente 1; segundo, agrupando todos los términos en los cuales b parece tener la misma potencia. se obtiene la suma de los $n + 1$ términos de la fórmula binomial. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(aa + ab + ba + bb) \\ &= aaa + aab + aba + abb + baa + bab + bba + bbb \quad \text{Paso 1} \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{Paso 2}\end{aligned}$$

Considere el término aba del paso 1: La primera a viene del primer factor de $a + b$, la b viene del segundo factor de $a + b$, y la a final viene del tercer factor. Por tanto, $\binom{3}{1} = 3$ el coeficiente de a^2b en el paso 2, es el número de maneras en que se elige a b de exactamente uno de los tres factores de $a + b$ en $(a + b)^3$.

De la misma forma, $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ es el número de maneras de elegir a b de exactamente cinco de los 52 factores de $a + b$ en $(a + b)^{52}$. De manera similar, 2 598 960 es el número de cinco manos de cartas que se pueden elegir de una baraja de 52 cartas usual. En esta sección se estudian técnicas de conteo que están relacionadas con la sucesión $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$, y se desarrollan importantes herramientas de conteo que son la base de la teoría de probabilidad.

Principio de multiplicación

Se inicia con un ejemplo.

EJEMPLO 1 Resultados combinados

Suponga que se lanza una moneda y después se tira un dado (véase figura 1). ¿Cuáles son los posibles resultados combinados?

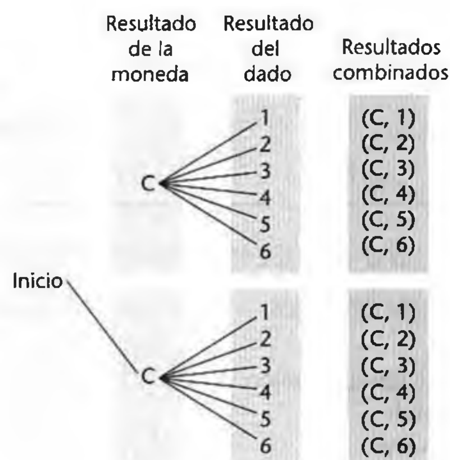
Solución Para resolver este problema, se usa un **diagrama de árbol**:



Resultados de la moneda


Resultados del dado

FIGURA 1 Resultados de monedas y dados.



Por consiguiente, hay 12 posibles resultados combinados (hay dos maneras en las que la moneda puede caer seguida por seis maneras en las cuales el dado puede caer).

Problema seleccionado 1 Use un diagrama de árbol para determinar el número de posibles resultados de un solo lanzamiento de dado seguido por el lanzamiento de una moneda.

Ahora suponga que le preguntan, "de las 26 letras del alfabeto inglés, ¿de cuántas maneras pueden aparecer tres letras en un renglón de una placa de licencia si la letra no se repite?" Intentar contar las posibilidades usando un diagrama de árbol podría ser extremadamente tedioso. El siguiente **principio de multiplicación**, también llamado **principio fundamental de conteo**, nos capacita para resolver este problema fácilmente. Además, éste forma las bases para otras técnicas de conteo que después se desarrollarán en esta sección.

Principio de multiplicación

1. Si dos operaciones O_1 y O_2 se realizan en orden, con N_1 posibles resultados para la primera operación y N_2 posibles resultados para la segunda operación, entonces hay

$$N_1 \cdot N_2$$

posibles resultados combinados de la primera operación seguidas por la segunda.

2. En general, si n operaciones $O_1, O_2, \ldots, O_n$ se realizan en orden, con un posible número de resultados $N_1, N_2, \ldots, N_n$, respectivamente, entonces hay

$$N_1 \cdot N_2 \cdot \cdots \cdot N_n$$

posibles resultados combinados de las operaciones realizadas en el orden dado.

En el ejemplo 1, se ve que hay dos posibles resultados de la primera operación de lanzar una moneda y seis posibles resultados de la segunda operación de lanzar un dado. Así que, por el principio de multiplicación, hay $2 \cdot 6 = 12$ posibles resultados combinados de lanzar una moneda y después un dado. Use el principio de multiplicación para resolver el problema seleccionado 1.

Para responder la pregunta de la licencia de placa, se razona como sigue: Hay 26 maneras de elegir la primera letra. Después de que la primera letra se ha elegido, restan 25 letras; hay 25 maneras de elegir la segunda letra. Y después de que se han elegido dos letras, hay 24 maneras de elegir la tercer letra. Así, usando el principio de multiplicación, hay $26 \cdot 25 \cdot 24 = 15\ 600$ posibles maneras de elegir tres letras del alfabeto, sin que ninguna letra se repita. Pero si no se permite que ninguna se repita, las selecciones anteriores afectan las selecciones siguientes. Si se permite que las letras se repitan, entonces las selecciones anteriores no afectarán las selecciones posteriores, hay 26 posibles maneras de elegir cada una de las tres letras. Así, si se permite que las letras se repitan, hay $26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^3 = 17\ 576$ posibles maneras de elegir tres letras del alfabeto.

EJEMPLO 2 **Pruebas generadas en computadora**

Muchas universidades y colegios están usando en la actualidad procedimientos de prueba asistidos por computadora. Suponga que una pantalla de prueba consiste de cinco preguntas, y una computadora almacena cinco preguntas equivalentes para la primera pregunta de la prueba, ocho preguntas equivalentes para la segunda. seis para la tercera, cinco para la cuarta y 10 para la quinta. ¿Cuántas diferentes pruebas de cinco preguntas puede seleccionar la computadora? Se consideran dos pruebas diferentes si difieren en una o más preguntas.

Solución

O_1: Selección de la primera pregunta	N_1:	5 maneras
O_2: Selección de la segunda pregunta	N_2:	8 maneras
O_3: Selección de la tercera pregunta	N_3:	6 maneras
O_4: Selección de la cuarta pregunta	N_4:	5 maneras
O_5: Selección de la quinta pregunta	N_5:	10 maneras

En consecuencia, la computadora puede generar

$$5 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 10 = 12\ 000 \text{ diferentes pruebas}$$

Problema seleccionado 2 Cada pregunta de una prueba de opción múltiple tiene cinco opciones. Si hay cinco de estas preguntas en una prueba, ¿cuántas hojas de diferentes respuestas son posibles si sólo se marca una opción para cada pregunta?

EJEMPLO 3 **Palabras con código de conteo**

¿Cuántas palabras con código de tres letras se pueden formar usando las ocho primeras letras del alfabeto si:

(A) ninguna letra se puede repetir? (B) las letras se pueden repetir?
(C) las letras adyacentes pueden no ser iguales?

Soluciones (A) Ninguna letra se puede repetir.

O_1: Selección de la primera letra N_1: 8 formas

O_2: Selección de la segunda letra N_2: 7 formas Debido a que ya se ha usado una letra

O_3: Selección de la tercera letra N_3: 6 formas Debido a que ya se han usado dos letras

De manera que hay

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \text{ posibles palabras en código}$$

(B) Las letras se pueden repetir.

O_1: Selección de la primera letra N_1: 8 formas

O_2: Selección de la segunda letra N_2: 8 formas Se permite la repetición.

O_3: Selección de la tercera letra N_3: 8 formas Se permite la repetición.

Por consiguiente, hay

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^3 = 512 \text{ posibles palabras en código}$$

(C) Letras adyacentes no pueden ser iguales.

O_1: Selección de la primera letra N_1: 8 formas

O_2: Selección de la segunda letra N_2: 7 formas No puede ser la misma que la primera.

O_3: Selección de la tercera letra N_3: 7 formas No puede ser la misma que la segunda, pero puede ser la misma que la primera.

De manera que hay

$$8 \cdot 7 \cdot 7 = 392 \text{ posibles palabras en código}$$

Problema seleccionado 3 ¿Cuántas palabras en código de cuatro letras son posibles usando las primeras 10 letras del alfabeto bajo las tres condiciones establecidas en el ejemplo 3?

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 El servicio de correos de un país en desarrollo elige un código postal formado por cinco caracteres por letras (del alfabeto inglés) y por dígitos. Al menos medio millón de códigos postales se pueden generar. ¿Qué formato recomendaría usted para que los códigos se pudieran recordar fácilmente?

El principio de multiplicación se puede usar para desarrollar dos métodos más para el conteo que son muy útiles en problemas de conteo más complicados. Ambos métodos usan la función factorial, la cual se introdujo en la sección 10-4.

• **Permutaciones**

Imagine cuatro pinturas ordenadas de izquierda a derecha en la pared de una galería de arte. ¿Cuántos arreglos son posibles? Usando el principio de multiplicación, hay cuatro maneras de seleccionar la primera pintura. Después de seleccionar la primera pintura hay tres maneras de seleccionar la segunda. Después de seleccionar las dos primeras pinturas, hay dos maneras de seleccionar la tercera. Y después de que las tres primeras pinturas han sido seleccionadas, hay sólo una manera de seleccionar la cuarta. Por lo tanto, el número de arreglos posibles para las cuatro pinturas es

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! \qquad \text{o} \qquad 24$$

En general, se hace referencia a un arreglo en particular, u **ordenamiento**, de n objetos sin repetición como una **permutación** de n objetos. ¿Cuántas permutaciones de n objetos son posibles? Del razonamiento anterior, hay n formas en las que el primer objeto se puede elegir, hay $n - 1$ formas en las cuales el segundo objeto se puede elegir, y así sucesivamente. Aplicando el principio de multiplicación, se tiene el teorema 1:

Teorema 1 **Permutaciones de n objetos**

El número de permutaciones de n objetos, se denota por $P_{n,n}$, está dado por

$$P_{n,n} = n \cdot (n - 1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$$

Ahora suponga que el director de la galería de arte decide usar sólo dos de las cuatro pinturas disponibles en la pared, arregladas de izquierda a derecha. ¿Cuántos arreglos de dos pinturas se pueden formar de las cuatro? Hay cuatro maneras de elegir la primera pintura. Después de que se ha seleccionado la primera pintura, hay tres maneras de elegir la segunda pintura. Así, el número de arreglos de dos de las cuatro pinturas, se denota por $P_{4,2}$, dado por

$$P_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$$

O, en términos de factoriales, multiplicando $4 \cdot 3$ por 1 en la forma $2!/2!$, se tiene

$$P_{4,2} = 4 \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = \frac{4!}{2!}$$

Esta última forma da $P_{4,2}$ en términos de factoriales, lo cual es útil en algunos casos.

Una **permutación de un conjunto de n objetos tomando r al mismo tiempo** es un arreglo de los r objetos en un orden específico. Así, razonando de la misma manera que en el ejemplo anterior se encuentra que el número de permutaciones de n objetos tomando r al mismo tiempo, $0 \le r \le n$, se denota por $P_{n,r}$, está dado por

$$P_{n,r} = n(n - 1)(n - 2) \cdot \cdots \cdot (n - r + 1)$$

Multiplicando el lado derecho de esta ecuación por 1 en la forma $(n - r)!/(n - r)!$, se obtiene una forma factorial para $P_{n,r}$:

$$P_{n,r} = n(n - 1)(n - 2) \cdot \cdots \cdot (n - r + 1)\,\frac{(n - r)!}{(n - r)!}$$

Pero

$$n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)(n-r)! = n!$$

En consecuencia, se tiene el teorema 2:

Teorema 2 **Permutación de *n* objetos tomando *r* a un tiempo**

El número de permutaciones de *n* objetos tomando *r* a un tiempo está dado por

$$P_{n,r} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-r+1)}_{r \text{ factores}}$$

o

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 0 \le r \le n$$

Observe que si $r = n$, entonces el número de permutaciones de *n* objetos tomando *n* a un tiempo es

$$P_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n! \qquad \text{Recuerde, } 0! = 1.$$

lo cual concuerda con el teorema 1, como debe ser.

El símbolo de permutación $P_{n,r}$, *también se puede denotar por*, P^n_r, ${}_nP_r$ o $P(n, r)$. Muchas calculadoras usan ${}_nP_r$, para denotar a la función que evalúa al símbolo de permutación.

EJEMPLO 4 **Selección de funcionarios**

De un comité de ocho personas, ¿cuántas maneras posibles hay de elegir un presidente y un vicepresidente, suponiendo que una persona no puede mantener más de una posición?

Solución Realmente se está preguntando por el número de permutaciones de ocho objetos tomando dos a un tiempo, esto es, $P_{8,2}$:

$$P_{8,2} = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6!}{6!} = 56$$

Problema seleccionado 4 De un comité de 10 personas, ¿cuántas maneras hay de elegir un presidente, un vicepresidente y un secretario, suponiendo que una persona no puede mantener más de una posición?

PRECAUCIÓN Recuerde el uso de la definición de factorial cuando simplifique fracciones que impliquen factoriales.

$$\frac{6!}{3!} \neq 2! \quad \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$$

EJEMPLO 5 **Evaluación de $P_{n,r}$**

Encuentre el número de permutaciones de 25 objetos tomando ocho a un tiempo. Calcule la respuesta con cuatro dígitos significativos usando una calculadora.

Solución

$$P_{25,8} = \frac{25!}{(25-8)!} = \frac{25!}{17!} = 4.361 \times 10^{10} \quad \text{Un número muy grande}$$

Problema seleccionado 5 Encuentre el número de permutaciones de 30 objetos tomando cuatro a un tiempo. Calcule la respuesta exactamente usando una calculadora.

• Combinaciones

Ahora suponga que un museo de arte tiene ocho pinturas de un artista dado y otro museo de arte desea que le presten tres de esas pinturas para una exposición especial. ¿De cuántas maneras se pueden seleccionar las tres pinturas que se van a enviar de las ocho disponibles? Aquí, el orden de los objetos seleccionados no es importante. Lo que ahora realmente interesa es conocer cuántos subconjuntos de tres objetos se pueden formar de un conjunto de ocho objetos. A tales subconjuntos se les llama **combinación** de ocho objetos tomando tres al mismo tiempo. El número total de combinaciones se denota por el simbolo

$$C_{8,3} \quad \text{o} \quad \binom{8}{3}$$

Para encontrar el número de combinaciones de ocho objetos tomando tres al mismo tiempo, $C_{8,3}$, se usa la fórmula para $P_{n,r}$ y el principio de multiplicación. Se sabe que el número de permutaciones de ocho objetos tomando tres al mismo tiempo está dado por $P_{8,3}$ y se tiene una fórmula para calcular esta cantidad. Ahora suponga que se piensa a $P_{8,3}$ en términos de dos operaciones:

O_1: Selección de un subconjunto de tres objetos (pinturas)

N_1: $C_{8,3}$ maneras

O_2: Arreglo de los subconjuntos en un orden dado

N_2: 3! maneras

La operación combinada O_1, seguida de O_2, produce una permutación de ocho objetos tomando tres al mismo tiempo. De tal manera que,

$$P_{8,3} = C_{8,3} \cdot 3!$$

Para encontrar $C_{8,3}$, se reemplaza a $P_{8,3}$ en la ecuación anterior con $8!/(8-3)!$ y se despeja $C_{8,3}$:

$$\frac{8!}{(8-3)!} = C_{8,3} \cdot 3!$$

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 56$$

Por lo tanto, el museo puede seleccionar las tres pinturas de entre las ocho disponibles en 56 diferentes maneras.

Una **combinación de un conjunto de n objetos tomando r al mismo tiempo** es un subconjunto de r elementos de los n objetos. Razonando de la misma manera que en el ejemplo, el número de combinaciones de n objetos tomando r al mismo tiempo $0 \leq r \leq n$, denotado por $C_{n,r}$ se puede obtener al despejar $C_{n,r}$ de la relación

$$P_{n,r} = C_{n,r} \cdot r!$$

$$C_{n,r} = \frac{P_{n,r}}{r!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Teorema 3 **Combinación de n objetos tomando r a un tiempo**

El número de combinaciones de n objetos tomando r a un tiempo está dado por

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad 0 \leq r \leq n$$

Observe que se ha usado la fórmula de combinación en la sección 10-4 para representar los coeficientes binomiales.

Los símbolos de combinación $C_{n,r}$ y $\binom{n}{r}$ también se pueden denotar por C_r^n, ${}_nC_r$ o $C(n, r)$.

EJEMPLO 6 Selección de subcomités

De un comité de ocho personas, ¿de cuántas maneras se puede elegir un subcomité de dos personas?

Solución Observe cómo difiere este ejemplo del ejemplo 4, se quiere saber cuántas maneras hay de elegir un presidente y un vicepresidente de un comité de ocho personas. En el ejemplo 4, el ordenamiento era importante. En la selección de un subcomité de dos personas, el ordenamiento no importa. Así, realmente se está preguntando por el número de combinaciones de ocho objetos tomando dos a la vez. El número está dado por

$$C_{8,2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} = 28$$

Problema seleccionado 6 ¿Cuántos subcomités de tres personas se pueden elegir de un comité de ocho personas?

EJEMPLO 7 **Evaluación de $C_{n,r}$**

Encuentre el número de combinaciones de 25 objetos tomando ocho a la vez. Calcule la respuesta con cuatro dígitos significativos usando calculadora.

Solución

$$C_{25,8} = \binom{25}{8} = \frac{25!}{8!(25-8)!} = \frac{25!}{8!17!} = 1.082 \times 10^6$$

Compare este resultado con el obtenido en el ejemplo 5.

Problema seleccionado 7 Encuentre el número de combinaciones de 30 objetos tomando cuatro a la vez. Calcule la respuesta exactamente usando calculadora.

Recuerde: En una permutación, importa el orden. En una combinación, el orden no importa.

Para determinar si una permutación o combinación es necesaria, observe si al rearreglar la colección o lista se produce una diferencia. Si es así, use permutaciones. Si no, use combinaciones.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Cada una de las siguientes es una selección sin repetición. ¿Podría usted considerar la selección como una combinación? ¿Una permutación? Analice su razonamiento.

(A) Un estudiante saca tres libros de la biblioteca.

(B) Un entrenador de un equipo de béisbol da los nombres de su alineación inicial.

(C) El nuevo presidente electo nombra a los miembros de su gabinete.

(D) El presidente selecciona una delegación de tres miembros de su gabinete para asistir al funeral de un jefe de Estado.

(E) Un director de orquesta elige tres piezas de música para un programa de sinfonía.

Una baraja de 52 cartas tiene cuatro palos: corazones, espadas, diamantes y tréboles, como se muestra en la figura 2. En el ejemplo 8, así como en otros ejemplos y ejercicios de este capítulo, se hará referencia a esta baraja usual.



FIGURA 2 Una baraja usual de cartas.

EJEMPLO 8 **Conteo de manos de cartas**

De una baraja usual de 52 cartas, ¿cuántas manos de cinco cartas tienen tres ases y dos reyes?

Solución

O_1: Selección de tres ases de los cuatro posibles. El orden no es importante.

N_1: $C_{4,3}$

O_2: Selección de dos reyes de los cuatro posibles. El orden no es importante.

N_2: $C_{4,2}$

Usando el principio de multiplicación, se tiene

$$\text{Número de manos} = C_{4,3} \cdot C_{4,2} = 4 \cdot 6 = 24$$

Problema seleccionado 8 De una baraja usual de 52 cartas, ¿cuántas manos de cinco cartas tienen tres corazones y dos espadas?

EJEMPLO 9 **Conteo de números de serie**

Los números de serie para un producto se han formado usando dos letras seguidas de tres números. Si las letras se toman de las ocho primeras letras del alfabeto sin repetición y los números de los 10 dígitos del 0 al 9 sin repetición, ¿cuántos números de serie son posibles?

Solución

O_1: Selección de dos letras de las ocho disponibles El orden es importante.

N_1: $P_{8,2}$

O_2: Selección de tres números de los 10 disponibles El orden es importante.

N_2: $P_{10,3}$

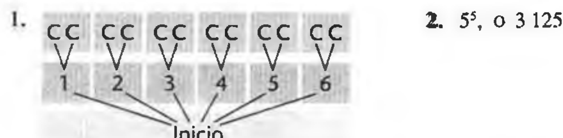
Usando el principio de multiplicación, se tiene

$$\text{Número de números de serie} = P_{8,2} \cdot P_{10,3} = 40\,320$$

Problema seleccionado 9 Repita el ejemplo 9 bajo las mismas condiciones, excepto que los números de serie ahora tienen tres letras seguidas por dos dígitos sin repetición.

Respuestas a los problemas seleccionados

1.



2. 5^5, o 3 125

3. (A) $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$ (B) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$ (C) $10 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 7\,290$

4. $P_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)!} = 720$ 5. $P_{30,4} = \dfrac{30!}{(30-4)!} = 657\,720$ 6. $C_{8,3} = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = 56$

7. $C_{30,4} = \dfrac{30!}{4!(30-4)!} = 27\,405$ 8. $C_{13,3} \cdot C_{13,2} = 22\,308$ 9. $P_{8,3} \cdot P_{10,2} = 30\,240$

EJERCICIO 10-5

A

Evalúe los problemas del 1 al 16.

1. $\dfrac{11!}{8!}$
2. $\dfrac{14!}{12!}$
3. $\dfrac{5!}{2!3!}$
4. $\dfrac{6!}{4!2!}$
5. $\dfrac{7!}{4!(7-4)!}$
6. $\dfrac{8!}{3!(8-3)!}$
7. $\dfrac{7!}{7!(7-7)!}$
8. $\dfrac{8!}{0!(8-0)!}$
9. $P_{5,3}$
10. $P_{4,2}$
11. $P_{52,4}$
12. $P_{52,2}$
13. $C_{5,3}$
14. $C_{4,2}$
15. $C_{52,4}$
16. $C_{52,2}$
17. Un modelo nuevo de automóvil está disponible con cinco opciones de color, tres opciones de transmisión, cuatro tipos de interiores y dos tipos de motor. ¿Cuántas diferentes variaciones de este modelo de automóvil son posibles?
18. Una cafetería vende sándwiches con las siguientes opciones: tres clases de pan, cinco clases de carne y lechuga o col. ¿Cuántos diferentes sándwiches son posibles, suponiendo que se usa un producto de cada categoría?
19. En una carrera en la que participan 10 caballos, ¿cuántas diferentes combinaciones de caballos pueden ocupar los tres primeros lugares? No considere empates.
20. En una carrera de larga distancia, en la que participan 50 personas, ¿cuántas combinaciones se pueden formar con los cinco primeros lugares? Excluya empates.
21. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un subcomité de tres personas de un comité formado por siete personas? ¿De cuántas maneras se puede elegir a un presidente, un vicepresidente y un secretario de un comité formado por siete personas?
22. Suponga nueve cartas que están numeradas con los nueve dígitos del 1 al 9. Se da una mano de tres cartas, una carta cada vez. ¿Cuántas manos son posibles donde:
    (A) Se toma en cuenta el orden?
    (B) No se toma en cuenta el orden?
23. Una liga está formada por 10 equipos. Si cada equipo juega con otro exactamente una vez, ¿cuántos juegos se deben programar?
24. Dados siete puntos, de los cuales tres no están en una línea recta, ¿cuántas rectas se pueden dibujar uniendo dos puntos a la vez?

B

25. ¿Cuántas palabras en código de cuatro letras se pueden formar con las seis primeras letras del alfabeto sin que se repitan letras? ¿Y permitiendo que se repitan letras?

26. ¿Cuántas palabras en código de cinco letras se pueden formar usando las siete primeras letras del alfabeto, sin que se repitan letras? ¿Y permitiendo que las letras se repitan?

27. Un seguro de combinación tiene cinco vueltas cada una marcada con los 10 dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas combinaciones de apertura con cinco números son posibles, suponiendo que los dígitos no se repiten? ¿Y suponiendo que los dígitos se repiten?

28. Un pequeño seguro de combinación de una maleta tiene tres vueltas, cada una marcada con dígitos del 0 al 9. ¿Cuántas combinaciones de tres números son posibles para abrir la maleta, suponiendo que no se repiten los dígitos? ¿Y suponiendo que sí se repiten?

29. De una baraja usual de 52 cartas, ¿cuántas manos de cinco cartas tendrán corazones?

30. De una baraja usual de 52 cartas, ¿cuántas manos de cinco cartas tendrán todas caras? ¿Todas tendrán caras, pero no reyes? Considere que sólo las sotas, las reinas y los reyes son las cartas con cara.

31. ¿Cuántas diferentes placas de licencia son posibles si cada una contiene tres letras seguidas de tres dígitos? ¿Cuántas de estas placas de licencia no contienen letras ni dígitos repetidos?

32. ¿Cuántos códigos de cinco dígitos de teléfono son posibles? ¿Cuántos de estos códigos no tienen dígitos repetidos?

33. De una baraja usual de 52 cartas, ¿cuántas manos de siete cartas tienen exactamente cinco espadas y dos corazones?

34. De una baraja usual de 52 cartas, ¿cuántas manos de cinco cartas tendrán dos tréboles y tres corazones?

35. Un servicio que provee comida ofrece ocho entradas, 10 platos principales y siete postres. Una persona encargada del banquete selecciona tres entradas, cuatro platos principales y dos postres para el banquete. ¿De cuántas maneras se puede hacer éste?

36. Tres departamentos de investigación tienen 12, 15 y 18 miembros, respectivamente. Si cada departamento selecciona un delegado y un suplente para representar al departamento en una conferencia, ¿cuántas maneras hay de hacer esto?

37. (A) Use un dispositivo de graficación para desplegar las sucesiones $P_{10,0}, P_{10,1}, \ldots, P_{10,10}$, y $0!, 1!, \ldots, 10!$ en forma de tabla, y muestre que $P_{10,r} \geq r!$ para $r = 0, 1, \ldots, 10$.
(B) Encuentre los valores de r tales que $P_{10,r} = r!$
(C) Explique por qué $P_{n,r} \geq r!$ cuando $0 \leq r \leq n$.

38. (A) ¿Cómo están relacionadas las sucesiones $\frac{P_{10,0}}{0!}, \frac{P_{10,1}}{1!}, \ldots, \frac{P_{10,10}}{10!}$ y $C_{10,0}, C_{10,1}, \ldots, C_{10,10}$?
(B) Use un dispositivo de graficación para graficar cada sucesión y confirmar la relación del inciso (A).

C

39. Una tienda de artículos deportivos tiene 12 pares de guantes para esquiar de 12 diferentes marcas en un cajón. Todos los guantes son del mismo tamaño. ¿En cuántas diferentes maneras se puede seleccionar un guante izquierdo y uno derecho sin tomar en cuenta la marca?

40. Una tienda de deportes tiene seis pares de tenis para correr de seis diferentes estilos dentro de una canasta. Los zapatos son todos del mismo tamaño. ¿De cuántas maneras se puede elegir un tenis izquierdo y uno derecho sin tomar en cuenta la marca?

41. Se seleccionan ocho puntos distintos en la circunferencia de un círculo.

(A) ¿Cuántas cuerdas se pueden trazar uniendo los puntos en todas las direcciones posibles?
(B) ¿Cuántos triángulos se pueden trazar usando estos ocho puntos como vértices?
(C) ¿Cuántos cuadriláteros se pueden trazar usando estos ocho puntos como vértices?

42. Cinco puntos distintos se seleccionan en la circunferencia de un círculo.

(A) ¿Cuántas cuerdas se pueden trazar uniendo los puntos en todas las formas posibles?
(B) ¿Cuántos triángulos se pueden trazar usando estos cinco puntos como vértices?

43. ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar dos personas en una línea de cinco sillas?, ¿tres personas?, ¿cuatro personas?, ¿cinco personas?

44. Cada uno de dos países manda cinco delegados a una conferencia de negocios. Se usa una mesa rectangular con cinco sillas a lo largo de cada lado. Si a cada país se le asigna todo un lado de la mesa, ¿cuántas formas diferentes de sentarse son posibles? [*Sugerencia:* La operación 1 asigna un lado de la mesa a cada país.]

45. En un equipo de basquetbol hay cinco posiciones distintas. Se cuenta con ocho jugadores, ¿cuántos equipos iniciales son posibles si:

(A) se toman en consideración las distintas posiciones?
(B) no se toman en consideración las distintas posiciones?
(C) no se consideran las distintas posiciones pero Mike o Ken, alguno de los dos, debe empezar, pero no ambos?

46. ¿Cuántos comités de cuatro personas es posible formar de un grupo de nueve personas si:

(A) no hay restricciones?
(B) Juan y Mary deben estar en el comité?
(C) Juan o Mary, pero no ambos, debe estar en el comité?

47. Una mano de cinco cartas se reparte de una baraja usual de 52 cartas. ¿Qué es más probable: que la mano contenga exactamente un rey o que la mano no contenga corazones?

48. Una mano de 10 cartas se reparte de una baraja usual de 52 cartas. ¿Qué es más probable: que todas las cartas en la mano sean rojas o que todas contengan cuatro ases?

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 10 Sucesiones especificadas por fórmulas de recurrencia

La fórmula de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ junto con los valores iniciales $a_1 = 4$, $a_2 = 14$, especifican la sucesión $\{a_n\}$ cuyos primeros diversos términos son 4, 14, 46, 146, 454, 1 394,.... La sucesión $\{a_n\}$ no es ni aritmética ni geométrica. No obstante, ya que satisface una simple fórmula de recurrencia, es posible obtener la fórmula para el *n*ésimo término para $\{a_n\}$ que es similar a las fórmulas de los *n*ésimos términos para sucesiones aritméticas y geométricas. Puesto que la fórmula para el *n*ésimo término es evaluable porque permite estimar un término de una sucesión sin calcular todos los términos anteriores.

Si la sucesión geométrica $\{r^n\}$ satisface la fórmula de recurrencia anterior, entonces $r^n = 5r^{n-1} - 6r^{n-2}$. Al dividirla entre r^{n-2} se obtiene a la ecuación cuadrática $r^2 - 5r + 6 = 0$, cuyas soluciones son $r = 2$ y $r = 3$. Ahora es fácil comprobar que las sucesiones geométricas $\{2^n\} = 2, 4, 8, 16, \ldots$ y $\{3^n\} = 3, 9, 27, 81, \ldots$ satisfacen la fórmula de recurrencia. Por tanto, cualquier sucesión de la forma $\{u2^n + v3^n\}$ donde u y v son constantes, satisface la misma fórmula de recurrencia.

Ahora se encontrarán u y v de modo que los primeros dos términos de $\{u2^n + v3^n\}$ sean $a_1 = 4$, $a_2 = 14$. Haciendo $n = 1$ y $n = 2$ se verá que u y v deben satisfacer el siguiente sistema lineal:

$$2u + 3v = 4$$
$$4u + 9v = 14$$

Resolviendo el sistema $u = -1$, $v = 2$. Por tanto, una fórmula para el *n*ésimo término para la sucesión original es $a_n = (-1)2^n + (2)3^n$.

Observe que la fórmula para el *n*ésimo término se obtuvo por la solución de una ecuación cuadrática y de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables.

(A) Calcule $(-1)2^n + (2)3^n$ para $n = 1, 2, \ldots, 6$ y compare con los términos de $\{a_n\}$.

(B) Estime el término cien de $\{a_n\}$.

(C) Muestre que cualquier sucesión de la forma $\{u2^n + v3^n\}$, donde u y v son constantes, satisfacen la fórmula de recurrencia $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$.

(D) Encuentre una fórmula de *n*ésimo término para la sucesión $\{b_n\}$ que se especifica por $b_1 = 5$, $b_2 = 55$, $b_n = 3b_{n-1} + 4b_{n-2}$.

(E) Encuentre una fórmula de *n*ésimo término para la sucesión de Fibonacci.

(F) Encuentre una fórmula de *n*ésimo término para la sucesión $\{c_n\}$ que se especifica por $c_1 = -3$, $c_2 = 15$, $c_3 = 99$, $c_n = 6c_{n-1} - 3c_{n-2} - 10c_{n-3}$. (Debido a que la fórmula de recurrencia implica los tres términos que preceden a c_n, el método usado implica la solución de una ecuación cúbica y un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables).

Repaso del capítulo 10

10-1 SUCESIONES Y SERIES

Una **sucesión** es una función con el dominio de un conjunto de enteros sucesivos. El símbolo a_n, llamado ***n*-ésimo término**, o **término general**, representa el valor del rango asociado con el valor del dominio n. A menos que se especifique otra cosa, se entiende que el dominio representa el conjunto de números naturales. Una **sucesión finita** tiene un dominio finito, y una **sucesión infinita** tiene un dominio infinito. Una **fórmula de recurrencia** define cada término de una sucesión en términos de uno o más de los términos precedentes. Por ejemplo, la **sucesión de Fibonacci** se define por $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$, donde $a_1 = a_2 = 1$. Si $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ es una sucesión, entonces a la expresión $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ se le da el nombre de una **serie**. Una sucesión finita produce **series finitas**, y una sucesión infinita produce una **serie infinita**. Las series se pueden representar usando notación sumatoria:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

donde k se conoce como **índice de sumatoria**. Si los términos en las series son alternadamente positivos y negativos, la serie se llama **serie alternante**.

10-2 INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Una amplia variedad de postulados se puede probar usando el **principio de inducción matemática**: Sea P_n un postulado asociado con cada entero positivo n y suponiendo que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. P_1 es verdadera.
2. Para cualquier entero positivo k, si P_k es verdadero, entonces P_{k+1} también es verdadero.

Por lo tanto, el postulado P_n es verdadero para todos los enteros positivos n.

Usar la inducción matemática para probar postulados que involucren leyes de los exponentes, es conveniente para establecer una **definición de recurrencia de a^n**:

$$a^1 = a \quad \text{y} \quad a^{n+1} = a^n a \quad \text{para cualquier entero } n > 1$$

Para tratar con conjeturas que pueden ser verdaderas sólo para $n \geq m$, donde m es un entero positivo, se utiliza el **principio extendido de la inducción matemática**: Sea m un entero positivo, sea P_n un postulado asociado con cada entero $n \geq m$, y suponiendo que se satisfacen las siguientes condiciones:

1. P_m es verdadero.
2. Para cualquier entero $k \geq m$, si P_k es verdadero, entonces P_{k+1} también es verdadero.

Entonces el enunciado P_n es verdadero para todos los enteros $n \geq m$.

10-3 SUCESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

Una sucesión se llama **sucesión aritmética**, o **progresión aritmética**, si existe una constante d, llamada **diferencia común**, tal que

$$a_n - a_{n-1} = d \quad \text{o} \quad a_n = a_{n-1} + d$$
$$\text{para cada } n > 1$$

Las siguientes fórmulas se utilizan cuando se trabaja con sucesiones aritméticas y sus series correspondientes:

$a_n = a_1 + (n-1)d$	**Fórmula del *n*ésimo término**
$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	**Fórmula de suma (primera forma)**
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	**Fórmula de suma (segunda forma)**

Una sucesión se llama **sucesión geométrica**, o **progresión geométrica**, si ahí existe una constante diferente de cero r, llamada **razón común**, tal que

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r \quad \text{o} \quad a_n = ra_{n-1} \quad \text{para cada } n > 1$$

Las siguientes fórmulas se usan cuando se trabaja con sucesiones geométricas y sus series correspondientes:

$a_n = a_1 r^{n-1}$		**Fórmula del *n*ésimo término**
$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$	$r \neq 1$	**Fórmula de suma (primera forma)**
$S_n = \frac{a_1 - ra_n}{1 - r}$	$r \neq 1$	**Fórmula de suma (segunda forma)**
$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r}$	$\lvert r \rvert < 1$	**Suma de una serie geométrica infinita**

10-4 FÓRMULA BINOMIAL

Para un número natural n, ***n* factorial** se denota por $n!$, se define por

$$n! = n(n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \qquad 1! = 1 \qquad 0! = 1$$

También, n factorial está dado por la **fórmula de recurrencia**

$$n! = n \cdot (n-1)!$$

Para enteros no negativos r y n, $0 \leq r \leq n$, el **símbolo combinatorio** $\binom{n}{r}$, se define por

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1) \cdot \cdots \cdot (n-r+1)}{r(r-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1}$$

Para un entero positivo n, la **fórmula binomial** es

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

10-5 PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Dada una sucesión de operaciones, a menudo se usan **tres diagramas** para anotar todas las posibles combinaciones de resultados. Para el número de combinaciones de resultados sin enlistarlos en realidad, se usa el **principio de multiplicación**:

1. Si las operaciones O_1 y O_2 se realizan en orden con N_1 posibles resultados para la primera operación y N_2 posibles resultados para la segunda operación, entonces hay

$$N_1 \cdot N_2$$

posibles resultados de la primera operación seguidas por la segunda.

2. En general, si n operaciones $O_1, O_2, \ldots, O_n$ se realizan en orden, con números de posibles resultados $N_1, N_2, \ldots, N_n$, respectivamente, entonces hay

$$N_1 \cdot N_2 \cdot \cdots \cdot N_n$$

posibles resultados combinados de las operaciones realizadas en el orden dado.

Un arreglo particular u ordenamiento de n objetos sin repetición se llama **permutación**. El número de permutaciones de n objetos está dado por

$$P_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$$

y el número de permutaciones de n objetos tomando r a un tiempo está dado por

$$P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} \qquad 0 \le r \le n$$

Una **combinación de un conjunto de n elementos tomando r a la vez** es un subconjunto de r elementos de los n objetos. El número de combinaciones de n objetos tomando r a la vez está dado por

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad 0 \le r \le n$$

En una permutación, el orden es importante. En una combinación, el orden no es importante.

Ejercicio de repaso del capítulo 10

Al resolver los problemas de este capítulo revise y compruebe sus respuestas con las que se dan al final del libro. Ahí están todas las respuestas a los problemas de repaso. Después de cada respuesta hay un número en tipo itálico que indica la sección a la que corresponde el problema que se está analizando. Si se le presentan dudas repase las secciones correspondientes en el texto.

A

1. Determine si cada una de las siguientes sucesiones pueden ser los tres primeros términos de una sucesión geométrica, de una sucesión aritmética, o de ninguna.

(A) $16, -8, 4, \ldots$ (B) $5, 7, 9, \ldots$
(C) $-8, -5, -2, \ldots$ (D) $2, 3, 5, \ldots$
(E) $-1, 2, -4, \ldots$

En los problemas del 2 al 5:
(A) Escriba los primeros cuatro términos de cada sucesión.
(B) Encuentre a_{10}. *(C) Encuentre S_{10}.*

2. $a_n = 2n + 3$ **3.** $a_n = 32(\frac{1}{2})^n$

4. $a_1 = -8;\ a_n = a_{n-1} + 3,\ n \ge 2$

5. $a_1 = -1;\ a_n = (-2)a_{n-1},\ n \ge 2$

6. Encuentre S_∞ en el problema 3.

Evalúe los problemas del 7 al 10.

7. $6!$ **8.** $\dfrac{22!}{19!}$

9. $\dfrac{7!}{2!(7-2)!}$ **10.** $C_{6,2}$ y $P_{6,2}$

11. Se lanza un solo dado y se lanza una moneda. ¿Cuántas combinaciones de resultados pueden ser posibles? Resuelva:

(A) Usando un diagrama de árbol
(B) Usando el principio de multiplicación

12. ¿En cuántas formas es posible sentar a seis personas en una fila de seis sillas? Resuelva mediante el principio de multiplicación.

13. Resuelva el problema 12 usando permutaciones o combinaciones, lo que sea posible.

Compruebe los problemas del 14 al 16 para $n = 1, 2$ y 3.

14. P_n: $5 + 7 + 9 + \cdots + (2n + 3) = n^2 + 4n$

15. P_n: $2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

16. P_n: $49^n - 1$ es divisible entre 6

En los problemas del 17 al 19, escriba P_k y P_{k+1}.

17. Para P_n en el problema 14.

18. Para P_n en el problema 15.

19. Para P_n en el problema 16.

20. Pruebe si el enunciado es verdadero o falso encontrando un contraejemplo: Si n es un entero positivo, entonces la suma de la serie $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ es menor que 4.

B

Escriba los problemas 21 y 22 sin notación de sumatoria, y encuentre la suma

21. $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} (2k - 8)$

22. $S_7 = \sum_{k=1}^{7} \dfrac{16}{2^k}$

23. $S_\infty = 27 - 18 + 12 + \cdots = ?$

24. Escriba

$$S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^n}$$

usando notación de sumatoria, y encuentre S_∞.

25. Seis diferentes puntos se seleccionan sobre la circunferencia de un círculo. ¿Cuántos triángulos se pueden formar usando esos puntos como vértices?

26. En una sucesión aritmética, $a_1 = 13$ y $a_7 = 31$. Encuentre la diferencia común d y el quinto término a_5.

27. ¿Cuántas palabras en códigos de tres letras son posibles usando las primeras ocho letras del alfabeto si ninguna letra se puede repetir? ¿Si las letras se pueden repetir? ¿Si las letras adyacentes no pueden ser iguales?

28. Use la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita para escribir $0.727\,272 \cdots = 0.\overline{72}$ como el cociente de dos enteros.

29. Resuelva los siguientes problemas usando $P_{n,r}$ o $C_{n,r}$, como sea adecuado:

   (A) ¿Cuántas combinaciones de apertura de tres dígitos son posibles en una combinación de candado con seis dígitos si éstos no se pueden repetir?

   (B) Suponga que cinco jugadores de tenis llegaron a las finales. Si cada uno de los cinco jugadores va a jugar contra otro jugador exactamente una vez, ¿cuántos juegos se deben programar?

Evalúe los problemas del 30 al 32.

30. $\dfrac{20!}{18!(20-18)!}$ 31. $\dbinom{16}{12}$ 32. $\dbinom{11}{11}$

33. Desarrolle $(x - y)^5$ usando la fórmula binomial.

34. Encuentre el décimo término en el desarrollo de $(2x - y)^{12}$.

Establezca cada enunciado en los problemas del 35 al 37 para todos los números naturales, mediante inducción matemática.

35. P_n en el problema 14.

36. P_n en el problema 15.

37. P_n en el problema 16.

En los problemas 38 y 39, encuentre el entero positivo más pequeño n tal que $a_n < b_n$ graficando las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con un dispositivo de graficación. Compruebe su respuesta usando un dispositivo de graficación que despliegue ambas sucesiones en forma de tabla.

38. $a_n = C_{50,n}$, $b_n = 3^n$

39. $a_1 = 100$, $a_n = 0.99a_{n-1} + 5$, $b_n = 9 + 7n$

C

40. ¿Cuántas familias diferentes con cinco niños son posibles, con excepción de los nacimientos múltiples, si se toma en cuenta el sexo de cada niño en el orden de su nacimiento? ¿Cuántas familias son posibles si no se toma en cuenta el patrón de orden?

41. Un cuerpo en caída libre recorre $g/2$ pies en el primer segundo, $3g/2$ pies durante el siguiente segundo, $5g/2$ pies el siguiente segundo, y así sucesivamente. Encuentre la distancia de caída durante los 25 segundos y la distancia total de caída desde el inicio hasta el final de los 25 segundos.

42. ¿De cuántas formas se pueden sentar dos personas en una fila con cuatro sillas?

43. Desarrolle $(x + i)^6$, donde i es la unidad imaginaria, usando la fórmula binomial.

44. **Transportación.** Un centro de distribución A desea distribuir sus productos en cinco diferentes tiendas al menudeo, B, C, D, E y F, en una ciudad. ¿Cuántas rutas diferentes se pueden construir de manera que un solo camión pueda empezar a repartir desde A, a cada tienda exactamente una vez, y después regresar al centro?

Pruebe que cada enunciado de los problemas 45 al 49 se cumple para todos los enteros positivos, usando inducción matemática.

45. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$

46. $x^{2n} - y^{2n}$ es divisible entre $x - y$, $x \neq y$

47. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $n > m$, n, m enteros positivos

48. $\{a_n\} = \{b_n\}$, donde $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_1 = -3$, $b_n = -5 + 2n$

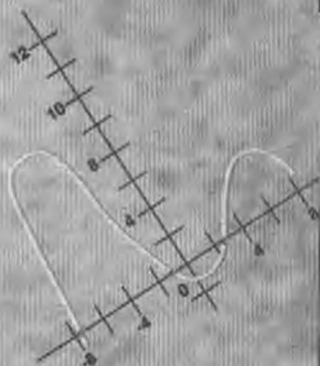
49. $(1!)1 + (2!)2 + (3!)3 + \cdots + (n!)n = (n + 1)! - 1$. (De las Olimpiadas de Matemáticas en la URSS, 1955-1956. Grado 10.)

CAPÍTULO 11

TEMAS ADICIONALES EN GEOMETRÍA ANALÍTICA







$f(x)=|3x + 4| + 1$

La geometría analítica, una unión de la geometría y del álgebra, permite analizar ciertos conceptos geométricos de manera algebraica e interpretar ciertas relaciones algebraicas de manera geométrica. Los dos principales objetivos se centran en la graficación de ecuaciones algebraicas y la determinación de ecuaciones de figuras geométricas útiles. En capítulos anteriores se han analizado diferentes temas de geometría analítica, como rectas y círculos. En este capítulo se analizan otros temas de geometría analítica: secciones cónicas y traslación de ejes.

René Descartes (1596-1650), el filósofo y matemático francés, es generalmente reconocido como el fundador de la geometría analítica.

SECCIÓN 11-1 Secciones cónicas. Parábola

- Secciones cónicas
- Definición de una parábola
- Dibujando una parábola
- Ecuaciones estándar y sus gráficas
- Aplicaciones

En esta sección se introduce el concepto general de sección cónica y después se analiza la sección cónica particular llamada *parábola*. En las dos secciones siguientes se analizarán otras dos secciones cónicas llamadas *elipses* e *hipérbolas.*

• Secciones cónicas

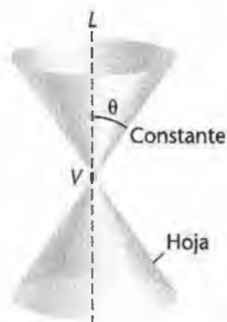
En la sección 2-2 se determinó que la gráfica de una ecuación de primer grado con dos variables,

$$Ax + By = C \tag{1}$$

donde A y B no son cero, es una recta, y que cada recta en un sistema coordenado rectangular tiene una ecuación de esta forma. ¿Qué tipo de gráfica tendrá una ecuación de segundo grado con dos variables,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{2}$$

donde A, B y C no son todas cero, para diferentes conjuntos de valores de los coeficientes? Las gráficas de la ecuación (2) para varias elecciones de los coeficientes son curvas planas que se obtienen al intersectar un cono* con un plano, como lo muestra la figura 1. Estas curvas se denominan **secciones cónicas**.



Si un plano corta de manera completa un cono recto, y el plano es perpendicular al eje y entonces a la curva de intersección se le llama **círculo**; si el plano no es perpendicular al eje se le llama **elipse**. Si un plano corta un solo cono recto, pero no de manera

* Comenzando con una recta fija L y un punto fijo V sobre L, la superficie formada por todas las líneas rectas que pasan por V haciendo un ángulo constante θ con L se llama un **cono circular recto**. La recta fija L se llama el eje del cono y V es su **vértice**. Las dos partes de un cono separadas por el vértice se llaman **hojas**.

FIGURA 1 Secciones cónicas.



completa, entonces a la curva de intersección se le llama **parábola**. Por último, si un plano corta ambos conos rectos, pero no pasa por el vértice, la curva de intersección resultante se llama **hipérbola**. Un plano que pasa por el vértice del cono produce una **cónica degenerada** (un punto, una recta o un par de rectas).

Las secciones cónicas son muy útiles y se identifican fácilmente en su alrededor, algunos ejemplos son (véase figura 2): las ruedas (círculo), la trayectoria descrita por el agua al salir de una manguera (parábola), algunas bandejas para llevar comida (elipses), y la sombra sobre una pared de una luz rodeada por una lámpara de forma cilíndrica o cónica (hipérbola). Se analizarán muchas aplicaciones de cónicas en todo el resto del capítulo.

FIGURA 2 Ejemplos de cónicas.



Rueda (círculo)
(a)



Agua saliendo de una manguera (parábola)
(b)



Charola (elipse)
(c)



Sombra de una lámpara (hipérbola)
(d)

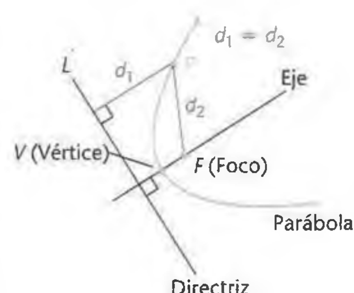
Una definición de una sección cónica que no depende de las coordenadas de los puntos en cualquier sistema coordenado se llama **definición libre de coordenadas**. En la sección 2-1 se dio una definición libre de coordenadas de un círculo y se desarrolló su ecuación estándar en un sistema coordenado rectangular. En ésta y en las dos secciones siguientes se darán las definiciones de parábola, elipse e hipérbola, y se desarrollarán ecuaciones estándar para cada una de esas cónicas en un sistema coordenado rectangular.

Definición de una parábola

La definición siguiente de una parábola no depende de las coordenadas de los puntos en cualquier sistema coordenado:

DEFINICIÓN 1 **Parábola**

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos en un plano equidistante a partir de un punto fijo F y de una recta fija L en el plano. El punto fijo F se denomina **foco**, y la recta fija L se llama **directriz**. Una recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se llama **eje**, y al punto sobre el eje a la mitad entre la directriz y el foco se le llama **vértice**.



Dibujando una parábola

Usando la definición, se puede dibujar una parábola con elementos relativamente simples (una regla, una escuadra de ángulo recto, un pedazo de cuerda, una chincheta y un lápiz). Refiérase a la figura 3, fije la regla a lo largo de la línea AB y coloque la chincheta arriba de la línea AB. Coloque un lado del triángulo a lo largo de la regla como se indica, después tome un pedazo de cuerda de la misma longitud que la del otro lado, ate un extremo a la chincheta, y apriete el otro extremo con cinta en C sobre el triángulo. Ahora presione la cuerda con la orilla del triángulo, y manteniendo la cuerda tensa, deslice el triángulo a lo largo de la regla. Como DE es siempre igual a DF, la curva resultante será parte de una parábola con la directriz AB que se encuentra a lo largo de la regla y con el foco F en la chincheta.

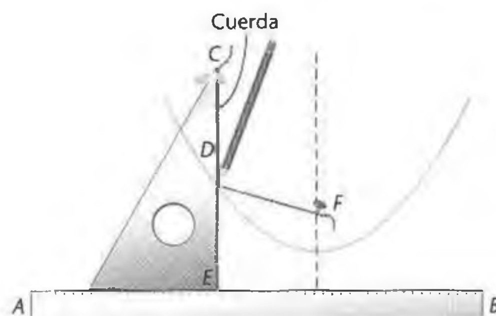


FIGURA 3 Dibujando una parábola.

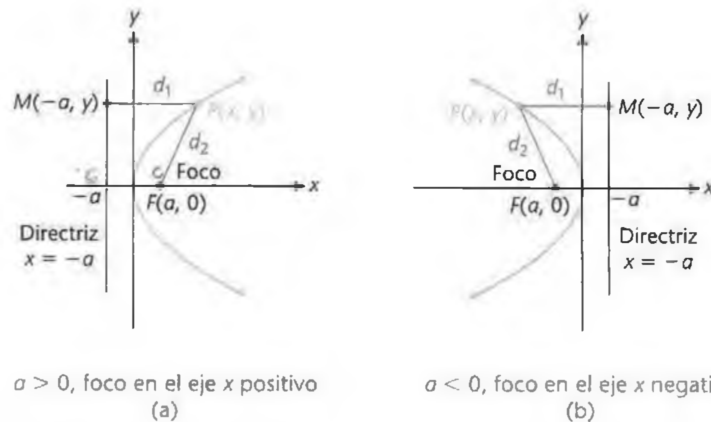
EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 La línea que pasa por el foco F que es perpendicular al eje de una parábola intersecta la parábola en dos puntos, G y H. Explique por qué la distancia de G a H es el doble de la distancia de F a la directriz de la parábola.

Ecuaciones estándar y sus gráficas

Usando la definición de una parábola y la fórmula de la distancia entre dos puntos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{3}$$

FIGURA 4 Parábola con centro en el origen y eje en el eje x.



$a > 0$, foco en el eje x positivo
(a)

$a < 0$, foco en el eje x negativo
(b)

se pueden deducir ecuaciones estándar simples para una parábola localizada en un sistema coordenado rectangular con su vértice en el origen y su eje a lo largo del eje coordenado. Se comienza con el eje de la parábola a lo largo del eje x y el foco en $F(a, 0)$. Se localiza la parábola en un sistema coordenado como en la figura 4 y se marcan líneas guía y puntos. Éste es un paso importante para encontrar una ecuación de una figura geométrica en un sistema coordenado. Note que la parábola se abre a la derecha si $a > 0$ y a la izquierda si $a < 0$. El vértice está en el origen, la directriz es $x = -a$, y las coordenadas de M son $(-a, y)$.

El punto $P(x, y)$ es un punto sobre la parábola si y sólo si

$$d_1 = d_2$$

$$d(P, M) = d(P, F)$$

$$\sqrt{(x + a)^2 + (y - y)^2} = \sqrt{(x - a)^2 + (y - 0)^2} \quad \text{Use la ecuación (3).}$$

$$(x + a)^2 = (x - a)^2 + y^2 \quad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 \quad \text{Simplifique.}$$

$$y^2 = 4ax \qquad (4)$$

La ecuación (4) es la ecuación estándar de una parábola con vértice en el origen, eje el eje x y foco en $(a, 0)$.

Ahora se localiza el vértice en el origen y foco en el eje y en $(0, a)$. Al observar la figura 5 en la página siguiente, se nota que la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$. La directriz es $y = -a$, y las coordenadas de N son $(x, -a)$. El punto $P(x, y)$ es un punto en la parábola si y sólo si

$$d_1 = d_2$$

$$d(P, N) = d(P, F)$$

$$\sqrt{(x - x)^2 + (y + a)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - a)^2} \quad \text{Use la ecuación (3).}$$

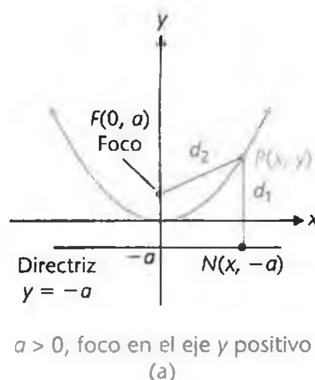
$$(y + a)^2 = x^2 + (y - a)^2 \quad \text{Eleve al cuadrado ambos lados.}$$

$$y^2 + 2ay + a^2 = x^2 + y^2 - 2ay + a^2 \quad \text{Simplifique.}$$

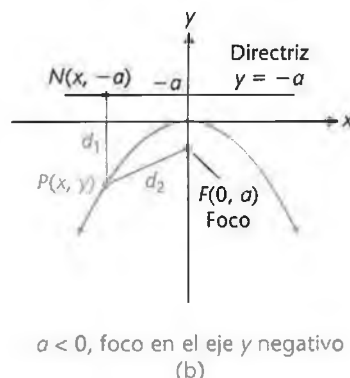
$$x^2 = 4ay \qquad (5)$$

La ecuación (5) es la ecuación estándar de una parábola con vértice en el origen, eje el eje y y foco en $(0, a)$.

FIGURA 5 Parábola con centro en el origen y eje en el eje y.



$a > 0$, foco en el eje y positivo
(a)

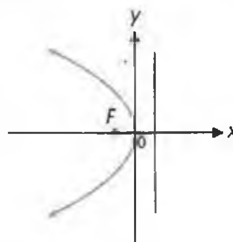


$a < 0$, foco en el eje y negativo
(b)

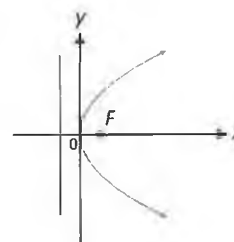
En el teorema 1 se resumen estos resultados para una fácil referencia:

Teorema 1 **Ecuaciones estándar de una parábola con vértice en (0, 0)**

1. $y^2 = 4ax$
   Vértice: (0, 0)
   Foco: $(a, 0)$
   Directriz: $x = -a$
   Simétrica con respecto al eje x
   Eje el eje x

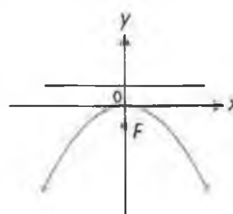


$a < 0$ (abre a la izquierda)

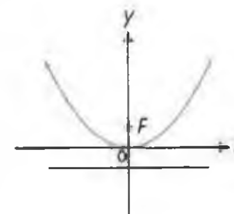


$a > 0$ (abre a la derecha)

2. $x^2 = 4ay$
   Vértice: (0, 0)
   Foco: $(0, a)$
   Directriz: $y = -a$
   Simétrica con respecto al eje y
   Eje el eje y



$a < 0$ (abre hacia abajo)



$a > 0$ (abre hacia arriba)

EJEMPLO 1 **Graficación de $x^2 = 4ay$**

Grafique $x^2 = -16y$, y localice el foco y directriz.

Solución Para graficar $x^2 = -16y$, es conveniente asignar valores a y que hagan del lado derecho un cuadrado perfecto, y despejar a x. Note que y debe ser 0 o negativo para que x sea real. Como el coeficiente de y es negativo, a debe ser negativa, y la parábola abre hacia abajo (figura 6).

x	0	± 4	± 8
y	0	-1	-4

$$\text{Foco:}\quad x^2 = -16y = 4(-4)y$$
$$F(0, a) = F(0, -4)$$
$$\text{Directriz:}\quad y = -a = -(-4) = 4$$

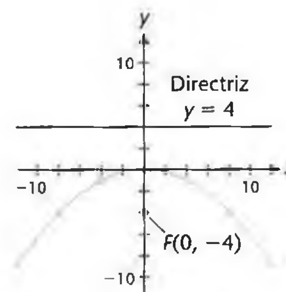
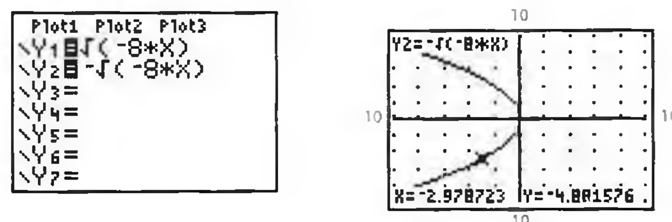


FIGURA 6 $x^2 = -16y$.

Problema seleccionado 1 Grafique $y^2 = -8x$, y localice el foco y directriz.

Comentario. Para graficar la ecuación $x^2 = -16y$ del ejemplo 1 en un dispositivo de graficación, primero se despeja y de la ecuación y después se grafica la función $y = -\frac{1}{16}x^2$. Si se usa el mismo procedimiento para graficar la ecuación $y^2 = -8x$ del problema seleccionado 1, entonces $y = \pm\sqrt{-8x}$, y hay dos funciones por graficar. La gráfica de $y = \sqrt{-8x}$ es la mitad superior de la parábola, y la gráfica de $y = -\sqrt{-8x}$ es la mitad inferior (véase figura 7).

FIGURA 7



PRECAUCIÓN Un error común al realizar un trazo rápido de $y^2 = 4ax$ o $x^2 = 4ay$ es trazar la primera con el eje y como su eje y la segunda con el eje x como su eje. La gráfica de $y^2 = 4ax$ es simétrica con respecto al eje x, y la grafica de $x^2 = 4ay$ es simétrica con respecto al eje y, como lo revelaría una rápida comprobación de simetría.

EJEMPLO 2 **Determinación de la ecuación de una parábola**

(A) Encuentre la ecuación de una parábola que tiene el origen como su vértice, el eje y como su eje y $(-10, -5)$ sobre su gráfica.

(B) Encuentre las coordenadas de su foco y la ecuación de su directriz.

Soluciones

(A) La parábola abre hacia abajo y tiene una ecuación de la forma $x^2 = 4ay$. Como $(-10, -5)$ está sobre la gráfica, se tiene

$$\begin{aligned} x^2 &= 4ay \\ (-10)^2 &= 4a(-5) \\ 100 &= -20a \\ a &= -5 \end{aligned}$$

Así, la ecuación de la parábola es

$$\begin{aligned} x^2 &= 4(-5)y \\ &= -20y \end{aligned}$$

a

(B) Foco: $x^2 = -20y \quad = 4(-5)y$

$F(0, a) = F(0, -5)$

Directriz: $y = -a$

$= -(-5)$

$= 5$

Problema seleccionado 2

(A) Encuentre la ecuación de una parábola que tiene el origen como su vértice, el eje x como su eje y $(4, -8)$ sobre su gráfica.

(B) Encuentre las coordenadas de su foco y la ecuación de su directriz.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Considere la gráfica de una ecuación con las variables x y y. La ecuación de su aumento por un factor $k > 0$ se obtiene al reemplazar x y y en la ecuación por x/k y y/k, respectivamente. (Por supuesto, un aumento por un factor k entre 0 y 1 significa una reducción real en tamaño.)

(A) Demuestre que el aumento por un factor 3 del círculo con ecuación $x^2 + y^2 = 1$ tiene la ecuación $x^2 + y^2 = 9$.

(B) Explique por qué cada círculo con centro en (0, 0) es un aumento del círculo con la ecuación $x^2 + y^2 = 1$.

(C) Encuentre la ecuación del aumento por un factor 3 de la parábola con la ecuación $x^2 = y$. Grafique ambas ecuaciones.

(D) Explique por qué cada parábola con vértice (0, 0) que abre hacia arriba es un aumento de la parábola con la ecuación $x^2 = y$.

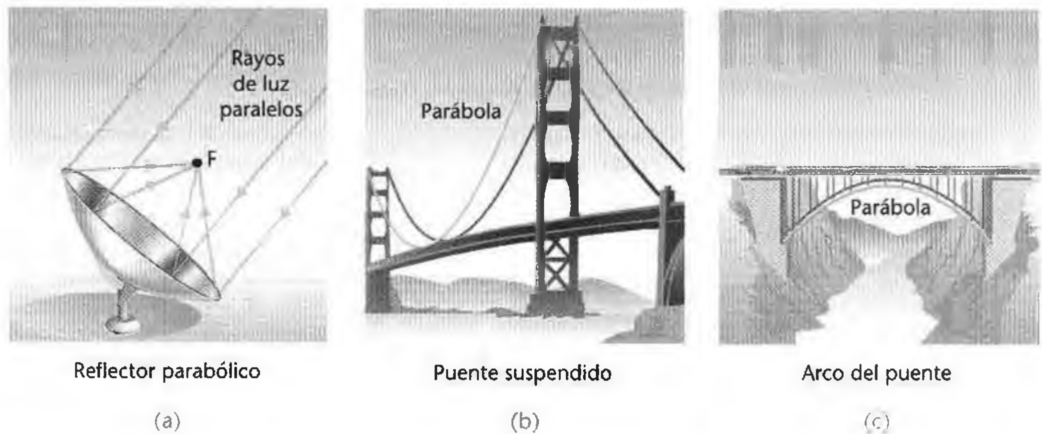
Aplicaciones Las formas parabólicas se encuentran a menudo en el mundo físico. Puentes colgantes, arcos de puentes, micrófonos, bóvedas para sinfónicas, antenas de satélite, telescopios para radio y ópticos, equipos de radar, recolectores solares y reflectores son sólo algunos de los objetos que utilizan formas parabólicas en su diseño.

La figura 8(a) ilustra un reflector parabólico que se usa en todos los telescopios de reflexión, que van desde 3 a 6 pulgadas para los de tipo casero hasta 200 pulgadas para instrumentos de búsqueda en el Monte Palomar en California. La luz de rayos paralelos de cuerpos celestes lejanos se refleja en el foco de un espejo parabólico. Si la fuente de luz es el Sol, entonces los rayos paralelos se concentran en F y se tiene un horno solar. Se han alcanzado temperaturas de más de 6 000 °C en tales hornos. Si una fuente de luz se localiza en F, entonces los rayos en la figura 8(a) se invierten, y se tiene una luz concentrada o un reflector. Los faros de un automóvil pueden usar reflectores parabólicos con lentes especiales sobre las luces altas para difundir los rayos en patrones útiles.

La figura 8(b) muestra un puente colgante, como el puente *Golden Gate* en San Francisco. El cable suspendido es una parábola. Es interesante notar que un cable que cuelga libremente, tal como una línea telefónica, no forma una parábola. Forma otra curva llamada *catenaria*.

La figura 8(c) muestra un puente de concreto en forma de arco. Si todas las cargas sobre el arco van a ser cargas de compresión (el concreto funciona muy bien bajo compresión), entonces usando la física y las matemáticas avanzadas, se puede demostrar que el arco debe ser parabólico.

FIGURA 8 Usos de las formas parabólicas.



EJEMPLO 3 **Reflector parabólico**

Se forma un **paraboloide** al girar una parábola con respecto a su eje. Una luz concentrada en forma de un paraboloide de 5 pulgadas de profundidad tiene su foco a 2 pulgadas del vértice. Encuentre, con una cifra decimal, el radio R de abertura de la luz concentrada.

Solución *Paso 1.* Localice una sección transversal parabólica que contenga al eje en un sistema coordenado rectangular, y marque todas las partes conocidas y las que desea encontrar. Éste es un paso muy importante y se puede hacer de muchas maneras. Debido a que se está en la carga, se pueden simplificar las cosas al ubicar el vértice en el origen y al escoger un eje coordenado como el eje. Se elige el eje y como el eje de la parábola y ésta abriendo hacia arriba. Véase la figura 9.

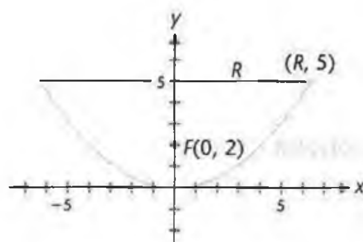


FIGURA 9

Paso 2. Encuentre la ecuación de la parábola en la figura. Como la parábola tiene el eje y como su eje y el vértice en el origen, la ecuación es de la forma

$$x^2 = 4ay$$

Se tiene $F(0, a) = F(0, 2)$; así, $a = 2$, y la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 8y$$

Paso 3. Use la ecuación determinada en el paso 2 para encontrar el radio R de la abertura. Como $(R, 5)$ está sobre la parábola, se tiene

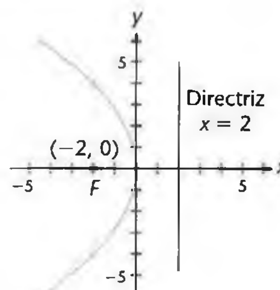
$$R^2 = 8(5)$$
$$R = \sqrt{40} \approx 6.3 \text{ pulgadas}$$

Problema seleccionado 3 Repita el ejemplo 3 con un paraboloide de 12 pulgadas de profundidad y un foco de 9 pulgadas del vértice.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. Foco: $(-2, 0)$
   Directriz: $x = 2$

x	0	-2
y	0	± 4



2. (A) $y^2 = 16x$ (B) Foco: $(4, 0)$; Directriz: $x = -4$
3. $R = 20.8$ pulg

EJERCICIO 11-1

A

En los problemas del 1 al 12, grafique cada ecuación y localice el foco y directriz.

1. $y^2 = 4x$ **2.** $y^2 = 8x$ **3.** $x^2 = 8y$
4. $x^2 = 4y$ **5.** $y^2 = -12x$ **6.** $y^2 = -4x$
7. $x^2 = -4y$ **8.** $x^2 = -8y$ **9.** $y^2 = -20x$
10. $x^2 = -24y$ **11.** $x^2 = 10y$ **12.** $y^2 = 6x$

Encuentre las coordenadas, con dos cifras decimales, del foco para cada parábola en los problemas del 13 al 18.

13. $y^2 = 39x$ **14.** $x^2 = 58y$ **15.** $x^2 = -105y$
16. $y^2 = -93x$ **17.** $y^2 = -77x$ **18.** $x^2 = -205y$

B

En los problemas del 19 al 26, encuentre la ecuación de una parábola con vértice en el origen, elija como eje el eje x o el y, y:

19. Directriz $y = -3$

20. Directriz $y = 4$

21. Foco $(0, -7)$

22. Foco $(0, 5)$

23. Directriz $x = 6$

24. Directriz $x = -9$

25. Foco $(2, 0)$

26. Foco $(-4, 0)$

En los problemas del 27 al 32, encuentre la ecuación de la parábola que tenga su vértice en el origen, su eje como se indica, y pase por el punto indicado.

27. Eje y; $(4, 2)$

28. Eje x; $(4, 8)$

29. Eje x; $(-3, 6)$

30. Eje y; $(-5, 10)$

31. Eje y; $(-6, -9)$

32. Eje x; $(-6, -12)$

En los problemas del 33 al 36, encuentre los puntos en el primer cuadrante de intersección para cada sistema de ecuaciones con tres cifras decimales.

Compruebe los problemas 33 a 36 con un dispositivo de graficación.

33. $x^2 = 4y$
$y^2 = 4x$

34. $y^2 = 3x$
$x^2 = 3y$

35. $y^2 = 6x$
$x^2 = 5y$

36. $x^2 = 7y$
$y^2 = 2x$

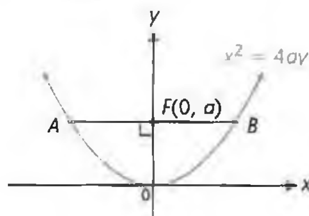
37. Considere la parábola con la ecuación $x^2 = 4ay$.

(A) ¿Cuántas rectas que pasan por $(0, 0)$ intersectan la parábola en exactamente un punto? Encuentre sus ecuaciones.

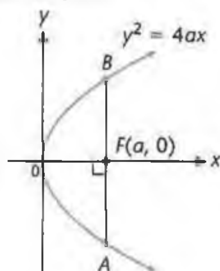
(B) Encuentre las coordenadas de todos los puntos de intersección de la parábola con la recta que pasa por $(0, 0)$ y tenga una pendiente $m \neq 0$.

38. Encuentre las coordenadas de todos los puntos de intersección de la parábola con ecuación $x^2 = 4ay$ y la parábola con ecuación $y^2 = 4bx$.

39. El segmento de recta AB que pasa por el foco en la figura se conoce como **cuerda focal** de la parábola. Encuentre las coordenadas A y B.



40. El segmento de recta AB que pasa por el foco en la figura es conocido como **cuerda focal** de la parábola. Encuentre las coordenadas de A y B.



C

En los problemas del 41 al 44, use la definición de una parábola y la fórmula de la distancia para encontrar la ecuación de una parábola con:

41. Directriz $y = -4$ y foco $(2, 2)$

42. Directriz $y = 2$ y foco $(-3, 6)$

43. Directriz $x = 2$ y foco $(6, -4)$

44. Directriz $x = -3$ y foco $(1, 4)$

En los problemas 45 a 48, use un dispositivo de graficación para encontrar las coordenadas de todos los puntos de intersección con dos cifras decimales.

45. $x^2 = 8y$, $y = 5x + 4$

46. $x^2 = 3y$, $7x + 4y = 11$

47. $x^2 = -8y$, $y^2 = -5x$

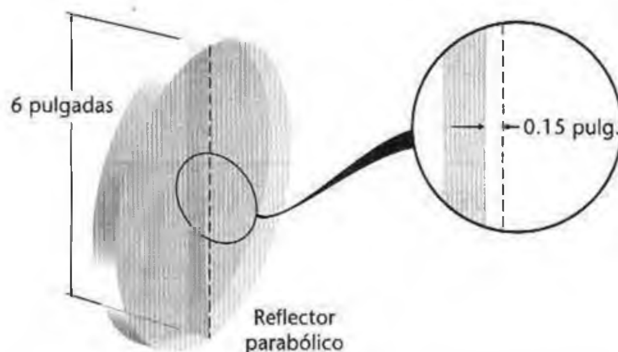
48. $y^2 = 6x$, $2x - 9y = 13$

APLICACIONES

49. Ingeniería. El arco parabólico, en el puente de concreto de la figura, debe tener un claro de 50 pies por arriba del agua y una distancia de claro de 200 pies. Encuentre la ecuación de la parábola después de insertar un sistema coordenado con el origen en el vértice de la parábola y el eje y vertical (apuntando hacia arriba) a lo largo de la parábola.



50. Astronomía. La sección transversal de un reflector parabólico con 6 pulgadas de diámetro está curvada de manera que su vértice está a 0.15 pulgadas por debajo del borde (véase figura).

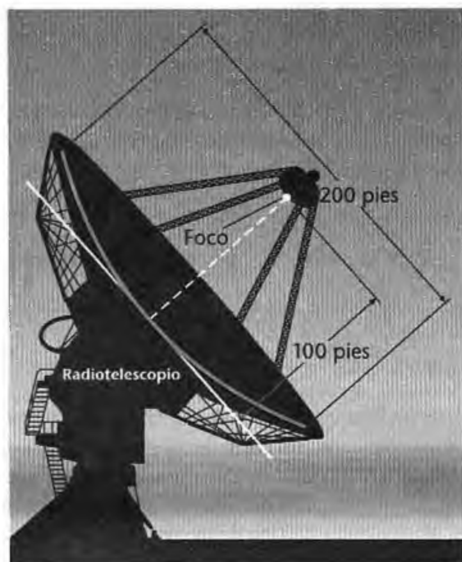


(A) Encuentre la ecuación de la parábola después de insertar un sistema coordenado xy con el vértice en el

origen, el eje de la parábola (apuntando hacia arriba) es el eje y.

(B) ¿A qué distancia del vértice está el foco?

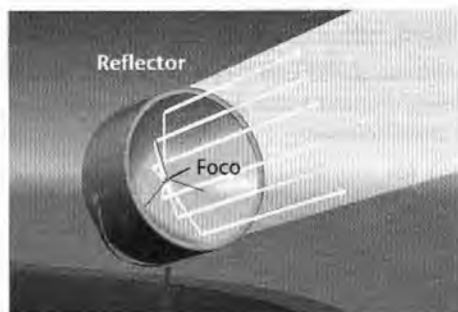
51. Ciencia espacial. Un diseñador de una antena electromagnética parabólica de 200 pies de diámetro para rastrear espacios de prueba desea ubicar el foco 100 pies por arriba del vértice (véase la figura).



(A) Encuentre la ecuación de la parábola usando el eje de la parábola como el eje y (positivo hacia arriba) y el vértice en el origen.

(B) Determine la profundidad del reflector parabólico.

52. Señal de la luz. Un reflector en un barco es una luz concentrada con rayos de luz paralelos reflejados (véase la figura). Suponga que el reflector parabólico es de 12 pulgadas de diámetro y la fuente de luz se localiza en el foco, que está a 1.5 pulgadas del vértice.



(A) Encuentre la ecuación de la parábola usando el eje de la parábola como el eje x (positivo a la derecha) y vértice en el origen.

(B) Determine la profundidad del reflector parabólico.

SECCIÓN 11-2 Elipse

- Definición de una elipse
- Trazo de una elipse
- Ecuaciones estándar y sus gráficas
- Aplicaciones

Se comienza el análisis de la elipse con una definición libre de coordenadas. Mediante esta definición, se muestra cómo se puede dibujar una elipse y se obtienen las ecuaciones estándar para elipses especialmente localizadas en un sistema coordenado rectangular.

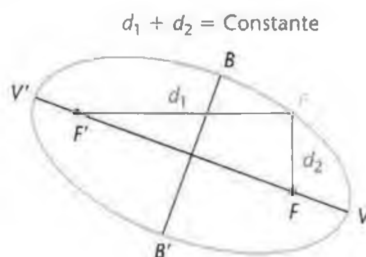
• Definición de una elipse

Lo siguiente es una definición libre de coordenadas de una elipse:

DEFINICIÓN 1 **Elipse**

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos P en un plano tal que la suma de las distancias de P desde dos puntos fijos en el plano sea constante. Cada uno de los puntos fijos, F' y F, se llama **foco**, y juntos se conocen como **focos**. Remítase a la figura, el segmento de recta $V'V$ que pasa por los focos es el **eje mayor**. El bisector perpendicular $B'B$ del eje mayor es el **eje menor**. Cada extremo del eje

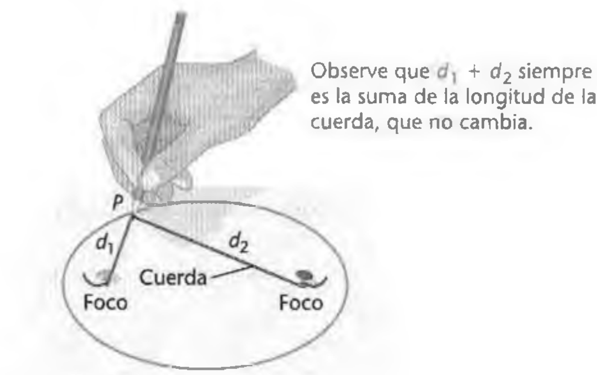
mayor, V' y V, se llama **vértice**. El punto medio del segmento de recta $F'F$ se llama **centro** de la elipse.



• Trazo de una elipse

Es fácil dibujar una elipse. Todo lo que necesita es un pedazo de cuerda, dos chinchetas y un lápiz o pluma (véase figura 1). Coloque las dos chinchetas en un pedazo de cartón. Éstas forman los focos de la elipse. Tome un pedazo de cuerda más grande que la distancia entre las dos chinchetas (esto representa la constante en la definición) y ate cada extremo a una chincheta. Por último, inserte la punta de un lápiz bajo la cuerda y muévalo mientras mantiene estirada la cuerda. La figura resultante es por definición una elipse. El resultado son elipses de diferentes formas, dependiendo de la ubicación de las chinchetas y la longitud de la cuerda que las une.

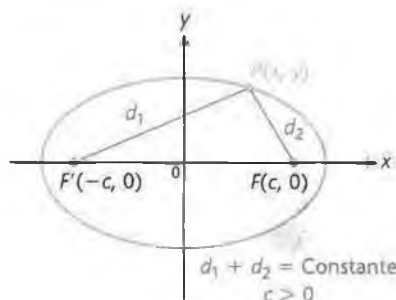
FIGURA 1 Dibujando una elipse.



• Ecuaciones estándar y sus gráficas

Usando la definición de una elipse y la fórmula de la distancia entre dos puntos, se pueden obtener ecuaciones estándar para una elipse localizada en un sistema coordenado rectangular. Se comienza por insertar una elipse en el sistema coordenado con los focos en el eje x equidistante desde el origen en $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$, como se muestra en la figura 2.

FIGURA 2 Elipse con focos sobre el eje x.



Por razones que pronto se aclararán, es conveniente representar la suma constante $d_1 + d_2$ por $2a$, $a > 0$. También, el hecho geométrico que la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera de un triángulo debe ser mayor que el tercer lado se puede aplicar a la figura 2 para obtener los resultados útiles siguientes:

$$\begin{aligned} d(F', P) + d(P, F) &> d(F', F) \\ d_1 + d_2 &> 2c \\ 2a &> 2c \\ a &> c \end{aligned} \tag{1}$$

Se usará este resultado en la obtención de la ecuación de una elipse, que ahora comienza.

Remítase a la figura 2, el punto $P(x, y)$ está sobre la elipse si y sólo si

$$\begin{aligned} d_1 + d_2 &= 2a \\ d(P, F') + d(P, F) &= 2a \\ \sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} + \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} &= 2a \end{aligned}$$

Después de eliminar radicales y simplificar, un buen ejercicio para usted, se obtiene

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{3}$$

Se permite dividir ambos lados de la ecuación (2) entre $a^2(a^2 - c^2)$, ya que ni a^2 ni $a^2 - c^2$ es 0. De la ecuación (1), $a > c$; de manera que $a^2 > c^2$ y $a^2 - c^2 > 0$. Al inicio se eligió positiva la constante a.

Para simplificar un poco más la ecuación (3), se hace

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad b > 0 \tag{4}$$

para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

De la ecuación (5) se observa que las intersecciones en x son $x = \pm a$ y las intersecciones en y son $y = \pm b$. Las intersecciones en x son también los vértices. De esta manera,

Longitud del eje mayor $= 2a$

Longitud del eje menor $= 2b$

Para ver que el eje mayor es más grande que el eje menor, se demuestra que $2a > 2b$. Regresando a la ecuación (4),

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - c^2 \qquad && a, b, c > 0 \\ b^2 + c^2 &= a^2 \end{aligned}$$

$$b^2 < a^2 \qquad \text{Definición de} <$$

$$b^2 - a^2 < 0$$

$$(b - a)(b + a) < 0$$

$$b - a < 0 \qquad \text{Como } b + a \text{ es positiva, } b - a \text{ debe ser negativa.}$$

$$b < a$$

$$2b < 2a$$

$$2a > 2b$$

$$\begin{pmatrix}\text{Longitud del}\\ \text{eje mayor}\end{pmatrix} > \begin{pmatrix}\text{Longitud del}\\ \text{eje menor}\end{pmatrix}$$

Si se comienza con los focos sobre el eje y en $F(0, c)$ y $F'(0, -c)$ como en la figura 3, en lugar de estar sobre el eje x como en la figura 2, entonces, siguiendo argumentos similares a los usados en la primera obtención, se tiene

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a > b \tag{6}$$

donde las relaciones entre a, b y c permanecen igual que antes:

$$b^2 = a^2 - c^2 \tag{7}$$

El centro está todavía en el origen, pero el eje mayor está ahora a lo largo del eje y y el eje menor está a lo largo del eje x.

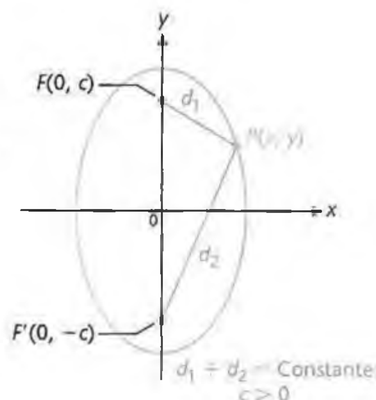


FIGURA 3 Elipse con focos sobre el eje y.

Es fácil trazar gráficas de las ecuaciones de la forma (5) o (6). Se determinan las intersecciones en x y y y se trazan en una elipse adecuada. Como al reemplazar x con $-x$, o y con $-y$ se produce una ecuación equivalente, se concluye que las gráficas son simétricas con respecto al eje x, al eje y y al origen. Si se desea mayor exactitud, se pueden determinar puntos adicionales con la ayuda de una calculadora y el uso de las propiedades de simetría.

Dada una ecuación de la forma (5) o (6), ¿cómo se puede encontrar las coordenadas de los focos sin memorizar o sin buscar la relación $b^2 = a^2 - c^2$? Hay una relación geométrica simple en una elipse que permite obtener el mismo resultado usando el teorema pitagórico. Para ver esta relación, remítase a la figura 4(a). Después, usando la

definición de una elipse y $2a$ para la suma constante, como se hizo al obtener las ecuaciones estándar, se observa que

$$d + d = 2a$$
$$2d = 2a$$
$$d = a$$

Así:

La longitud del segmento de recta desde el extremo de un eje menor hasta un foco es la misma que la mitad de la longitud de un eje mayor.

Esta relación geométrica se ilustra en la figura 4(b). Usando el teorema pitagórico para el triángulo en la figura 4(b), se tiene

$$b^2 + c^2 = a^2$$

o

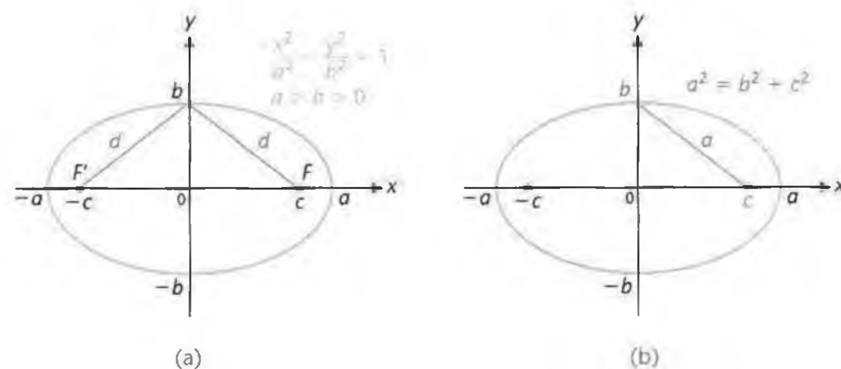
$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad \text{Ecuaciones (4) y (7)}$$

o

$$c^2 = a^2 - b^2 \qquad \text{Útil para encontrar los focos, dadas } a \text{ y } b$$

De esta manera, se puede encontrar los focos de una elipse dadas las intersecciones a y b usando simplemente el triángulo de la figura 4(b) y el teorema de Pitágoras.

FIGURA 4 Relaciones geométricas.



Se resumen todos estos resultados en el teorema 1 para una referencia adecuada.

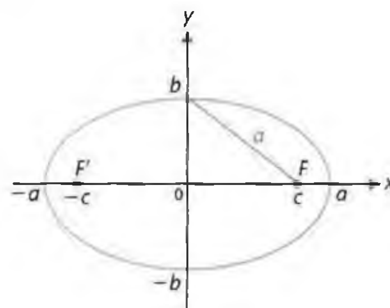
Teorema 1 **Ecuaciones estándar de una elipse con centro en (0, 0)**

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b > 0$

Intersecciones en x: $\pm a$ (vértices)
Intersecciones en y: $\pm b$
Focos: $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Longitud del eje mayor $= 2a$
Longitud del eje menor $= 2b$



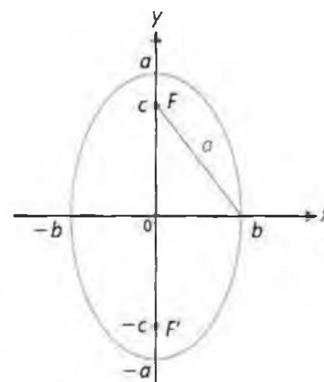
2. $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a > b > 0$

Intersecciones en x: $\pm b$
Intersecciones en y: $\pm a$ (vértices)
Focos: $F'(0, -c)$, $F(0, c)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Longitud del eje mayor $= 2a$
Longitud del eje menor $= 2b$

[*Nota*: Ambas gráficas son simétricas con respecto al eje x, al eje y y al origen. También, el eje mayor es siempre más largo que el eje menor.]



EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 La recta que pasa por un foco F de una elipse que es perpendicular al eje mayor intersecta la elipse en dos puntos G y H. Para cada una de las dos ecuaciones estándar de una elipse con centro (0, 0), encuentre una expresión en términos de a y b para la distancia de G a H.

EJEMPLO 1 **Graficación de elipses**

Trace la gráfica de cada ecuación, encuentre las coordenadas de los focos y también las longitudes de los ejes mayor y menor.

(A) $9x^2 + 16y^2 = 144$ (B) $2x^2 + y^2 = 10$

Soluciones (A) Primero, escriba la ecuación en forma estándar dividiendo ambos lados entre 144:

$$9x^2 + 16y^2 = 144$$

$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad a^2 = 16 \text{ y } b^2 = 9$$

Localice las intersecciones:

$$\text{Intersecciones en } x: \quad \pm 4$$
$$\text{Intersecciones en } y: \quad \pm 3$$

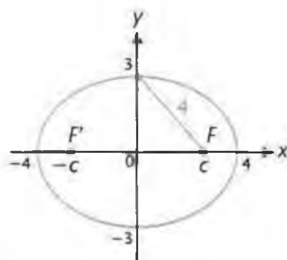


FIGURA 5 $9x^2 + 16y^2 = 144$.

y trácelas en la elipse, como se muestra en la figura 5.

$$\begin{aligned} \text{Focos:} \quad c^2 &= a^2 - b^2 \\ &= 16 - 9 \\ &= 7 \\ c &= \sqrt{7} \qquad \text{c es positiva} \end{aligned}$$

De modo que, los focos son $F'(-\sqrt{7}, 0)$ y $F(\sqrt{7}, 0)$.

$$\text{Longitud del eje mayor} = 2(4) = 8$$
$$\text{Longitud del eje menor} = 2(3) = 6$$

(B) Escriba la ecuación en forma estándar dividiendo ambos lados entre 10:

$$2x^2 + y^2 = 10$$
$$\boxed{\frac{2x^2}{10} + \frac{y^2}{10} = \frac{10}{10}}$$
$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{10} = 1 \qquad a^2 = 10 \quad \text{y} \quad b^2 = 5$$

Localice las intersecciones:

$$\text{Intersecciones en } x: \quad \pm\sqrt{5} \approx \pm 2.24$$
$$\text{Intersecciones en } y: \quad \pm\sqrt{10} \approx \pm 3.16$$

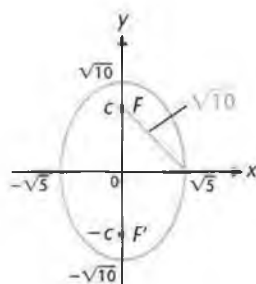


FIGURA 6 $2x^2 + y^2 = 10$.

y trácelas en la elipse, como se muestra en la figura 6.

$$\begin{aligned} \text{Focos:} \quad c^2 &= a^2 - b^2 \\ &= 10 - 5 \\ &= 5 \\ c &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

Así, los focos son $F'(0, -\sqrt{5})$ y $F(0, \sqrt{5})$.

$$\text{Eje de mayor longitud} = 2\sqrt{10} \approx 6.32$$
$$\text{Eje de menor longitud} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$$

Comentario. Para graficar la ecuación $9x^2 + 16y^2 = 144$ del ejemplo 1(A) en un dispositivo de graficación, primero se despeja y, obteniendo $y = \pm\sqrt{\dfrac{144 - 9x^2}{16}}$.

Después se traza cada una de las dos funciones. La gráfica de $y = \sqrt{\frac{144 - 9x^2}{16}}$ es la mitad superior de la elipse, y la gráfica de $y = -\sqrt{\frac{144 - 9x^2}{16}}$ es la mitad inferior.

Problema seleccionado 1

Trace la gráfica de cada ecuación, encuentre las coordenadas de los focos, y encuentre las longitudes de los ejes mayor y menor.

(A) $x^2 + 4y^2 = 4$ (B) $3x^2 + y^2 = 18$

EJEMPLO 2

Determinación de la ecuación de una elipse

Encuentre una ecuación de una elipse en la forma

$$\frac{x^2}{M} + \frac{y^2}{N} = 1 \qquad M, N > 0$$

si el centro está en el origen, el eje mayor está a lo largo del eje y, y:

(A) Longitud del eje mayor = 20
Longitud del eje menor = 12

(B) Longitud del eje mayor = 10
Distancia a los focos desde el centro = 4

Soluciones

(A) Calcule las intersecciones en x y y y realice un trazo rápido de la elipse, como se muestra en la figura 7.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$a = \frac{20}{2} = 10 \qquad b = \frac{12}{2} = 6$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

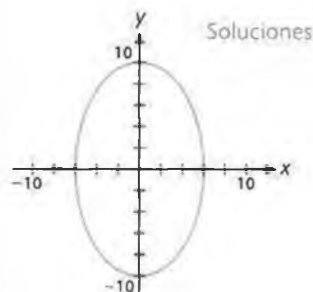


FIGURA 7 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1.$

(B) Realice un trazo rápido de la elipse, como se muestra en la figura 8; localice los focos e intersecciones en y, después determine las intersecciones en x usando la relación especial del triángulo antes analizada.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$a = \frac{10}{2} = 5 \qquad b^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$$

$$b = 3$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

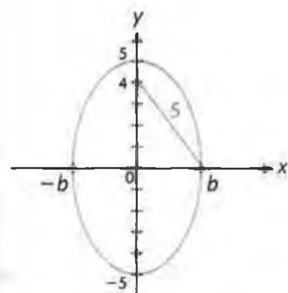


FIGURA 8 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$

Problema seleccionado 2 Encuentre la ecuación de una elipse en la forma

$$\frac{x^2}{M} + \frac{y^2}{N} = 1 \qquad M, N > 0$$

si el centro está en el origen, el eje mayor está a lo largo del eje x, y:

(A) Longitud del eje mayor = 50
Longitud del eje menor = 30

(B) Longitud del eje menor = 16
Distancia a los focos desde el centro = 6

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Considere la gráfica de una ecuación con las variables x y y. La ecuación de su aumento por un factor $k > 0$ se obtiene al reemplazar x y y en la ecuación por x/k y y/k, respectivamente.

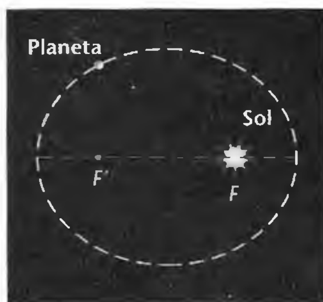
(A) Encuentre la ecuación del aumento por un factor 3 de la elipse con ecuación $(x^2/4) + y^2 = 1$. Grafique ambas ecuaciones.

(B) Dé un ejemplo de una elipse con centro (0, 0) con $a > b$ que no tenga un aumento de $(x^2/4) + y^2 = 1$.

(C) Encuentre las ecuaciones de todas las elipses que sean aumentos de $(x^2/4) + y^2 = 1$.

Aplicaciones

Sin duda se conocen las múltiples presentaciones y usos de formas elípticas: algunos ejemplos son las órbitas de satélites, planetas y cometas; formas de galaxias, engranes y levas; algunos alerones de aviones, quillas de barcos y timones, cubiertas de comedores, fuentes públicas y domos en edificios (véase figura 9). Una aplicación reciente en la medicina es el uso de reflectores elípticos y ultrasónicos para disolver cálculos renales.

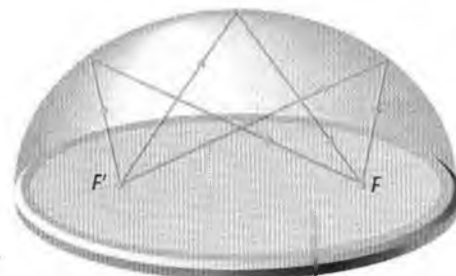


Movimiento planetario

(a)


Engrane elíptico

(b)



Domo elíptico

(c)

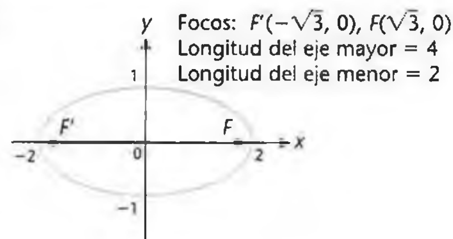
FIGURA 9 Uso de formas elípticas.

Johannes Kepler (1571-1630), un astrónomo alemán, descubrió que los planetas se mueven en órbitas elípticas, con el Sol como foco, y no en órbitas circulares como antes se había creído [figura 9(a)]. La figura 9(b) muestra un par de engranes elípticos con puntos pivote en los focos. Esos engranes trasmiten velocidad de rotación constan-

te a velocidad de rotación variable, y viceversa. La figura 9(c) muestra un domo elíptico. Una propiedad interesante de tales domos es que una fuente de sonido o luz en un foco se refleja en el domo y pasa por el otro foco. Una de las cámaras en el edificio *Capitol* en Washington, D.C., tiene tal domo, y se le conoce como un cuarto de murmullo, ya que el sonido del cuchicheo en un foco se puede oír fácilmente en el otro foco.

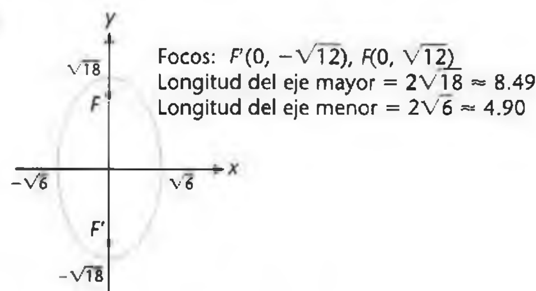
Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A)



Focos: $F'(-\sqrt{3}, 0)$, $F(\sqrt{3}, 0)$
Longitud del eje mayor = 4
Longitud del eje menor = 2

(B)



Focos: $F'(0, -\sqrt{12})$, $F(0, \sqrt{12})$
Longitud del eje mayor = $2\sqrt{18} \approx 8.49$
Longitud del eje menor = $2\sqrt{6} \approx 4.90$

2. (A) $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{225} = 1$ (B) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

EJERCICIO 11-2

A

En los problemas del 1 al 6, trace una gráfica de cada ecuación, encuentre las coordenadas de los focos y determine las longitudes de los ejes mayor y menor.

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$
2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$
4. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
5. $x^2 + 9y^2 = 9$
6. $4x^2 + y^2 = 4$

B

En los problemas del 7 al 12, trace una gráfica de cada ecuación, encuentre las coordenadas de los focos y determine las longitudes de los ejes mayor y menor.

7. $25x^2 + 9y^2 = 225$
8. $16x^2 + 25y^2 = 400$
9. $2x^2 + y^2 = 12$
10. $4x^2 + 3y^2 = 24$
11. $4x^2 + 7y^2 = 28$
12. $3x^2 + 2y^2 = 24$

En los problemas del 13 al 20, encuentre una ecuación de una elipse en la forma

$$\frac{x^2}{M} + \frac{y^2}{N} = 1 \qquad M, N > 0$$

si el centro está en el origen, y:

13. El eje mayor está sobre el eje x
Longitud del eje mayor = 8
Longitud del eje menor = 6

14. El eje mayor está sobre el eje x
Longitud del eje mayor = 14
Longitud del eje menor = 10

15. El eje mayor está sobre el eje y
Longitud del eje mayor = 22
Longitud del eje menor = 16

16. El eje mayor está sobre el eje y
Longitud del eje mayor = 24
Longitud del eje menor = 18

17. El eje mayor está sobre el eje x
Longitud del eje mayor = 16
Distancia a los focos desde el centro = 6

18. El eje mayor está sobre el eje x
Longitud del eje mayor = 24
Distancia a los focos desde el centro = 10

19. El eje mayor está sobre el eje y
Longitud del eje menor = 20
Distancia a los focos desde el centro = $\sqrt{70}$

20. El eje mayor está sobre el eje y
Longitud del eje menor = 14
Distancia a los focos desde el centro = $\sqrt{200}$

21. Explique por qué una ecuación cuya gráfica es una elipse no define una función.

22. Considere todas las elipses que tengan $(0, \pm 1)$ como los extremos del eje menor. Describa la conexión entre el alargamiento de la elipse y la distancia de un foco al origen.

En los problemas del 23 al 26, grafique cada sistema de ecuaciones en el mismo sistema coordenado rectangular y encuentre las coordenadas de cualquier punto de intersección. Determine coordenadas no enteras con tres cifras decimales.

*Compruebe los problemas del 23 al 26 con un dispositivo de graficación.**

23. $16x^2 + 25y^2 = 400$
$2x - 5y = 10$

24. $25x^2 + 16y^2 = 400$
$5x + 8y = 20$

25. $25x^2 + 16y^2 = 400$
$25x^2 - 36y = 0$

26. $16x^2 + 25y^2 = 400$
$3x^2 - 20y = 0$

En los problemas del 27 al 30. encuentre los puntos de intersección en el primer cuadrante para cada sistema de ecuaciones con tres cifras decimales.

Compruebe los problemas del 27 al 30 con un dispositivo de graficación.

27. $5x^2 + 2y^2 = 63$
$2x - y = 0$

28. $3x^2 + 4y^2 = 57$
$x - 2y = 0$

29. $2x^2 + 3y^2 = 33$
$x^2 - 8y = 0$

30. $3x^2 + 2y^2 = 43$
$x^2 - 12y = 0$

C

31. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos en un plano, cada una de cuyas distancias de (2, 0) es una mitad de su distancia desde la recta $x = 8$. Identifique la figura geométrica.

32. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos en un plano, cada una de cuyas distancias de (0, 9) es tres cuartos de la distancia de la recta $y = 16$. Identifique la figura geométrica.

* Observe por favor que no es necesario el uso de un dispositivo de graficación para terminar estos ejercicios. La comprobación de éstos con un dispositivo de graficación es opcional.

En los problemas del 33 al 36, use un dispositivo de graficación para encontrar las coordenadas de todos los puntos de intersección con dos cifras decimales.

33. $x^2 + 3y^2 = 20,\ 4x + 5y = 11$

34. $8x^2 + 35y^2 = 3\,600,\ x^2 = -25y$

35. $50x^2 + 4y^2 = 1\,025,\ 9x^2 + 2y^2 = 300$

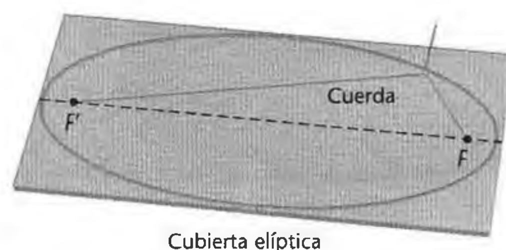
36. $2x^2 + 7y^2 = 95,\ 13x^2 + 6y^2 = 63$

APLICACIONES

37. Ingeniería. El arco semielíptico en el puente de concreto que se muestra en la figura debe tener un claro de 12 pies por arriba del agua y salvar una distancia de 40 pies. Encuentre la ecuación de la elipse después de insertar un sistema coordenado con el centro de la elipse en el origen y el eje mayor en el eje x. El eje y apunta hacia arriba, y el eje x apunta a la derecha. ¿Qué altura tiene el claro arriba del agua a 5 pies desde la orilla?

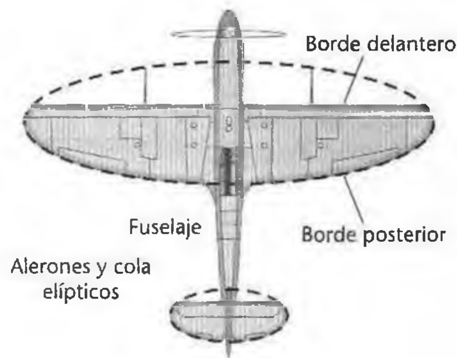

Puente elíptico

38. Diseño. Una cubierta elíptica de una mesa de comedor de 4 × 8 pies se va a hacer al cortar de una hoja rectangular de triplay de 4 × 8 pies (véase la figura). Para dibujar la elipse en el triplay, ¿a qué distancia se deben localizar los focos de cada orilla y cuál debe ser la longitud de un pedazo de cuerda para ajustarse a cada foco para producir la elipse (véase figura 1 en el texto)? Calcule la respuesta con dos cifras decimales.



Cubierta elíptica

39. Ingeniería aeronáutica. De todas las formas posibles, se ha determinado que la única con menos arrastre a lo largo del borde posterior es una elipse. El borde puede ser una línea recta, como se muestra en la figura. Uno de los aeroplanos más famosos con este diseño fue el *Spitfire* británico de la Segunda Guerra Mundial. El aeroplano en la figura tiene una envergadura de 48.0 pies.

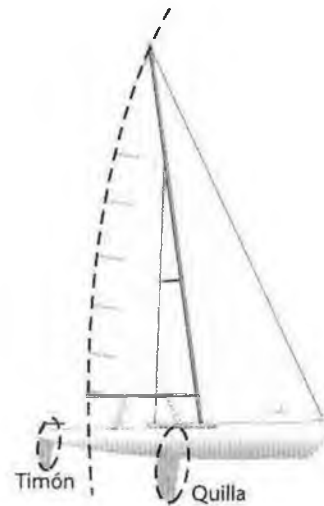


(A) Si el borde delantero recto es paralelo al eje mayor de la elipse y está a 1.14 pies enfrente de él, y si el borde delantero tiene un largo de 46 pies (incluyendo el ancho del fuselaje), encuentre la ecuación de la elipse. Haga que el eje x esté a lo largo del eje mayor (positivo a la derecha), y que el eje y esté a lo largo del eje menor (positivo hacia arriba).

(B) ¿Qué ancho tiene el alerón en el centro del fuselaje (suponiendo que los alerones pasen por el fuselaje)?

Calcule las cantidades con tres cifras significativas.

*40. **Arquitectura naval.** Actualmente, muchas carreras de botes de alto rendimiento usan quillas elípticas, timones y velas principales por las mismas razones que se comentaron en el problema 39 (menos arrastre a lo largo del borde delantero). En la figura adjunta, la elipse tiene una quilla con un eje mayor a 12 pies. El borde delantero recto es paralelo al eje mayor de la elipse y está a un pie enfrente de él. La cuerda es un pie más corta que el eje mayor.



(A) Encuentre la ecuación de la elipse. Haga que el eje y esté a lo largo del eje menor de la elipse, y que el eje x esté a lo largo del eje mayor, ambos con dirección positiva hacia arriba.

(B) ¿Cuál es el ancho de la quilla, medido perpendicular al eje mayor, un pie por arriba del eje mayor desde el extremo inferior de la quilla?

Calcule las cantidades con 3 dígitos significativos.

SECCIÓN 11-3 Hipérbola



- Definición de una hipérbola
- Trazo de una hipérbola
- Ecuaciones estándar y sus gráficas
- Aplicaciones

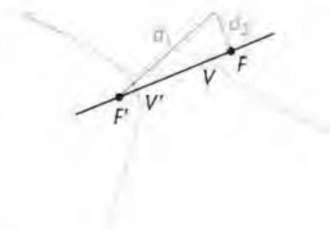
Como antes, se comienza con la definición libre de coordenadas de una hipérbola. Usando esta definición, se muestra cómo se puede dibujar una hipérbola y se obtienen las ecuaciones estándar para hipérbolas especialmente localizadas en un sistema coordenado rectangular.

• Definición de una hipérbola

La siguiente es una definición libre de coordenadas de una hipérbola:

DEFINICIÓN 1 **Hipérbola**

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos P en un plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos en el plano sea una constante positiva. Cada uno de los puntos fijos, F' y F, se llaman **focos**. Los puntos de intersección V' y V de la recta que pasa por los focos y las dos ramas de la hipérbola se llaman **vértices**, y cada uno se llama **vértice**. El segmento de recta $V'V$ se denomina el **eje transverso**. El punto medio del eje transverso es el **centro** de la hipérbola.



Trazo de una hipérbola

Todo lo que se necesita para dibujar una hipérbola (véase figura 1) son chinchetas, una regla, una cuerda y un lápiz. Coloque dos chinchetas en un pedazo de cartón (éstas forman los focos de la hipérbola). Fije una esquina de la regla en el foco F', de manera que gire libremente alrededor de este punto. Corte un pedazo de cuerda más corta que la longitud de la regla, y apriete un extremo a la esquina A de la regla y el otro extremo a la chincheta en F. Ahora empuje la cuerda con un lápiz contra la regla en B. Manteniendo estirada la cuerda, gire la regla alrededor de F', manteniendo la esquina en F'. La curva resultante será parte de una hipérbola. Las otras partes de la hipérbola se pueden dibujar cambiando la posición de la regla y la cuerda. Para ver que la curva resultante cumple con las condiciones de la definición, note que la diferencia de las distancias BF' y BF es

$$\begin{aligned} BF' - BF &= BF' + BA - BF - BA \\ &= AF' - (BF + BA) \\ &= \begin{pmatrix} \text{Regla} \\ \text{recta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{Longitud de} \\ \text{la cuerda} \end{pmatrix} \\ &= \text{Constante} \end{aligned}$$

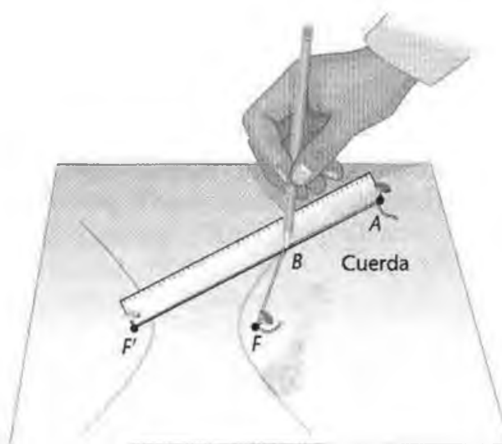
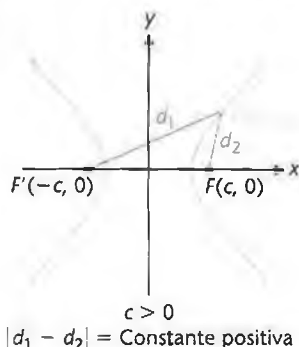


FIGURA 1 Dibujando una hipérbola.

Ecuaciones estándar y sus gráficas

Usando la definición de hipérbola y la fórmula de la distancia entre dos puntos, se pueden obtener las ecuaciones estándar para una hipérbola localizada en un sistema coordenado rectangular. Se comienza por ubicar una hipérbola en el sistema coordenado rectangular con los focos en el eje x equidistantes del origen en $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$, $c > 0$, como se muestra en la figura 2.

Como se hizo con la elipse, es conveniente representar la diferencia constante con $2a$, $a > 0$. También, el hecho geométrico de que la diferencia de dos lados de un triángulo es siempre menor que el tercer lado se puede aplicar a la figura 2 para obtener el resultado útil siguiente:



$c > 0$

$|d_1 - d_2|$ = Constante positiva

FIGURA 2 Hipérbola con focos en el eje x.

$$|d_1 - d_2| < 2c$$
$$2a < 2c$$
$$a < c \qquad (1)$$

Se usará este resultado en la obtención de la ecuación de una hipérbola que ahora comienza.

Remítase a la figura 2, el punto $P(x, y)$ está sobre la hipérbola si y sólo si

$$|d_1 - d_2| = 2a$$
$$|d(P, F') - d(P, F)| = 2a$$
$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

Después de eliminar radicales y signos de valor absoluto mediante el uso adecuado de elevar al cuadrado y simplificar, otro buen ejercicio para usted, se tiene

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad (2)$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \qquad (3)$$

Se permite dividir ambos lados de la ecuación (2) entre $a^2(c^2 - a^2)$, ya que ni a^2 ni $c^2 - a^2$ es 0. De la ecuación (1), $a < c$; así, $a^2 < c^2$ y $c^2 - a^2 > 0$. Al inicio se escogió la constante positiva a.

Para simplificar la ecuación (3) un poco más, se hace

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad b > 0 \qquad (4)$$

para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

De la ecuación (5) se observa que las intersecciones con el eje x, que también son los vértices, son $x = \pm a$ y que no hay intersecciones con el eje y. Para ver por qué no hay intersecciones con el eje y, haga $x = 0$ y despeje y:

$$\frac{0^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$y^2 = -b^2$$
$$y = \pm\sqrt{-b^2} \qquad \text{Un número imaginario}$$

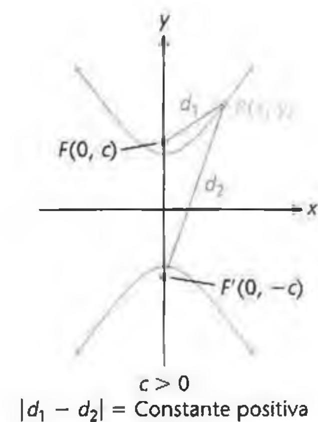


FIGURA 3 Hipérbola con focos en el eje *x*.

Si se empieza con los focos sobre el eje *y* en $F'(0, -c)$ y $F(0, c)$ como en la figura 3, en lugar de sobre el eje *x* como en la figura 2, entonces, siguiendo argumentos similares a los usados en la primera deducción, se obtiene

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

donde la relación entre *a*, *b* y *c* permanece igual que antes:

$$b^2 = c^2 - a^2 \tag{7}$$

El centro está todavía en el origen, pero el eje transversal está ahora sobre el eje *y*.

Como ayuda para graficar la ecuación (5), se despeja *y* de la ecuación en términos de *x*, otro buen ejercicio para usted, para obtener

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \tag{8}$$

Como *x* cambia de manera que $|x|$ se vuelve más grande, la expresión $1 - (a^2/x^2)$ dentro del radical se aproxima a 1. Por lo tanto, para valores grandes de $|x|$, la ecuación (5) se comporta en forma muy parecida a las rectas

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{9}$$

Estas rectas son **asíntotas** para la gráfica de la ecuación (5). La hipérbola se aproxima a estas rectas en tanto un punto $P(x, y)$ sobre la hipérbola se mueve hacia afuera del origen (véase figura 4). Una forma fácil para dibujar las asíntotas es primero dibujar el rectángulo como en la figura 4, y después extender las diagonales. A este triángulo se le conoce como **rectángulo de asíntota**.

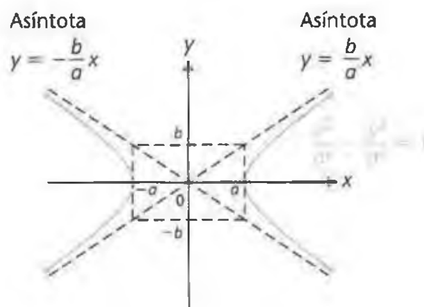


FIGURA 4 Asíntotas.

Al comenzar con la ecuación (6) y procediendo como se hizo para la ecuación (5), se obtienen las asíntotas para la gráfica de la ecuación (6):

$$y = \pm\frac{a}{b}x \tag{10}$$

El bisector perpendicular al eje transversal, que se extiende desde un lado de la asíntota rectangular hasta el otro, se llama **eje conjugado** de la hipérbola.

Dada una ecuación de la forma (5) o (6), ¿cómo se pueden encontrar las coordenadas de los focos sin memorizar u observar la relación $b^2 = c^2 - a^2$? Así como con la

elipse, hay una relación geométrica simple en una hipérbola que permite obtener el mismo resultado mediante el teorema de Pitágoras. Para ver esta relación, se vuelve a escribir $b^2 = c^2 - a^2$ en la forma

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{11}$$

Note en las siguientes figuras del teorema 1, que la distancia desde el centro a un foco es la misma que la distancia desde el centro a una esquina del rectángulo de asíntota. Dicho de otra forma:

Un círculo, con centro en el origen, que pasa por las cuatro esquinas del rectángulo de asíntota, también pasa por los cuatro focos de las hipérbolas con las asíntotas determinadas por las diagonales del rectángulo.

Se resumen todos los resultados anteriores en el teorema 1 para una referencia adecuada.

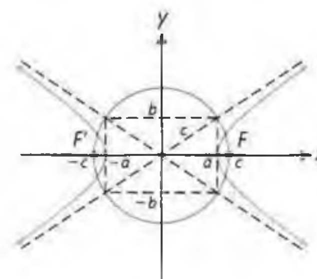
Teorema 1 **Ecuaciones estándar de una hipérbola con centro en (0, 0)**

1. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Intersecciones en x: $\pm a$ (vértices)
Intersecciones en y: ninguna
Focos: $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Longitud del eje transversal = $2a$
Longitud del eje conjugado = $2b$

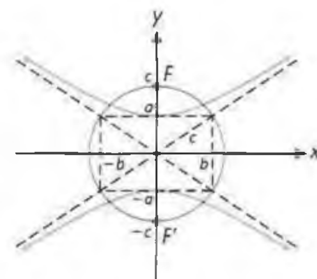


2. $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

Intersecciones en x: ninguna
Intersecciones en y: $\pm a$ (vértices)
Focos: $F'(0, -c)$, $F(0, c)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Longitud del eje transversal = $2a$
Longitud del eje conjugado = $2b$



[*Nota*: Ambas gráficas son simétricas con respecto al eje x, al eje y y al origen.]

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 La recta que pasa por un foco F de una hipérbola que es perpendicular al eje transversal, intersecta la hipérbola en dos puntos G y H. Para cada una de las dos ecuaciones estándar de una hipérbola con centro (0, 0), encuentre una expresión en términos de a y b para la distancia G a H.

EJEMPLO 1

Graficación de hipérbolas

Trace la gráfica de cada ecuación, encuentre las coordenadas de los focos y también las longitudes de los ejes transversal y conjugado.

(A) $9x^2 - 16y^2 = 144$ (B) $16y^2 - 9x^2 = 144$ (C) $2x^2 - y^2 = 10$

Soluciones

(A) Primero, escriba la ecuación en forma estándar dividiendo ambos lados entre 144:

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad a^2 = 16 \text{ y } b^2 = 9$$

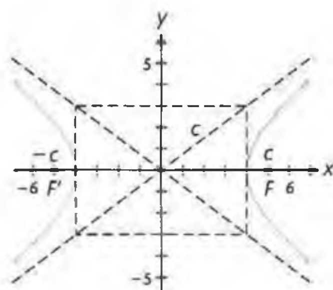


FIGURA 5 $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Localice las intersecciones con el eje x, $x = \pm 4$; no hay intersecciones con el eje y. Trace las asíntotas usando el rectángulo de asíntota, después trace en la hipérbola (figura 5).

$$\text{Focos:} \quad c^2 = a^2 + b^2$$
$$= 16 + 9$$
$$= 25$$
$$c = 5$$

Por consiguiente, los focos son $F'(-5, 0)$ y $F(5, 0)$

Longitud del eje transversal $= 2(4) = 8$

Longitud del eje conjugado $= 2(3) = 6$

(B)

$$16y^2 - 9x^2 = 144$$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 \qquad a^2 = 9 \text{ y } b^2 = 16$$

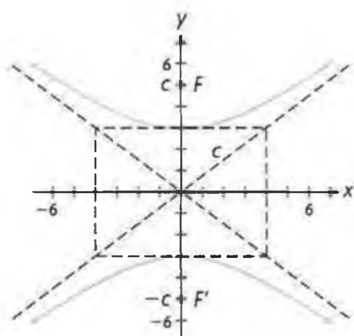


FIGURA 6 $16y^2 - 9x^2 = 144$.

Localice las intersecciones con el eje y, $y = \pm 3$; no hay intersecciones con el eje x. Trace las asíntotas usando el rectángulo de asíntota, después trace en la hipérbola (fi-gura 6). Esto es importante para notar que el eje transversal y los focos están sobre el eje y.

$$\text{Focos:} \quad c^2 = a^2 + b^2$$
$$= 16 + 9$$
$$= 25$$
$$c = 5$$

De manera que los focos son $F'(0, -5)$ y $F(0, 5)$

Longitud del eje transversal $= 2(3) = 6$

Longitud del eje conjugado $= 2(4) = 8$

(C)

$$2x^2 - y^2 = 10$$

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{10} = 1 \qquad a^2 = 5 \text{ y } b^2 = 10$$

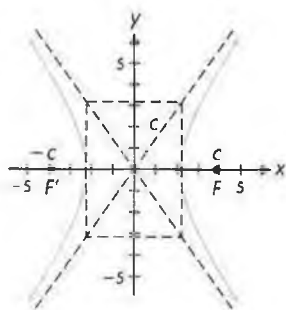


FIGURA 7 $2x^2 - y^2 = 10$.

Localice las intersecciones con el eje x, $x = \pm\sqrt{5}$; no hay intersecciones con el eje y. Trace las asíntotas usando el rectángulo de asíntota, después trace en la hipérbola (figura 7).

$$\text{Focos: } c^2 = a^2 + b^2$$
$$= 5 + 10$$
$$= 15$$
$$c = \sqrt{15}$$

De modo que los focos son $F'(-\sqrt{15}, 0)$ y $F(\sqrt{15}, 0)$.

$$\text{Longitud del eje transversal} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$$

$$\text{Longitud del eje conjugado} = 2\sqrt{10} \approx 6.32$$

Comentario. Para graficar la ecuación $9x^2 - 16y^2 = 144$ del ejemplo 1(A) en un dispositivo de graficación, primero se despeja y de la ecuación, y se obtiene $y = \pm\sqrt{\frac{9x^2 - 144}{16}}$. Después se grafica cada una de las dos funciones. La gráfica de $y = \sqrt{\frac{9x^2 - 144}{16}}$ es la mitad superior de la hipérbola, y la gráfica de $y = -\sqrt{\frac{9x^2 - 144}{16}}$ es la mitad inferior.

Problema seleccionado 1

Trace la gráfica de cada ecuación, encuentre las coordenadas de los focos, y también las longitudes de los ejes transversal y conjugado.

(A) $16x^2 - 25y^2 = 400$ (B) $25y^2 - 16x^2 = 400$ (C) $y^2 - 3x^2 = 12$

Hipérbolas de la forma

$$\frac{x^2}{M} - \frac{y^2}{N} = 1 \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{N} - \frac{x^2}{M} = 1 \qquad M, N > 0$$

se llaman **hipérbolas conjugadas**. En el ejemplo 1 y en el problema seleccionado 1, las hipérbolas en los incisos (A) y (B) son hipérbolas conjugadas (comparten las mismas asíntotas).

PRECAUCION Cuando haga un trazo rápido de una parábola, es un error común tener la hipérbola abriendo hacia arriba y abajo cuando debe abrir a la izquierda y derecha, o viceversa. Este error se puede evitar si primero se localizan las intersecciones de manera exacta.

EJEMPLO 2 **Determinación de la ecuación de una hipérbola**

Encuentre una ecuación de una hipérbola en la forma

$$\frac{y^2}{M} - \frac{x^2}{N} = 1 \qquad M, N > 0$$

Si el centro está en el origen, y:

(A) Longitud del eje transversal es 12
Longitud del eje conjugado es 20

(B) Longitud del eje transversal es 6
La distancia de los focos desde el centro es 5

Soluciones (A) Comience con

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

y encuentre a y b:

$$a = \frac{12}{2} = 6 \qquad \text{y} \qquad b = \frac{20}{2} = 10$$

Así que, la ecuación es

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{100} = 1$$

(B) Comience con

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

y encuentre a y b:

$$a = \frac{6}{2} = 3$$

Para encontrar b, trace el rectángulo de asíntota (figura 8), marque las partes conocidas y use el teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} b^2 &= 5^2 - 3^2 \\ &= 16 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

Así, la ecuación es

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

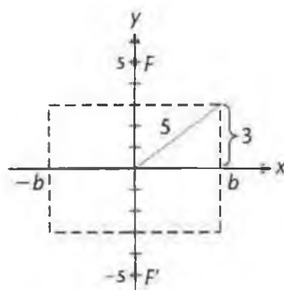


FIGURA 8 Rectángulo asíntota.

Problema seleccionado 3 Encuentre una ecuación de una hipérbola en la forma

$$\frac{x^2}{M} - \frac{y^2}{N} = 1 \qquad M, N > 0$$

Si el centro está en el origen, y:

(A) La longitud del eje transversal es 50
La longitud del eje conjugado es 30

(B) La longitud del eje transversal es 12
La distancia de los focos desde el centro es 9

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2

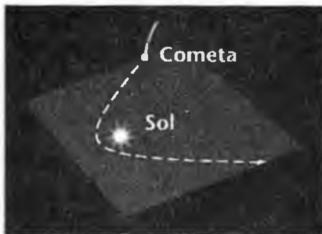
(A) ¿La recta con la ecuación $y = x$ intersecta la hipérbola con la ecuación $x^2 - (y^2/4) = 1$? Si es así, encuentre las coordenadas de todos los puntos de intersección.

(B) ¿La recta con la ecuación $y = 3x$ intersecta la hipérbola con la ecuación $x^2 - (y^2/4) = 1$? Si es así, encuentre las coordenadas de todos los puntos de intersección.

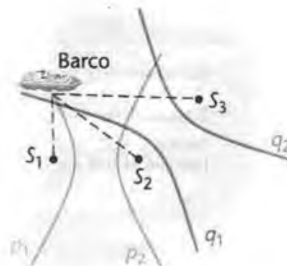
(C) ¿Para qué valores de m la recta con la ecuación $y = mx$ intersecta la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$? Encuentre las coordenadas de todos los puntos de intersección.

Aplicaciones

Quizá no se dé cuenta de los muchos usos importantes de las formas hiperbólicas. Se encuentran en el estudio de cometas; el Sistema Loran de navegación para cruceros, barcos y aviones; movimiento de capilaridad y torres de enfriamiento nuclear, óptica y radiotelescopios; y estructuras arquitectónicas contemporáneas. El edificio de la compañía de aviación TWA en el aeropuerto Kennedy es un *paraboloide hiperbólico*, y el planetario del centro de la ciencia en St Louis, Estados Unidos, es un *hiperboloide* (véase figura 9).



Cometa alrededor del Sol
(a)



Navegación Loran
(b)



Planetario de St. Louis
(c)

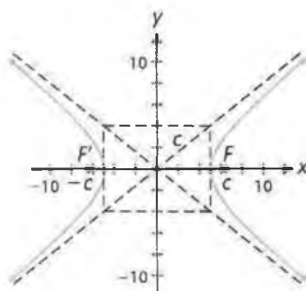
FIGURA 9 Usos de formas hiperbólicas.

Algunos cometas del espacio exterior ocasionalmente entran al campo gravitacional del Sol, siguen una trayectoria hiperbólica alrededor del Sol (con el Sol en un foco), y

después salen, para no volver a aparecer [figura 9(a)]. En el Sistema Loran de navegación, las estaciones transmiten en tres puntos, S_1, S_2 y S_3 [figura 9(b)], envían señales simultáneamente. Un barco con un receptor registra la diferencia en los tiempos de llegada de las señales de S_1 y S_2 y también registra la diferencia en los tiempos de llegada de las señales de S_2 y S_3. La diferencia en los tiempos de llegada se puede transformar en diferencias de las distancias que el barco está en S_1 y S_2 y entre S_2 y S_3. Al trazar todos los puntos de manera que esas diferencias en distancia permanezcan constantes produce dos ramas p_1 y p_2, de una hipérbola con focos S_1 y S_2 y dos ramas, q_1 y q_2, de una hipérbola con focos S_2 y S_3. Es fácil indicar en cuál forma está el barco al advertir los tiempos de llegada de las señales de cada estación. La intersección de una rama desde cada hipérbola ubica el barco. La mayoría de estos cálculos se hacen ahora en computadoras a bordo del barco, y se indican las posiciones en longitud y latitud. Este sistema de navegación es ampliamente usado en navegación costera. Las económicas unidades Loran ahora se encuentran en muchos pequeños barcos de diversión. La figura 9 (c) ilustra un paraboloide usado en arquitectura. Con tales estructuras, cascarones delgados de concreto pueden salvar espacios grandes.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A)



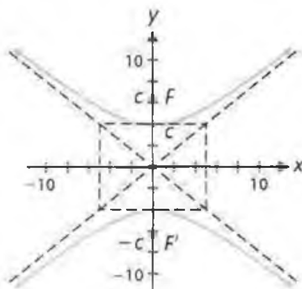
$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

Focos: $F'(-\sqrt{41}, 0)$, $F(\sqrt{41}, 0)$

Longitud del eje transversal = 10

Longitud del eje conjugado = 8

(B)



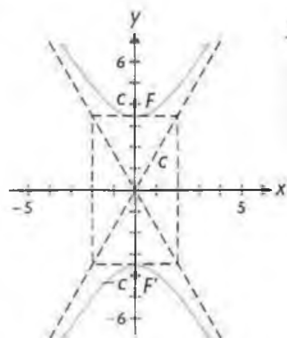
$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{25} = 1$

Focos: $F'(0, -\sqrt{41})$, $F(0, \sqrt{41})$

Longitud del eje transversal = 8

Longitud del eje conjugado = 10

(C)



$\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$

Focos: $F'(0, -4)$, $F(0, 4)$

Longitud del eje transversal = $2\sqrt{12} \approx 6.93$

Longitud del eje conjugado = 4

2. (A) $\frac{x^2}{625} - \frac{y^2}{225} = 1$ (B) $\frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{36} = 1$

EJERCICIO 11-3

A

Trace una gráfica de cada ecuación en los problemas del 1 al 8, encuentre las coordenadas de los focos y las longitudes de los ejes transversal y conjugado.

1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$

3. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

4. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{9} = 1$

5. $4x^2 - y^2 = 16$

6. $x^2 - 9y^2 = 9$

7. $9y^2 - 16x^2 = 144$

8. $4y^2 - 25x^2 = 100$

B

Trace una gráfica de cada ecuación en los problemas del 9 al 12, encuentre las coordenadas de los focos y las longitudes de los ejes transversal y conjugado.

9. $3x^2 - 2y^2 = 12$

10. $3x^2 - 4y^2 = 24$

11. $7y^2 - 4x^2 = 28$

12. $3y^2 - 2x^2 = 24$

En los problemas del 13 al 20, encuentre una ecuación de una hipérbola en la forma

$$\frac{x^2}{M} - \frac{y^2}{N} = 1 \quad o \quad \frac{y^2}{N} - \frac{x^2}{M} = 1 \quad M, N > 0$$

si el centro está en el origen, y:

13. El eje transversal está en el eje x
Longitud del eje transversal = 14
Longitud del eje conjugado = 10

14. El eje transversal está en el eje x
Longitud del eje transversal = 8
Longitud del eje conjugado = 6

15. El eje transversal está en el eje y
Longitud del eje transversal = 24
Longitud del eje conjugado = 18

16. El eje transversal está en el eje y
Longitud del eje transversal = 16
Longitud del eje conjugado = 22

17. El eje transversal está en el eje x
Longitud del eje transversal = 18
Distancia de los focos desde el centro = 11

18. El eje transversal está en el eje x
Longitud del eje transversal = 16
Distancia de los focos desde el centro = 10

19. El eje conjugado está en el eje x
Longitud del eje conjugado = 14
Distancia de los focos desde el centro = $\sqrt{200}$

20. El eje conjugado está en el eje x
Longitud del eje conjugado = 10
Distancia de los focos desde el centro = $\sqrt{70}$

21. (A) ¿Cuántas hipérbolas tienen su centro en (0, 0) y su foco en (1, 0)? Encuentre sus ecuaciones.
(B) ¿Cuántas elipses tienen su centro en (0, 0) y su foco en (1, 0)? Encuentre sus ecuaciones.
(C) ¿Cuántas parábolas tienen su centro en (0, 0) y su foco en (1, 0)? Encuentre sus ecuaciones.

22. ¿Cuántas hipérbolas tienen las rectas $y = \pm 2x$ como asíntotas? Encuentre sus ecuaciones.

En los problemas del 23 al 26, grafique cada sistema de ecuaciones en el mismo sistema coordenado rectangular y encuentre las coordenadas de cualquier punto de intersección.

Compruebe los problemas del 23 al 26 con un dispositivo de graficación.

23. $3y^2 - 4x^2 = 12$
$y^2 + x^2 = 25$

24. $y^2 - x^2 = 3$
$y^2 + x^2 = 5$

25. $2x^2 + y^2 = 24$
$x^2 - y^2 = -12$

26. $2x^2 + y^2 = 17$
$x^2 - y^2 = -5$

En los problemas del 27 al 30, encuentre todos los puntos de intersección para cada sistema de ecuaciones con tres cifras decimales.

Compruebe los problemas del 27 al 30 con un dispositivo de graficación.

27. $y^2 - x^2 = 9$
$2y - x = 8$
$y \geq 0$

28. $y^2 - x^2 = 4$
$y - x = 6$
$y \geq 0$

29. $y^2 - x^2 = 4$
$y^2 + 2x^2 = 36$
$y \geq 0$

30. $y^2 - x^2 = 1$
$2y^2 + x^2 = 16$
$y \geq 0$

C

Excentricidad. *Los problemas 31 y 32, que se incluyen en seguida, y los problemas 31 y 32 de la sección de ejercicios 11-2 están relacionados con una propiedad de las cónicas llamada* **excentricidad,** *la cual se denota por un número real positivo E. Las parábolas, elipses e hipérbolas se pueden definir en términos de E, un punto fijo llamado foco, y una recta que no contiene el foco llamada directriz, como sigue: El conjunto de puntos en un plano cada uno con una distancia desde un punto fijo es E veces la distancia desde una recta fija, es una elipse si $0 < E < 1$, una parábola si $E = 1$ y una hipérbola si $E > 1$.*

31. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos en un plano cuya distancia desde (3, 0) sea tres medios su distancia desde la recta $x = \frac{4}{3}$. Identifique la figura geométrica.

32. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos en un plano cuya distancia desde (0, 4) sea cuatro tercios de la distancia desde la recta $y = \frac{9}{4}$. Identifique la figura geométrica.

En los problemas del 33 al 36, use un dispositivo de graficación para encontrar las coordenadas de todos los puntos de intersección con dos cifras decimales.

33. $2x^2 - 3y^2 = 20,\ 7x + 15y = 10$

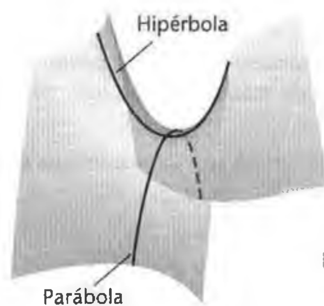
34. $y^2 - 3x^2 = 8,\ x^2 = -\frac{y}{3}$

35. $24y^2 - 18x^2 = 175,\ 90x^2 + 3y^2 = 200$

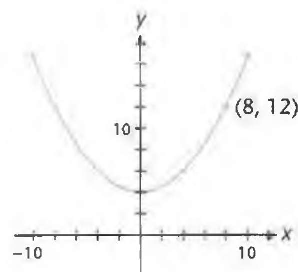
36. $8x^2 - 7y^2 = 58,\ 4y^2 - 11x^2 = 45$

APLICACIONES

37. Arquitectura. Un arquitecto está interesado en el diseño de un domo de cascarón delgado en forma de un paraboloide hiperbólico, como se muestra en la figura (a). Encuentre la ecuación de la hipérbola localizada en un sistema coordenado [figura (b)] que satisfaga las condiciones indicadas. ¿A qué distancia está la hipérbola por arriba del vértice 6 pies a la derecha del vértice? Calcule la respuesta con dos cifras decimales.



Paraboloide hiperbólico
(a)



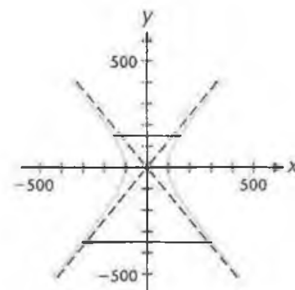
Parte de la hipérbola del domo
(b)

38. Planta de potencia nuclear. Una torre de enfriamiento nuclear es un **hiperboloide**, es decir, una hipérbola que gira alrededor de su eje conjugado como se muestra en la figura (a). La ecuación de la hipérbola en la figura (b) usada para generar el hiperboloide es

$$\frac{x^2}{100^2} - \frac{y^2}{150^2} = 1$$



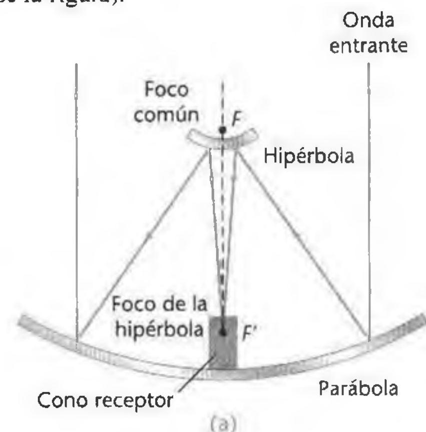
Torre de enfriamiento nuclear
(a)



Parte hiperbólica del domo
(b)

Si la torre tiene una altura de 500 pies, el techo está a 150 pies arriba del centro de la hipérbola y la base está a 350 del centro, ¿cuál es el radio del techo y de la base? ¿Cuál es el radio de la más pequeña sección transversal circular de la torre? Calcule su respuesta con tres dígitos significativos.

39. Ciencia espacial. Para rastrear sondas espaciales en otros planetas, la NASA usa grandes reflectores parabólicos con diámetros igual a dos tercios de la longitud de un campo de futbol. No se necesita mencionar, que muchos problemas de diseño se crean por el peso de esos reflectores. Un problema con el peso se resuelve usando un reflector de forma hiperbólica que comparte el foco de la parábola para reflejar las ondas electromagnéticas que llegan al otro foco de la hipérbola donde se tiene equipo receptor ya instalado (véase la figura).



(a)



(b)

Para la antena de recepción mostrada en la figura, el foco común está localizado 120 pies por encima del vértice de la parábola y el foco F'(para la hipérbola) está 20 pies arriba del vértice. El vértice de la hipérbola reflectora está a 110 pies arriba del vértice de la parábola. Se introduce un sistema coordenado para usar al eje de la parábola como el eje y (positivo hacia arriba), y el eje x pasa por el centro de la hipérbola (positivo hacia la derecha). ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola reflectora? Escriba y en términos de x.

SECCIÓN 11-4 Traslación de ejes

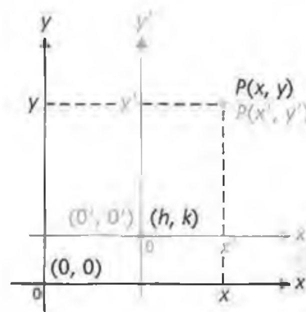
- Traslación de ejes
- Ecuaciones estándar de las cónicas trasladadas
- Graficación de ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
- Determinación de las ecuaciones de cónicas

En las últimas tres secciones se han encontrado ecuaciones estándar para parábolas, elipses e hipérbolas cuyos ejes respectivos están centrados sobre los ejes coordenados y centradas con respecto al origen. ¿Qué pasa si se desplazan las cónicas del origen manteniendo sus ejes paralelos a los ejes coordenados? Ahora se mostrará que se pueden obtener las nuevas ecuaciones estándar que son casos especiales de la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ donde A y C no son ambas iguales a cero. La herramienta matemática básica usada en este intento es la *traslación de ejes*. Sin embargo, la utilidad de la traslación de ejes no se limita a la graficación de cónicas. La traslación de ejes también se puede usar muy bien en otras situaciones de graficación.

• Traslación de ejes

Una **traslación de ejes coordenados** ocurre cuando los nuevos ejes coordenados tienen la misma dirección, es decir, que son paralelos a los ejes coordenados originales. Para ver cómo cambian las coordenadas en el sistema original cuando se mueve al sistema trasladado, y viceversa, véase la figura 1.

FIGURA 1 Traslación de ejes coordenados.



Un punto P en el plano tiene dos conjuntos de coordenadas: (x, y) en el sistema original y (x', y') en el sistema trasladado. Si las coordenadas del origen del sistema trasladado son (h, k), con respecto al sistema original. entonces las viejas y las nuevas coordenadas están relacionadas de acuerdo con el teorema 1.

Teorema 1 **Fórmulas de traslación**

1. $x = x' + h$ **2.** $x' = x - h$

$y = y' + k$ $y' = y - k$

Se puede mostrar que estas fórmulas para (h, k) se localizan en cualquier lugar en el sistema coordenado original.

EJEMPLO 1 **Ecuación de una curva en un sistema trasladado.**

Una curva tiene la ecuación

$$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 36$$

Si el origen se traslada a $(4, -1)$, encuentre la ecuación de la curva en el sistema trasladado e identifique la curva.

Solución Ya que $(h, k) = (4, -1)$, usando las fórmulas de traslación.

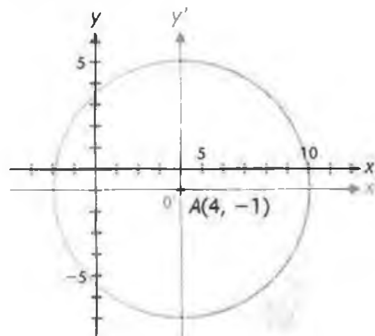
$$x' = x - h = x - 4$$
$$y' = y - k = y + 1$$

después de sustituir. se obtiene

$$x'^2 + y'^2 = 36$$

Ésta es la ecuación de un círculo de radio 6 con centro en el nuevo origen. Las coordenadas del nuevo origen en el sistema coordenado original son $(4, -1)$ (véase la figura 2). Observe que este resultado concuerda con el tratamiento general del círculo hecho en la sección 2-1.

FIGURA 2
$(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 36$.



Problema seleccionado 1

Una curva tiene la ecuación $(y + 2)^2 = 8(x - 3)$. Si el origen se traslada a $(3, -2)$ encuentre una ecuación de la curva en el sistema trasladado e identifique la curva.

▪ Ecuaciones estándar de las cónicas trasladadas

Ahora se procede a encontrar las ecuaciones estándar de cónicas trasladadas lejos de su origen. Para hacer esto, primero se escriben las ecuaciones estándar encontradas en secciones anteriores en el sistema coordenado $x'y'$ con $0'$ en (h, k). Después se usan las ecuaciones de traslación para encontrar las formas estándares con respecto al sistema coordenado original xy. Las ecuaciones de traslación en todos los casos son

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$

Para parábolas se tiene

$$x'^2 = 4ay' \qquad (x - h)^2 = 4a(y - k)$$
$$y'^2 = 4ax' \qquad (y - k)^2 = 4a(x - h)$$

Para círculos se tiene

$$x'^2 + y'^2 = r^2 \qquad (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

En elipses se tiene para $a > b > 0$

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \qquad \frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

Para hipérbolas se tiene

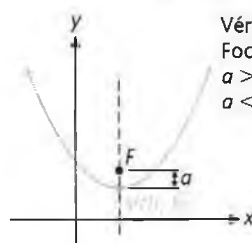
$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y - k)^2}{a^2} + \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

La tabla 1 resume estos resultados con las figuras apropiadas y algunas propiedades analizadas anteriormente.

TABLA 1 Ecuaciones estándar para cónicas trasladadas

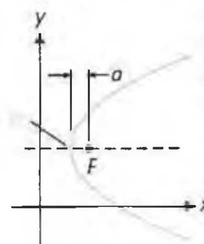
Parábolas

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$



Vértice (h, k)
Focos $(h, k+a)$
$a > 0$ abre hacia arriba
$a < 0$ abre hacia abajo

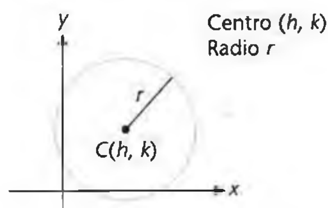
$$(y-k)^2 = 4a(x-h)$$



Vértice (h, k)
Focos $(h+a, k)$
$a < 0$ abre hacia la izquierda
$a > 0$ abre hacia la derecha

Círculos

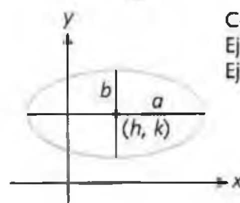
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$



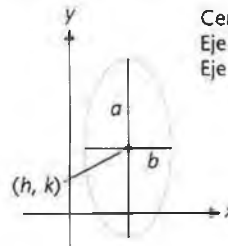
Centro (h, k)
Radio r

Elipses

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad a > b > 0 \qquad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



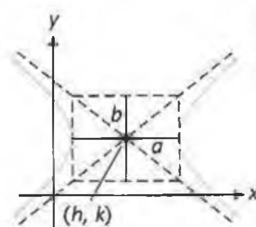
Centro (h, k)
Eje mayor $2a$
Eje menor $2b$



Centro (h, k)
Eje mayor $2a$
Eje menor $2b$

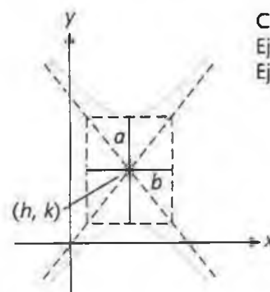
Hipérbolas

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Centro (h, k)
Eje transversal $2a$
Eje conjugado $2b$

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



Centro (h, k)
Eje transversal $2a$
Eje conjugado $2b$

• Graficación de ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Se puede mostrar que la gráfica de

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

donde A y C no son ambas cero, es una cónica o una cónica degenerada o no es una gráfica. Si se puede transformar la ecuación (1) a una de las formas estándar de la tabla 1, entonces se podrá identificar su gráfica y dibujarla rápidamente. El proceso de completar el cuadrado analizado en la sección 1-6 es la herramienta básica para realizar esta transformación. Un par de ejemplos podrían ayudar a aclarar este proceso.

EJEMPLO 2 **Graficación de una cónica trasladada**

Transforme

$$y^2 - 6y - 4x + 1 = 0 \tag{2}$$

en una de las formas estándares de la tabla 1. Identifique la cónica y grafíquela.

Solución

Paso 1. Complete el cuadrado en la ecuación (2) respecto a cada variable que esté en el cuadrado, en este caso y:

$$\begin{aligned} y^2 - 6y - 4x + 1 &= 0 \\ y^2 - 6y \qquad &= 4x - 1 \\ y^2 - 6y \quad + 9 &= 4x + 8 \\ (y - 3)^2 &= 4(x + 2) \end{aligned} \tag{3}$$

Sume 9 a ambos lados a completar el cuadrado en el lado izquierdo.

De la tabla 1, se reconoce la ecuación (3) como una ecuación de una parábola que se abre hacia la derecha con vértice en $(h, k) = (-2, 3)$.

Paso 2. Encuentre la ecuación de la parábola en el sistema trasladado con origen $0'$ en $(h, k) = (-2, 3)$. Las ecuaciones de traslación están directamente indicadas de la ecuación (3):

$$x' = x + 2$$
$$y' = y - 3$$

Haciendo estas sustituciones en la ecuación (3) se obtiene

$$y'^2 = 4x' \tag{4}$$

la ecuación de la parábola en el sistema $x'y'$.

Paso 3. Grafique la ecuación (4) en el sistema $x'y'$ siguiendo el proceso analizado en la sección 11-1. La gráfica resultante es la gráfica de la ecuación original con respecto al sistema coordenado original xy (figura 3).

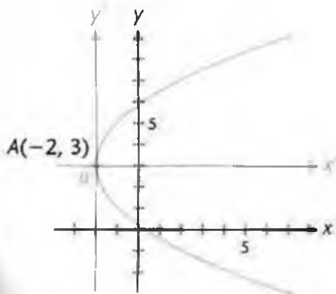


FIGURA 3
$y^2 - 6y - 4x + 1 = 0$.

Problema seleccionado 2 Transforme

$$x^2 + 4x + 4y - 12 = 0$$

en una de las formas estándar de la tabla 1. Identifique la cónica y grafíquela.

EJEMPLO 3 **Gráfica de una cónica trasladada**

Transforme

$$9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$$

en una de las formas estándar de la tabla 1. Identifique la cónica y grafíquela. Encuentre las coordenadas de cualquiera de sus focos con respecto al sistema original.

Solución *Paso 1.* Complete el cuadrado con respecto a x y y.

$$\begin{aligned} 9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 &= 0 \\ 9x^2 - 36x \qquad - 4y^2 - 24y \qquad &= 36 \\ 9(x^2 - 4x \qquad) - 4(y^2 + 6y \qquad) &= 36 \\ 9(x^2 - 4x + 4) - 4(y^2 + 6y + 9) &= 36 + 36 - 36 \\ 9(x - 2)^2 - 4(y + 3)^2 &= 36 \\ \frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+3)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

De la tabla 1 reconozca la última ecuación como una ecuación de una hipérbola que abre a la izquierda o a la derecha con centro en $(h, k) = (2, -3)$.

Paso 2. Encuentre la ecuación de la hipérbola en el sistema trasladado con el origen $0'$ en $(h, k) = (2, -3)$. Las ecuaciones de traslación se leen directamente de la última ecuación en el paso 1:

$$x' = x - 2$$
$$y' = y + 3$$

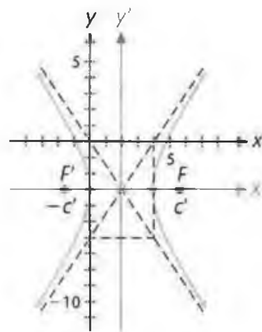
Haciendo estas sustituciones, se obtiene

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1$$

la ecuación de la hipérbola en el sistema $x'y'$.

Paso 3. Grafique la ecuación obtenida en el paso 2 en el sistema $x'y'$ siguiendo el proceso analizado en la sección 11-3. La gráfica resultante es la gráfica de la ecuación original respecto al sistema coordenado original xy (figura 4).

FIGURA 1
$9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0.$



Paso 4. Encuentre las coordenadas de los focos. Encuentre las coordenadas de los focos en el sistema trasladado:

$$c'^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$
$$c' = \sqrt{13}$$
$$-c' = -\sqrt{13}$$

Así, las coordenadas en el sistema trasladado son

$$F'(-\sqrt{13}, 0) \qquad \text{y} \qquad F(\sqrt{13}, 0)$$

Ahora, use

$$x = x' + h = x' + 2$$
$$y = y' + k = y' - 3$$

para obtener

$$F'(-\sqrt{13} + 2, -3) \qquad \text{y} \qquad F(\sqrt{13} + 2, -3)$$

que son las coordenadas de los focos en el sistema original.

Problema seleccionado 3 Transforme

$$9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 92 = 0$$

en una de las formas estándar de la tabla 1. Identifique la cónica y grafíquela. Encuentre las coordenadas de cualquiera de los focos con respecto al sistema original.

Comentario. Un dispositivo de graficación proporciona un enfoque alternativo para graficar ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Considere, por ejemplo, la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$ del ejemplo 3. Se escribe la ecuación como una ecuación cuadrática en la variable y: $4y^2 + 24y + (-9x^2 + 36x + 36) = 0$.

Por la fórmula cuadrática $y = \dfrac{-24 \pm \sqrt{24^2 - 16f(x)}}{8}$, donde $f(x) = -9x^2 + 36x + 36$.

Después grafique cada una de las dos funciones en la expresión para y. La gráfica de $y = \dfrac{-24 + \sqrt{24^2 - 16f(x)}}{8}$, es la mitad superior de la hipérbola y la gráfica de $y = \dfrac{-24 - \sqrt{24^2 - 16f(x)}}{8}$ es la mitad inferior.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Si $A \neq 0$ y $C \neq 0$, muestre que la traslación de los ejes $x' = x + \dfrac{D}{2A}$, $y' = y + \dfrac{E}{2C}$ transforma la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en una ecuación de la forma $Ax'^2 + Cy'^2 = K$.

Determinación de las ecuaciones de cónicas

Ahora se invertirá el problema: Dada cierta información acerca de una cónica en un sistema coordenado rectangular, encuentre su ecuación.

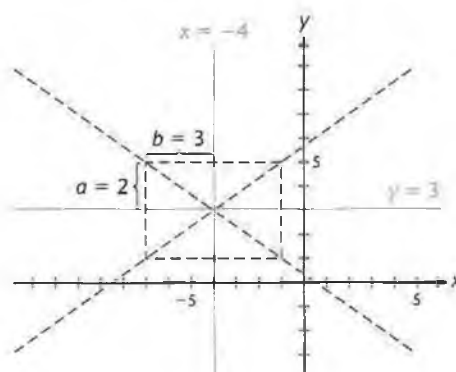
EJEMPLO 4

Determinación de la ecuación de una cónica trasladada

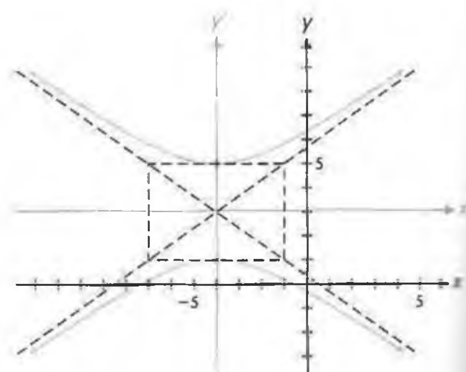
Encuentre la ecuación de una hipérbola con vértices en la recta $x = -4$, el eje conjugado está en la recta $y = 3$, la longitud del eje transversal $= 4$ y la longitud del eje conjugado $= 6$.

Solución Localice los vértices, las asíntotas rectangulares y las asíntotas en el sistema coordenado original [figura 5(a)], después grafique la hipérbola y traslade el origen al centro de la hipérbola [figura 5(b)].

FIGURA 5



(a) Rectángulo asíntota



(b) Hipérbola

Ahora se escribe la ecuación de la hipérbola en el sistema trasladado:

$$\frac{y'^2}{4} - \frac{x'^2}{9} = 1$$

El origen del sistema trasladado está en $(h, k) = (-4, 3)$ y las fórmulas de traslación son

$$x' = x - h = x - (-4) = x + 4$$
$$y' = y - k = y - 3$$

Por consiguiente, la ecuación de la hipérbola en el sistema original es

$$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{9} = 1$$

o, después simplificando y escribiendo en la forma de la ecuación (1),

$$4x^2 - 9y^2 + 32x + 54y + 19 = 0$$

Problema seleccionado 4 Encuentre la ecuación de una elipse con focos sobre la recta $x = 4$, eje menor sobre la recta $y = -3$, longitud del eje mayor $= 8$, y longitud del eje menor $= 4$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Use la estrategia de completar el cuadrado para transformar cada ecuación en una ecuación en un sistema coordenado $x'y'$. Observe que la ecuación no está en una de las formas estándar de la tabla 1; ya sea la ecuación de una cónica degenerada o la ecuación no tiene solución. Si el conjunto solución de la ecuación no es vacío grafíquela e identifique la gráfica (un punto, una recta, dos rectas paralelas o dos rectas que se intersectan).

(A) $x^2 + 2y^2 - 2x + 16y + 33 = 0$

(B) $4x^2 - y^2 - 24x - 2y + 35 = 0$

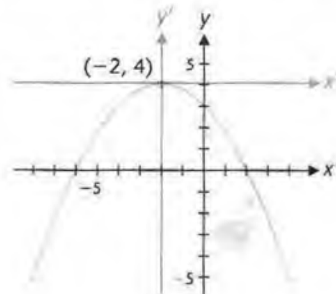
(C) $y^2 - 2y - 15 = 0$

(D) $5x^2 + y^2 + 12y + 40 = 0$

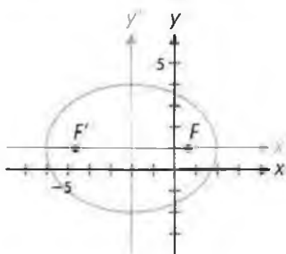
(E) $x^2 - 18x + 81 = 0$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $y'^2 = 8x'$; una parábola
2. $(x + 2)^2 = -4(y - 4)$; una parábola



3. $\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$; elipse foco: $F'(-\sqrt{7}-2, 1)$, $F(\sqrt{7}-2, 1)$



4. $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$, o $4x^2 + y^2 - 32x + 6y + 57 = 0$

EJERCICIO 11-4

A

En los problemas del 1 al 8:

(A) Encuentre las fórmulas de traslación que trasladen el origen al punto indicado (h, k).
(B) Escriba la ecuación de la curva para el sistema trasladado.
(C) Identifique la curva.

1. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 81$; $(3, 5)$
2. $(x-3)^2 = 8(y+2)$; $(3, -2)$
3. $\frac{(x+7)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$; $(-7, 4)$
4. $(x+2)^2 + (y+6)^2 = 36$; $(-2, -6)$
5. $(y+9)^2 = 16(x-4)$; $(4, -9)$
6. $\frac{(y-9)^2}{10} - \frac{(x+5)^2}{6} = 1$; $(-5, 9)$
7. $\frac{(x+8)^2}{12} + \frac{(y+3)^2}{8} = 1$; $(-8, -3)$
8. $\frac{(x+7)^2}{25} - \frac{(y-8)^2}{50} = 1$; $(-7, 8)$

En los problemas del 9 al 14:

(A) Escriba cada ecuación en una de las formas estándar enlistadas en la tabla 1.
(B) Identifique la curva.

9. $16(x-3)^2 - 9(y+2)^2 = 144$
10. $(y+2)^2 - 12(x-3) = 0$
11. $6(x+5)^2 + 5(y+7)^2 = 30$
12. $12(y-5)^2 - 8(x-3)^2 = 24$
13. $(x+6)^2 + 24(y-4) = 0$
14. $4(x-7)^2 + 7(y-3)^2 = 28$

B

En los problemas del 15 al 22, transforme cada ecuación en una de las formas estándar de la tabla 1. Identifique la curva y grafíquela.

15. $4x^2 + 9y^2 - 16x - 36y + 16 = 0$
16. $16x^2 + 9y^2 + 64x + 54y + 1 = 0$
17. $x^2 + 8x + 8y = 0$
18. $y^2 + 12x + 4y - 32 = 0$
19. $x^2 + y^2 + 12x + 10y + 45 = 0$
20. $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$
21. $-9x^2 + 16y^2 - 72x - 96y - 144 = 0$
22. $16x^2 - 25y^2 - 160x = 0$
23. Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, encuentre h y k de modo que la traslación de los ejes $x = x' + h$, $y = y' + k$ transforme la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en una de las formas estándar de la tabla 1.
24. Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, encuentre h y k de modo que la traslación de los ejes $x = x' + h$, $y = y' + k$ transforme la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ en una de las formas estándar de la tabla 1.

En los problemas del 25 al 32, use la información dada para encontrar la ecuación de cada cónica. Exprese la respuesta en la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con coeficientes enteros y $A > 0$.

25. Una parábola con vértice en $(2, 5)$, eje en la recta $x = 2$, y que pasa por el punto $(-2, 1)$.
26. Una parábola con vértice $(4, -1)$, eje en la recta $y = -1$, y que pasa por el punto $(2, 3)$.
27. Una elipse con su eje mayor en la recta $y = -3$, su eje menor en la recta $x = -2$, longitud del eje mayor $= 8$ y longitud del eje menor $= 4$.

28. Una elipse con su eje mayor en la recta $x = -4$, su eje menor en la recta $y = 1$, longitud del eje mayor $= 4$ y longitud del eje menor $= 2$.

29. Una elipse con vértices en $(4, -7)$ y $(4, 3)$ y focos $(4, -6)$ y $(4, 2)$.

30. Una elipse con vértices en $(-3, 1)$ y $(7, 1)$ y focos $(-1, 1)$ y $(5, 1)$.

31. Una hipérbola con eje transversal sobre la recta $x = 2$, longitud del eje transversal $= 4$, el eje conjugado sobre la recta $y = 3$ y longitud del eje conjugado $= 2$.

32. Una hipérbola con el eje transversal sobre la recta $y = -5$, longitud del eje transversal $= 6$, el eje conjugado sobre la recta $x = 2$ y longitud del eje conjugado $= 6$.

C

En los problemas del 33 al 38 encuentre las coordenadas de cualquiera de los focos con respecto al sistema coordenado original.

33. Problema 15
34. Problema 16
35. Problema 17
36. Problema 18
37. Problema 21
38. Problema 22

En los problemas del 39 al 42, use un dispositivo de graficación para encontrar las coordenadas de todos los puntos de intersección con dos cifras decimales.

39. $3x^2 - 5y^2 + 7x - 2y + 11 = 0$, $6x + 4y = 15$

40. $8x^2 + 3y^2 - 14x + 17y - 39 = 0$, $5x - 11y = 23$

41. $7x^2 - 8x + 5y - 25 = 0$, $x^2 + 4y^2 + 4x - y - 12 = 0$

42. $4x^2 - y^2 - 24x - 2y + 35 = 0$, $2x^2 + 6y^2 - 3x - 34 = 0$

SECCIÓN 11-5 Ecuaciones paramétricas

- Ecuaciones paramétricas y curvas planas
- Movimiento de proyectiles
- Cicloide

Ecuaciones paramétricas y curvas planas

Considere las dos ecuaciones

$$x = t + 1 \qquad y = t^2 - 2t \qquad -\infty < t < \infty \tag{1}$$

Cada valor de t determina un valor de x y un valor de y, y, en consecuencia, un par ordenado (x, y). Para graficar el conjunto de pares ordenados (x, y) determinado suponiendo que todos los valores de t son reales, construya la tabla 1 enlistando los valores seleccionados de t y los valores correspondientes de x y y. Después se dibujan los pares ordenados (x, y) y únalos con una curva continua, como se muestra en la figura 1. La variable t se llama parámetro y no aparece en la gráfica. Las ecuaciones (1) se llaman **ecuaciones paramétricas**, ya que ambas x y y se expresan en términos del parámetro t. La gráfica de los pares ordenados (x, y) se llama **curva plana**.

TABLA 1

t	0	1	2	3	4	−1	−2
x	1	2	3	4	5	0	−1
y	0	−1	0	3	8	3	8

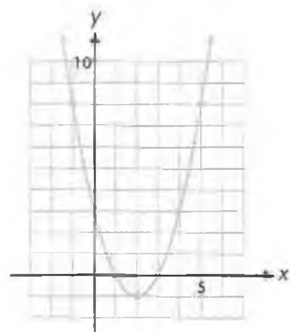


FIGURA 1 Gráfica de $x = t + 1$, $y = t^2 - 2t$, $-\infty < t < \infty$.

En algunos casos es posible eliminar el parámetro resolviendo una de las ecuaciones para t y sustituyendo en la otra. En el ejemplo que se está considerando despeje t de la primera ecuación en términos de x, se tiene

$$t = x - 1$$

Después, sustituya el resultado en la segunda ecuación, se obtiene.

$$\begin{aligned} y &= (x - 1)^2 - 2(x - 1) \\ &= x^2 - 4x + 3 \end{aligned}$$

Se reconoce a ésta como la ecuación de una parábola, como se puede observar en la figura 1.

En algunos otros casos, puede no ser fácil o posible eliminar el parámetro para obtener una ecuación en términos de x y y. Por ejemplo, para

$$\begin{aligned} x &= t + \log t \\ y &= t - e^t \end{aligned} \qquad t > 0$$

no es posible despejar a t en ninguna de las ecuaciones en términos de las funciones que se están considerando.

¿Hay más de una representación paramétrica para una curva plana? La respuesta es sí. En efecto, hay un número ilimitado de representaciones paramétricas para la misma curva plana. Las siguientes son dos representaciones adicionales de la parábola en la figura 1.

$$\begin{aligned} x &= t + 3 \\ y &= t^2 + 2t \end{aligned} \qquad -\infty < t < \infty \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 - 4t + 3 \end{aligned} \qquad -\infty < t < \infty \qquad (3)$$

Los conceptos introducidos en el análisis anterior se resumen en la definición 1.

DEFINICIÓN 1 **Ecuaciones paramétricas y curvas planas**

Una **curva plana** es el conjunto de puntos (x, y) determinado por las **ecuaciones paramétricas**.

$$\begin{aligned} x &= f(t) \\ y &= g(t) \end{aligned}$$

donde el **parámetro** t varía en el intervalo I y las funciones f y g están ambas definidas en el intervalo I.

¿Por qué se está interesado en las representaciones paramétricas de las curvas planas? Porque el enfoque es más general que usando ecuaciones con dos variables como ya se ha hecho. Además, el enfoque se generaliza a curvas en espacios de tres y más dimensiones. Otra razón importante para el uso de representaciones paramétricas de curvas planas se ilustra en el análisis y ejemplos siguientes.

EJEMPLO 1 **Graficación de ecuaciones paramétricas y eliminación del parámetro**

Grafique la curva plana dada paramétricamente por

$$x = 8 \cos \theta \qquad -\infty < \theta < \infty \qquad (4)$$
$$y = 4 \operatorname{sen} \theta$$

Identifique la curva eliminando el parámetro θ.

Solución Construya una tabla y grafique

θ	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
x	8	$4\sqrt{3}$	4	0	−4	$-4\sqrt{3}$	−8	$-4\sqrt{3}$	−4	0	4	$4\sqrt{3}$	8
y	0	2	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	2	0	−2	$-2\sqrt{3}$	−4	$-2\sqrt{3}$	−2	0

Para eliminar el parámetro θ, despeje de la primera ecuación en (4) a cos θ, y de la segunda a sen θ, y sustituya en la identidad de Pitágoras $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$

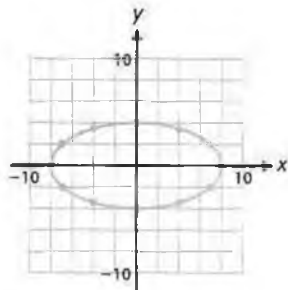


FIGURA 2 Gráfica de $x = 8 \cos \theta, y = 4 \operatorname{sen} \theta$, $-\infty < \theta < \infty$.

$$\cos \theta = \frac{x}{8} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \theta = \frac{y}{4}$$
$$\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta = 1$$
$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$$

La gráfica es una elipse (figura 2).

Problema seleccionado 1 Grafique la curva plana dada paramétricamente por $x = 4 \cos \theta$, $y = 4 \operatorname{sen} \theta$, $\theta \geq 0$. Identifique la curva eliminando el parámetro θ.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Grafique un periodo $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ para cada una de las tres curvas planas dadas paramétricamente por

$$x_1 = 5 \cos \theta \qquad x_2 = 2 \cos \theta \qquad x_3 = 5 \cos \theta$$
$$y_1 = 5 \operatorname{sen} \theta \qquad y_2 = 2 \operatorname{sen} \theta \qquad y_3 = 2 \operatorname{sen} \theta$$

Identifique las curvas eliminando el parámetro.

EJEMPLO 2 **Ecuaciones paramétricas para secciones cónicas**

Encuentre las ecuaciones paramétricas para la sección cónica con las ecuaciones dadas:

(A) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$
(B) $x^2 - 16y^2 - 10x + 32y - 7 = 0$

Soluciones (A) Al completar el cuadrado en x y y se obtiene la forma estándar $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1$. De modo que la gráfica es una elipse con centro en $(2, -3)$ y el eje mayor sobre la recta $x = 2$. Ya que $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$, una representación paramétrica con parámetro θ se obtiene al hacer $\frac{x-2}{3} = \cos\theta$, $\frac{y+3}{5} = \text{sen}\,\theta$:

$$x = 2 + 3\cos\theta \qquad -\infty < \theta < \infty$$
$$y = -3 + 5\,\text{sen}\,\theta$$

(B) Al completar el cuadrado en x y y se obtiene la forma estándar $\frac{(x-5)^2}{16} - (y-1)^2 = 1$. De manera que la gráfica es una hipérbola con centro en $(5, 1)$ y el eje transversal en la recta $y = 1$. Ya que $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$, se obtiene una representación paramétrica con parámetro θ haciendo $\frac{x-5}{4} = \sec\theta$, $y - 1 = \tan\theta$:

$$x = 5 + 4\sec\theta \qquad -\infty < \theta < \infty, \qquad \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \text{ un entero}$$
$$y = 1 + \tan\theta$$

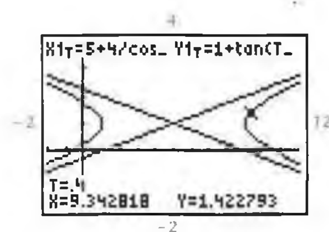


FIGURA 3
$x = 5 + 4\sec\theta$, $y = 1 + \tan\theta$.

Observe que cuando las ecuaciones paramétricas se grafican en un dispositivo de graficación en modo conectado, la gráfica parece mostrar las asíntotas de la hipérbola (véase la figura 3).

Problema seleccionado 2 Encuentre las ecuaciones paramétricas para la sección cónica con la ecuación dada:

(A) $36x^2 + 16y^2 + 504x - 96y + 1332 = 0$
(B) $16y^2 - 9x^2 - 36x + 128y + 76 = 0$

Movimiento de proyectiles

Las leyes de Newton y las matemáticas avanzadas se pueden usar para determinar la trayectoria de un proyectil. Si v_0 es la velocidad inicial del proyectil con un ángulo α con respecto a la horizontal (véase la figura 4) y la resistencia del aire se desprecia, entonces la trayectoria del proyectil está dada por

$$x = (v_0\cos\alpha)t \qquad 0 \le t \le b \qquad (5)$$
$$y = (v_0\,\text{sen}\,\alpha)t - 4.9t^2$$

El parámetro t representa el tiempo en segundos, y x y y son distancias medidas en metros. Al despejar t en términos de x de la primera ecuación (5), sustituyendo en la segunda ecuación, y simplificando los resultados en la siguiente ecuación:

$$y = (\tan \alpha)x - \frac{4.9}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \tag{6}$$

Verifique ésta completando los detalles omitidos.

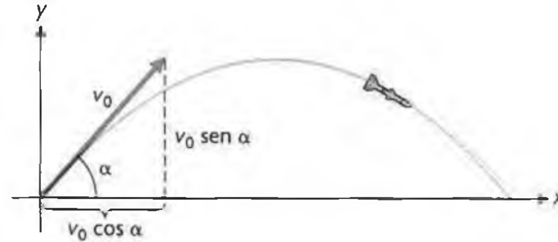


FIGURA 4 Movimiento de un proyectil.

Se reconoce la ecuación (6) como una parábola. Esta ecuación en x y y describe la trayectoria que sigue el proyectil, pero dice un poco más acerca de su vuelo. Por otra parte, las ecuaciones paramétricas (5) no sólo determinan la trayectoria del proyectil sino también indican qué posición tienen en cualquier tiempo t. Además, usando conceptos de física y cálculo, las ecuaciones paramétricas se pueden usar para determinar la velocidad y la aceleración del proyectil en cualquier tiempo t. Esto ilustra otra ventaja del uso de las representaciones paramétricas de las curvas planas.

El **rango de un proyectil** es la distancia del punto de disparo al punto de impacto. Si se conserva la velocidad inicial v_0 del proyectil constante y varía el ángulo α en la figura 4, se obtienen diferentes trayectorias parabólicas seguidas por el proyectil y diferentes rangos. El máximo rango se obtiene cuando $\alpha = 45°$. Además, suponiendo que el proyectil siempre está en el mismo plano vertical, entonces hay puntos en el aire y en la tierra que el proyectil no puede alcanzar, irrespectivamente del ángulo α usado, $0° \leq \alpha \leq 180°$. Usando matemáticas más avanzadas, se puede mostrar que la región alcanzable está separada de la región no alcanzable por una parábola llamada **envolvente** de las otras parábolas (véase la figura 5).

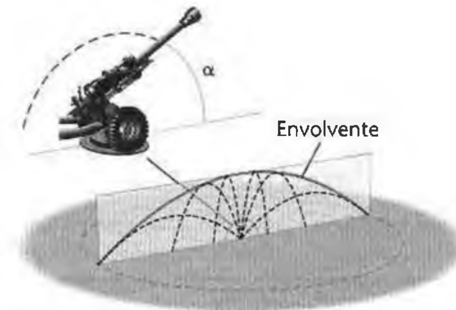
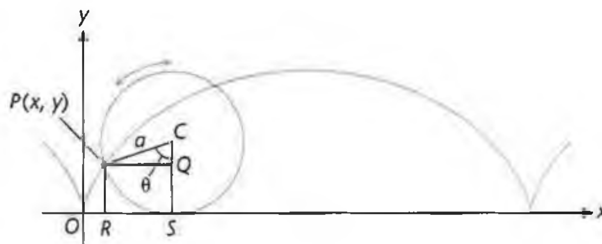


FIGURA 5 Región alcanzable de un proyectil.

Cicloide

Ahora se considerará una curva no usual llamada *cicloide*, lo cual tiene justamente una representación paramétrica simple y solamente una muy complicada representación en términos de x y y. La trayectoria trazada por un punto sobre el borde de un círculo que rueda a lo largo de una recta se llama **cicloide**. Para deducir las ecuaciones paramétricas para una cicloide se rueda un círculo de radio a a lo largo del eje x con el punto P trazando el borde a partir del origen (véase la figura 6).

FIGURA 6 Cicloide.



Puesto que el círculo rueda a lo largo del eje x sin resbalar (remítase a la figura 6), observe que

$$d(O, S) = \text{arc } PS$$
$$= a\theta \qquad \theta \text{ en radianes} \tag{7}$$

donde S es el punto de contacto entre el círculo y el eje x. Refiriéndose al triángulo CPQ, se ve que

$$d(P, Q) = a \operatorname{sen} \theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \tag{8}$$
$$d(Q, C) = a \cos \theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi/2 \tag{9}$$

Usando estos resultados, se tiene que

$$\begin{aligned} x &= d(O, R) \\ &= d(O, S) - d(R, S) \\ &= (\text{arc } PS) - d(P, Q) \\ &= a\theta - a \operatorname{sen} \theta && \text{Use las ecuaciones (7) y (8).} \\ y &= d(R, P) \\ &= d(S, C) - d(Q, C) \\ &= a - a\cos\theta && \text{Use la ecuación (9) y el hecho de que } d(S, C) = a. \end{aligned}$$

Aunque θ en las ecuaciones (8) y (9) está restringido de modo que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, se puede mostrar que las ecuaciones paramétricas deducidas generan toda la cicloide para $-\infty < \theta < \infty$. La gráfica especifica una función periódica con periodo $2\pi a$. Por consiguiente, en general, se tiene el teorema 1.

Teorema 1 **Ecuaciones paramétricas para una cicloide**

Para un círculo de radio a rodado a lo largo del eje x, la cicloide resultante generada por un punto del borde iniciando en el origen está dada por

$$\begin{aligned} x &= a\theta - a \operatorname{sen} \theta \\ y &= a - a\cos\theta \end{aligned} \qquad -\infty < \theta < \infty$$

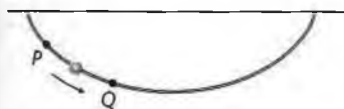


FIGURA 7 Trayectoria cicloide.

La cicloide es un buen ejemplo de una curva que es muy difícil de representar sin el uso de un parámetro. Una cicloide tiene una muy interesante propiedad física. Un objeto que resbala sin fricción de un punto P a un punto Q más debajo de P, pero no en la misma recta vertical que P, llegará a Q en un tiempo corto viajando a lo largo de una cicloide que cualquier otra trayectoria (véase la figura 7).

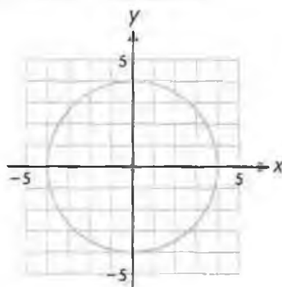
EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 (A) Sea Q un punto que está a b unidades del centro de una rueda de radio a, donde $0 < b < a$. Si la rueda da vueltas a lo largo del eje x, con el punto de trazo Q iniciando en $(0, a - b)$ explique por qué las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de Q están dadas por

$$x = a\theta - b \operatorname{sen} \theta$$
$$y = a - b \cos \theta$$

(B) Use un dispositivo de graficación para graficar las trayectorias de un punto en el borde de una rueda de radio 1, y un punto a la mitad entre el borde y el centro, la rueda hace dos revoluciones completas al rodar a lo largo del eje x.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $x^2 + y^2 = 16$; círculo



2. (A) $x = -7 + 4 \cos \theta,\ y = 3 + 6 \operatorname{sen} \theta,\ -\infty < \theta < \infty$

(B) $x = -2 + 4 \tan \theta,\ y = -4 + 3 \sec \theta,\ -\infty < \theta < \infty,\ \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, k es un entero

EJERCICIO 11-5

A

En los problemas del 1 al 10 dibuje cada curva plana, mediante una tabla de valores (véase el ejemplo 1). Obtenga una ecuación en x y y eliminando el parámetro, e identifique la curva. En este conjunto de ejercicios, el intervalo para el parámetro es toda la recta real, a menos que se establezca lo contrario.

1. $x = -t,\ y = 2t - 2$
2. $x = t,\ y = t + 1$
3. $x = -t^2,\ y = 2t^2 - 2$
4. $x = t^2,\ y = t^2 + 1$
5. $x = 3t,\ y = -2t$
6. $x = 2t,\ y = t$
7. $x = \frac{1}{4}t^2,\ y = t$
8. $x = 2t,\ y = t^2$
9. $x = \frac{1}{4}t^4,\ y = t^2$
10. $x = 2t^2,\ y = t^4$

B

En los problemas del 11 al 18, obtenga una ecuación en x y y eliminando el parámetro. Use la más simple de las dos formas para graficar la curva. Nombre la curva si ésta es una curva identificada.

11. $x = 3 \operatorname{sen} \theta,\ y = 4 \cos \theta$
12. $x = 3 \operatorname{sen} \theta,\ y = 3 \cos \theta$
13. $x = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta,\ y = 3 + 2 \cos \theta$
14. $x = 3 + 4 \operatorname{sen} \theta,\ y = 2 + 2 \cos \theta$
15. $x = t - 2,\ y = \dfrac{2}{2 - t};\ t \neq 2$

16. $x = t - 1, y = \dfrac{2}{t - 1}; t \neq 1$

17. $x = t - 1, y = \sqrt{t}; t \geq 0$

18. $x = t^3, y = t^2 + 1$

Si $A \neq 0$, $C = 0$ y $E \neq 0$, encuentre las ecuaciones paramétricas para $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Identifique la curva.

Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, encuentre las ecuaciones paramétricas para $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Identifique la curva.

C

En los problemas del 21 al 26, obtenga una ecuación en x y y eliminando el parámetro. Use la más simple de las dos formas para dibujar la curva. Nombre la curva si ésta está identificada.

21. $x = t^2, y = t^{-2}; t \neq 0$

22. $x = e^t, y = e^{-t}$

23. $x = \cos 2\theta, y = 4 \operatorname{sen} \theta$

24. $x = 3 \sec^2 \theta, y = 2 \tan^2 \theta$

25. $x = \dfrac{8}{t^2 + 4}, y = \dfrac{4t}{t^2 + 4}$

26. $x = \dfrac{4t}{t^2 + 1}, y = \dfrac{4t^2}{t^2 + 1}$

Grafique, usando una calculadora, un periodo ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) de cada cicloide en los problemas 27 y 28.

27. $x = \theta - \operatorname{sen} \theta, y = 1 - \cos \theta$

28. $x = 2\theta - 2 \operatorname{sen} \theta, y = 2 - 2 \cos \theta$

En los problemas del 29 al 32, use un dispositivo de graficación para graficar las ecuaciones paramétricas. Después elimine el parámetro y encuentre la ecuación estándar para la curva. Nombre la curva y encuentre su centro.

29. $x = 3 + 6 \cos t, y = 2 + 4 \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$

30. $x = 1 + 3 \sec t, y = -2 + 2 \tan t, -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{3\pi}{2}, t \neq \dfrac{\pi}{2}$

31. $x = -3 + 2 \tan t, y = -1 + 5 \sec t, -\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{3\pi}{2}, t \neq \dfrac{\pi}{2}$

32. $x = -4 + 5 \cos t, y = 1 + 8 \operatorname{sen} t, 0 \leq t \leq 2\pi$

En los problemas del 33 al 36, encuentre la forma estándar de cada ecuación. Nombre la curva y encuentre su centro. Use las ecuaciones paramétricas para graficar la curva en un dispositivo de graficación.

33. $25x^2 - 200x - 9y^2 - 18y + 616 = 0$

34. $36x^2 + 360x + 4y^2 - 8y + 760 = 0$

35. $4x^2 - 24x + 49y^2 + 392y + 624 = 0$

36. $16x^2 + 32x - 9y^2 - 36y - 164 = 0$

APLICACIONES

37. Movimiento en un plano. Un objeto sigue una trayectoria dada por

$$x = 5 \operatorname{sen} 6\pi t \qquad t \geq 0$$
$$y = 5 \cos 6\pi t$$

donde t es el tiempo en segundos y x y y son distancias en pies.

(A) ¿Cuáles son las coordenadas del objeto cuando $t = 0.1$ segundos? Calcule su respuesta con una cifra decimal.
(B) Elimine el parámetro y grafique la ecuación resultante en x y y. Identifique la trayectoria.

38. Movimiento en un plano. Repita el problema 37 para

$$x = 4 \operatorname{sen} \pi t \qquad t \geq 0$$
$$y = 2 \cos \pi t$$

39. Movimiento de proyectiles. Un proyectil se dispara con una velocidad inicial de 300 metros por segundo a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. Despreciando la resistencia del aire, encuentre:

(A) El momento del impacto.
(B) La distancia horizontal cubierta (rango) en metros y kilómetros en el momento del impacto.
(C) La máxima altura en metros del proyectil. Calcule todas las repuestas con tres cifras decimales usando calculadora.

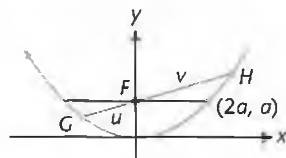
40. Movimiento de proyectiles. Repita el problema 39 si el mismo proyectil se dispara a 40° con respecto a la horizontal en lugar de 45°.

ACTIVIDADES EN GRUPO DEL CAPÍTULO 11 Cuerdas focales

Muchas de las aplicaciones de las secciones cónicas están basadas en sus propiedades de reflexión o focales. Una de las más interesantes propiedades algebraicas de las secciones cónicas conciernen a sus cuerdas focales.

Si una recta que pasa por el foco F contiene los dos puntos G y H de una sección cónica, entonces el segmento de recta GH se llama **cuerda focal**. Sean $G(x_1, y_1)$ y $H(x_2, y_2)$ los puntos de la gráfica $x^2 = 4ay$ tal que GH es una cuerda focal. Sea que u denote la longitud de GF y la longitud de FH (véase la figura 1).

FIGURA 1 Cuerda focal GH de la parábola $x^2 = 4ay$.



(A) Use la fórmula de la distancia para mostrar que $u = y_1 + a$.

(B) Muestre que G y H están sobre la recta $y - a = mx$, donde $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.

(C) Despeje x de $y - a = mx$ y sustituya en $x^2 = 4ay$, para obtener una ecuación cuadrática en y. Explique por qué $y_1y_2 = a^2$.

(D) Muestre que $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{a}$

(E) Muestre que $u + v - 4a = \dfrac{(u - 2a)^2}{u - a}$. Explique por qué esto implica que $u + v \geq 4a$, la igualdad se cumple si y sólo si $u = v = 2a$.

(F) ¿Cuál es la cuerda focal más corta? ¿Hay una cuerda focal más larga?

(G) ¿Es $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v}$ una constante para las cuerdas focales de la elipse? ¿Para las cuerdas focales de la hipérbola? Obtenga evidencias para sus respuestas considerando problemas específicos.

(H) La sección cónica con foco en el origen, directriz en la recta $x = D > 0$ y excentricidad $E > 0$ tiene la ecuación polar $r = \dfrac{DE}{1 + E\cos\theta}$. Explique por qué esta ecuación facilita mostrar que $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = \dfrac{1}{a}$ para una parábola. Use la ecuación polar para determinar la suma $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v}$ para una cuerda focal de una elipse o hipérbola.

Repaso del capítulo 11

11-1 SECCIONES CÓNICAS. PARÁBOLA

Las curvas planas obtenidas por la intersección de un cono circular recto con un plano se llaman **secciones cónicas**. Si el plano se corta claramente por un sector, entonces la curva de intersección se llama **círculo** si el plano es perpendicular al eje y **elipse** si el plano no es perpendicular al eje. Si un plano corta sólo un sector pero no corta claramente al otro, entonces la curva de intersección se llama **parábola**. Si un plano corta ambos sectores, pero no pasa por el vértice, la curva de intersección resultante se llama **hipérbola**. Un plano que pasa por el vértice de un cono produce una **cónica degenerada** (un punto, una recta o un par de rectas). La figura ilustra las cuatro cónicas no degeneradas.



La gráfica de

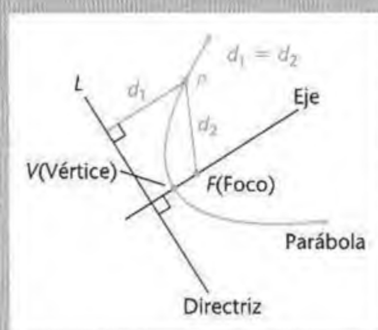
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A, B y C no son todos 0, es una cónica.

La siguiente es una definición libre de coordenadas de una parábola:

Parábola

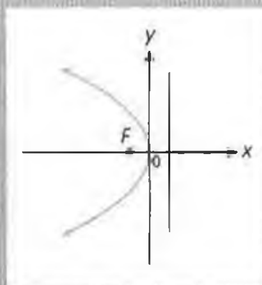
Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos en un plano equidistante de un punto fijo F y a una recta fija L en el plano. El punto fijo se llama **foco**, y la recta fija se llama **directriz**. Una recta que pasa por el eje perpendicular a la directriz se llama **eje**, y el punto que está sobre el eje a la mitad entre la directriz y el foco se llama **vértice**.



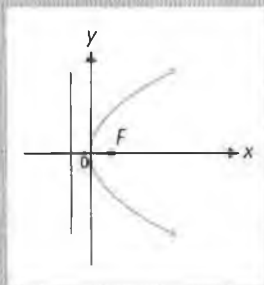
De la definición de una parábola, se pueden obtener las siguientes ecuaciones estándar:

Ecuaciones estándar de una parábola con vértice en (0, 0)

1. $y^2 = 4ax$
   Vértice: (0, 0)
   Foco: $(a, 0)$
   Directriz: $x = -a$
   Simetría con respecto al eje x
   Eje, el eje x

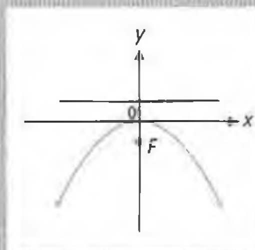


$a < 0$ (abre hacia la izquierda)

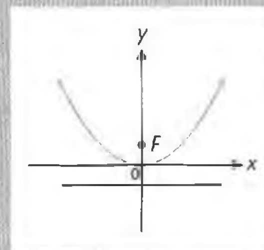


$a > 0$ (abre hacia la derecha)

2. $x^2 = 4ay$
   Vértice: (0, 0)
   Foco: $(0, a)$
   Directriz: $y = -a$
   Simetría con respecto al eje y
   Eje, el eje y



$a < 0$ (abre hacia abajo)



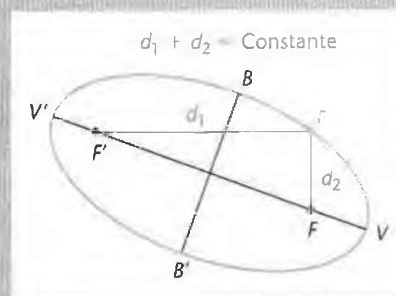
$a > 0$ (abre hacia arriba)

11-2 ELIPSE

La siguiente es una definición libre de coordenadas de una elipse:

Elipse

Una **elipse** es el conjunto de todos los puntos P en un plano tal que la suma de la distancia de P de dos puntos fijos en el plano es constante. Cada uno de los puntos fijos F' y F se llama **foco** y juntos se llaman **focos**. Refiriéndose a la figura, el segmento de recta $V'V$ que pasa por los focos es el **eje mayor**. El bisector perpendicular $B'B$ del eje mayor es el **eje menor**. Cada uno de los puntos del eje mayor, V' y V, se llama **vértice**. El punto medio del segmento de recta $F'F$ se llama **centro** de la elipse.



De la definición de una elipse, se obtienen las siguientes ecuaciones estándar:

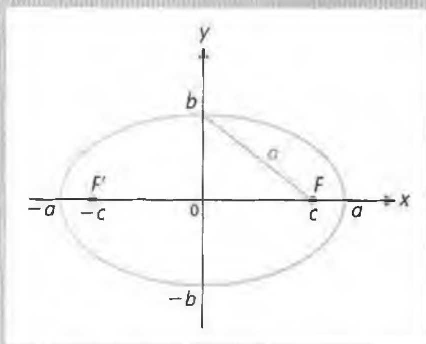
Ecuaciones estándar de una elipse con centro en (0, 0)

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a > b > 0$

Intersecciones con el eje x: $\pm a$ (vértices)
Intersecciones con el eje y: $\pm b$
Focos: $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Longitud del eje mayor $= 2a$
Longitud del eje menor $= 2b$

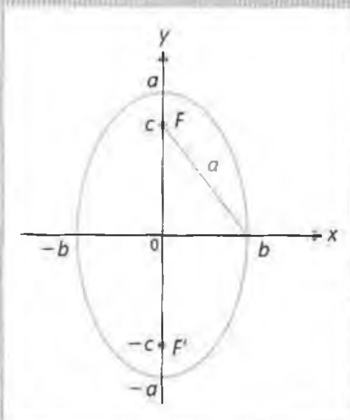


2. $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad a > b > 0$

Intersecciones con el eje x: $\pm b$
Intersecciones con el eje y: $\pm a$ (vértices)
Focos: $F'(0, -c)$, $F(0, c)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Longitud del eje mayor $= 2a$
Longitud del eje menor $= 2b$



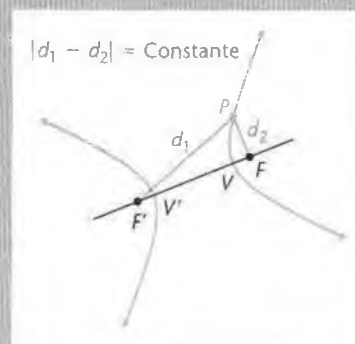
[*Nota*: Ambas gráficas son simétricas con respecto al eje x, al eje y y al origen. También, el eje mayor es siempre más grande que el eje menor.]

11-3 HIPÉRBOLA

La siguiente es una definición libre de coordenadas de una hipérbola:

Hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de todos los puntos P en un plano tal que el valor absoluto de la diferencia de las distancias de P a los dos puntos fijos en el plano es una constante positiva. Cada uno de los puntos fijos, F' y F se llaman **foco**. Los puntos de intersección V' y V de la recta que pasa por los focos y las dos ramas de la hipérbola se llaman **vértices** y cada uno se llama **vértice**. El segmento de recta $V'V$ se llama **eje transversal**. El punto medio del eje transversal es el **centro** de la hipérbola.



De la definición de una hipérbola, se pueden obtener las siguientes ecuaciones estándar:

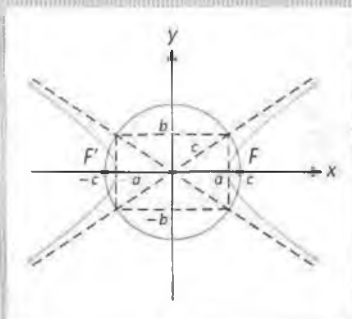
Ecuaciones estándar de una hipérbola con centro en (0, 0)

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Intersecciones con el eje x: $\pm a$ (vértices)
Intersecciones con el eje y: ninguna
Focos: $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

Longitud del eje transversal $= 2a$
Longitud del eje conjugado $= 2b$

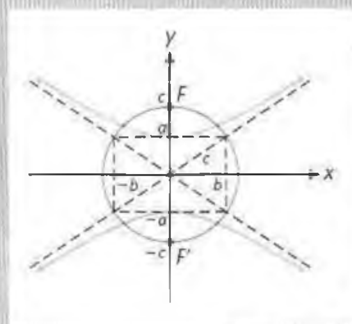


2. $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

Intersecciones con el eje x: ninguna
Intersecciones con el eje y: $\pm a$ (vértices)
Focos: $F'(0, -c)$, $F(0, c)$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Longitud del eje transversal $= 2a$
Longitud del eje conjugado $= 2b$



[*Nota*: Ambas gráficas son simétricas con respecto al eje x, al eje y y al origen.]

11.4 TRASLACIÓN DE EJES

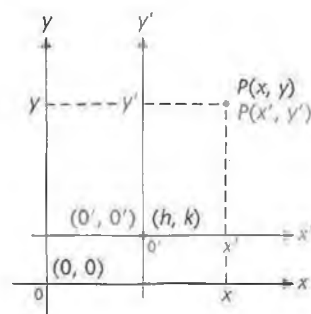
En las últimas tres secciones se encuentran las ecuaciones estándar para parábolas, elipses e hipérbolas localizadas con sus ejes en los ejes coordenados y centradas con respecto al origen. Ahora se mueve la cónica fuera del origen mientras que sus ejes se mantienen paralelos a los ejes coordenados. En este proceso se obtienen a las nuevas ecuaciones estándar que son un caso especial de la ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A y C no son ambas cero. La herramienta matemática básica usada es la traslación de ejes.

Una **traslación de ejes coordenados** ocurre cuando los nuevos ejes coordenados tienen la misma dirección y son paralelos a los ejes coordenados originales. Las **fórmulas de traslación** son las siguientes:

1. $x = x' + h$
 $y = y' + k$

2. $x' = x - h$
 $y' = y - k$

donde (h, k) son las coordenadas con respecto al origen 0′ respecto al sistema original.



En la tabla 1 se enlistan las ecuaciones estándar para cónicas trasladadas.

11.5 ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Una **curva plana** es el conjunto de puntos (x, y) dado por las **ecuaciones paramétricas**.

$$x = f(t) \qquad \text{y} \qquad x = g(t)$$

donde el **parámetro** t varía en el intervalo I.

La **trayectoria de un proyectil** con una velocidad inicial v_0 a un ángulo α con respecto a la horizontal está dada por

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad \text{y} \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - 4.9t^2, \quad 0 \le t \le b$$

o después de eliminar al parámetro t, por

$$y = (\tan \alpha)x - \frac{4.9}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

donde t es el tiempo en segundos y x y y son las distancias en metros. El **rango de un proyectil** es la distancia del punto de disparo al punto de impacto. Si la velocidad inicial v_0 se mantiene constante y el ángulo α varía, entonces la región alcanzable del proyectil está separada de la región no alcanzable por una parábola llamada **envolvente** de las posibles trayectorias parabólicas del proyectil.

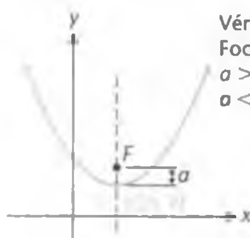
La trayectoria trazada por un punto en el borde de un círculo de radio a que rueda a lo largo de una línea recta se llama **cicloide** y está dada por

$$x = a\theta - a \operatorname{sen} \theta \qquad \text{y} \qquad y = a - a \cos \theta, \quad -\infty < \theta < \infty$$

TABLA 1 Ecuaciones estándar para cónicas trasladadas

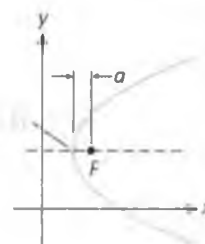
Parábolas

$(x - h)^2 = 4a(y - k)$



Vértice (h, k)
Focos $(h, k + a)$
$a > 0$ abre hacia arriba
$a < 0$ abre hacia abajo

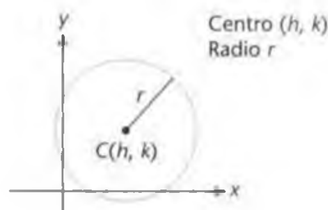
$(y - k)^2 = 4a(x - h)$



Vértice (h, k)
Focos $(h + a, k)$
$a < 0$ abre hacia la izquierda
$a > 0$ abre hacia la derecha

Círculos

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

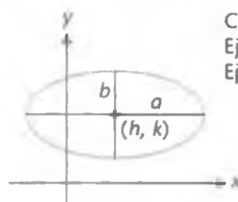


Centro (h, k)
Radio r

Elipses

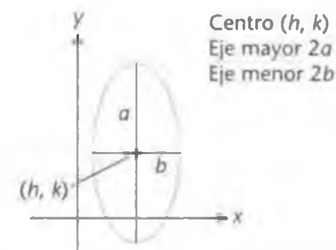
$a > b > 0$

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



Centro (h, k)
Eje mayor $2a$
Eje menor $2b$

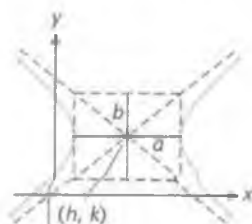
$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$



Centro (h, k)
Eje mayor $2a$
Eje menor $2b$

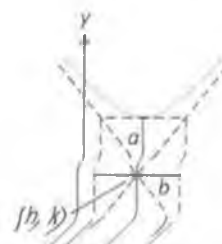
Hipérbolas

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$



Centro (h, k)
Eje transversal $2a$
Eje conjugado $2b$

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$



Centro (h, k)
Eje transversal $2a$
Eje conjugado $2b$

Ejercicio de repaso del capítulo 11

Al resolver los problemas de este capítulo revise y compruebe sus respuestas con las que se dan al final del libro. Ahí están todas las respuestas a los problemas de repaso seguidas por un número en tipo itálico que indica la sección a la que corresponde el problema que se está analizando. Si se le presentan dudas repase las secciones correspondientes en el texto.

A

En los problemas del 1 al 3, grafique cada ecuación y encuentre los focos. Ubique la directriz para cualquier parábola. Encuentre las longitudes de los ejes mayor, menor, transversal y conjugado donde sea aplicable.

1. $9x^2 + 25y^2 = 225$

2. $x^2 = -12y$

3. $25y^2 - 9x^2 = 225$

En los problemas del 4 al 6:

(A) Escriba cada ecuación en una de las formas estándar enlistadas en la tabla 1 del repaso.
(B) Identifique la curva.

4. $4(y + 2)^2 - 25(x - 4)^2 = 100$

5. $(x + 5)^2 + 12(y + 4) = 0$

6. $16(x - 6)^2 + 9(y - 4)^2 = 144$

B

7. Encuentre la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen, su eje en el eje x y pasa por el punto $(-4, -2)$.

8. Encuentre una ecuación de una elipse de la forma

$$\frac{x^2}{M} + \frac{y^2}{N} = 1 \qquad M, N > 0$$

si el centro está en el origen, el eje mayor está en el eje y, la longitud del eje menor en 6 y la distancia de los focos desde el centro es 4.

9. Encuentre una ecuación de una hipérbola de la forma

$$\frac{y^2}{M} - \frac{x^2}{N} = 1 \qquad M, N > 0$$

si el centro está en el origen, la longitud del eje conjugado es 8, y los focos están a 5 unidades del centro.

10. Grafique la curva dada paramétricamente por

$$x = -t^2$$
$$y = -\tfrac{1}{2}t^2 + 1$$

Obtenga una ecuación en x y y eliminando el parámetro, e identifique la curva.

En los problemas del 11 al 13, grafique cada sistema de ecuaciones en el mismo sistema coordenado y encuentre las coordenadas de cualquiera de los puntos de intersección.

11. $x^2 + 4y^2 = 32$
$x + 2y = 0$

12. $16x^2 + 25y^2 = 400$
$16x^2 - 45y = 0$

13. $x^2 + y^2 = 10$
$16x^2 + y^2 = 25$

En los problemas del 14 al 16, transforme cada ecuación a una de las formas estándar de la tabla 1 del repaso. Identifique la curva y grafíquela.

14. $16x^2 + 4y^2 + 96x - 16y + 96 = 0$

15. $x^2 - 4x - 8y - 20 = 0$

16. $4x^2 - 9y^2 + 24x - 36y - 36 = 0$

17. Dadas las ecuaciones paramétricas de una curva plana, $x = -2 + 2 \operatorname{sen} \theta$ y $y = 3 + 4 \cos \theta$, obtenga una ecuación en x y en y eliminando el parámetro. Use la más simple de las dos formas para graficar la curva. Identifique la curva.

18. Use un dispositivo de graficación para graficar $x^2 = y$ y $x^2 = 50y$ en la misma ventana de visión $-10 \le x, y \le 10$. Encuentre m de tal modo que la gráfica de $x^2 = y$ en la misma ventana de visión $-m \le x, y \le m$, tenga la misma apariencia que la gráfica de $x^2 = 50y$ en $-10 \le x, y \le 10$. Explique.

C

19. Use la definición de una parábola y la fórmula de la distancia para encontrar la ecuación de una parábola con directriz $x = 6$ y foco en $(2, 4)$.

20. Encuentre una ecuación de los conjuntos de puntos en un plano cuya distancia desde $(4, 0)$ es el doble de la distancia de la recta $x = 1$. Identifique la figura geométrica.

21. Encuentre una ecuación de los conjuntos de puntos en un plano cuya distancia desde $(4, 0)$ es de dos tercios de la distancia de la recta $x = 9$. Identifique la figura geométrica.

En los problemas del 22 al 24, encuentre las coordenadas de cualquiera de los focos con respecto al sistema coordenado original.

22. Problema 14 **23.** Problema 15 **24.** Problema 16

25. Dadas las ecuaciones paramétricas de una curva plana

$$x = 2^t$$
$$y = 2^{-t}$$

obtenga una ecuación en x y en y eliminando el parámetro. Use la más simple de las dos formas para graficar la curva. Identifique la curva.



26. Use un dispositivo de graficación para encontrar, con dos cifras decimales las coordenadas de todos los puntos de intersección de $x^2 - 3y^2 + 9x + 7y - 22 = 0$ y $4x^2 + 5x + 10y - 53 = 0$.

APLICACIONES

27. Comunicaciones. Una antena parabólica para transmisiones vía satélite tiene un diámetro de 8 pies y 1 pie de profundidad. ¿A qué distancia del vértice está el foco?

28. Ingeniería. Un equipo elíptico tiene sus focos separados por 8 centímetros y un eje mayor de 10 centímetros de largo. Suponga que el eje mayor está sobre el eje x (hacia la derecha positivo) y el eje menor está sobre el eje y (hacia arriba positivo), escriba la ecuación de la elipse en la forma estándar.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

29. Ciencia espacial. Un reflector hiperbólico para un radiotelescopio (como el que se ilustra en el problema 39, ejercicio 11-3) tiene la ecuación

$$\frac{y^2}{40^2} - \frac{x^2}{30^2} = 1$$

Si el reflector tiene un diámetro de 30 pies, ¿qué profundidad tendrá? Calcule la respuesta con tres dígitos significativos.

Ejercicio de repaso acumulativo de los capítulos 10 y 11

Trabaje en todos los problemas de este repaso acumulativo y compruebe las respuestas con las indicadas al final del libro. Las respuestas a todos los problemas de repaso están ahí, y después de cada respuesta está un número en tipo itálico que indica la sección a la cual pertenece el problema que se está analizando. Si los ejercicios le dan mucho trabajo, repase las secciones adecuadas en el texto.

A

1. Determine si cada uno de los siguientes pueden ser los primeros tres términos de una sucesión aritmética, una sucesión geométrica o ninguna.

(A) 20, 15, 10, . . .
(B) 5, 25, 125, . . .
(C) 5, 25, 50, . . .
(D) 27, −9, 3, . . .
(E) −9, −6, −3, . . .

En los problemas del 2 al 4:

(A) Escriba los primeros cuatro términos de cada sucesión.
(B) Encuentre a_8. *(C) Encuentre S_8.*

2. $a_n = 2 \cdot 5^n$

3. $a_n = 3n - 1$

4. $a_1 = 100$; $a_n = a_{n-1} - 6$, $n \geq 2$

5. Evalúe cada una de las expresiones siguientes:

(A) $8!$ (B) $\frac{32!}{30!}$ (C) $\frac{9!}{3!(9-3)!}$

6. Evalúe cada una de las expresiones siguientes:

(A) $\binom{7}{2}$ (B) $C_{7,2}$ (C) $P_{7,2}$

En los problemas del 7 al 9, grafique cada ecuación y encuentre los focos. Encuentre la directriz para cualquier parábola. Encuentre las longitudes de los ejes mayor, menor, transversal y conjugado donde sea aplicable.

7. $25x^2 - 36y^2 = 900$

8. $25x^2 + 36y^2 = 900$

9. $25x^2 - 36y = 0$

10. Una moneda se lanza tres veces. ¿Cuántos resultados combinados son posibles? Resuelva:

(A) Usando un diagrama de árbol.
(B) Usando el principio de multiplicación.

11. ¿De cuántas maneras se pueden acomodar cuatro libros distintos en un estante? Resuelva:

(A) Usando el principio de multiplicación.
(B) Usando permutaciones o combinaciones, si alguna de éstas es aplicable.

12. Grafique la curva paramétrica dada por

$$x = 2t + 3$$
$$y = 4t + 5$$

Obtenga una ecuación en x y y eliminando el parámetro e identifique la curva.

Compruebe los problemas 13 y 14 para $n = 1, 2$ y 3.

13. P_n: $1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

14. P_n: $n^2 + n + 2$ es divisible entre 2

En los problemas 15 y 16 escriba P_k y P_{k+1}.

15. Para P_n en el problema 13.

16. Para P_n en el problema 14.

B

17. Encuentre la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el origen, su eje en el eje y y $(2, -8)$ en su gráfica.

18. Encuentre una ecuación de una elipse de la forma

$$\frac{x^2}{M} + \frac{y^2}{N} = 1 \qquad M, N > 0$$

si el centro está en el origen, el eje mayor está en el eje x, la longitud del eje mayor es 10 y la distancia de los focos al centro es 3.

19. Encuentre una ecuación de una hipérbola de la forma

$$\frac{x^2}{M} - \frac{y^2}{N} = 1 \qquad M, N > 0$$

si el centro está en el origen, la longitud del eje transversal es 16, y la distancia de los focos desde el centro es $\sqrt{89}$.

20. Escriba $\sum_{k=1}^{5} k^k$ sin la notación de sumatoria y encuentre la suma.

21. Escriba la serie $\frac{2}{2!} - \frac{2^2}{3!} + \frac{2^3}{4!} - \frac{2^4}{5!} + \frac{2^5}{6!} - \frac{2^6}{7!}$ usando notación de sumatoria con el indice de sumatoria k iniciando en $k = 1$.

22. Encuentre S_∞ para la serie geométrica $108 - 36 + 12 - 4 + \cdots$.

23. ¿Cuántas palabras en código de cuatro letras son posibles usando las primeras seis letras del alfabeto si las letras no se pueden repetir? ¿Si las letras se pueden repetir? ¿Si las letras adyacentes no pueden ser iguales?

24. Sea $a_n = 100(0.9)^n$ y $b_n = 10 + 0.03n$. Encuentre el entero positivo n más pequeño tal que $a_n < b_n$ graficando las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ con un dispositivo de graficación. Compruebe sus respuestas usando un dispositivo de graficación para mostrar ambas sucesiones en forma de tabla.

25. Dadas las ecuaciones paramétricas de una curva plana

$$x = 2 + 7\cos\theta$$
$$y = -3 + 5\operatorname{sen}\theta$$

obtenga una ecuación en x y en y eliminando el parámetro. Use la más simple de las dos formas para graficar la curva. Identifique la curva.

26. Evalúe cada una de las siguientes:

(A) $P_{25,5}$ (B) $C(25, 5)$ (C) $\binom{25}{20}$

27. Desarrolle $(a + \frac{1}{2}b)^6$ usando la fórmula binomial.

28. Encuentre el quinto y el octavo términos en el desarrollo de $(3x - y)^{10}$.

Establezca cada enunciado en los problemas 29 y 30 para todos los enteros positivos usando inducción matemática.

29. P_n en el problema 13.

30. P_n en el problema 14.

31. Encuentre la suma de todos los enteros impares entre 50 y 500.

32. Use la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita para escribir $2.45 = 2.454\,545 \cdots$ como el cociente de dos enteros.

33. Sea $a_k = \binom{30}{k}(0.1)^{30-k}(0.9)^k$ para $k = 0, 1, \ldots, 30$. Use un dispositivo de graficación para encontrar el término más grande de la sucesión $\{a_k\}$ y el número de términos que son más grandes que 0.01.

En los problemas del 34 al 36, use una traslación de coordenadas para transformar cada ecuación en una ecuación estándar para una cónica no degenerada. Identifique la curva y grafíquela.

34. $4x + 4y - y^2 + 8 = 0$

35. $x^2 + 2x - 4y^2 - 16y + 1 = 0$

36. $4x^2 - 16x + 9y^2 + 54y + 61 = 0$

37. ¿Cuántos códigos postales son posibles con nueve dígitos? ¿Cuántos de éstos no tienen dígitos repetidos?

38. Use un dispositivo de graficación para encontrar, con dos cifras decimales, las coordenadas de todos los puntos de intersección de $5x^2 + 2y^2 - 7x + 8y - 48 = 0$ y $e^x - e^{-x} - 2y = 0$.

39. Use inducción matemática para probar que los siguientes enunciados valen para todos los enteros positivos.

$$P_n: \quad \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

C

40. Use la fórmula binomial para desarrollar $(x - 2i)^6$ donde i es la unidad imaginaria.

41. Use la definición de una parábola y la fórmula de la distancia para encontrar la ecuación de una parábola con directriz $y = 3$ y foco $(6, 1)$.

42. Una elipse tiene vértices $(\pm 4, 0)$ y focos $(\pm 2, 0)$. Encuentre las intersecciones con el eje y.

43. Una hipérbola tiene vértices en (2, ±3) y focos (2, ±5). Encuentre la longitud de los ejes conjugados.

44. Se seleccionan siete puntos distintos de la circunferencia de un circulo. ¿Cuántos triángulos se pueden formar usando estos siete puntos como vértices?

45. Dadas las ecuaciones paramétricas de una curva plana

$$x = e^{2t} - 4$$
$$y = 1 - e^{t}$$

obtenga una ecuación en x y en y eliminando el parámetro. Use la más simple de las dos formas para graficar la curva. Identifique la curva.

46. Use inducción matemática para probar que $2^n < n!$ para todos los enteros $n > 3$.

47. Use inducción matemática para mostrar que $\{a_n\} = \{b_n\}$, donde $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1} - 1$ para $n > 1$ y $b_n = 2^n + 1$, $n \geq 1$.

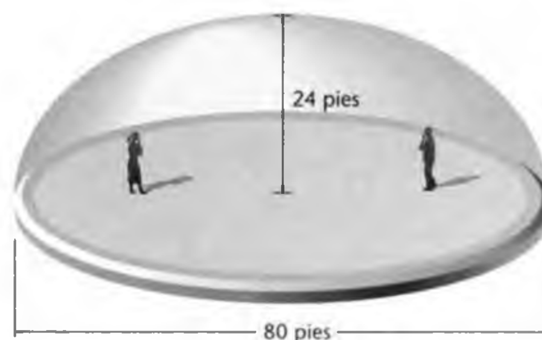
48. Encuentre una ecuación del conjunto de puntos en el plano cuya distancia desde (1, 4) es tres veces su distancia desde el eje x. Escriba la ecuación en la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, e identifique la curva.

APLICACIONES

49. Economía. El gobierno, mediante un programa de subsidio, distribuye $2 000 000. Si se supone que cada individuo o agencia gasta el 75% de lo que recibe, y el 75% de esto se gasta, y así sucesivamente, ¿a cuánto asciende el total del gasto resultante de esta acción del gobierno?

50. Ingeniería. Una luz en el techo de un automóvil tiene un reflector parabólico con un diámetro de 8 pulgadas. Si la fuente de luz se localiza en el foco, el cual está a una pulgada de su vértice, ¿qué profundidad tiene el reflector?

51. Arquitectura. Un sonido en voz baja en un foco de una cámara de sonido puede ser fácilmente escuchado en el otro foco. Suponga que una sección transversal de esta cámara es un arco semielíptico que tiene 80 pies de ancho y 24 de altura (véase la figura). ¿A qué distancia está cada foco del centro del arco? ¿Qué altura tiene el arco arriba de cada foco?





OPERACIONES ALGEBRAICAS BÁSICAS

$f(x)=|3x + 4| + 1$

A menudo se hace referencia al álgebra como una "matemática generalizada". En aritmética se trabaja con las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división realizadas con números específicos. En álgebra se continúa usando todo lo que se conoce en la aritmética, pero además, se razona y trabaja con símbolos que representan uno o más números. En este apéndice se repasan algunas operaciones algebraicas básicas que por lo general ya se estudiaron en cursos anteriores. El material se puede estudiar sistemáticamente antes de iniciar con el resto del libro, o repasar conforme sea necesario.

SECCIÓN A-1 Álgebra y números reales

- Conjuntos
- El conjunto de números reales
- La recta numérica real
- Propiedades básicas de los números reales
- Otras propiedades
- Propiedades de las fracciones

Las reglas para manipular y razonar con símbolos en álgebra dependen, en gran medida, de las importantes propiedades de los números reales. En esta sección se analizarán algunas de ellas. De manera simultánea al análisis y donde sea necesario ser más claros y precisos, se introducirán primero algunos conceptos útiles de conjuntos.

Conjuntos

Georg Cantor (1845-1918) desarrolló la teoría de conjuntos como un gran resultado de sus estudios acerca del infinito. Su trabajo ha sido la piedra angular en el desarrollo de las matemáticas.

El uso de la palabra "conjunto" no difiere apreciablemente de la manera en que se usa en el lenguaje cotidiano. Palabras tales como "conjunto", "colección", "grupo" y "congregación" tienen el mismo significado. Así, se piensa en un **conjunto** como una colección de objetos con la importante propiedad de poder determinar si un objeto dado está o no en el conjunto.

Cada objeto de un conjunto se llama **elemento** o **miembro** del conjunto. Simbólicamente,

$a \in A$ significa "a es un elemento del conjunto A" $3 \in \{1, 3, 5\}$

$a \notin A$ significa "a no es un elemento del conjunto A" $2 \notin \{1, 3, 5\}$

Con frecuencia se usan las letras mayúsculas para representar conjuntos y las letras minúsculas para representar elementos de un conjunto.

Un conjunto es **finito** si el número de elementos del conjunto se puede contar e **infinito** si el número de elementos no tiene fin. Un conjunto es **vacío** si no contiene elementos. El conjunto vacío se llama también conjunto **nulo** y se denota por $\varnothing$. Es importante observar que el conjunto vacío no se escribe como $\{\varnothing\}$.

Un conjunto se describe usualmente en una de las dos formas siguientes: haciendo una **lista** de los elementos entre llaves, { }, o encerrando entre llaves una **regla** que determina los elementos. Por ejemplo, si D es el conjunto de todos los números x tales que $x^2 = 4$, entonces usando el método de la lista se escribe

$$D = \{-2, 2\} \quad \text{Método de lista}$$

o, usando el método de regla se escribe

$$D = \{x \mid x^2 = 4\} \qquad \text{Método de regla}$$

Observe que en el método de la regla, la barra vertical | representa "tal que", y la forma simbólica completa $\{x \mid x^2 = 4\}$ se lee como: "El conjunto de todas las x tales que $x^2 = 4$."

La literal x introducida en el método de la regla es una *variable*. En general, una **variable** es un símbolo que se usa como un compartimento para los elementos de un conjunto con dos o más elementos. Este conjunto se llama **conjunto de reemplazos** para las variables. Una **constante**, por otra parte, es un símbolo que nombra exactamente un objeto. El símbolo "8" es una constante, ya que siempre designa al número ocho.

Si cada elemento del conjunto A es también un elemento del conjunto B, se dice que A es un **subconjunto** del conjunto B y se escribe

$$A \subset B \qquad \{1, 5\} \subset \{1, 3, 5\}$$

Note que la definición de un subconjunto permite a un conjunto ser un subconjunto de sí mismo.

Ya que el conjunto vacío $\varnothing$ no tiene elementos, cada elemento de $\varnothing$ es también un elemento de cualquier conjunto dado. Así, el conjunto vacío es un subconjunto de cada conjunto. Por ejemplo,

$$\varnothing \subset \{1, 3, 5\} \qquad \text{y} \qquad \varnothing \subset \{2, 4, 6\}$$

Si dos conjuntos A y B tienen exactamente los mismos elementos, se dice que los conjuntos son **iguales** y se escribe

$$A = B \qquad \{4, 2, 6\} = \{6, 4, 2\}$$

Observe que el orden en que se enlistan los elementos en un conjunto no es importante.

Ahora se puede iniciar el análisis del sistema de los números reales. Otros conceptos de conjuntos se introducirán conforme se necesiten.

El conjunto de números reales

El sistema de números reales es el sistema numérico que se usará con mayor frecuencia en la vida. Informalmente, un **número real** es cualquier número que tenga una representación decimal. La tabla 1 describe el conjunto de los números reales y algunos de sus subconjuntos importantes. La figura 1 ilustra cómo estos conjuntos de números se relacionan entre sí.

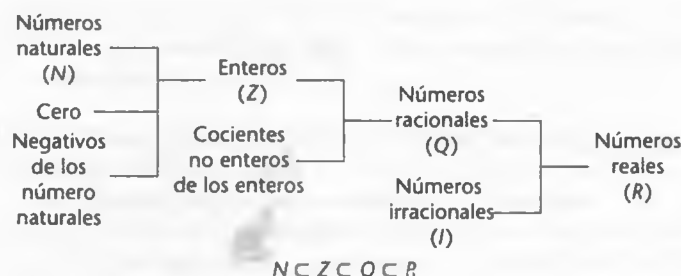


FIGURA 1 Los números reales y subconjuntos importantes.

TABLA 1 El conjunto de números reales

Símbolo	Nombre	Descripción	Ejemplos
N	Números naturales	Número para contar (también llamados enteros positivos)	$1, 2, 3, \ldots$
Z	Enteros	Números naturales, sus negativos, y 0	$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$
Q	Números racionales	Números que se pueden representar como a/b donde a y b son enteros y $b \neq 0$; las representaciones decimales son repetitivas o terminan.	$-4, 0, 1, 25, \frac{-3}{5}, \frac{2}{3}, 3.67, -0.33\overline{3}$,* $5.2\overline{727}$
I	Números irracionales	Números que se pueden representar como números decimales no repetitivos o no terminados.	$\sqrt{2}, \pi, \sqrt[3]{7}, 1.414213\ldots,$ $2.71828182\ldots$
R	Númetos reales	Números racionales e irracionales	

*La barra sobre el número (o bloque de números) indica que éste se repite indefinidamente.

La recta numérica real

Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números reales y el conjunto de puntos sobre la recta. Es decir, a cada número real le corresponde exactamente un punto, y a cada punto le corresponde exactamente un número real. Una recta que asocia un número real con cada punto, y viceversa como se muestra en la figura 2, se llama **recta numérica real**, o simplemente **recta real**. Cada número asociado con un punto se llama **coordenada** del punto. El punto con coordenada 0 se llama **origen**. La flecha en el lado derecho de la recta indica dirección positiva. Las coordenadas de todos los puntos a la derecha del origen se llaman **números reales positivos**, y aquellos a la izquierda del origen se llaman **números reales negativos**. El número real 0 no es ni positivo ni negativo.

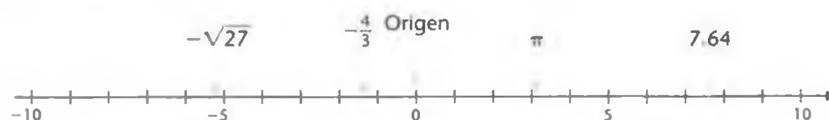


FIGURA 2 Recta numérica real.

Propiedades básicas de los números reales

Ahora se analizarán algunas de las propiedades básicas de números reales. (Véase el cuadro siguiente.)

Una vez revisado el cuadro ya se está familiarizado con las **propiedades conmutativas** para la suma y la multiplicación. Éstas indican que el orden en el que se realice la suma o multiplicación de dos números no es importante. Por ejemplo,

$$4 + 5 = 5 + 4 \qquad \text{y} \qquad 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4$$

¿Hay una propiedad conmutativa con respecto de la resta o la división? ¿Es decir, $x - y = y - x$ o $x \div y = y \div x$ para todos los números reales x y y (la división entre 0 se excluye)? La respuesta es no, ya que, por ejemplo

$$7 - 5 \neq 5 - 7 \qquad \text{y} \qquad 6 \div 3 \neq 3 \div 6$$

Propiedades básicas del conjunto de números reales

Sea R el conjunto de números reales, y sea x, y y z elementos arbitrarios de R.

Propiedades de la suma

Cerradura:	$x + y$ es un elemento único en R.
Asociativa:	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Conmutativa:	$x + y = y + x$
Identidad:	0 es la identidad aditiva; es decir, $0 + x = x + 0 = x$ para toda x en R, y 0 es el único elemento en R que tiene esta propiedad.
Inversa:	Para cada x en R, $-x$ es el único inverso aditivo; es decir, $x + (-x) = (-x) + x = 0$, y $-x$ es el único elemento en R respecto a x, con esta propiedad.

Propiedades de la multiplicación

Cerradura:	xy es un elemento único en R.
Asociativa:	$(xy)z = x(yz)$
Conmutativa:	$xy = yx$
Identidad:	1 es la identidad multiplicativa; es decir, para x en R $(1)x = x(1) = x$, y 1 es el único elemento en R que tiene esta propiedad.
Inversa:	Para cada x en R, $x \neq 0$, $1/x$ es el único inverso multiplicativo; es decir, $x(1/x) = (1/x)x = 1$, y $1/x$ es el único elemento en R respecto a x, que tiene esta propiedad.

Propiedad combinada

Distributiva:	$x(y + z) = xy + xz \qquad (x + y)z = xz + yz$

Cuando calcule

$$2 + 5 + 3 \qquad \text{o} \qquad 2 \cdot 5 \cdot 3$$

¿Por qué no es necesario el paréntesis para indicar cuáles de los dos números se suman o multiplican primero? La respuesta se encuentra en las **propiedades asociativas**. Estas propiedades permiten escribir

$$(2 + 5) + 3 = 2 + (5 + 3) \qquad \text{y} \qquad (2 \cdot 5) \cdot 3 = 2 \cdot (5 \cdot 3)$$

sin que importe cómo se agruparon los números relacionados con cada operación. ¿Hay una propiedad asociativa para la resta o la división? La respuesta es no, ya que, por ejemplo,

$$(8 - 4) - 2 \neq 8 - (4 - 2) \qquad \text{y} \qquad (8 \div 4) \div 2 \neq 8 \div (4 \div 2)$$

Evaluando ambos lados de estas ecuaciones se ve por qué.

Conclusión

Respecto de la suma, la **conmutatividad** y la **asociatividad** permite cambiar el orden de la suma e insertar o eliminar paréntesis como se quiera. Lo mismo es cierto para la multiplicación, pero no para la resta y división.

¿Qué número se debe sumar a un número dado para obtener el mismo número? ¿Cuántas veces el número de un número dado dará el mismo número? Las respuestas son 0 y 1, respectivamente. Ya que 0 y 1 se llaman **elementos identidad** para los números reales. Así, para cualesquiera números reales x y y,

$$7 + 0 = 7 \qquad 0 + (x + y) = x + y \qquad \text{0 es la identidad aditiva.}$$

$$1 \cdot 6 = 6 \qquad 1(x + y) = x + y \qquad \text{1 es la identidad multiplicativa.}$$

Ahora se considerará a las **inversas**. Para cada número real x, hay un número real único $-x$ tal que $x + (-x) = 0$. El número $-x$ se llama **inverso aditivo** de x, o el **negativo** de x. Por ejemplo, el inverso aditivo de 4 es -4, ya que $4 + (-4) = 0$. El inverso aditivo de -4 es $-(-4) = 4$, ya que $-4 + [-(-4)] = 0$. Es importante recordar:

$-x$ no es necesariamente un número negativo; éste es positivo si x es negativo y negativo si x es positivo.

Para cada número real x diferente de cero hay un número real único $1/x$ tal que $x(1/x) = 1$. El número $1/x$ se llama **inverso multiplicativo** de x, o el **recíproco** de x. Por ejemplo, el inverso multiplicativo de 7 es $\frac{1}{7}$, ya que $7(\frac{1}{7}) = 1$. También observe que 7 es el inverso multiplicativo de $\frac{1}{7}$. El número 0 no tiene inverso multiplicativo.

Ahora se verán las propiedades de los números reales que implican tanto a la multiplicación como a la suma. Se consideran los dos cálculos.

$$3(4 + 2) = 3(6) = 18$$

$$3(4) + 3(2) = 12 + 6 = 18$$

Así,

$$3(4 + 2) = 3(4) + 3(2)$$

se dice que la multiplicación por 3 *distribuye* sobre la suma $(4 + 2)$. En general, la multiplicación **distribuye** sobre la suma en el sistema de números reales. A continuación se incluyen dos ejemplos:

$$2(x + y) = 2x + 2y \qquad (3 + 5)x = 3x + 5x$$

EJEMPLO 1 **Uso de las propiedades de los números reales**

¿Cuáles propiedades de los números reales justifican el enunciado indicado?

Enunciado	Propiedad ilustrada
(A) $(7x)y = 7(xy)$	Asociativa (·)
(B) $a(b + c) = (b + c)a$	Conmutativa (·)
(C) $(2x + 3y) + 5y = 2x + (3y + 5y)$	Asociativa (+)
(D) $(x + y)(a + b) = (x + y)a + (x + y)b$	Distributiva
(E) Si $a + b = 0$, entonces $b = -a$.	Inversa (+)

Problema seleccionado 1* ¿Cuál propiedad de los números reales justifica el enunciado indicado?

(A) $4 + (2 + x) = (4 + 2) + x$ (B) $(a + b) + c = c + (a + b)$
(C) $3x + 7x = (3 + 7)x$ (D) $(2x + 3y) + 0 = 2x + 3y$
(E) Si $ab = 1$ y $a \neq 0$, entonces $b = 1/a$.

Otras propiedades

La resta y la división se pueden definir en términos de la suma y multiplicación respectivamente:

DEFINICIÓN 1 **Resta y división**

Para todos los números reales a y b:

Resta: $a - b = a + (-b)$ $\quad (-5) - (-3) = (-5) + (3) = -2$

División: $b\overline{)a} = a \div b = \dfrac{a}{b} = a\left(\dfrac{1}{b}\right) \qquad b \neq 0 \quad 3 \div 2 = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Así, para restar b de a, sume el negativo de b a a. Para dividir a entre b, multiplique a por el recíproco de b. Observe que la división entre 0 no está definida, ya que 0 no tiene un recíproco. Es importante recordar:

La división entre 0 no está permitida.

Las siguientes propiedades de los negativos se pueden probar usando las anteriores propiedades y definiciones.

Teorema 1 **Propiedades de los negativos**

Para todos los números reales a y b:

1. $-(-a) = a$
2. $(-a)b = -(ab) = a(-b) = -ab$
3. $(-a)(-b) = ab$
4. $(-1)a = -a$
5. $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{-b}$ $\quad b \neq 0$
6. $\dfrac{-a}{-b} = -\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{-b} = \dfrac{a}{b}$ $\quad b \neq 0$

Ahora se establece un teorema importante que implica al 0.

Teorema 2 **Propiedades del cero**

Para todos los números reales a y b.

1. $a \cdot 0 = 0$
2. $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$ o ambos

EJEMPLO 2 **Uso de las propiedades de los negativos y del cero**

¿Cuál propiedad o definición de los números reales justifica cada enunciado?

Enunciado	Propiedad o definición ilustrada
(A) $3 - (-2) = 3 + [-(-2)] = 5$	Resta (definición 1 y teorema 1, parte 1)
(B) $-(-2) = 2$	Negativos (teorema 1, parte 1)
(C) $-\dfrac{-3}{2} = \dfrac{3}{2}$	Negativos (teorema 1, parte 6)
(D) $\dfrac{5}{-2} = -\dfrac{5}{2}$	Negativos (teorema 1, parte 5)
(E) Si $(x - 3)(x + 5) = 0$, entonces, ya sea $x - 3 = 0$ o $x + 5 = 0$.	Cero (teorema 2, parte 2)

Problema seleccionado 2 ¿Cuál propiedad o definición de los números reales justifica cada enunciado?

(A) $\frac{3}{5} = 3\left(\frac{1}{5}\right)$ (B) $(-5)(2) = -(5 \cdot 2)$ (C) $(-1)3 = -3$

(D) $\frac{-7}{9} = -\frac{7}{9}$ (E) Si $x + 5 = 0$, entonces $(x - 3)(x + 5) = 0$.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 En general, un conjunto de números se cierra bajo una operación si al realizar las operaciones sobre los números en el conjunto siempre se produce otro número en el conjunto. Por ejemplo, los números reales se cierran bajo la suma, multiplicación, resta y división, excluyendo la división entre 0. Reemplace cada ? en las siguientes tablas con V (verdadero) o F (falso), e ilustre cada enunciado falso con un ejemplo. (Véase la tabla 1 para las definiciones de los conjuntos *N*, *Z*, *I*, *Q* y *R*.)

	Cerrado bajo la suma	**Cerrado bajo la multiplicación**
N	?	?
Z	?	?
Q	?	?
I	?	?
R	T	T

	Cerrado bajo la resta	**Cerrado bajo la división***
N	?	?
Z	?	?
Q	?	?
I	?	?
R	T	T

*Excepto la división entre 0.

Propiedades de las fracciones Recuerde que el cociente $a \div b$, $b \neq 0$, escrito en la forma a/b se llama **fracción**. A la cantidad a se le llama **numerador** y a la cantidad b **denominador**.

Teorema 3 **Propiedades de las fracciones**

Para todos los números reales, a, b, c, d y k (la división entre 0 se excluye):

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$

$\frac{4}{6} = \frac{6}{9}$ ya que $4 \cdot 9 = 6 \cdot 6$

2. $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$

$\frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{3}{5}$

3. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 8}$

4. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5}$

5. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$

$\frac{3}{6} + \frac{5}{6} = \frac{3 + 5}{6}$

6. $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$

$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7 - 3}{8}$

7. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ab + bc}{bd}$

$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 5}$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) Asociativa (+) (B) Conmutativa (+) (C) Distributiva (D) Identidad (+) (E) Inversa (·)
2. (A) División (definición 1) (B) Negativos (teorema 1, parte 2) (C) Negativos (teorema 1, parte 4) (D) Negativos (teorema 1, parte 5) (E) Cero (teorema 2, parte 1)

EJERCICIO A-1

Todas las variables representan números reales.

A

En los problemas del 1 al 8, indique si la respuesta es verdadera (V) o falsa (F).

1. $4 \in \{3, 4, 5\}$

2. $6 \in \{2, 4, 6\}$

3. $3 \notin \{3, 4, 5\}$

4. $7 \notin \{2, 4, 6\}$

5. $\{1, 2\} \subset \{1, 3, 5\}$

6. $\{2, 6\} \subset \{2, 4, 6\}$

7. $\{7, 3, 5\} \subset \{3, 5, 7\}$

8. $\{7, 3, 5\} = \{3, 5, 7\}$

En los problemas del 9 al 14, reemplace el signo de integración con una expresión apropiada que ilustre el uso de la propiedad de los números reales indicada.

9. Propiedad conmutativa (+): $x + 7 = ?$

10. Propiedad conmutativa (·): $uv = ?$

11. Propiedad asociativa (·): $x(yz) = ?$

12. Propiedad asociativa (+): $3 + (7 + y) = ?$

13. Propiedad identidad (+): $0 + 9m = ?$

14. Propiedad identidad (·): $1(u + v) = ?$

En los problemas del 15 al 26, cada enunciado ilustra el uso de una de las siguientes propiedades o definiciones. Indique cuál de éstas.

Conmutativa (+, ·)
Asociativa (+, ·)
Distributiva
Identidad (+, ·)
Inversa (+, ·)
Resta
División
Negativos (teorema 1)
Cero (teorema 2)

15. $x + ym = x + my$

16. $7(3m) = (7 \cdot 3)m$

17. $7u + 9u = (7 + 9)u$

18. $-\frac{u}{-v} = \frac{u}{v}$

19. $(-2)(\frac{1}{-2}) = 1$

20. $8 - 12 = 8 + (-12)$

21. $w + (-w) = 0$

22. $5 \div (-6) = 5(\frac{1}{-6})$

23. $3(xy + z) + 0 = 3(xy + z)$

24. $ab(c + d) = abc + abd$

25. $\dfrac{-x}{-y} = \dfrac{x}{y}$

26. $(x + y) \cdot 0 = 0$

B

Escriba cada conjunto en los problemas del 27 al 32, usando el método de listado, esto es, la lista de los elementos entre las llaves. Si el conjunto es vacío, escriba ∅.

27. $\{x \mid x$ es un entero impar entre -3 y $5\}$

28. $\{x \mid x$ es un entero par entre -4 y $6\}$

29. $\{x \mid x$ es una letra en "status"$\}$

30. $\{x \mid x$ es una letra en "consensus"$\}$

31. $\{x \mid x$ es un mes que empieza con B$\}$

32. $\{x \mid x$ es un mes con 32 dias$\}$

En los problemas del 33 al 40, cada enunciado ilustra el uso de una de las siguientes propiedades o definiciones, indique cuál es en cada caso.

Conmutativa (+, ·)	*Resta*
Asociativa (+, ·)	*División*
Distributiva	*Negativos (teorema 1)*
Identidad (+, ·)	*Cero (teorema 2)*
Inversa (+, ·)	

33. $(3x + 5) + 7 = 7 + (3x + 5)$

34. $(5x)(7y) = 5[x(7y)]$

35. $(3x + 2) + (x + 5) = 3x + [2 + (x + 5)]$

36. $(x + 3)(x + 5) = (x + 3)x + (x + 3)5$

37. $x(x - y) + y(x - y) = (x + y)(x - y)$

38. $\dfrac{-7}{-(m - n)} = \dfrac{7}{m - n}$

39. $(2x - 3)(x + 5) = 0$ si y sólo si $2x - 3 = 0$ o $x + 5 = 0$.

40. Si $x(3x - 7) = 0$, entonces, ya sea $x = 0$ o $3x - 7 = 0$.

41. Si $ab = 0$, ¿a o b deben de ser 0?

42. Si $ab = 0$ ¿a o b deben de ser 1?

43. Indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos:
   (A) Todos los números naturales son enteros.
   (B) Todos los números reales son irracionales.
   (C) Todos los números racionales son números reales.

44. Indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos:
   (A) Todos los enteros son números naturales.
   (B) Todos los números racionales son números reales.
   (C) Todos los números naturales son números racionales.

45. Dé un ejemplo de un número racional que no sea un entero.

46. Dé un ejemplo de un número real que no sea un número racional.

47. Dados los conjuntos de números N (números naturales), Z (enteros), Q (números racionales) y R (números reales), indique a cuál(es) conjunto(s) pertenece cada uno de los siguientes números:
   (A) -3 (B) 3.14 (C) π (D) $\frac{2}{3}$

48. Dados los conjuntos de números N, Z, Q y R (véase el problema 47), indique a cuál(es) conjunto(s) pertenece cada uno de los siguientes números:
   (A) 8 (B) $\sqrt{2}$ (C) -1.414 (D) $\frac{-5}{2}$

En los problemas 49 y 50 use una calculadora para expresar cada número como una fracción decimal a la capacidad de su calculadora (use el manual del usuario para su calculadora). Observe la representación decimal repetitiva de los números racionales y la representación decimal no repetitiva de los números irracionales.

49. (A) $\frac{8}{9}$ (B) $\frac{3}{11}$ (C) $\sqrt{5}$ (D) $\frac{11}{8}$

50. (A) $\frac{13}{6}$ (B) $\sqrt{21}$ (C) $\frac{7}{16}$ (D) $\frac{29}{111}$

51. Indique verdadero (V) o falso (F), y para cada enunciado falso, encuentre todos los reemplazos de los números reales para a y b que proporcionen un contraejemplo. Para todos los números reales a y b:
   (A) $a + b = b + a$ (B) $a - b = b - a$
   (C) $ab = ba$ (D) $a \div b = b \div a$

52. Indique verdadero (V) o falso (F), y para cada enunciado falso encuentre todos los números reales que reemplacen a a, b y c y proporcionen un contraejemplo. Para todos los números reales a, b y c:
   (A) $(a + b) + c = a + (b + c)$
   (B) $(a - b) - c = a - (b - c)$
   (C) $a(bc) = (ab)c$
   (D) $(a \div b) \div c = a \div (b \div c)$

C

53. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 4, 6\}$ encuentre:
   (A) $\{x \mid x \in A$ o $x \in B\}$
   (B) $\{x \mid x \in A$ y $x \in B\}$

54. Si $F = \{-2, 0, 2\}$ y $G = \{-1, 0, 1, 2\}$, encuentre:
   (A) $\{x \mid x \in F$ o $x \in G\}$
   (B) $\{x \mid x \in F$ y $x \in G\}$

55. Si $c = 0.151515\ldots$, entonces $100c = 15.1515\ldots0$ y

$$100c - c = 15.1515\ldots - 0.151515\ldots$$
$$99c = 15$$
$$c = \tfrac{15}{99} = \tfrac{5}{33}$$

Procediendo de manera similar, convierta la repetición decimal 0.090909. . . en una fracción. (Todos los decimales repetitivos son números racionales, y todos los números racionales tienen representaciones decimales repetitivas.)

56. Repita el problema 55 para 0.181818. . .

57. Para ver cómo la propiedad distributiva está detrás del mecanismo de la multiplicación larga, calcule cada una de las siguientes multiplicaciones y compare:

Multiplicación larga	Uso de la propiedad distributiva
23	$23 \cdot 12$
$\times$ 12	$= 23(2 + 10)$
	$= 23 \cdot 2 + 23 \cdot 10 =$

58. Para a y b números reales, justifique cada paso usando una propiedad de esta sección.

Enunciado	Razón
1. $(a + b) + (-a) = (-a) + (a + b)$	**1.**
2. $= [(-a) + a] + b$	**2.**
3. $= 0 + b$	**3.**
4. $= b$	**4.**

SECCIÓN A-2 Polinomios: Operaciones básicas

- Números naturales como exponentes
- Polinomios
- Combinación de términos semejantes
- Suma y resta
- Multiplicación
- Operaciones combinadas
- Aplicación

En esta sección se repasan las operaciones básicas con *polinomios*, una forma matemática que se encuentra frecuentemente en matemáticas. El análisis se inicia con un breve repaso de los números naturales como exponentes. Los exponentes enteros y racionales y sus propiedades se analizarán en detalle en las secciones siguientes.

• Números naturales como exponentes

En seguida se define lo que es un **número natural como exponente**.

DEFINICIÓN 1 **Número natural como exponente**

Para n un número natural y a para cualquier número real:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores de } a} \qquad 2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ factores de } 2}$$

También, la **primera propiedad de los exponentes** se enuncia de la manera siguiente:

Teorema 1 **Primera propiedad de los exponentes**

Para cualesquiera números naturales m y n, y cualquier número real a:

$$a^m a^n = a^{m+n} \qquad (3x^5)(2x^7) = (3 \cdot 2)x^{5+7} = 6x^{12}$$

Polinomios

Las **expresiones algebraicas** se forman usando constantes y variables y las operaciones algebraicas de suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y localización de raíces. Algunos ejemplos son

$$\sqrt[3]{x^3 + 5} \qquad 5x^4 + 2x^2 - 7$$

$$x + y - 7 \qquad (2x - y)^2$$

$$\frac{x - 5}{x^2 + 2x - 5} \qquad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$$

Una expresión algebraica implica sólo las operaciones de suma, resta, multiplicación y elevación de números naturales a potencias en las variables y constantes se llama **polinomio**. Algunos ejemplos son

$$2x - 3 \qquad 4x^2 - 3x + 7$$

$$x - 2y \qquad 5x^3 - 2x^2 - 7x + 9$$

$$5 \qquad x^2 - 3xy + 4y^2$$

$$0 \qquad x^3 - 3x^2y + xy^2 + 2y^7$$

En un polinomio, una variable no puede estar en un denominador, como un exponente, o dentro de un radical. De acuerdo con esto, un **polinomio de una variable** x se construye al sumar o restar constantes y términos de la forma ax^n, donde a es un número real y n es un número natural. Un polinomio con dos variables x y y se construye sumando y restando constantes y términos de la forma ax^my^n, donde a es un número real y m y n son números naturales. Los polinomios en tres o más variables se definen de manera similar.

Los polinomios se pueden clasificar de acuerdo con su *grado*. Si un término en un polinomio tiene sólo una variable como factor, entonces el **grado de ese término** es la potencia de la variable. Si dos o más variables están presentes en un término como factores, entonces el **grado del término** es la suma de las potencias de las variables. El **grado de un polinomio** es el grado del término diferente de cero con el grado más alto en el polinomio. Cualquier constante diferente de cero se define como un **polinomio de grado cero**. El número 0 es también un polinomio pero no tiene grado asignado.

EJEMPLO 1 **Polinomios y no polinomios**

(A) Polinomios en una variable:

$$x^2 - 3x + 2 \qquad 6x^3 - \sqrt{2}x - \tfrac{1}{3}$$

(B) Polinomios en varias variables:

$$3x^2 - 2xy + y^2 \qquad 4x^3y^2 - \sqrt{3}xy^2z^5$$

(C) No polinomios

$$\sqrt{2x} - \frac{3}{x} + 5 \qquad \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} \qquad \sqrt{x^2 - 3x + 1}$$

(D) El grado del primer término en $6x^3 - \sqrt{2}x - \frac{1}{3}$ es 3, el grado del segundo término es 1, el grado del tercer término es 0, y el grado del polinomio completo es 3.

(E) El grado del primer término en $4x^3y^2 - \sqrt{3}xy^2$ es 5, el grado del segundo término es 3, y el grado de todo el polinomio es 5.

Problema seleccionado 1

(A) ¿Cuáles de las siguientes expresiones son polinomios?

$$3x^2 - 2x + 1 \qquad \sqrt{x - 3} \qquad x^2 - 2xy + y^2 \qquad \frac{x - 1}{x^2 + 2}$$

(B) Dado el polinomio $3x^5 - 6x^3 + 5$, ¿cuál es el grado del primer término? ¿El del segundo término? ¿El del polinomio completo?

(C) Dado el polinomio $6x^4y^2 - 3xy^3$, ¿cuál es el grado del primer término? ¿El del segundo término? ¿El del polinomio completo?

Además de clasificar los polinomios por grados, también se le llama **monomio** a un polinomio de un solo término, a un polinomio de dos términos **binomio**, y a un polinomio de tres términos **trinomio**.

$\frac{5}{2}x^2y^3$	Monomio
$x^3 + 4.7$	Binomio
$x^4 - \sqrt{2}x^2 + 9$	Trinomio

- **Combinación de términos semejantes**

Se inicia con una palabra acerca de los *coeficientes*. Una constante en un término de un polinomio, incluyendo el signo que precede a éste, se llama **coeficiente numérico**, o simplemente, **coeficiente**, del término. Si no se tiene una constante, o sólo tiene un

signo +, se entiende que el coeficiente es 1. Si sólo tiene un signo −, se entiende que el coeficiente es −1. Por consiguiente, dado el polinomio

$$2x^4 - 4x^3 + x^2 - x + 5 \qquad 2x^4 + (-4)x^3 + 1x^2 + (-1)x + 5$$

el coeficiente del primer término es 2, el coeficiente del segundo término es −4, el coeficiente del tercer término es 1, el coeficiente del cuarto término es −1, y el coeficiente del último término es 5.

En este punto, es útil establecer otras dos propiedades distributivas, de los números reales que se deducen de las propiedades distributivas establecidas en la sección A-1.

Otras propiedades distributivas

1. $a(b - c) = (b - c)a = ab - ac$
2. $a(b + c + \cdots + f) = ab + ac + \cdots + af$

Dos términos en un polinomio se llaman **términos semejantes** si tienen exactamente los mismos factores variables a las mismas potencias. Los coeficientes numéricos pueden o no pueden ser los mismos. Debido a que los términos constantes no implican variables, todos los términos constantes son términos semejantes. Si un polinomio contiene dos o más términos semejantes, estos términos se pueden combinar en un solo término usando las propiedades distributivas. Considere el siguiente ejemplo:

$$5x^3y - 2xy - x^3y - 2x^3y \quad = 5x^3y - x^3y - 2x^3y - 2xy$$
$$= (5 \quad - \quad - 2 \quad) - 2xy$$
$$= (5 - 1 - 2) \quad - 2xy$$
$$= 2x^3y - 2xy$$

Es clara la libertad con que se han usado las propiedades de los números reales, antes analizadas. Los pasos marcados en el cuadro punteado se hacen por lo general mentalmente y el proceso se mecaniza en forma rápida de la manera siguiente:

Los términos semejantes en un polinomio se combinan sumando sus coeficientes numéricos.

EJEMPLO 2 **Simplificación de polinomios**

Elimine los paréntesis y combine términos semejantes:

(A) $2(3x^2 - 2x + 5) + (x^2 + 3x - 7) = 2(3x^2 - 2x + 5) + 1(x^2 + 3x - 7)$

$$= 6x^2 - 4x + 10 + x^2 + 3x - 7$$
$$= 7x^2 - x + 3$$

(B) $(x^3 - 2x - 6) - (2x^3 - x^2 + 2x - 3)$

$= 1(x^3 - 2x - 6) + (-1)(2x^3 - x^2 + 2x - 3)$ Aquí sea cuidadoso con el signo.

Piense

$= x^3 - 2x - 6 - 2x^3 + x^2 - 2x + 3$

$= -x^3 + x^2 - 4x - 3$

(C) $[3x^2 - (2x + 1)] - (x^2 - 1) = [3x^2 - 2x - 1] - (x^2 - 1)$ Elimine primero los paréntesis internos

$= 3x^2 - 2x - 1 - x^2 + 1$

$= 2x^2 - 2x$

Problema seleccionado 2 Elimine los paréntesis y combine los términos semejantes:

(A) $3(u^2 - 2v^2) + (u^2 + 5v^2)$

(B) $(m^3 - 3m^2 + m - 1) - (2m^3 - m + 3)$

(C) $(x^3 - 2) - [2x^3 - (3x + 4)]$

• Suma y resta

La suma y resta de polinomios se puede pensar en términos de eliminación de paréntesis y combinación de términos semejantes, como se ilustra en el ejemplo 2. Los arreglos horizontal y vertical se ilustran en los siguientes dos ejemplos. Usted podrá trabajar de cualquier manera, permitiendo que la situación determine la elección.

EJEMPLO 3 **Suma de polinomios**

Sume: $x^4 - 3x^3 + x^2$, $-x^3 - 2x^2 + 3x$ y $3x^2 - 4x - 5$

Solución Sume horizontalmente:

$$(x^4 - 3x^3 + x^2) + (-x^3 - 2x^2 + 3x) + (3x^2 - 4x - 5)$$
$$= x^4 - 3x^3 + x^2 - x^3 - 2x^2 + 3x + 3x^2 - 4x - 5$$
$$= x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 5$$

O verticalmente, alineando los términos semejantes y sumando sus coeficientes:

$$\begin{array}{r} x^4 - 3x^3 + x^2 \phantom{{}+3x-5} \\ - x^3 - 2x^2 + 3x \phantom{{}-5} \\ 3x^2 - 4x - 5 \\ \hline x^4 - 4x^3 + 2x^2 - x - 5 \end{array}$$

Problema seleccionado 3 Sume horizontal y verticalmente:

$$3x^4 - 2x^3 - 4x^2, \quad x^3 - 2x^2 - 5x, \quad \text{y} \quad x^2 + 7x - 2$$

EJEMPLO 4 **Resta de polinomios**

Reste: $4x^2 - 3x + 5$ de $x^2 - 8$

Solución

$$\begin{aligned}&(x^2 - 8) - (4x^2 - 3x + 5)\\ &= x^2 - 8 - 4x^2 + 3x - 5\\ &= -3x^2 + 3x - 13\end{aligned}$$

o

$$\begin{array}{r} x^2 - 8 \\ \underline{-4x^2 + 3x - 5} \\ -3x^2 + 3x - 13 \end{array}$$

← Cambie de signo y sume.

Problema seleccionado 4 Reste: $2x^2 - 5x + 4$ de $5x^2 - 6$

PRECAUCIÓN Cuando use un arreglo horizontal para restar un polinomio con más de un término, debe encerrar al polinomio entre paréntesis. En consecuencia, para restar $2x + 5$ de $4x - 11$, se debe escribir

$$4x - 11 - (2x + 5) \quad \text{y no} \quad 4x - 11 - 2x + 5$$

• **Multiplicación** La multiplicación de expresiones algebraicas implica el uso extensivo de las propiedades distributivas de los números reales, tan bien como otras propiedades de los números reales.

EJEMPLO 5 **Multiplicación de polinomios**

Multiplique: $(2x - 3)(3x^2 - 2x + 3)$

Solución

$$\begin{aligned}(2x - 3)(3x^2 - 2x + 3) &= 2x(3x^2 - 2x + 3) - 3(3x^2 - 2x + 3)\\ &= 6x^3 - 4x^2 + 6x - 9x^2 + 6x - 9\\ &= 6x^3 - 13x^2 + 12x - 9\end{aligned}$$

O, usando un arreglo vertical,

$$\begin{array}{l} 3x^2 - 2x + 3 \\ \underline{2x - 3 } \\ 6x^3 - 4x^2 + 6x \\ \underline{ - 9x^2 + 6x - 9} \\ 6x^3 - 13x^2 + 12x - 9 \end{array}$$

Problema seleccionado 3 Multiplique: $(2x - 3)(2x^2 + 3x - 2)$

Así, para multiplicar los dos polinomios, multiplique cada término de uno por cada término de los otros, y combine los términos semejantes.

Los productos de ciertos factores binomiales ocurren con tanta frecuencia que es útil desarrollar procedimientos que permitan escribir sus productos por inspección. Para encontrar el producto $(2x - 1)(3x + 2)$ se usa el popular **método PEIU**. Se multiplica cada término de un factor por cada término de los otros factores de la manera siguiente:

	P	E	I	U
	Primer producto ↓	Producto externo ↓	Producto interno ↓	Último producto ↓
$(2x - 1)(3x + 2) =$	$6x^2$	$+ 4x$	$- 3x$	$- 2$

Los productos internos y externos son términos semejantes y, por lo tanto, se combinan en un solo término. De manera que,

$$(2x - 1)(3x + 2) = 6x^2 + x - 2$$

Para acelerar el proceso, se combinan los productos internos y externos mentalmente.

Los productos de ciertos factores binomiales ocurren con tanta frecuencia que es útil recordar sus fórmulas. Las siguientes fórmulas se verifican fácilmente al multiplicar los factores del lado izquierdo usando el método PEIU:

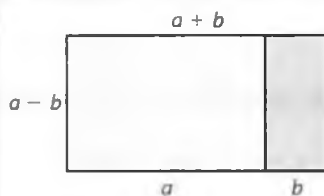
Productos especiales

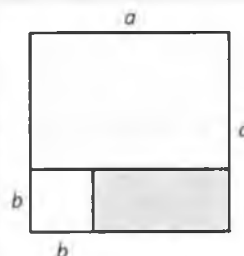
1. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1

(A) Explique la relación entre la fórmula del producto especial 1 y las áreas de los rectángulos en las figuras.

$$(a - b)(a + b) \qquad = \qquad a^2 - b^2$$





(B) Construya figuras similares para proporcionar interpretaciones geométricas para los productos especiales 2 y 3.

EJEMPLO 4

Multiplicación de binomios

Multiplique:

(A) $(2x - 3y)(5x + 2y) = 10x^2 + 4xy - 15xy - 6y^2 = 10x^2 - 11xy - 6y^2$

(B) $(3a - 2b)(3a + 2b) = (3a)^2 - (2b)^2 = 9a^2 - 4b^2$

(C) $(5x - 3)^2 = (5x)^2 - 2(5x)(3) + 3^2 = 25x^2 - 30x + 9$

(D) $(m + 2n)^2 = m^2 + 4mn + 4n^2$

Problema seleccionado 4

Multiplique:

(A) $(4u - 3v)(2u + v)$ (B) $(2xy + 3)(2xy - 3)$
(C) $(m + 4n)(m - 4n)$ (D) $(2u - 3v)^2$ (E) $(6x + y)^2$

PRECAUCIÓN Recuerde incluir la suma de los términos internos y externos cuando use el método PEIU para elevar al cuadrado un binomio. Esto es,

$$(x + 3)^2 \neq x^2 + 9 \qquad (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

Operaciones combinadas

Se considerarán varios ejemplos en los que se usan todas las operaciones ya analizadas. Antes de considerar estos ejemplos, es útil resumir las convenciones del orden de las operaciones pertenecientes a los exponentes, la multiplicación y división, y la suma y resta.

Orden de las operaciones

1. Primero agrupe simplificando el paréntesis más interno, después el siguiente paréntesis más interno y así sucesivamente.

$$2[3 - (x - 4)] = 2[3 - x + 4]$$
$$= 2(7 - x) = 14 - 2x$$

2. A menos que los símbolos de agrupamiento indiquen otra cosa, aplique los exponentes antes de realizar la multiplicación o la división.

$$2(x - 2)^2 = 2(x^2 - 4x + 4) = 2x^2 - 8x + 8$$

3. A menos que los símbolos de agrupamiento indiquen otra cosa, realice la multiplicación y división antes de la suma y la resta. En cualquier otro caso, proceda de izquierda a derecha.

$$5 - 2(x - 3) = 5 - 2x + 6 = 11 - 2x$$

EJEMPLO 7 **Operaciones combinadas**

Realice las operaciones indicadas y simplifique:

(A) $3x - \{5 - 3[x - x(3 - x)]\} = 3x - \{5 - 3[x - 3x + x^2]\}$
$= 3x - \{5 - 3[-2x + x^2]\}$
$= 3x - \{5 + 6x - 3x^2\}$
$= 3x - 5 - 6x + 3x^2$
$= 3x^2 - 3x - 5$

(B) $(x - 2y)(2x + 3y) - (2x + y)^2 = 2x^2 + 3xy - 4xy - 6y^2 - (4x^2 + 4xy + y^2)$
$= 2x^2 - xy - 6y^2 - 4x^2 - 4xy - y^2$
$= -2x^2 - 5xy - 7y^2$

(C) $(2m + 3n)^3 = (2m + 3n)(2m + 3n)^2$
$= (2m + 3n)(4m^2 + 12mn + 9n^2)$
$= 8m^3 + 24m^2n + 18mn^2 + 12m^2n + 36mn^2 + 27n^3$
$= 8m^3 + 36m^2n + 54mn^2 + 27n^3$

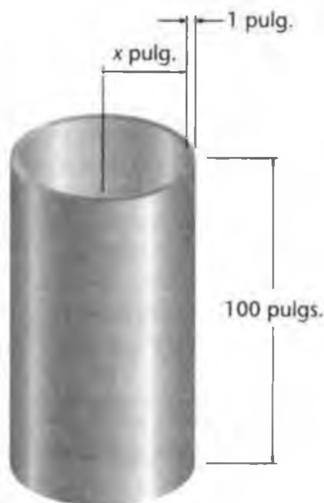
Problema seleccionado 7 Realice las operaciones indicadas y simplifique:

(A) $2t - \{7 - 2[t - t(4 + t)]\}$ (B) $(u - 3v)^2 - (2u - v)(2u + v)$
(C) $(4x - y)^3$

• **Aplicación**

EJEMPLO 8 **Volumen de un cascarón cilíndrico**

∫ * Un tubo de plástico para agua con un hoyo en el centro tiene 100 pulgadas de largo, una pulgada de grueso, y un radio interno de x pulgadas (véase figura). Escriba una expresión algebraica en términos de x que represente el volumen del plástico usado para construir el tubo. Simplifique la expresión. [*Recuerde*: El volumen V de un cilindro circular recto de radio r y altura h está dado por $V = \pi r^2 h$.]



Solución Un cilindro circular recto con un hoyo en el centro se llama **cascarón cilíndrico**. El volumen del cascarón es igual al volumen del cilindro menos el volumen del hoyo. Debido a que el radio del hoyo es x pulgadas y el tubo tiene un espesor de una pulgada, el radio del cilindro es $x + 1$ pulgadas. De modo que se tiene

$$\begin{pmatrix}\text{Volumen del}\\ \text{cascarón}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Volumen}\\ \text{del cilindro}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Volumen}\\ \text{del hoyo}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= \pi(x+1)^2 100 - \pi x^2 100\\ &= 100\pi(x^2 + 2x + 1) - 100\pi x^2\\ &= 100\pi x^2 + 200\pi x + 100\pi - 100\pi x^2\\ &= 200\pi x + 100\pi\end{aligned}$$

Problema seleccionado 8 Un tubo de plástico para agua tiene 200 pulgadas de largo, 2 pulgadas de espesor, y tiene un radio externo de x pulgadas. Escriba una expresión algebraica en términos de x que represente el volumen del plástico usado para construir el tubo. Simplifique la expresión.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $3x^2 - 2x + 1$, $x^2 - 2xy + y^2$ (B) 5, 3, 5 (C) 6, 4, 6
2. (A) $4u^2 - v^2$ (B) $-m^3 - 3m^2 + 2m - 4$ (C) $-x^3 + 3x + 2$
3. $3x^4 - x^3 - 5x^2 + 2x - 2$ **4.** $3x^2 + 5x - 10$ **5.** $4x^3 - 13x + 6$
6. (A) $8u^2 - 2uv - 3v^2$ (B) $4x^2y^2 - 9$ (C) $m^2 - 16n^2$ (D) $4u^2 - 12uv + 9v^2$ (E) $36x^2 + 12xy + y^2$
7. (A) $-2t^2 - 4t - 7$ (B) $-3u^2 - 6uv + 10v^2$ (C) $64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$
8. Volumen $= 200\pi x^2 - 200\pi(x - 2)^2 = 800\pi x - 800\pi$

EJERCICIO A-2

A

Los problemas del 1 al 8 se refieren a los siguientes polinomios:

(a) $2x^3 - 3x^2 + x + 5$ (b) $2x^2 + x - 1$ (c) $3x - 2$

1. ¿Cuál es el grado de (a)? **2.** ¿Cuál es el grado de (B)?

3. Sume (a) y (b). **4.** Sume (b) y (c).

5. Reste (b) de (a). **6.** Reste (c) de (b).

7. Multiplique (a) y (c). **8.** Multiplique (b) y (c).

En los problemas del 9 al 28, realice las operaciones indicadas y simplifique:

9. $2(x - 1) + 3(2x - 3) - (4x - 5)$

10. $2(u - 1) - (3u + 2) - 2(2u - 3)$

11. $2y - 3y[4 - 2(y - 1)]$

12. $4a - 2a[5 - 3(a + 2)]$

13. $(m - n)(m + n)$

14. $(a + b)(a - b)$

15. $(4t - 3)(t - 2)$

16. $(3x - 5)(2x + 1)$

17. $(3x + 2y)(x - 3y)$

18. $(2x - 3y)(x + 2y)$

19. $(2m - 7)(2m + 7)$

20. $(3y + 2)(3y - 2)$

21. $(6x - 4y)(5x + 3y)$

22. $(3m + 7n)(2m - 5n)$

23. $(3x - 2y)(3x + 2y)$

24. $(4m + 3n)(4m - 3n)$

25. $(4x - y)^2$

26. $(3u + 4v)^2$

27. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

28. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

B

En los problemas del 29 al 42, realice las operaciones indicadas y simplifique.

29. $2x - 3\{x + 2[x - (x + 5)] + 1\}$

30. $m - \{m - [m - (m - 1)]\}$

31. $2\{3[a - 4(1 - a)] - (5 - a)\}$

32. $5b - 3\{-[2 - 4(2b - 1)] + 2(2 - 3b)\}$

33. $(2x^2 + x - 2)(x^2 - 3x + 5)$

34. $(x^2 - 2xy + y^2)(x^2 + 2xy + y^2)$

35. $(h^2 + hk + k^2)(h^2 - hk + k^2)$

36. $(n^2 + 2n + 1)(n^2 - 4n - 3)$

37. $(2x - 1)^2 - (3x + 2)(3x - 2)$

38. $(3a - b)(3a + b) - (2a - 3b)^2$

39. $(m - 3n)(m + 8n) + (m + 6n)(m + 4n)$

40. $(y - 2)(y + 1) + (y - 3)(y + 4)$

41. $(2m - n)^3$

42. $(3a + 2b)^3$

$\int$ *Los problemas del 43 al 50 están relacionadas con el cálculo. Realice las operaciones indicadas y simplifique:*

43. $5(x + h) - 4 - (5x - 4)$

44. $6(x + h) + 2 - (6x + 2)$

45. $3(x + h)^2 + 2(x + h) - (3x^2 + 2x)$

46. $4(x + h)^2 - 5(x + h) - (4x^2 - 5x)$

47. $-2(x + h)^2 - 3(x + h) + 7 - (-2x^2 - 3x + 7)$

48. $-(x + h)^2 + 4(x + h) - 9 - (-x^2 + 4x - 9)$

49. $(x + h)^3 - x^3$

50. $2(x + h)^2 + 3(x + h) - (2x^2 + 3x)$

51. Reste la suma de los primeros dos polinomios de la suma de los dos últimos: $3m^2 - 2m + 5$, $4m^2 - m$, $3m^2 - 3m - 2$, $m^3 + m^2 + 2$

52. Reste la suma de los últimos dos polinomios de la suma de los dos primeros: $2x^2 - 4xy + y^2$, $3xy - y^2$, $x^2 - 2xy - y^2$, $-x^2 + 3xy - 2y^2$

C

En los problemas del 53 al 56 realice las operaciones indicadas y simplifique.

53. $2(x - 2)^3 - (x - 2)^2 - 3(x - 2) - 4$

54. $(2x - 1)^3 - 2(2x - 1)^2 + 3(2x - 1) + 7$

55. $-3x\{x[x - x(2 - x)] - (x + 2)(x^2 - 3)\}$

56. $2\{(x - 3)(x^2 - 2x + 1) - x[3 - x(x - 2)]\}$

57. Muestre por ejemplo que, en general, $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$. Analice las posibles condiciones de a y b que hacen de ésta una ecuación válida.

58. Muestre por ejemplo que, en general, $(a - b)^2 \neq a^2 - b^2$. Analice las posibles condiciones de a y b que hacen de ésta una ecuación válida.

59. Si a usted le dan dos polinomios, uno de grado m y otro de grado n, $m > n$, ¿cuál es el grado de la suma?

60. ¿Cuál es el grado del producto de dos polinomios en el problema 59?

61. ¿Cómo cambia la respuesta del problema 59 si los dos polinomios pueden tener el mismo grado?

62. ¿Cómo cambia la respuesta del problema 60 si los dos polinomios pueden tener el mismo grado?

APLICACIONES

63. Geometría. El ancho de un rectángulo es 5 centímetros menor que su largo. Si x representa el largo, escriba una expresión algebraica en términos de x que representa el perímetro del rectángulo. Simplifique la expresión.

64. Geometría. El largo de un rectángulo es 8 metros mayor que su ancho. Si x representa el ancho del rectángulo escriba una expresión algebraica en términos de x que represente su área. Cambie la expresión a una forma sin paréntesis.

65. Problema de monedas. Un parquímetro contiene monedas de 5 ¢, 10 ¢ y 25 ¢. Hay cinco monedas de 10 ¢ menos que de 5 ¢ y 2 de 25 ¢ más que de 10 ¢, si x representa el número de monedas de 5 ¢, escriba una expresión algebraica en términos de x que represente el valor de todas las monedas en el parquímetro en centavos. Simplifique la expresión.

66. Problema de monedas. Una máquina vendedora contiene monedas de 10 ¢ y de 25 ¢ solamente. Hay cuatro monedas de 10¢ más que de 25¢. Si x representa el número de monedas de 25 ¢, escriba una expresión algebraica en términos de x que represente el valor de todas las monedas en la máquina vendedora en centavos. Simplifique la expresión.

67. Empacado. Un recipiente plástico esférico para relojes de pulso tiene un radio interno de x centímetros (véase la figura). Si el cascarón plástico tiene 3 centímetros de espe-

sor, escriba una expresión algebraica en términos de x que represente el volumen del plástico usado para construir el recipiente. Simplifique la expresión. [*Sugerencia*: El volumen V de una esfera de radio r está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.]

68. Empacado. Un recipiente cúbico para los componentes de una computadora barata se forma cubriendo un molde de metal de poliestireno. Si el molde de metal es un cubo con lados de x centímetros de largo y la cubierta de poliestireno tiene 2 centímetros de espesor, escriba una expresión algebraica en términos de x que represente el volumen del poliestireno usado para construir el recipiente. Simplifique la expresión. [*Sugerencia*: El volumen V de un cubo con lados de largo t está dado por $V = t^3$.]

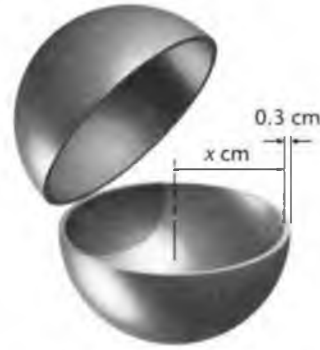


Figura para el ejercicio 67

SECCIÓN A-3 Polinomios: Factorización



- Factorización, ¿qué significa?
- Factores comunes y factorización por agrupamiento
- Factorización de polinomios de segundo grado
- Más acerca de factorización

• Factorización, ¿qué significa?

Un **factor de un número** es uno de dos o más números cuyo producto es el número dado. De manera similar, los **factores de una expresión algebraica** son una de dos o más expresiones algebraicas cuyo producto es la expresión algebraica dada. Por ejemplo,

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \qquad \text{2, 3 y 5 son cada uno factores de 30.}$$

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2) \qquad (x - 2) \text{ y } (x + 2) \text{ son cada uno factores de } x^2 - 4.$$

Al proceso de escribir un número de expresiones algebraicas como el producto de otros números o expresiones algebraicas se llama **factorización**. Se inicia el análisis de factorización con los enteros positivos.

Un entero tal como el 30 se puede representar en una forma factorizada de varias maneras. Los productos

$$6 \cdot 5 \qquad (\tfrac{1}{2})(10)(6) \qquad 15 \cdot 2 \qquad 2 \cdot 3 \cdot 5$$

dan como resultado 30. Una forma particularmente útil de factorizar enteros positivos mayores que 1 es en términos de números *primos*.

DEFINICIÓN 1 **Números primos y compuestos**

Un entero mayor que 1 es **primo** si éste sólo tiene como factores enteros a él mismo y al 1. Un entero mayor que 1 que no es primo se llama **número compuesto**. El entero 1 no es ni primo ni compuesto.

Ejemplos de números primos:	2, 3, 5, 7, 11, 13
Ejemplos de números compuestos:	4, 6, 8, 9, 10, 12

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 En el siguiente arreglo, cruce todos los múltiplos de 2, excepto al 2. Después cruce todos los múltiplos de 3, excepto al 3. Repita esto para cada entero en el arreglo que no haya sido ya cruzado. Describa el conjunto de números que permanecen cuando se completa el proceso.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Este proceso se llama **criba de Eratóstenes**. (Eratóstenes fue un matemático y astrónomo griego contemporáneo de Arquímedes, aproximadamente 200 a.C.)

Se dice que un número compuesto está **completamente factorizado** si se representa como un producto de factores primos. La única factorización de 30, de las antes dadas, que cumple esta condición es $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

EJEMPLO 1 **Factorización de un número compuesto**

Escriba 60 en una forma completamente factorizada.

Solución

$$60 = 6 \cdot 10 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

o

$$60 = 5 \cdot 12 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

o

$$60 = 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Problema seleccionado 1 Escriba 180 en forma completamente factorizada.

Observe en el ejemplo 1 que se termina con los mismos factores primos para 60 sin tomar en cuenta el proceso de factorización. Esto ilustra una importante propiedad de los enteros:

Teorema 1 **El teorema fundamental de la aritmética**

Cada entero mayor que 1 puede ser primo o puede ser expresado de manera única, excepto por el orden de los factores, como un producto de factores primos.

Los polinomios también se pueden escribir en forma completamente factorizada. Un polinomio tal como $2x^2 - x - 6$ se puede escribir en forma factorizada de varias maneras. Los productos

$$(2x + 3)(x - 2) \qquad 2(x^2 - \tfrac{1}{2}x - 3) \qquad 2(x + \tfrac{3}{2})(x - 2)$$

El resultado de todos es $2x^2 - x - 6$. Una forma particularmente útil de factorizar polinomios es en términos de polinomios primos.

DEFINICIÓN 2 **Polinomios primos**

Un polinomio de grado mayor que 0 se dice que es **primo** respecto a un conjunto dado de números si: (*1*) todos sus coeficientes son parte del conjunto de números, y (*2*) no se puede escribir como el producto de 2 polinomios, excluyendo al 1 y a él mismo, con coeficientes del conjunto de números.

Respecto al conjunto de enteros:

$x^2 - 2$ es primo
$x^2 - 9$ no es primo, ya que $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$

[*Nota*: El conjunto de números más frecuentemente usado en la factorización de polinomios es el conjunto de enteros.]

Un polinomio no primo se dice que está **completamente factorizado con respecto a un conjunto dado de números** si está escrito como un producto de polinomios primos respecto al conjunto de números.

Nuestro objetivo en esta sección es repasar algunas de las técnicas de factorización estándar para polinomios con coeficientes enteros. En el capítulo 3 se trata en forma detallada el tema de la factorización de polinomios de más alto grado con coeficientes arbitrarios.

• Factores comunes y factorización por agrupamiento

El siguiente ejemplo ilustra el uso de las propiedades distributivas en la factorización.

EJEMPLO 2 **Factorización de factores comunes**

Factorice, respecto a los enteros, todos los factores comunes de todos los términos:

(A) $2x^3y - 8x^2y^2 - 6xy^3$ (B) $2x(3x - 2) - 7(3x - 2)$

Soluciones (A) $2x^3y - 8x^2y^2 - 6xy^3 = (2xy)x^2 - (2xy)4xy - (2xy)3y^2$

$= 2xy(x^2 - 4xy - 3y^2)$

(B) $2x(3x - 2) - 7(3x - 2) = 2x(3x - 2) - 7(3x - 2)$

$(3x - 2$

Problema seleccionado 2

Factorice, con respecto a los enteros, todos los factores comunes de todos los términos:

(A) $3x^3y - 6x^2y^2 - 3xy^3$ (B) $3y(2y + 5) + 2(2y + 5)$

EJEMPLO 3

Factorice todos los factores comunes

Factorice completamente con respecto a los enteros:

$$4(2x + 7)(x - 3)^2 + 2(2x + 7)^2(x - 3)$$

Solución

$$\begin{aligned} &4(2x + 7)(x - 3)^2 + 2(2x + 7)^2(x - 3) \\ &\quad = 2(2x + 7)(x - 3)[2(x - 3) + (2x + 7)] \\ &\quad = 2(2x + 7)(x - 3)(2x - 6 + 2x + 7) \\ &\quad = 2(2x + 7)(x - 3)(4x + 1) \end{aligned}$$

Problema seleccionado 3

Factorice completamente respecto a los enteros:

$$4(2x + 5)(3x + 1)^2 + 6(2x + 5)^2(3x + 1)$$

Algunos polinomios se pueden factorizar agrupando primero los términos de tal manera que se obtenga una expresión algebraica parecida a la del ejemplo 2(B). Se puede entonces terminar la factorización por el método usado en ese ejemplo.

EJEMPLO 4

Factorización por agrupamiento

Factorice completamente, respecto a los enteros, por agrupamiento:

(A) $3x^2 - 6x + 4x - 8$ (B) $wy + wz - 2xy - 2xz$
(C) $3ac + bd - 3ad - bc$

Soluciones

(A) $3x^2 - 6x + 4x - 8$

$= (3x^2 - 6x) + (4x - 8)$ Agrupe los primeros dos y los últimos dos terminos.

$= 3x(x - 2) + 4(x - 2)$ Elimine los factores comunes de cada grupo.

$= (3x + 4)(x - 2)$ Factorice el factor común $(x - 2)$.

(B) $wy + wz - 2xy - 2xz$

$= (wy + wz) - (2xy + 2xz)$ Agrupe los dos primeros y los dos últimos términos, sea cuidadoso con los signos.

$= w(y + z) - 2x(y + z)$ Elimine los factores comunes de cada grupo.

$= (w - 2x)(y + z)$ Factorice el factor común $(y + z)$.

(C) $3ac + bd - 3ad - bc$

En los incisos (A) y (B) los polinomios están arreglados de tal manera que agrupando los primeros dos primeros términos y los últimos dos términos se conduce a factores comunes. En este problema ni los primeros dos términos, ni los últimos dos términos tienen un factor común. A veces reacomodando términos se puede llegar a la factorización por agrupamiento. En este caso se intercambian el segundo y cuarto términos para obtener un problema comparable con el inciso (B), el cual se puede factorizar como sigue:

$$3ac - bc - 3ad + bd = (3ac - bc) - (3ad - bd)$$
$$= c(3a - b) - d(3a - b)$$ [faded]
$$= (c - d)(3a - b)$$ [faded]

Factorice completamente, respecto a los enteros, por agrupamiento:

(A) $2x^2 + 6x + 5x + 15$ (B) $2pr + ps - 6qr - 3qs$
(C) $6wy - xz - 2xy + 3wz$

Ahora se abordará la factorización de polinomios de segundo grado de la forma

$$2x^2 - 5x - 3 \qquad \text{y} \qquad 2x^2 + 3xy - 2y^2$$

como el producto de dos polinomios de primer grado con coeficientes enteros. El siguiente ejemplo ilustra un enfoque del problema.

EJEMPLO 5

Factorización de polinomios de segundo grado

Factorice cada polinomio, si es posible, usando coeficientes enteros:

(A) $2x^2 + 3xy - 2y^2$ (B) $x^2 - 3x + 4$ (C) $6x^2 + 5xy - 4y^2$

Soluciones

(A) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = (2x + y)(x - y)$ Ponga en qué se conoce. Los signos deben ser opuestos. (Se puede invertir esta elección si se obtiene $-3xy$ en lugar de $+3xy$ para el término de enmedio.)

Ahora, ¿cuáles son los factores de 2 (el coeficiente de y^2)?

2
$1 \cdot 2$ $(2x - y)(x - 2y) = 2x^2 - 3xy - 2y^2$
$2 \cdot 1$ $(2x + 2y)(x - y) = 2x^2 - 2y^2$

El resultado de la primera elección es $-3xy$ para el término medio (que se acerca, pero no es) así que se invierte la elección de signos para obtener

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 = (2x - y)(x + 2y)$$

(B) $x^2 - 3x + 4 = (x - \quad)(x - \quad)$ Los signos deben ser los mismos, ya que el tercer término es positivo y debe ser negativo, ya que el término medio es negativo.

4	
$2 \cdot 2$	$(x - 2)(x - 2) = x^2 - 4x + 4$
$1 \cdot 4$	$(x - 1)(x - 4) = x^2 - 5x + 4$
$4 \cdot 1$	$(x - 4)(x - 1) = x^2 - 5x + 4$

Ninguna de las elecciones produce el término medio; así que $x^2 - 3x + 4$ no es factorizable usando coeficientes enteros.

(C) $6x^2 + 5xy - 4y^2 = (\ \ x + \ \ y)(\ \ x - \ \ y)$

↑ ↑ ↑ ↑

? ? ? ?

Los signos deben ser opuestos en los factores, ya que el tercer término es negativo. Se puede invertir la elección de signos si es necesario. Ahora se escriben todos los factores de 6 y de 4:

6	4
$2 \cdot 3$	$2 \cdot 2$
$3 \cdot 2$	$1 \cdot 4$
$1 \cdot 6$	$4 \cdot 1$
$6 \cdot 1$	

y se prueba con cada una de las elecciones de la izquierda con cada una de las de la derecha, un total de 12 combinaciones que den el primero y último términos del polinomio $6x^2 + 5xy - 4y^2$. La pregunta es: ¿Puede alguna combinación dar también el término de enmedio, $5xy$? Después de prueba y error y, quizá, de alguna educación para suponer entre las opciones, se encuentra que $3 \cdot 2$ se acopla con $4 \cdot 1$ da el término medio correcto de enmedio. Por consiguiente,

$$6x^2 + 5xy - 4y^2 = (3x + 4y)(2x - y)$$

Si ninguna de las 24 combinaciones (incluyendo la inversión de signos) producen el término de enmedio, se concluye entonces que el polinomio no es factorizable usando coeficientes enteros.

Problema seleccionado 5 Factorice cada polinomio, si es posible, usando coeficientes enteros:

(A) $x^2 - 8x + 12$ (B) $x^2 + 2x + 5$

(C) $2x^2 + 7xy - 4y^2$ (D) $4x^2 - 15xy - 4y^2$

• Más acerca de factorización

Las fórmulas de factorización que en seguida se numeran nos capacitan para factorizar ciertos polinomios que ocurren con frecuencia.

Fórmulas de factorización especial

1.	$u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2$	**Cuadrado perfecto**
2.	$u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2$	**Cuadrado perfecto**
3.	$u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$	**Diferencia de cuadrados**
4.	$u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$	**Diferencia de cubos**
5.	$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$	**Suma de cubos**

Las fórmulas en el cuadro se pueden establecer multiplicando los factores de la derecha.

PRECAUCIÓN Observe que no se ha listado una fórmula de factorización especial para la suma de los dos cuadrados. En general,

$$u^2 + v^2 \neq (au + bv)(cu + dv)$$

para cualquier elección de coeficientes de números reales. a, b, c y d. Pero $u^2 + v^2$ se pueden factorizar usando números complejos (sección 1-5).

EJEMPLO 6 **Uso de las fórmulas de factorización**

Factorice completamente respecto de los enteros:

(A) $x^2 + 6xy + 9y^2$ (B) $9x^2 - 4y^2$ (C) $8m^3 - 1$ (D) $x^3 + y^3z^3$

Soluciones

(A) $x^2 + 6xy + 9y^2 = x^2 + 2(x)(3y) + (3y)^2 = (x + 3y)^2$

(B) $9x^2 - 4y^2 = (3x)^2 - (2y)^2 = (3x - 2y)(3x + 2y)$

(C) $8m^3 - 1 = (2m)^3 - 1^3$

$= (2m - 1)[(2m)^2 + (2m)(1) + 1^2]$

$= (2m - 1)(4m^2 + 2m + 1)$

(D) $x^3 + y^3z^3 = x^3 + (yz)^3$

$= (x + yz)(x^2 - xyz + y^2z^2)$

Problema seleccionado 6 Factorice completamente respecto de los enteros:

(A) $4m^2 - 12mn + 9n^2$ (B) $x^2 - 16y^2$ (C) $z^3 - 1$ (D) $m^3 + n^3$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2

(A) Verifique las siguientes fórmulas de factorización para $u^4 - v^4$:

$$\begin{aligned} u^4 - v^4 &= (u - v)(u + v)(u^2 + v^2) \\ &= (u - v)(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3) \end{aligned}$$

(B) Analice los patrones en las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= (u - v)(u + v) \\ u^3 - v^3 &= (u - v)(u^2 + uv + v^2) \\ u^4 - v^4 &= (u - v)(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3) \end{aligned}$$

(C) Use el patrón que descubrió en el inciso (B) para escribir las fórmulas similares para $u^5 - v^5$ y $u^6 - v^6$. Verifique sus fórmulas por multiplicación.

Se termina esta sección considerando los factores que implican combinaciones de las técnicas anteriores tan bien como algunas otras. Generalmente hablando:

> Cuando se preguntó cómo factorizar un polinomio, primero se tomaron todos los factores comunes de todos los términos, si éstos están presentes, y después se procede como antes hasta que todos los factores sean primos.

EJEMPLO 7 **Combinación de técnicas de factorización**

Factorice completamente respecto de los enteros:

(A) $18x^3 - 8x$ (B) $x^2 - 6x + 9 - y^2$ (C) $4m^3n - 2m^2n^2 + 2mn^3$
(D) $2t^4 - 16t$ (E) $2y^4 - 5y^2 - 12$

Solución

(A)
$$\begin{aligned} 18x^3 - 8x &= 2x(9x^2 - 4) \\ &= 2x(3x - 2)(3x + 2) \end{aligned}$$

(B) $x^2 - 6x + 9 - y^2$

$= (x^2 - 6x + 9) - y^2$ Agrupe los primeros tres términos.

$= (x - 3)^2 - y^2$ Factorice $x^2 - 6x + 9$.

$= [(x - 3) - y][(x - 3) + y]$ Diferencia de cuadrados

$= (x - 3 - y)(x - 3 + y)$

(C) $4m^3n - 2m^2n^2 + 2mn^3 = 2mn(2m^2 - mn + n^2)$

(D) $2t^4 - 16t = 2t(t^3 - 8)$

$= 2t(t - 2)(t^2 + 2t + 4)$

(E) $2y^4 - 5y^2 - 12 = (2y^2 + 3)(y^2 - 4)$

$= (2y^2 + 3)(y - 2)(y + 2)$

Problema seleccionado 7 Factorice completamente con respecto de los enteros:

(A) $3x^3 - 48x$ (B) $x^2 - y^2 - 4y - 4$
(C) $3u^4 - 3u^3v - 9u^2v^2$ (D) $3m^4 - 24mn^3$
(E) $3x^4 - 5x^2 + 2$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ 2. (A) $3xy(x^2 - 2xy - y^2)$ (B) $(3y + 2)(2y + 5)$
3. $2(2x + 5)(3x + 1)(12x + 17)$
4. (A) $(2x + 5)(x + 3)$ (B) $(p - 3q)(2r + s)$ (C) $(3w - x)(2y + z)$
5. (A) $(x - 2)(x - 6)$ (B) No es factorizable usando enteros (C) $(2x - y)(x + 4y)$ (D) $(4x + y)(x - 4y)$
6. (A) $(2m - 3n)^2$ (B) $(x - 4y)(x + 4y)$ (C) $(z - 1)(z^2 + z + 1)$ (D) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$
7. (A) $3x(x - 4)(x + 4)$ (B) $(x - y - 2)(x + y + 2)$ (C) $3u^2(u^2 - uv - 3v^2)$ (D) $3m(m - 2n)(m^2 + 2mn + 4n^2)$ (E) $(3x^2 - 2)(x - 1)(x + 1)$

EJERCICIO A-3

A

En los problemas del 1 al 8, factorice, con respecto de los enteros, todos los factores comunes de todos los términos.

1. $6x^4 - 8x^3 - 2x^2$
2. $6m^4 - 9m^3 - 3m^2$
3. $10x^3y + 20x^2y^2 - 15xy^3$
4. $8u^3v - 6u^2v^2 + 4uv^3$
5. $5x(x + 1) - 3(x + 1)$
6. $7m(2m - 3) + 5(2m - 3)$
7. $2w(y - 2z) - x(y - 2z)$
8. $a(3c + d) - 4b(3c + d)$

En los problemas del 9 al 16, factorice completamente con respecto de los enteros.

9. $x^2 - 2x + 3x - 6$
10. $2y^2 - 6y + 5y - 15$
11. $6m^2 + 10m - 3m - 5$
12. $5x^2 - 40x - x + 8$
13. $2x^2 - 4xy - 3xy + 6y^2$
14. $3a^2 - 12ab - 2ab + 8b^2$
15. $8ac + 3bd - 6bc - 4ad$
16. $3pr - 2qs - qr + 6ps$

En los problemas del 17 al 28, factorice completamente con respecto de los enteros. Si un polinomio es primo con relación a los enteros, indíquelo.

17. $2x^2 + 5x - 3$
18. $3y^2 - y - 2$
19. $x^2 - 4xy - 12y^2$
20. $u^2 - 2uv - 15v^2$
21. $x^2 + x - 4$
22. $m^2 - 6m - 3$
23. $25m^2 - 16n^2$
24. $w^2x^2 - y^2$
25. $x^2 + 10xy + 25y^2$
26. $9m^2 - 6mn + n^2$
27. $u^2 + 81$
28. $y^2 + 16$

B

En los problemas del 29 al 44, factorice completamente con relación a los enteros. Si un polinomio es primo respecto de los enteros, indíquelo.

29. $6x^2 + 48x + 72$
30. $4z^2 - 28z + 48$

31. $2y^3 - 22y^2 + 48y$ **32.** $2x^4 - 24x^3 + 40x^2$

33. $16x^2y - 8xy + y$ **34.** $4xy^2 - 12xy + 9x$

35. $6s^2 + 7st - 3t^2$ **36.** $6m^2 - mn - 12n^2$

37. $x^3y - 9xy^3$ **38.** $4u^3v - uv^3$

39. $3m^3 - 6m^2 + 15m$ **40.** $2x^3 - 2x^2 + 8x$

41. $m^3 + n^3$ **42.** $r^3 - t^3$

43. $c^3 - 1$ **44.** $a^3 + 1$

$\int$ *Los problemas del 45 al 50 están relacionados con el cálculo. Factorice completamente con respecto de los enteros.*

45. $6(3x - 5)(2x - 3)^2 + 4(3x - 5)^2(2x - 3)$

46. $2(x - 3)(4x + 7)^2 + 8(x - 3)^2(4x + 7)$

47. $5x^4(9 - x)^4 - 4x^5(9 - x)^3$

48. $3x^4(x - 7)^2 + 4x^3(x - 7)^3$

49. $2(x + 1)(x^2 - 5)^2 + 4x(x + 1)^2(x^2 - 5)$

50. $4(x - 3)^3(x^2 + 2)^3 + 6x(x - 3)^4(x^2 + 2)^2$

En los problemas del 51 al 56, factorice completamente con relación a los enteros. Como primer paso, en los polinomios que tengan más de tres términos se prueba agrupando los términos en varias combinaciones. Si un polinomio es primo con relación a los enteros, indíquelo.

51. $(a - b)^2 - 4(c - d)^2$ **52.** $(x + 2)^2 - 9y^2$

53. $2am - 3an + 2bm - 3bn$

54. $15ac - 20ad + 3bc - 4bd$

55. $3x^2 - 2xy - 4y^2$ **56.** $5u^2 + 4uv - 2v^2$

C

En los problemas del 57 al 72, factorice completamente con respecto a los enteros. Como primer paso en los polinomios que implican más de tres términos, intente agrupar los términos en varias combinaciones. Si un polinomio es primo con respecto a los enteros, indíquelo.

57. $x^3 - 3x^2 - 9x + 27$

58. $x^3 - x^2 - x + 1$

59. $a^3 - 2a^2 - a + 2$

60. $t^3 - 2t^2 + t - 2$

61. $4(A + B)^2 - 5(A + B) - 6$

62. $6(x - y)^2 + 23(x - y) - 4$

63. $m^4 - n^4$ **64.** $y^4 - 3y^2 - 4$

65. $s^4t^4 - 8st$ **66.** $27a^2 + a^5b^3$

67. $m^2 + 2mn + n^2 - m - n$

68. $y^2 - 2xy + x^2 - y + x$

69. $18a^3 - 8a(x^2 + 8x + 16)$

70. $25(4x^2 - 12xy + 9y^2) - 9a^2b^2$

71. $x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$

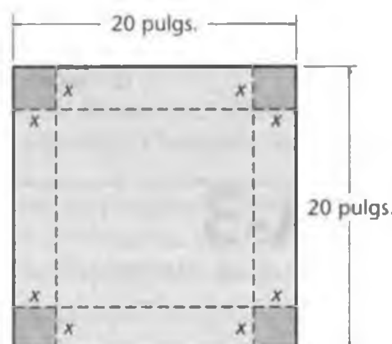
72. $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$

$\int$ APLICACIONES

73. Construcción. Una caja rectangular destapada se construye de una hoja delgada de cartón cortando cuadrados de x pulgadas en cada una de las esquinas y doblando los lados hacia arriba como se indica en la figura. Exprese cada una de las siguientes cantidades como un polinomio en forma factorizada y desarrollada.

(A) El área de cartón después de que se han cortado las esquinas.

(B) El volumen de la caja.





74. Construcción. Una caja rectangular destapada se construye con una hoja delgada de cartón de 9 por 16 pulgadas cortando cuadrados de x pulgadas en cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Exprese cada una de las siguientes cantidades como un polinomio en forma factorizada y desarrollada.

(A) El área del cartón después de que se cortaron las esquinas.

(B) El volumen de la caja.

SECCIÓN A-4 Expresiones racionales: Operaciones básicas

- Reducción a términos más simples
- Multiplicación y división
- Suma y resta
- Fracciones compuestas

Ahora la atención se centrará en las formas fraccionarias. Al cociente de dos expresiones algebraicas, la división entre cero se excluye, se llama **expresión fraccionaria**. Si el numerador y el denominador de una expresión fraccionaria son polinomios, la expresión fraccionaria se llama **expresión racional**. Algunos ejemplos de las expresiones racionales son las siguientes (recuerde, una constante diferente de cero es un polinomio de grado 0):

$$\frac{x-2}{2x^2-3x+5} \qquad \frac{1}{x^4-1} \qquad \frac{3}{x} \qquad \frac{x^2+3x-5}{1}$$

En esta sección se analizan operaciones básicas de las expresiones racionales, incluyendo multiplicación, división, suma y resta.

Debido a que las variables representan números reales en las expresiones racionales, se van a considerar las propiedades de las fracciones de los números reales resumidos en la sección A-1 desempeñan un papel central en gran parte del trabajo que se hará.

Aunque no siempre se establece explícitamente, siempre se supone que las variables están restringidas de modo que la división entre 0 se excluye.

Reducción a términos más simples

Se inicia este análisis estableciendo la **propiedad fundamental de fracciones** (a partir del teorema 3 de la sección A-1):

Propiedad fundamental de fracciones

Si a, b y k son números reales con $b, k \neq 0$, entonces

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \qquad \frac{2\cdot 3}{2\cdot 4} = \frac{3}{4} \qquad \frac{(x-3)2}{(x-3)x} = \frac{2}{x}$$
$$x \neq 0,\ x \neq 3$$

Al usar esta propiedad de izquierda a derecha para eliminar todos los factores comunes el numerador y el denominador de una fracción dada se llama **reducción de fracciones términos más simples**. Realmente se divide al numerador y al denominador entre el mismo factor común diferente de cero.

Usando esta propiedad de derecha a izquierda, es decir, multiplicando el numerador y el denominador por el mismo factor diferente de cero se está **expresando una fracción en términos más complicados**. Esta propiedad se usará en ambos sentidos en el material que sigue.

Se dice que una expresión racional está **reducida a términos más simples** si el numerador y el denominador no tienen factores en común. A menos que se establezca lo contrario, se factoriza con respecto de los enteros.

EJEMPLO 1

Reducción de expresiones racionales

Reduzca cada expresión racional a términos más simples.

(A) $$\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-3}{x+3}$$

Factorice el numerador y el denominador completamente. Divida el numerador y el denominador entre $(x - 3)$; ésta es una operación válida tanto como $x \neq 3$ y $x \neq -3$.

(B) $$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x-1)}}(x^2 + x + 1)}{\underset{1}{\cancel{(x-1)}}(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

Divida el numerador y el denominador entre $(x - 1)$, se puede indicar dibujando líneas en ambos $(x - 1)$ y escribiendo el cociente resultante como 1.

$x \neq -1$ y $x \neq 1$

Problema seleccionado 1

Reduzca cada expresión racional a términos más simples.

(A) $\frac{6x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 1}$ (B) $\frac{x^4 - 8x}{3x^3 - 2x^2 - 8x}$

EJEMPLO 2

Reducción a una expresión racional

Reduzca la siguiente expresión racional a términos más simples.

$$\frac{6x^5(x^2+2)^2 - 4x^3(x^2+2)^3}{x^8} = \frac{2x^3(x^2+2)^2[3x^2 - 2(x^2+2)]}{x^8}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{2x^3}}(x^2+2)^2(x^2-4)}{\underset{x^5}{\cancel{x^8}}}$$

$$= \frac{2(x^2+2)^2(x-2)(x+2)}{x^5}$$

Problema seleccionado 2

Reduzca la siguiente expresión racional a términos más simples.

$$\frac{6x^4(x^2+1)^2 - 3x^2(x^2+1)^3}{x^6}$$

PRECAUCIÓN

Recuerde factorizar siempre al numerador y denominador primero, después divida cualesquiera de los *factores comunes*. No elimine en forma indiscriminada *términos* que estén en el numerador y en el denominador. Por ejemplo,

$$\frac{2x^3 + y^2}{y^2} \neq \frac{2x^3 + \overset{1}{\cancel{y^2}}}{\underset{1}{\cancel{y^2}}} = 2x^3 + 1$$

Debido a que el término y^2 no es un factor del numerador, no se puede eliminar. De hecho, $(2x^3 + y^2)/y^2$ ya está reducido a los términos más simples.

Multiplicación y división

Como se están restringiendo los reemplazos de la variable a los números reales, la multiplicación y división de expresiones racionales siguen las reglas para la multiplicación y división de fracciones de números reales (teorema 3 en la sección A-1).

Multiplicación y división

Si a, b, c y d son números reales con $b, d \neq 0$, entonces:

1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ $\qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{x-1} = \frac{2x}{3(x-1)}$

2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad c \neq 0$ $\qquad \frac{2}{3} \div \frac{x}{x-3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x-3}{x}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 Escriba una descripción verbal del proceso de multiplicación de dos fracciones. Haga lo mismo para el cociente de dos fracciones.

EJEMPLO 3 **Multiplicación y división de expresiones racionales**

Realice las operaciones indicadas y reduzca a términos más simples.

(A) $$\frac{10x^3y}{3xy + 9y} \cdot \frac{x^2 - 9}{4x^2 - 12x} = \frac{\overset{5x^2}{\cancel{10x^3y}}}{\underset{3 \cdot 1}{\cancel{3y}(\cancel{x+3})}} \cdot \frac{\overset{1 \cdot 1}{(\cancel{x-3})(\cancel{x+3})}}{\underset{2 \cdot 1}{\cancel{4x}(\cancel{x-3})}}$$
$$= \frac{5x^2}{6}$$

Factorice los numeradores y denominadores, después divida cualquier numerador y cualquier denominador con un mismo factor común.

(B) $$\frac{4 - 2x}{4} \div (x - 2) = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(2 - x)}{\underset{2}{\cancel{4}}} \cdot \frac{1}{x - 2}$$

$x - 2$ es el mismo que $\frac{x-2}{1}$.

$$= \frac{2 - x}{2(x - 2)} = \frac{\overset{-1}{-\cancel{(x-2)}}}{2\underset{1}{\cancel{(x-2)}}}$$

$b - a = -(a - b)$, un útil cambio en algunos problemas.

$$= -\frac{1}{2}$$

(C) $\dfrac{2x^3 - 2x^2y + 2xy^2}{x^3y - xy^3} \div \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + 2xy + y^2}$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{2x}}\overset{1}{\cancel{(x^2 - xy + y^2)}}}{\underset{y}{\cancel{xy}}\underset{1}{\cancel{(x + y)}}(x - y)} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{(x + y)}}^2}{\underset{1}{\cancel{(x + y)}}\underset{1}{\cancel{(x^2 - xy + y^2)}}}$$

$$= \frac{2}{y(x - y)}$$

Problema seleccionado 3 Realice las operaciones indicadas y reduzca los términos semejantes.

(A) $\dfrac{12x^2y^3}{2xy^2 + 6xy} \cdot \dfrac{y^2 + 6y + 9}{3y^3 + 9y^2}$ (B) $(4 - x) \div \dfrac{x^2 - 16}{5}$

(C) $\dfrac{m^3 + n^3}{2m^2 + mn - n^2} \div \dfrac{m^3n - m^2n^2 + mn^3}{2m^3n^2 - m^2n^3}$

• **Suma y resta** Nuevamente, debido a que se restringen los reemplazos de las variables a los números reales, la suma y resta de las expresiones racionales se deducen de las reglas para la suma y resta de fracciones numéricas reales (teorema 3 en la sección A-1).

Suma y resta

Para a, b y c números reales con $b \neq 0$:

1. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a + c}{b}$

2. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a - c}{b}$

Por consiguiente, se suman las expresiones racionales con los mismos denominadores sumando o restando sus numeradores y colocando el resultado sobre el común denominador. Si el denominador no es el mismo, las fracciones se expresan en términos más complicados, usando la propiedad fundamental de las fracciones para obtener denominadores comunes y después se procede como se ha descrito.

Aun cuando cualquier denominador común funciona, el trabajo se simplificará si se usa el mínimo común denominador (MCD). Frecuentemente, el MCD es obvio, pero si no es así, los pasos del cuadro describen cómo encontrarlo.

El mínimo común denominador (MCD)

El MCD de dos o más expresiones racionales se encuentra como sigue:

1. Factorice cada denominador completamente.
2. Identifique cada factor primo diferente de todos los denominadores.
3. Forme un producto usando cada factor diferente a la más alta potencia que aparece en cualquiera de los denominadores. Este producto es el MCD.

EJEMPLO 4 **Suma y resta de expresiones racionales**

Combine en una sola fracción y reduzca a términos más simples.

(A) $\frac{3}{10}+\frac{5}{6}-\frac{11}{45}$ (B) $\frac{4}{9x}-\frac{5x}{6y^2}+1$

(C) $\frac{x+3}{x^2-6x+9}-\frac{x+2}{x^2-9}-\frac{5}{3-x}$

Soluciones (A) Para encontrar al MCD, factorice cada denominador completamente:

$$\left.\begin{aligned}10&=2\cdot 5\\ 6&=2\cdot 3\\ 45&=3^2\cdot 5\end{aligned}\right\}\text{LCD}=2\cdot 3^2\cdot 5=90$$

Ahora use la propiedad fundamental de las fracciones para hacer cada denominador de 90:

$$\frac{3}{10}+\frac{5}{6}-\frac{11}{45}=\frac{9\cdot 3}{9\cdot 10}+\frac{15\cdot 5}{15\cdot 6}-\frac{2\cdot 11}{2\cdot 45}$$

$$\boxed{=\frac{27}{90}+\frac{75}{90}-\frac{22}{90}}$$

$$=\frac{27+75-22}{90}=\frac{80}{90}=\frac{8}{9}$$

(B) $$\left.\begin{aligned}9x&=3^2x\\ 6y^2&=2\cdot 3y^2\end{aligned}\right\}\text{LCD}=2\cdot 3^2xy^2=18xy^2$$

$$\frac{4}{9x}-\frac{5x}{6y^2}+1=\frac{2y^2\cdot 4}{2y^2\cdot 9x}-\frac{3x\cdot 5x}{3x\cdot 6y^2}+\frac{18xy^2}{18xy^2}$$

$$=\frac{8y^2-15x^2+18xy^2}{18xy^2}$$

(C) $\dfrac{x+3}{x^2-6x+9} - \dfrac{x+2}{x^2-9} - \dfrac{5}{3-x} = \dfrac{x+3}{(x-3)^2} - \dfrac{x+2}{(x-3)(x+3)} + \dfrac{5}{x-3}$

Nota: $-\dfrac{5}{3-x} = -\dfrac{5}{-(x-3)} = \dfrac{5}{x-3}$

Nuevamente se usa el hecho de que $a - b = -(b - a)$.

El MCD = $(x-3)^2(x+3)$ Por consiguiente,

$$\frac{(x+3)^2}{(x-3)^2(x+3)} - \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)^2(x+3)} + \frac{5(x-3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)}$$

$$= \frac{(x^2+6x+9) - (x^2-x-6) + 5(x^2-9)}{(x-3)^2(x+3)}$$

Aquí se debe tener cuidado con los errores de signo

$$= \frac{x^2+6x+9-x^2+x+6+5x^2-45}{(x-3)^2(x+3)}$$

$$= \frac{5x^2+7x-30}{(x-3)^2(x+3)}$$

Problema seleccionado 4 Combine una sola fracción y reduzca a términos más simples.

(A) $\dfrac{5}{28} - \dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{35}$

(B) $\dfrac{1}{4x^2} - \dfrac{2x+1}{3x^3} + \dfrac{3}{12x}$

(C) $\dfrac{y-3}{y^2-4} - \dfrac{y+2}{y^2-4y+4} - \dfrac{2}{2-y}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 ¿Cuál es el valor de $\dfrac{\frac{16}{4}}{2}$?

¿Cuál es el resultado de introducir $16 \div 4 \div 2$ en una calculadora?

¿Cuál es la diferencia entre $16 \div (4 \div 2)$ y $(16 \div 4) \div 2$?

¿Cómo podría usar las barras de fracción para distinguir entre estos dos casos cuando se escribe $\dfrac{\frac{16}{4}}{2}$?

• Fracciones compuestas

Una expresión fraccional con fracciones en su numerador, denominador, o ambos, se llama **fracción compuesta**. Con frecuencia es necesario representar una fracción com-

puesta como una **fracción simple**, esto es (en todos los casos que se considerarán), como el cociente de dos polinomios. El proceso no implica ningún concepto nuevo. Es importante aplicar los viejos conceptos y realizar el proceso en la secuencia correcta. Ahora se ilustrarán dos enfoques al problema, cada uno con sus propios méritos, dependiendo del problema en particular que se esté considerando.

EJEMPLO 5 **Simplificación de fracciones compuestas**

Exprese como una fracción simple reducida a los términos mínimos:

$$\frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{4}{x^2} - 1}$$

Solución *Método 1.* Multiplique al numerador y al denominador por el MCD de todas las fracciones en el numerador y denominador, en este caso x^2. (Ahora multiplique por $1 = x^2/x^2$.)

$$\frac{x^2\left(\frac{2}{x} - 1\right)}{x^2\left(\frac{4}{x^2} - 1\right)} = \boxed{\frac{x^2\frac{2}{x} - x^2}{x^2\frac{4}{x^2} - x^2}} = \frac{2x - x^2}{4 - x^2} = \frac{x\overset{1}{\cancel{(2 - x)}}}{(2 + x)\underset{1}{\cancel{(2 - x)}}}$$

$$= \frac{x}{2 + x}$$

Método 2. Escriba el numerador y el denominador como fracciones simples. Después trate como un cociente.

$$\frac{\frac{2}{x} - 1}{\frac{4}{x^2} - 1} = \frac{\frac{2 - x}{x}}{\frac{4 - x^2}{x^2}} = \frac{2 - x}{x} \div \frac{4 - x^2}{x^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2 - x}}}{\underset{1}{\cancel{x}}} \cdot \frac{\overset{x}{\cancel{x^2}}}{\underset{1}{\cancel{(2 - x)}}(2 + x)}$$

$$= \frac{x}{2 + x}$$

Problema seleccionado 5 Exprese como una simple fracción reducida a los términos más simples. Use los dos métodos descritos en el ejemplo 5.

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$$

EJEMPLO 6 **Simplificación de fracciones compuestas**

Exprese como una fracción simple al reducir a los términos más simples:

$$\frac{\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{x}{y^2}}{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}$$

Solución Usando el primer método descrito en el ejemplo 5, se tiene

$$\frac{x^2y^2\left(\dfrac{y}{x^2} - \dfrac{x}{y^2}\right)}{x^2y^2\left(\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}\right)} = \frac{x^2y^2\dfrac{y}{x^2} - x^2y^2\dfrac{x}{y^2}}{x^2y^2\dfrac{y}{x} - x^2y^2\dfrac{x}{y}} = \frac{y^3 - x^3}{xy^3 - x^3y} = \frac{(y - x)(y^2 + xy + x^2)}{xy(y - x)(y + x)}$$

$$= \frac{y^2 + xy + x^2}{xy(y + x)}$$

Problema seleccionado 6 Exprese como una simple fracción reducida a los términos más simples. Use el primer método descrito en el ejemplo 5.

$$\frac{\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b} + 2 + \dfrac{b}{a}}$$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $\dfrac{3x + 2}{x + 1}$ (B) $\dfrac{x^2 + 2x + 4}{3x + 4}$
2. $\dfrac{3(x^2 + 1)^2(x + 1)(x - 1)}{x^4}$
3. (A) $2x$ (B) $\dfrac{-5}{x + 4}$ (C) mn
4. (A) $\dfrac{1}{4}$ (B) $\dfrac{3x^2 - 5x - 4}{12x^3}$ (C) $\dfrac{2y^2 - 9y - 6}{(y - 2)^2(y + 2)}$
5. $\dfrac{1}{x - 1}$
6. $\dfrac{a - b}{a + b}$

EJERCICIO A-4

A

En los problemas del 1 al 20, realice las operaciones indicadas y reduzca las respuestas a los términos más simples. Represente cualquier fracción compuesta como fracciones simples reducidas a los términos más simples.

1. $\left(\dfrac{d^5}{3a} \div \dfrac{d^2}{6a^2}\right) \cdot \dfrac{a}{4d^3}$
2. $\dfrac{d^5}{3a} \div \left(\dfrac{d^2}{6a^2} \cdot \dfrac{a}{4d^3}\right)$
3. $\dfrac{2y}{18} - \dfrac{-1}{28} - \dfrac{y}{42}$
4. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{x}{18} - \dfrac{1}{30}$

5. $\frac{3x+8}{4x^3} - \frac{2x-1}{x^3} - \frac{5}{8x}$

6. $\frac{4m-3}{18m^3} + \frac{3}{4m} - \frac{2m-1}{6m^2}$

7. $\frac{2x^2+7x+3}{4x^2-1} \div (x+3)$

8. $\frac{x^2-9}{x^2-3x} \div (x^2-x-12)$

9. $\frac{m+n}{m^2-n^2} \div \frac{m^2-mn}{m^2-2mn+n^2}$

10. $\frac{x^2-6x+9}{x^2-x-6} \div \frac{x^2+2x-15}{x^2+2x}$

11. $\frac{1}{a^2-b^2} + \frac{1}{a^2+2ab+b^2}$

12. $\frac{3}{x^2-1} - \frac{2}{x^2-2x+1}$

13. $m-3-\frac{m-1}{m-2}$

14. $\frac{x+1}{x-1} - 1$

15. $\frac{5}{x-3} - \frac{2}{3-x}$

16. $\frac{3}{a-1} - \frac{2}{1-a}$

17. $\frac{2}{y+3} - \frac{1}{y-3} + \frac{2y}{y^2-9}$

18. $\frac{2x}{x^2-y^2} + \frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y}$

19. $\dfrac{1-\frac{y^2}{x^2}}{1-\frac{y}{x}}$

20. $\dfrac{1+\frac{3}{x}}{x-\frac{9}{x}}$

B

Los problemas del 21 al 26 están relacionados con cálculo. Reduzca cada fracción a los términos más simples.

21. $\frac{6x^3(x^2+2)^2 - 2x(x^2+2)^3}{x^4}$

22. $\frac{4x^4(x^2+3) - 3x^2(x^2+3)^2}{x^6}$

23. $\frac{2x(1-3x)^3 + 9x^2(1-3x)^2}{(1-3x)^6}$

24. $\frac{2x(2x+3)^4 - 8x^2(2x+3)^3}{(2x+3)^8}$

25. $\frac{-2x(x+4)^3 - 3(3-x^2)(x+4)^2}{(x+4)^6}$

26. $\frac{3x^2(x+1)^3 - 3(x^3+4)(x+1)^2}{(x+1)^6}$

En los problemas del 27 al 40, realice las operaciones indicadas y reduzca las respuestas a los términos más simples. Represente cualquier fracción compuesta como fracciones simples reducidas a los términos más simples.

27. $\frac{y}{y^2-y-2} - \frac{1}{y^2+5y-14} - \frac{2}{y^2+8y+7}$

28. $\frac{x^2}{x^2+2x+1} + \frac{x-1}{3x+3} - \frac{1}{6}$

29. $\frac{9-m^2}{m^2+5m+6} \cdot \frac{m+2}{m-3}$

30. $\frac{2-x}{2x+x^2} \cdot \frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$

31. $\frac{x+7}{ax-bx} + \frac{y+9}{by-ay}$

32. $\frac{c+2}{5c-5} - \frac{c-2}{3c-3} + \frac{c}{1-c}$

33. $\frac{x^2-16}{2x^2+10x+8} \div \frac{x^2-13x+36}{x^3+1}$

34. $\left(\frac{x^3-y^3}{y^3} \cdot \frac{y}{x-y}\right) \div \frac{x^2+xy+y^2}{y^2}$

35. $\frac{x^2-xy}{xy+y^2} \div \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} \div \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y+xy^2}\right)$

36. $\left(\frac{x^2-xy}{xy+y^2} \div \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}\right) \div \frac{x^2-2xy+y^2}{x^2y+xy^2}$

37. $\left(\frac{x}{x^2-16} - \frac{1}{x+4}\right) \div \frac{4}{x+4}$

38. $\left(\frac{3}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right) \div \frac{x+4}{x-2}$

39. $\dfrac{1+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}$

40. $\dfrac{\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$

Los problemas del 41 al 44 se relacionan con el cálculo. Realice las operaciones indicadas y reduzca las respuestas a los términos más bajos. Represente cualquier fracción compuesta como fracción simple reducida a sus términos más simples.

41. $\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

42. $\dfrac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$

43. $\dfrac{\frac{(x+h)^2}{x+h+2}-\frac{x^2}{x+2}}{h}$

44. $\dfrac{\frac{2x+2h+3}{x+h}-\frac{2x+3}{x}}{h}$

En los problemas del 45 al 52, imagine que las "soluciones" indicadas le fueron dadas por un estudiante a quien está asesorando en su clase.

(A) ¿Es la solución correcta? Si considera que la solución es incorrecta explique por qué y cómo se puede corregir.

(B) Muestre una solución correcta para cada solución incorrecta.

45. $\dfrac{x^2+5x+4}{x+4} = \dfrac{x^2+5x}{x} = x+5$

46. $\dfrac{x^2-2x-3}{x-3} = \dfrac{x^2-2x}{x} = x-2$

47. $\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1$

48. $\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h} = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2+3x+1$

49. $\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2} + x - 2 = \dfrac{x^2-2x+x-2}{x^2-x-2} = 1$

50. $\dfrac{2}{x-1} - \dfrac{x+3}{x^2-1} = \dfrac{2x+2-x-3}{x^2-1} = \dfrac{1}{x+1}$

51. $\dfrac{2x^2}{x^2-4} - \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{2x^2-x^2-2x}{x^2-4} = \dfrac{x}{x+2}$

52. $x + \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = \dfrac{x+x-2}{x^2-3x+2} = \dfrac{2}{x-2}$

C

En los problemas del 53 al 56, realice las operaciones indicadas y reduzca las respuestas a los términos más simples. Represente cualquier fracción compuesta como fracciones simples reducidas a los términos más simples.

53. $\dfrac{y - \dfrac{y^2}{y-x}}{1 + \dfrac{x^2}{y^2-x^2}}$

54. $\dfrac{\dfrac{s^2}{s-t} - s}{\dfrac{t^2}{s-t} + t}$

55. $2 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{2}{a+2}}$

56. $1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{x}}}$

En los problemas 57 y 58, a, b, c y d representan los números reales.

57. (A) Pruebe que d/c es el inverso multiplicativo de c/d ($c, d \neq 0$).

(B) Use el inciso (A) para probar que

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} \qquad b, c, d \neq 0$$

58. Pruebe que

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \qquad b \neq 0$$

SECCIÓN A-5 Exponentes enteros

- Exponentes enteros
- Notación científica

Al matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) generalmente se le atribuye la introducción de la muy útil notación de exponentes "x^n". Esta notación, así como otros avances en álgebra se encontraron en su libro *Geometría*, publicado en 1637.

En la sección A-2 se introducen los números naturales como exponentes para escribir de manera más corta un producto que involucre los mismos factores. En esta sección se desarrollará el significado de exponente para incluir a todos los enteros de tal manera que las formas exponenciales de los siguientes tipos tengan significado:

$$7^5 \qquad 5^{-4} \qquad 3.14^0$$

Exponentes enteros

La definición 1 generaliza la notación de exponentes para incluir al 0 y a los exponentes enteros negativos.

DEFINICIÓN 1 **a^n, n un entero y a un número real.**

1. Para n un entero positivo:

$$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a \qquad 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

n factores de a

2. Para $n = 0$:

$$a^0 = 1 \qquad a \neq 0 \qquad 132^0 = 1$$

0^0 no está definida

3. Para n un entero negativo:

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} \qquad a \neq 0 \qquad 7^{-3} = \frac{1}{7^{-(-3)}} = \frac{1}{7^3}$$

Nota: En general, se puede mostrar que para todos los enteros n

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{-5} = \frac{1}{a^5} \qquad a^{-(-3)} = \frac{1}{a^{-3}}$$

EJEMPLO 1 **Uso de la definición de los enteros positivos**

Escriba cada inciso como una fracción decimal o usando exponentes positivos.

(A) $(u^3v^2)^0 = 1 \quad u \neq 0, \quad v \neq 0$

(B) $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0.001$

(C) $x^{-8} = \frac{1}{x^8}$

(D) $\frac{x^{-3}}{y^{-5}} = \frac{x^{-3}}{1} \cdot \frac{1}{y^{-5}} = \frac{1}{x^3} \cdot \frac{y^5}{1} = \frac{y^5}{x^3}$

Problema seleccionado 1 Escriba los incisos (A)-(D) como fracciones decimales y los incisos (E) y (F) con exponentes positivos.

(A) 636^0 (B) $(x^2)^0 \quad x \neq 0$ (C) 10^{-5}

(D) $\frac{1}{10^{-3}}$ (E) $\frac{1}{x^{-4}}$ (F) $\frac{u^{-7}}{v^{-3}}$

Las propiedades básicas de los exponentes enteros se resumen en el teorema 1. La prueba de este teorema implica *inducción matemática*, la cual se analiza en el capítulo 10.

Teorema 1 **Propiedades de los exponentes enteros**

Para n y m enteros y a y b números reales:

1. $a^m a^n = a^{m+n}$ $\qquad a^5 a^{-7} = a^{5+(-7)} = a^{-2}$
2. $(a^n)^m = a^{mn}$ $\qquad (a^3)^{-2} = a^{(-2)3} = a^{-6}$
3. $(ab)^m = a^m b^m$ $\qquad (ab)^3 = a^3 b^3$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m} \quad b \neq 0$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^4 = \dfrac{a^4}{b^4}$
5. $\dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} \end{cases} \quad a \neq 0$ $\qquad \dfrac{a^3}{a^{-2}} = a^{3-(-2)} = a^5$ $\qquad \dfrac{a^3}{a^{-2}} = \dfrac{1}{a^{-2-3}} = \dfrac{1}{a^{-5}}$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 La propiedad 1 del teorema 1 se puede expresar verbalmente de la siguiente manera:

Para encontrar el producto de las dos formas exponenciales con la misma base, sume los exponentes y use la misma base.

Exprese las otras propiedades en el teorema 1 verbalmente. Decida cuál encuentra más fácil de recordar, una fórmula o una descripción verbal.

EJEMPLO 2 **Uso de las propiedades de los exponentes**

Simplifique usando las propiedades de los exponentes, y exprese las respuestas usando sólo exponentes positivos.*

(A) $(3a^5)(2a^{-3}) = (3 \cdot 2)(a^5 a^{-3}) = 6a^2$

(B) $\dfrac{6x^{-2}}{8x^{-5}} = \dfrac{3x^{-2-(-5)}}{4} = \dfrac{3x^3}{4}$

(C) $-4y^3 - (-4y)^3 = -4y^3 - (-4)^3 y^3 = -4y^3 - (-64)y^3$

$= -4y^3 + 64y^3 = 60y^3$

* La palabra "simplificar" significa que se eliminan los factores comunes de los numeradores y denominadores y se reduce al mínimo el número de veces que la constante dada o la variable aparece en una expresión. Se pide que las respuestas se expresen empleando exponentes positivos sólo en orden para tener una forma definitiva de una respuesta. Posteriormente en esta sección se enumerarán las situaciones donde se requieren los exponentes negativos en la respuesta final.

Problema seleccionado 2 Simplifique usando propiedades de los exponentes, y exprese las respuestas usando sólo exponentes positivos.

(A) $(5x^{-3})(3x^4)$ (B) $\frac{9y^{-7}}{6y^{-4}}$ (C) $2x^4 - (-2x)^4$

PRECAUCIÓN

Tenga cuidado cuando use la relación $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$:

$ab^{-1} \neq \frac{1}{ab}$ $ab^{-1} = \frac{a}{b}$ y $(ab)^{-1} = \frac{1}{ab}$

$\frac{1}{a+b} \neq a^{-1} + b^{-1}$ $\frac{1}{a+b} = (a+b)^{-1}$ y $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = a^{-1} + b^{-1}$

No confunda las propiedades 1 y 2 en el teorema 1:

$a^3a^4 \neq a^{3 \cdot 4}$ $a^3a^4 = a^{3+4} = a^7$ propiedad 1, teorema 1

$(a^3)^4 \neq a^{3+4}$ $(a^3)^4 = a^{3 \cdot 4} = a^{12}$ propiedad 2, teorema 1

De la definición de exponentes negativos y de las cinco propiedades de los exponentes, se puede establecer fácilmente las propiedades siguientes, que se usan a menudo cuando se trabaja con formas exponenciales.

Teorema 2 **Propiedades adicionales de los exponentes**

Para a y b, cualesquiera números reales y m, n y p cualesquiera números enteros (se excluye la división entre 0):

1. $(a^mb^n)^p = a^{pm}b^{pn}$
2. $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{pm}}{b^{pn}}$
3. $\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Prueba Se prueban las propiedades 1 y 4 del teorema 2 y las pruebas de las propiedades 2 y 3 se dejan como ejercicio.

1. $(a^mb^n)^p = (a^m)^p(b^n)^p$ propiedad 3, teorema 1

$= a^{pm}b^{pn}$ propiedad 2, teorema 1

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$ propiedad 4, teorema 1

$= \frac{b^n}{a^n}$ propiedad 3, teorema 2

$= \left(\frac{b}{a}\right)^n$ propiedad 4, teorema 1

EJEMPLO 3 **Uso de las propiedades de los exponentes**

Simplifique mediante las propiedades de los exponentes, y exprese las respuestas usando sólo exponentes positivos.

(A) $(2a^{-3}b^2)^{-2} = 2^{-2}a^6b^{-4} = \frac{a^6}{4b^4}$

(B) $\left(\frac{a^3}{b^5}\right)^{-2} = \frac{a^{-6}}{b^{-10}} = \frac{b^{10}}{a^6}$ o $\left(\frac{a^3}{b^5}\right)^{-2} = \left(\frac{b^5}{a^3}\right)^2 = \frac{b^{10}}{a^6}$

(C) $\frac{4x^{-3}y^{-5}}{6x^{-4}y^3} = \frac{2x^{-3-(-4)}}{3y^{3-(-5)}} = \frac{2x}{3y^8}$

(D) $\left(\frac{m^{-3}m^3}{n^{-2}}\right)^{-2}$ $\boxed{= \left(\frac{m^{-3+3}}{n^{-2}}\right)^{-2} = \left(\frac{m^0}{n^{-2}}\right)^{-2}}$ $= \left(\frac{1}{n^{-2}}\right)^{-2} = \frac{1}{n^4}$

(E) $(x + y)^{-3} = \frac{1}{(x + y)^3}$

Problema seleccionado 3 Simplifique mediante propiedades de los exponentes, exprese las respuestas usando sólo exponentes positivos.

(A) $(3x^4y^{-3})^{-2}$ (B) $\left(\frac{x^2}{y^4}\right)^{-3}$ (C) $\frac{6m^{-2}n^3}{15m^{-1}n^{-2}}$

(D) $\left(\frac{x^{-3}}{y^4y^{-4}}\right)^{-3}$ (E) $\frac{1}{(a - b)^{-2}}$

Al simplificar formas con exponentes hay a menudo más de una secuencia de pasos que le conducirán al mismo resultado (véase ejemplo 3(B)). Use la secuencia de pasos que considere más adecuada.

EJEMPLO 4 **Simplificación de una fracción compuesta**

Exprese como una simple fracción reducida con los términos simplificados al mínimo:

$$\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}} = \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \frac{x^2y^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)}{x^2y^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$$

$$= \frac{y^2-x^2}{xy^2+x^2y} = \frac{(y-x)\overset{1}{\cancel{(y+x)}}}{xy\underset{1}{\cancel{(y+x)}}}$$

$$= \frac{y-x}{xy}$$

Problema seleccionado 4 Exprese como una simple fracción reducida a los términos más simples:

$$\frac{x-x^{-1}}{1-x^{-2}}$$

• Notación científica

El trabajo científico a menudo implica el uso de cantidades muy grandes o muy pequeñas. Por ejemplo, una célula promedio contiene alrededor de 200 000 000 000 000 moléculas, y el diámetro de un electrón es de alrededor de 0.000 000 000 0004 centímetros. Esto por lo general causa problemas al escribir y trabajar con cantidades de este tipo en forma decimal estándar. No se pueden introducir las cantidades anteriores en la mayoría de las calculadoras. Con exponentes ya definidos para todos los enteros, es posible expresar cualquier forma decimal como el producto de un número entre 1 y 10 y con una potencia entera de 10, es decir, en la forma

$$a \times 10^n \qquad 1 \le a < 10, n \text{ es un entero, } a \text{ está en forma decimal}$$

Un número que se expresa en esta forma se dice que está en **notación científica**.

EJEMPLO 5 **Notación científica**

Cada número está escrito en notación científica.

$$7 = 7 \times 10^0 \qquad 0.5 = 5 \times 10^{-1}$$

$$720 = 7.2 \times 10^2 \qquad 0.08 = 8 \times 10^{-2}$$

$$6\,430 = 6.43 \times 10^3 \qquad 0.000\ 32 = 3.2 \times 10^{-4}$$

$$5\,350\,000 = 5.35 \times 10^6 \qquad 0.000\ 000\ 0738 = 7.38 \times 10^{-8}$$

¿Se puede descubrir una regla que relacione el número de cifras decimales y la posición del punto decimal con la potencia de 10 que se está usando?

$$7\,320\,000 = 7.320\,000. \times 10^{6} = 7.32 \times 10^{6}$$

6 lugares a la izquierda

Exponente positivo

$$0.000\,000\,54 = 0.000\,000\,5.4 \times 10^{-7} = 5.4 \times 10^{-7}$$

7 lugares a la derecha

Exponente negativo

Problema seleccionado 5

(A) Escriba cada número en notación científica: 430; 23 000; 345 000 000; 0.3; 0.0031; 0.000 000 683

(B) Escriba en notación decimal estándar: 4×10^{3}; 5.3×10^{5}; 2.53×10^{-2}; 7.42×10^{-6}

En la mayoría de las calculadoras se expresan números muy grandes y muy pequeños en notación científica. (En cualquier parte en este libro encontrará ejercicios opcionales que requieren una calculadora gráfica. Si tiene una calculadora, seguramente la usará aquí. Por otra parte, cualquier calculadora científica será suficiente para resolver los problemas de este repaso.) Consulte el manual de su calculadora para ver cómo se introducen en ella los números en notación científica. Algunos métodos comunes para desplegar notación científica en una calculadora se muestran a continuación.

Representación numérica	Despliegue de una calculadora científica típica	Despliegue de una calculadora gráfica típica
$5.427\,493 \times 10^{-17}$	5.427493 -17	5.427493E-17
$2.359\,779 \times 10^{12}$	2.359779 12	2.359779E12

EJEMPLO 6 **Uso de la notación científica en una calculadora**

Escriba cada número en notación científica; después realice los cálculos usando su calculadora. (Refiérase al manual del usuario de su calculadora para el procedimiento.) Exprese la respuesta con tres dígitos significativos* en notación científica.

$$\frac{325\,100\,000\,000}{0.000\,000\,000\,000\,0871} = \frac{3.251 \times 10^{11}}{8.71 \times 10^{-14}}$$

= 3.732491389E24 Despliegue de calculadora

$= 3.73 \times 10^{24}$ Con tres dígitos significativos

* Para quienes no estén familiarizados con el significado de dígitos significativos, véase el Apéndice B en donde se analiza brevemente este concepto.

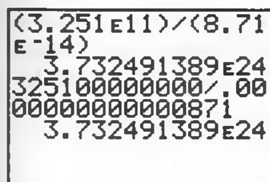


FIGURA 1

La figura 1 muestra dos soluciones a este problema en una calculadora graficadora. En la primera solución se introducen los números en notación científica, y en la segunda se utiliza una notación decimal estándar. Aunque la línea múltiple desplegada en pantalla de una calculadora gráfica permite introducir números decimales estándar muy grandes, usualmente la notación científica es más eficiente y menos propensa a errores en la introducción de datos. Además, como se muestra en la figura 1, la calculadora usa notación científica para desplegar la respuesta, prescindiendo de la forma en que se introducen los números.

Problema seleccionado 6

Repita el ejemplo 6 para:

$$\frac{0.000\ 000\ 006\ 932}{62\ 600\ 000\ 000}$$

EJEMPLO 7

Medición del tiempo con un reloj atómico

Un reloj atómico que cuenta las emisiones radiactivas del cesio se usa para proporcionar la definición de un segundo. Un segundo es definido como el tiempo que le toma al cesio emitir 9 192 631 770 ciclos de radiación. ¿Cuántos de estos ciclos pueden ocurrir en una hora? Exprese la respuesta con cinco dígitos significativos en notación científica.

Solución

$$(9\ 192\ 631\ 770)(60^2) = \boxed{3.309347437\text{E}13}$$
$$= 3.3093 \times 10^{13}$$

Problema seleccionado 7

Refiérase al ejemplo 7. ¿Cuántos de estos ciclos pueden ocurrir en un año? Exprese el resultado con cinco dígitos significativos en notación científica.

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) 1 (B) 1 (C) 0.000 01 (D) 1 000 (E) x^4 (F) v^3/u^7
2. (A) $15x$ (B) $3/(2y^3)$ (C) $-14x^4$
3. (A) $y^6/(9x^8)$ (B) y^{12}/x^6 (C) $2n^5/(5m)$ (D) x^9 (E) $(a - b)^2$
4. x
5. (A) 4.3×10^2; 2.3×10^4; 3.45×10^8; 3×10^{-1}; 3.1×10^{-3}; 6.83×10^{-7}
   (B) 4 000; 530 000; 0.0253; 0.000 007 42
6. 1.11×10^{-19} 7. 2.8990×10^{17}

EJERCICIO A-5

Las variables están restringidas para evitar la división entre 0.

A

Simplifique los problemas del 1 al 16 y escriba las respuestas usando sólo exponentes positivos.

1. $y^{-5}y^5$
2. x^3x^{-3}
3. $(2x^2)(3x^3)(x^4)$
4. $(2x^5)(3x^7)(4x^2)$
5. $(3x^3y^{-2})^2$
6. $(2cd^2)^{-3}$
7. $\left(\dfrac{ab^3}{c^2d}\right)^4$
8. $\left(\dfrac{x^2y}{2w^2}\right)^3$
9. $\dfrac{10^{23} \cdot 10^{-11}}{10^{-3} \cdot 10^{-2}}$

10. $\dfrac{10^{-13} \cdot 10^{-4}}{10^{-21} \cdot 10^{3}}$ **11.** $\dfrac{4x^{-2}y^{-3}}{2x^{-3}y^{-1}}$

12. $\dfrac{2a^{6}b^{-2}}{16a^{-3}b^{2}}$ **13.** $\left(\dfrac{n^{-3}}{n^{-2}}\right)^{-2}$

14. $\left(\dfrac{x^{-1}}{x^{-8}}\right)^{-1}$ **15.** $\dfrac{8 \times 10^{3}}{2 \times 10^{-5}}$

16. $\dfrac{18 \times 10^{12}}{6 \times 10^{-4}}$

Escriba los números de los problemas del 17 al 22 en notación científica.

17. 32 250 000 **18.** 4 930

19. 0.085 **20.** 0.017

21. 0.000 000 0729 **22.** 0.000 592

En los problemas del 23 al 28, escriba cada número en forma decimal estándar.

23. 5×10^{-3} **24.** 4×10^{-4} **25.** 2.69×10^{7}

26. 6.5×10^{9} **27.** 5.9×10^{-10} **28.** 6.3×10^{-6}

B

Simplifique los problemas del 29 al 42, y escriba las respuestas utilizando sólo exponentes positivos. Escriba las fracciones compuestas como funciones simples.

29. $\dfrac{27x^{-5}x^{5}}{18y^{-6}y^{2}}$ **30.** $\dfrac{32n^{5}n^{-8}}{24m^{-7}m^{7}}$ **31.** $\left(\dfrac{x^{4}y^{-1}}{x^{-2}y^{3}}\right)^{2}$

32. $\left(\dfrac{m^{-2}n^{3}}{m^{4}n^{-1}}\right)^{2}$ **33.** $\left(\dfrac{2x^{-3}y^{2}}{4xy^{-1}}\right)^{-2}$ **34.** $\left(\dfrac{6mn^{-2}}{3m^{-1}n^{2}}\right)^{-3}$

35. $\left[\left(\dfrac{u^{3}v^{-1}w^{-2}}{u^{-2}v^{-2}w}\right)^{-2}\right]^{2}$ **36.** $\left[\left(\dfrac{x^{-2}y^{3}t}{x^{-3}y^{-2}t^{2}}\right)^{2}\right]^{-1}$

37. $(x + y)^{-2}$ **38.** $(a^{2} - b^{2})^{-1}$ **39.** $\dfrac{1 + x^{-1}}{1 - x^{-2}}$

40. $\dfrac{1 - x}{x^{-1} - 1}$ **41.** $\dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x - y}$ **42.** $\dfrac{u + v}{u^{-1} + v^{-1}}$

43. $-3(x^{3} + 3)^{-4}(3x^{2})$

44. $-2(x^{2} + 3x)^{-3}(2x + 3)$

45. ¿Cuál es el resultado de introducir $2^{3^{2}}$ en una calculadora?

46. Refiérase al problema 45. ¿Cuál es la diferencia entre $2^{(3^{2})}$ y $(2^{3})^{2}$? ¿Cuáles concuerdan con el valor de $2^{3^{2}}$ obtenido en la calculadora?

47. Si $n = 0$, entonces la propiedad 1 en el teorema 1 implica que $a^{m}a^{0} = a^{m+0} = a^{m}$. Explique cómo esto ayuda a obtener la definición de a^{0}.

48. Si $m = -n$, entonces la propiedad 1 en el teorema 1 implica que $a^{-n}a^{n} = a^{0} = 1$. Explique cómo esto ayuda a obtener la definición de a^{-n}.

Los problemas del 49 al 54 son cálculos relacionados. Escriba cada problema en la forma $ax^{p} + bx^{q}$ o $ax^{p} + bx^{q} + cx^{r}$, donde a, b y c son números reales y p, q y r son enteros. Por ejemplo,

$$\frac{2x^{4} - 3x^{2} + 1}{2x^{3}} = \frac{2x^{4}}{2x^{3}} - \frac{3x^{2}}{2x^{3}} + \frac{1}{2x^{3}}$$

$$= x - \frac{3}{2}x^{-1} + \frac{1}{2}x^{-3}$$

49. $\dfrac{4x^{2} - 12}{2x}$ **50.** $\dfrac{6x^{3} + 9x}{3x^{3}}$

51. $\dfrac{5x^{3} - 2}{3x^{2}}$ **52.** $\dfrac{7x^{5} - x^{2}}{4x^{5}}$

53. $\dfrac{2x^{3} - 3x^{2} + x}{2x^{2}}$ **54.** $\dfrac{3x^{4} - 4x^{2} - 1}{4x^{3}}$

Resuelva los problemas del 55 al 58 con tres dígitos significativos, utilizando notación científica donde sea apropiado y una calculadora.

55. $\dfrac{(32.7)(0.000\ 000\ 008\ 42)}{(0.0513)(80\ 700\ 000\ 000)}$

56. $\dfrac{(4\ 320)(0.000\ 000\ 000\ 704)}{(835)(635\ 000\ 000\ 000)}$

57. $\dfrac{(5\ 760\ 000\ 000)}{(527)(0.000\ 007\ 09)}$

58. $\dfrac{0.000\ 000\ 007\ 23}{(0.0933)(43\ 700\ 000\ 000)}$

En los problemas del 59 al 64, utilice una calculadora para evaluar cada uno de los siguientes problemas para cinco dígitos significativos. (Lea el manual de instrucciones que acompaña a su calculadora).

59. $(23.8)^{8}$ **60.** $(-302)^{7}$

61. $(-302)^{-7}$ **62.** $(23.8)^{-8}$

63. $(9\ 820\ 000\ 000)^{3}$ **64.** $(0.000\ 000\ 000\ 482)^{-4}$

C

Simplifique los problemas del 65 al 70, y escriba las respuestas utilizando sólo exponentes positivos. Escriba fracciones compuestas como fracciones simples.

65. $\dfrac{12(a + 2b)^{-3}}{6(a + 2b)^{-8}}$ **66.** $\dfrac{4(x - 3)^{-4}}{8(x - 3)^{-2}}$

67. $\dfrac{xy^{-2} - yx^{-2}}{y^{-1} - x^{-1}}$ **68.** $\dfrac{b^{-2} - c^{-2}}{b^{-3} - c^{-3}}$

69. $\left(\dfrac{x^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}}\right)^{-1}$ **70.** $\left[\dfrac{u^{-2} - v^{-2}}{(u^{-1} - v^{-1})^{2}}\right]^{-1}$

APLICACIONES 

71. Ciencias de la Tierra. Si la masa de la Tierra es de aproximadamente 6.1×10^{27} gramos y cada gramo es de 2.2×10^{-3} libras, ¿cuál es la masa de la Tierra en libras?

72. Biología. En 1929 Vernadsky, un biólogo, estimó que todo el oxígeno libre de la Tierra pesa 1.5×10^{21} gramos y que éste es producido sólo por la vida. Si 1 gramo es aproximadamente 2.2×10^{-3} libras, ¿cuál es el peso del oxígeno libre en libras?

73. Ciencias de la computación. Si una computadora puede efectuar una sola operación en 10^{-10} segundos, ¿cuántas operaciones puede efectuar en 1 segundo? ¿En 1 minuto? Calcule las respuestas con tres dígitos significativos.

74. Ciencias de la computación. Si la electricidad viaja a la velocidad de la luz (1.86×10^5 millas por segundo), ¿qué distancia viajará la electricidad en el superconductor de la computadora (véase problema 73) en el tiempo que le toma realizar una operación? (El tamaño de los circuitos es un problema crítico en el diseño de computadoras.) Dé el resultado en millas, pies y pulgadas (1 milla = 5 280 pies). Calcule la respuesta con dos dígitos significativos.

75. Economía. Si en 1986 el contribuyente de Estados Unidos pagaba alrededor de $349 000 000 000 por concepto del impuesto sobre la renta federal y la población era de aproximadamente 242 000 000, calcule con tres dígitos significativos el porcentaje de impuesto que paga cada contribuyente. Escriba la respuesta en notación científica y en la forma decimal estándar.

76. Economía. Si el producto nacional bruto (PNB) de Estados Unidos en 1986 fue de $4 240 000 000 000 y la población era de aproximadamente 242 000 000, estime con tres dígitos significativos el PNB por persona. Escriba la respuesta en notación científica y en forma decimal estándar.

SECCIÓN A-6 Exponentes racionales

- Raíces de números reales
- Exponentes racionales

Se conoce ya el significado de símbolos como 3^5, 2^{-3} y 7^0; es decir, ya se definió a^n, donde n es cualquier entero y a es un número real. Pero, ¿qué significan símbolos como $4^{1/2}$ y $7^{2/3}$? En esta sección se amplía la definición de exponente a los números racionales. Se pudo hacer esto antes, sin embargo, es necesario un conocimiento exacto del significado de "raíz de un número".

Raíces de números reales

Tal vez recuerde que una **raíz cuadrada** de un número b es un número c, tal que $c^2 = b$, y una **raíz cúbica** de un número b es un número d tal que $d^3 = b$.

¿Cuáles son las raíces cuadradas de 9?

$$3 \text{ es una raíz cuadrada de } 9, \text{ ya que } 3^2 = 9.$$

$$-3 \text{ es una raíz cuadrada de } 9, \text{ ya que } (-3)^2 = 9.$$

Por consiguiente, 9 tiene dos raíces cuadradas reales, una es el negativo de la otra.

¿Cuáles son las raíces cúbicas de 8?

$$2 \text{ es una raíz cuadrada de } 8, \text{ ya que } 2^3 = 8.$$

Y 2 es el único número real con esta propiedad. En general:

DEFINICIÓN 1 **Definición de una raíz *n*ésima**

Para un número natural n, y a y b números reales:

a es una raíz *n*ésima de b si $a^n = b$ 3 es una raíz cuarta de 81, ya que $3^4 = 81$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 ¿Es -4 una raíz cúbica de -64?

¿Es 8 o -8 una raíz cuadrada de -64?

¿Puede encontrar cualquier número real b con la propiedad de que $b^2 = 64$? [*Sugerencia*: Considere el signo de b^2 para $b > 0$ y $b < 0$.]

¿Cuántas raíces cuadradas reales de 4 existen? ¿De 5? ¿De -9? ¿Cuántas raíces cuartas reales de 5 existen? ¿De -5? ¿Cuántas raíces cúbicas reales de 27 están presentes? ¿De -27? El siguiente teorema importante (establecido sin prueba) responde estas preguntas.

Teorema 1 **Número de raíces reales *n*ésimas de un número real *b****

	***n* par**	***n* impar**
b positivo	Dos raíces reales *n*ésimas	Una raíz real *n*ésima
	-3 y 3 son las dos raíces cuartas de 81	2 es la única raíz cúbica real de 8
b negativo	Raices *n*ésimas no reales	Una raíz real *n*ésima
	-9 no tiene raíces cuadradas no reales	-2 es la única raíz cúbica real de -8

En consecuencia, 4 y 5 tienen dos raíces cuadradas reales cada uno, y -9 ninguna. Hay dos raíces cuartas reales de 5 y ninguna para -5. Y 27 y -27 tienen una raíz cúbica real cada una. ¿Qué símbolos se utilizan para representar estas raíces? En seguida se vuelve a esta pregunta.

Exponentes racionales

Si todas las propiedades de los exponentes se van a mantener constantes aunque algunos de los exponentes sean números racionales, entonces

$$(5^{1/3})^3 = 5^{3/3} = 5 \qquad \text{y} \qquad (7^{1/2})^2 = 7^{2/2} = 7$$

Debido a que el teorema 1 establece que el número 5 tiene una raíz cúbica real, parece preferible usar el símbolo $5^{1/3}$ para representar esta raíz. Por otra parte, el teorema 1 establece que 7 tiene dos raices cuadradas reales. ¿Qué raíz cuadrada real de 7 representa $7^{1/2}$? La respuesta a la pregunta se da en la siguiente definición.

*En esta sección se limita el análisis a las raíces reales de los números reales. Después de que los números reales se extienden a los números complejos (véase sección 1-5), las raices adicionales se deben de considerar. Por ejemplo, aparece que 1 tiene tres raíces cúbicas: además del número real 1, hay otras dos raíces cúbicas de 1 en el sistema de números complejos.

DEFINICIÓN 2 **$b^{1/n}$ raíz principal *n*ésima**

Para n un número natural y b un número real,

$b^{1/n}$ es la **raíz principal *n*ésima de *b***

definida como:

1. Si n es par y b es positivo, entonces $b^{1/n}$ representa la raíz positiva *n*ésima de b.

   $16^{1/2} = 4$ no -4 y 4.
   $-16^{1/2} = -4$ $-16^{1/2}$ y $(-16)^{1/2}$ no son iguales.

2. Si n es par y b es negativo, la $b^{1/n}$ no representa un número real. (Posteriormente se profundizará en este caso.)

   $(-16)^{1/2}$ no es real.

3. Si n es impar, entonces $b^{1/n}$ representa la raíz real *n*ésima de b (sólo hay una).

   $32^{1/5} = 2$ $(-32)^{1/5} = -2$

4. $0^{1/n} = 0$ $0^{1/9} = 0$ $0^{1/6} = 0$

EJEMPLO 1 **Raíces principales *n*ésimas**

(A) $9^{1/2} = 3$

(B) $-9^{1/2} = -3$ Compare los incisos (B) y (C).

(C) $(-9)^{1/2}$ no es un número real. (D) $27^{1/3} = 3$

(E) $(-27)^{1/3} = -3$ (F) $0^{1/7} = 0$

Problema seleccionado 1 Encuentre cada una de las expresiones siguientes:

(A) $4^{1/2}$ (B) $-4^{1/2}$ (C) $(-4)^{1/2}$

(D) $8^{1/3}$ (E) $(-8)^{1/3}$ (F) $0^{1/8}$

¿Cómo se define el símbolo $7^{2/3}$? Si las propiedades de los exponentes son válidas para exponentes racionales, entonces $7^{2/3} = (7^{1/3})^2$; es decir, $7^{2/3}$ debe representar el cuadrado de la raíz cúbica de 7. Esto conduce a la siguiente definición general:

DEFINICIÓN 3 **$b^{m/n}$ y $b^{-m/n}$, número racional como exponente**

Para m y n números naturales y b cualquier número real (excepto b que no puede ser negativo cuando n es par):

$$b^{m/n} = (b^{1/n})^m \quad \text{y} \quad b^{-m/n} = \frac{1}{b^{m/n}}$$

$4^{3/2} = (4^{1/2})^3 = 2^3 = 8$ $\quad 4^{-3/2} = \frac{1}{4^{3/2}} = \frac{1}{8}$ $\quad (-4)^{3/2}$ no es real

$(-32)^{3/5} = [(-32)^{1/5}]^3 = (-2)^3 = -8$

Ahora que se ha analizado $b^{m/n}$ para todos los números racionales m/n y números reales b. Se puede mostrar, aunque no se hará aquí, que las cinco propiedades de los exponentes enlistados en el teorema 1 de la sección A-5 continúan siendo válidas para los exponentes racionales en tanto se eviten las raíces pares de números negativos. En efecto, con esta última restricción la siguiente relación útil es una consecuencia inmediata de las propiedades de los exponentes:

Teorema 2 **Propiedad de los exponentes racionales**

Para m y n números naturales y b cualquier número real (excepto b que no puede ser negativo cuando n es par):

$$b^{m/n} = \begin{cases} (b^{1/n})^m \\ (b^m)^{1/n} \end{cases} \qquad 8^{2/3} = \begin{cases} (8^{1/3})^2 \\ (8^2)^{1/3} \end{cases}$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2 Encuentre la contradicción en la siguiente cadena de ecuaciones:

$$-1 = (-1)^{2/2} = [(-1)^2]^{1/2} = 1^{1/2} = 1 \qquad (1)$$

¿En dónde se intentó usar el teorema 2? ¿Por qué esto no fue correcto?

Las tres formas exponenciales en el teorema 2 son iguales siempre que sólo se impliquen números reales. Pero si b es negativo y n es par, entonces $b^{1/n}$ no es un número real y el teorema 2 no necesariamente se cumple, como se ilustra en el apartado de exploración y análisis 2. Una manera de evitar esta dificultad es suponer que m y n no tienen factores comunes.

EJEMPLO 2 **Uso de los exponentes racionales**

Simplifique y exprese las respuestas usando sólo exponentes positivos. Todas las literales representan números reales positivos.

(A) $8^{2/3} = (8^{1/3})^2 = 2^2 = 4$ or $8^{2/3} = (8^2)^{1/3} = 64^{1/3} = 4$

(B) $(-8)^{5/3} = [(-8)^{1/3}]^5 = (-2)^5 = -32$

(C) $(3x^{1/3})(2x^{1/2}) = 6x^{1/3+1/2} = 6x^{5/6}$

(D) $\left(\dfrac{4x^{1/3}}{x^{1/2}}\right)^{1/2} = \dfrac{4^{1/2}x^{1/6}}{x^{1/4}} = \dfrac{2}{x^{1/4-1/6}} = \dfrac{2}{x^{1/12}}$

(E) $(u^{1/2} - 2v^{1/2})(3u^{1/2} + v^{1/2}) = 3u - 5u^{1/2}v^{1/2} - 2v$

Problema seleccionado 2

Simplifique y exprese las respuestas usando sólo exponentes positivos. Todas las literales representan números reales positivos.

(A) $9^{3/2}$ (B) $(-27)^{4/3}$ (C) $(5y^{3/4})(2y^{1/3})$ (D) $(2x^{-3/4}y^{1/4})^4$

(E) $\left(\frac{8x^{1/2}}{x^{2/3}}\right)^{1/3}$ (F) $(2x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - 3y^{1/2})$

EJEMPLO 3

Evaluación de formas exponenciales racionales con calculadora

Evalúe con cuatro dígitos significativos usando calculadora. (Refiérase al manual de instrucciones de su calculadora para ver cómo se evalúan las formas exponenciales.)

(A) $11^{3/4}$ (B) $3.1046^{-2/3}$ (C) $(0.000\,000\,008\,437)^{3/11}$

Soluciones

(A) Primero cambie $\frac{3}{4}$ a la forma decimal estándar de 0.75; después evalúe $11^{0.75}$ mediante una calculadora.

$$11^{3/4} = 6.040$$

(B) $3.1046^{-2/3} = 0.4699$

(C) $(0.000\,000\,008\,437)^{3/11} = (8.437 \times 10^{-9})^{3/11}$

$$= 0.006\,281$$

Problema seleccionado 3

Evalúe con cuatro dígitos significativos usando calculadora.

(A) $2^{3/8}$ (B) $57.28^{-5/6}$ (C) $(83\,240\,000\,000)^{5/3}$

EJEMPLO 4

Simplificación de fracciones que implican exponentes racionales

Escriba la expresión siguiente como una fracción simple reducida a los términos más simples y sin exponentes negativos:

$$\frac{(1 + x^2)^{1/2}(2x) - x^2(\frac{1}{2})(1 + x^2)^{-1/2}(2x)}{1 + x^2}$$

Solución

El exponente negativo indica la presencia de una fracción en el numerador. Multiplique el numerador y el denominador por $(1 + x^2)^{1/2}$ para eliminar el exponente negativo y simplifique.

$$\frac{(1 + x^2)^{1/2}(2x) - x^2(\frac{1}{2})(1 + x^2)^{-1/2}(2x)}{1 + x^2} \cdot \frac{(1 + x^2)^{1/2}}{(1 + x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{2x(1 + x^2) - x^3}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{2x + 2x^3 - x^3}{(1 + x^2)^{3/2}} = \frac{2x + x^3}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x(2 + x^2)}{(1 + x^2)^{3/2}}$$

Problema seleccionado 4 Escriba la expresión siguiente como una fracción simple reducida al término más simple y sin exponentes negativos:

$$\frac{x^2(\frac{1}{2})(1 + x^2)^{-1/2}(2x) - (1 + x^2)^{1/2}(2x)}{x^4}$$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) 2 (B) -2 (C) No es real (D) 2 (E) -2 (F) 0
2. (A) 27 (B) 81 (C) $10y^{13/12}$ (D) $16y/x^3$ (E) $2/x^{1/18}$ (F) $2x - 5x^{1/2}y^{1/2} - 3y$
3. (A) 1.297 (B) 0.034 28 (C) 1.587×10^{18}
4. $-(2 + x^2)/[x^3(1 + x^2)^{1/2}]$

EJERCICIO A-6

Todas las variables representan números reales positivos a menos que se indique otra cosa.

A

En los problemas del 1 al 12, evalúe cada expresión que resulte en un número racional.

1. $16^{1/2}$ **2.** $64^{1/3}$ **3.** $16^{3/2}$

4. $16^{3/4}$ **5.** $-36^{1/2}$ **6.** $32^{3/5}$

7. $(-36)^{1/2}$ **8.** $(-32)^{3/5}$ **9.** $(\frac{4}{25})^{3/2}$

10. $(\frac{8}{27})^{2/3}$ **11.** $9^{-3/2}$ **12.** $8^{-2/3}$

Simplifique los problemas del 13 al 20, y exprese las respuestas usando sólo exponentes positivos.

13. $y^{1/5}y^{2/5}$ **14.** $x^{1/4}x^{3/4}$ **15.** $d^{2/3}d^{-1/3}$

16. $x^{1/4}x^{-3/4}$ **17.** $(y^{-8})^{1/16}$ **18.** $(x^{-2/3})^{-6}$

19. $(8x^3y^{-6})^{1/3}$ **20.** $(4u^{-2}v^4)^{1/2}$

B

Simplifique los problemas del 21 al 30, y exprese las respuestas usando sólo exponentes positivos.

21. $\left(\frac{a^{-3}}{b^4}\right)^{1/12}$ **22.** $\left(\frac{m^{-2/3}}{n^{-1/2}}\right)^{-6}$ **23.** $\left(\frac{4x^{-2}}{y^4}\right)^{-1/2}$

24. $\left(\frac{w^4}{9x^{-2}}\right)^{-1/2}$ **25.** $\left(\frac{8a^{-4}b^3}{27a^2b^{-3}}\right)^{1/3}$ **26.** $\left(\frac{25x^5y^{-1}}{16x^{-3}y^{-5}}\right)^{1/2}$

27. $\frac{8x^{-1/3}}{12x^{1/4}}$ **28.** $\frac{6a^{3/4}}{15a^{-1/3}}$ **29.** $\left(\frac{a^{2/3}b^{-1/2}}{a^{1/2}b^{1/2}}\right)^2$

30. $\left(\frac{x^{-1/3}y^{1/2}}{x^{-1/4}y^{1/3}}\right)^6$

En los problemas del 31 al 38, multiplique y exprese las respuestas usando sólo exponentes positivos.

31. $2m^{1/3}(3m^{2/3} - m^6)$ **32.** $3x^{3/4}(4x^{1/4} - 2x^8)$

33. $(a^{1/2} + 2b^{1/2})(a^{1/2} - 3b^{1/2})$

34. $(3u^{1/2} - v^{1/2})(u^{1/2} - 4v^{1/2})$

35. $(2x^{1/2} - 3y^{1/2})(2x^{1/2} + 3y^{1/2})$

36. $(5m^{1/2} + n^{1/2})(5m^{1/2} - n^{1/2})$

37. $(x^{1/2} + 2y^{1/2})^2$ **38.** $(3x^{1/2} - y^{1/2})^2$

En los problemas del 39 al 46, evalúe con 4 dígitos significativos usando calculadora. (Refiérase al manual de su calculadora para ver cómo se evalúan las formas exponenciales.)

39. $15^{5/4}$ **40.** $22^{3/2}$ **41.** $103^{-3/4}$

42. $827^{-3/8}$ **43.** $2.876^{8/5}$ **44.** $37.09^{7/3}$

45. $(0.000\,000\,077\,35)^{-2/7}$ **46.** $(491\,300\,000\,000)^{7/4}$

Los problemas del 47 al 50 ilustran los errores comunes que implican exponentes racionales. En cada caso, encuentre ejemplos numéricos que muestren que el lado izquierdo no siempre es igual al lado derecho.

47. $(x + y)^{1/2} \neq x^{1/2} + y^{1/2}$

48. $(x^3 + y^3)^{1/3} \neq x + y$

49. $(x + y)^{1/3} \neq \dfrac{1}{(x + y)^3}$

50. $(x + y)^{-1/2} \neq \dfrac{1}{(x + y)^2}$

Los problemas del 51 al 56 están relacionados con el cálculo. Escriba cada problema en la forma $ax^p + bx^q$, donde a y b son números reales y p y q son números racionales. Por ejemplo,

$$\frac{2x^{1/3} + 4}{4x} = \frac{2x^{1/3}}{4x} + \frac{4}{4x} = \frac{1}{2}x^{1/3 - 1} + x^{-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^{-2/3} + x^{-1}$$

51. $\dfrac{12x^{1/2} - 3}{4x^{1/2}}$

52. $\dfrac{x^{2/3} + 2}{2x^{1/3}}$

53. $\dfrac{3x^{2/3} + x^{1/2}}{5x}$

54. $\dfrac{2x^{3/4} + 3x^{1/3}}{3x}$

55. $\dfrac{x^2 - 4x^{1/2}}{2x^{1/3}}$

56. $\dfrac{2x^{1/3} - x^{1/2}}{4x^{1/2}}$

C

En los problemas del 57 al 60, m y n representan enteros positivos. Simplifique y exprese las respuestas usando exponentes positivos.

57. $(a^{3/n}b^{3/m})^{1/3}$

58. $(a^{n/2}b^{n/3})^{1/n}$

59. $(x^{m/4}y^{n/3})^{-12}$

60. $(a^{m/3}b^{n/2})^{-6}$

61. Si es posible, encuentre un valor real de x tal que:
(A) $(x^2)^{1/2} \neq x$ (B) $(x^2)^{1/2} = x$ (C) $(x^3)^{1/3} \neq x$

62. Si es posible, encuentre un valor real de x tal que:
(A) $(x^2)^{1/2} \neq -x$ (B) $(x^2)^{1/2} = -x$ (C) $(x^3)^{1/3} = -x$

63. Si n es par y b es negativo, entonces $b^{1/n}$ no es real. ¿Si m es impar, n es par y b es negativo, es $(b^m)^{1/n}$ real?

64. Si se supone que m es impar y n es par, ¿es posible que uno de $(b^{1/n})^m$ y $(b^m)^{1/n}$ sea real y el otro no?

Los problemas del 65 al 68 se relacionan con el cálculo. Simplifique escribiendo cada expresión como una fracción simple reducida a los mínimos términos y sin exponentes negativos.

65. $\dfrac{(2x - 1)^{1/2} - (x + 2)(\frac{1}{2})(2x - 1)^{-1/2}(2)}{2x - 1}$

66. $\dfrac{(x - 1)^{1/2} - x(\frac{1}{2})(x - 1)^{-1/2}}{x - 1}$

67. $\dfrac{2(3x - 1)^{1/3} - (2x + 1)(\frac{1}{3})(3x - 1)^{-2/3}(3)}{(3x - 1)^{2/3}}$

68. $\dfrac{(x + 2)^{2/3} - x(\frac{2}{3})(x + 2)^{-1/3}}{(x + 2)^{4/3}}$

APLICACIONES

69. **Economía.** El número de N unidades de un producto terminado producido con x unidades de mano de obra y y unidades de capital en cierto país del tercer mundo está aproximado por

$$N = 10x^{3/4}y^{1/4} \quad \text{Ecuación de Cobb-Douglas}$$

Estime cuántas unidades de un producto terminado se producirán usando 256 unidades de mano de obra y 81 unidades de capital.

70. **Economía.** El número de N unidades de un producto terminado producido por cierta compañía automotriz donde las x unidades de mano de obra y las y unidades de capital que se usan están aproximadas por

$$N = 50x^{1/2}y^{1/2} \quad \text{Ecuación de Cobb-Douglas}$$

Calcule cuántas unidades se producirán usando 256 unidades de mano de obra y 144 unidades de capital.

71. **Distancia de frenado.** R. A. Moyer de la Universidad Estatal de Iowa, encontró, en pruebas completas realizadas en 41 pavimentos mojados, que la distancia de frenado d (en pies) para un automóvil particular que viaja a v millas por hora estaba dada aproximadamente por

$$d = 0.0212v^{7/3}$$

Aproxime la distancia de frenado al pie más cercano para un carro que viaja sobre un pavimento mojado a 70 millas por hora.

72. **Distancia de frenado.** De manera aproximada, ¿cuántos pies le tomaría al carro del problema 71 detenerse en el pavimento mojado si estuviera viajando a 50 millas por hora? (Calcule la respuesta al pie más cercano.)

SECCIÓN A-7 Radicales

- De los exponentes racionales a los radicales, y viceversa
- Propiedades de los radicales
- Simplificación de radicales
- Sumas y restas
- Productos
- Operaciones de racionalización

¿Qué hace que las siguientes expresiones algebraicas tengan algo en común?

$$2^{1/2} \qquad 2x^{2/3} \qquad \frac{1}{x^{1/2} + y^{1/2}}$$

$$\sqrt{2} \qquad 2\sqrt[3]{x^2} \qquad \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Cada par vertical representa la misma cantidad, una en forma de exponente racional y la otra en *forma radical*. Hay ocasiones en que es más conveniente trabajar con radicales que con exponentes racionales, o viceversa. En esta sección se ve cómo las dos formas están relacionadas y se investigan algunas de las operaciones básicas de los radicales.

• De los exponentes racionales a los radicales, y viceversa

Se inicia este análisis definiendo un **radical de raíz *n*ésima**:

DEFINICIÓN 1

$\sqrt[n]{b}$, radical de *n*ésima raíz

Para un número natural n más grande que 1 y b un número real, se define $\sqrt[n]{b}$ la **raíz principal *n*ésima** (véase la definición 2 en la sección A-6); es decir,

$$\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$$

Si $n = 2$, se escribe $\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt[2]{b}$

$\sqrt{25} = 25^{1/2} = 5$ $\qquad$ $\sqrt[5]{32} = 32^{1/5} = 2$

$-\sqrt{25} = -25^{1/2} = -5$ $\qquad$ $\sqrt[5]{-32} = (-32)^{1/5} = -2$

$\sqrt{-25}$ no es real $\qquad$ $\sqrt[4]{0} = 0^{1/4} = 0$

El símbolo $\sqrt{}$ se llama **radical**, n se llama **índice** y b se llama **radicando**.

Como antes se indicó, a menudo es una ventaja poder cambiar hacia atrás y hacia adelante entre las formas con exponentes racionales y las formas con radicales. Las relaciones siguientes, que son consecuencias directas de la definición 1 y del teorema 2 de la sección A-6, son útiles en este caso.

Conversiones de los exponentes racionales y radicales

Para m y n enteros positivos ($n > 1$), y b no negativo cuando n es par,

$$b^{m/n} = \begin{cases} (b^m)^{1/n} = \sqrt[n]{b^m} \\ (b^{1/n})^m = (\sqrt[n]{b})^m \end{cases}$$

Nota: A menos que se indique lo contrario, todas las variables en el resto del análisis están restringidas de manera que todas las cantidades implicadas son números reales.

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 1 En cada una de las siguientes expresiones, evalúe ambas formas radicales.

$$16^{3/2} = \sqrt{16^3} = (\sqrt{16})^3$$
$$27^{2/3} = \sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2$$

¿Cuál forma de conversión radical es más fácil de usar si se están haciendo los cálculos a mano?

EJEMPLO 1 **Conversiones de exponentes racionales a radicales**

Cambie de la forma de exponente racional a la forma radical.

(A) $x^{1/7} = \sqrt[7]{x}$

(B) $(3u^2v^3)^{3/5} = \sqrt[5]{(3u^2v^3)^3}$ o $(\sqrt[5]{3u^2v^3})^3$ Usualmente se prefiere el primero.

(C) $y^{-2/3} = \dfrac{1}{y^{2/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$ o $\sqrt[3]{y^{-2}}$ or $\sqrt[3]{\dfrac{1}{y^2}}$

Cambie de la forma radical a la forma de exponente racional.

(D) $\sqrt[5]{6} = 6^{1/5}$ (E) $-\sqrt[3]{x^2} = -x^{2/3}$ (F) $\sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$

Problema seleccionado 1 Cambie de la forma de exponente racional a la forma radical.

(A) $u^{1/5}$ (B) $(6x^2y^5)^{2/9}$ (C) $(3xy)^{-3/5}$

Cambie de la forma de radical a la forma de exponente racional.

(D) $\sqrt[4]{9u}$ (E) $-\sqrt[7]{(2x)^4}$ (F) $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$

Propiedades de los radicales

Al proceso de cambio y simplificación de expresiones radicales se les suma la introducción de varias propiedades de los radicales que se deducen directamente de las propiedades de los exponentes antes considerados.

Teorema 1 **Propiedades de los radicales**

Para n un número natural más grande que 1, y x y y números positivos reales:

1. $\sqrt[n]{x^n} = x$ $\qquad \sqrt[3]{x^3} = x$
2. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$ $\qquad \sqrt[5]{xy} = \sqrt[5]{x}\sqrt[5]{y}$
3. $\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $\qquad \sqrt[4]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{y}}$

EJEMPLO 2 **Simplificación de radicales**

Simplifique:

(A) $\sqrt[5]{(3x^2y)^5} = 3x^2y$

(B) $\sqrt{10}\sqrt{5} = \sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25}\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

(C) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{3}$ o $\dfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}$

Problema seleccionado 2 Simplifique:

(A) $\sqrt[7]{(u^2 + v^2)^7}$ (B) $\sqrt{6}\sqrt{2}$ (C) $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{8}}$

PRECAUCIÓN En general, las propiedades de los radicales se pueden usar para simplificar términos elevados a potencias. Así, para x y y números reales positivos,

$$\sqrt{x^2 + y^2} \neq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = x + y$$

pero

$$\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = \sqrt{(x + y)^2} = x + y$$

• Simplificación de radicales

Las propiedades de los radicales proporcionan el significado del cambio de expresiones algebraicas que contienen radicales a una variedad de formas equivalentes. Una forma que con frecuencia es muy útil es una forma *simplificada*. Una expresión algebraica que contiene radicales se dice que está en **forma simplificada** si se satisfacen las cuatro condiciones que se exponen en la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2 **Forma (radical) simplificada**

1. Ningún radicando (la expresión dentro del signo radical) contiene un factor a una potencia más grande o igual que el índice del radical.
   Por ejemplo, $\sqrt{x^5}$ viola esta condición.

2. Ninguna potencia del radicando y el índice del radical tiene un factor común diferente de 1.
   Por ejemplo, $\sqrt[6]{x^4}$ viola esta condición.

3. No hay radicales en un denominador.
   Por ejemplo, $y/\sqrt{x}$ viola esta condición.

4. No hay fracciones dentro de un radical.
   Por ejemplo, $\sqrt{\frac{3}{5}}$ viola esta condición.

EJEMPLO 3 **Determinación de la forma simplificada**

Exprese los radicales en forma simplificada.

(A) $\sqrt{12x^3y^5z^2} = \sqrt{(4x^2y^4z^2)(3xy)}$ La condición 1 no se cumple.

$= \sqrt{(2xy^2z)^2(3xy)}$ $x^{pm}y^{pn} = (x^my^n)^p$

$= \sqrt{(2xy^2z)^2}\sqrt{3xy}$ $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$

$= 2xy^2z\sqrt{3xy}$ $\sqrt[n]{x^n} = x$

(B) $\sqrt[3]{6x^2y}\sqrt[3]{4x^5y^2} = \sqrt[3]{(6x^2y)(4x^5y^2)}$ $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

$= \sqrt[3]{24x^7y^3}$

$= \sqrt[3]{(8x^6y^3)(3x)}$ La condición 1 no se cumple.

$= \sqrt[3]{(2x^2y)^3(3x)}$ $x^{pm}y^{pn} = (x^my^n)^p$

$= \sqrt[3]{(2x^2y)^3}\sqrt[3]{3x}$ $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$

$= 2x^2y\sqrt[3]{3x}$ $\sqrt[n]{x^n} = x$

(C) $\sqrt[6]{16x^4y^2} = [(4x^2y)^2]^{1/6}$ La condición 2 no se cumple.

$= (4x^2y)^{2/6}$ Note la conveniencia de usar los exponentes racionales.

$= (4x^2y)^{1/3}$

$= \sqrt[3]{4x^2y}$

(D) $\sqrt[3]{\sqrt{27}} = [(3^3)^{1/2}]^{1/3}$

$= (3^3)^{1/6} = 3^{3/6}$ $= 3^{1/2} = \sqrt{3}$

Problema seleccionado 3 Exprese los radicales en forma simplificada.

(A) $\sqrt{18x^5y^2z^3}$ (B) $\sqrt[4]{27a^3b^3}\sqrt[4]{3a^5b^3}$ (C) $\sqrt[9]{8x^6y^3}$ (D) $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$

• Sumas y restas

Las expresiones algebraicas que implican radicales con frecuencia se pueden simplificar sumando y restando los términos que contengan exactamente las mismas expresiones radicales. Ahora se procede esencialmente de la misma manera que cuando se combinan términos semejantes en polinomios. La propiedad distributiva de los números reales desempeña un papel central en este proceso.

EJEMPLO 4 Combinación de términos semejantes

Combine tantos términos como sea posible:

(A) $5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \boxed{= (5 + 4)\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}$

(B) $2\sqrt[3]{xy^2} - 7\sqrt[3]{xy^2} \boxed{= (2 - 7)\sqrt[3]{xy^2}} = -5\sqrt[3]{xy^2}$

(C) $3\sqrt{xy} - 2\sqrt[3]{xy} + 4\sqrt{xy} - 7\sqrt[3]{xy} \boxed{= 3\sqrt{xy} + 4\sqrt{xy} - 2\sqrt[3]{xy} - 7\sqrt[3]{xy}}$
$= 7\sqrt{xy} - 9\sqrt[3]{xy}$

Problema seleccionado 4 Combine tantos términos como sea posible:

(A) $6\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ (B) $3\sqrt[5]{2x^2y^3} - 8\sqrt[5]{2x^2y^3}$

(C) $5\sqrt[3]{mn^2} - 3\sqrt{mn} - 2\sqrt[3]{mn^2} + 7\sqrt{mn}$

• Productos

Ahora se considerarán varios tipos de productos especiales que implican radicales. La propiedad distributiva de los números reales desempeña un papel central en el enfoque de estos problemas.

EJEMPLO 5 Multiplicación de formas radicales

Multiplique y simplifique:

(A) $\sqrt{2}(\sqrt{10} - 3) = \sqrt{2}\sqrt{10} - \sqrt{2} \cdot 3 = \sqrt{20} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$

(B) $(\sqrt{2} - 3)(\sqrt{2} + 5) = \sqrt{2}\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 15$
$= 2 + 2\sqrt{2} - 15$
$= 2\sqrt{2} - 13$

(C) $(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 5) = \sqrt{x}\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 5\sqrt{x} - 15$
$= x + 2\sqrt{x} - 15$

(D) $(\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n^2})(\sqrt[3]{m^2} - \sqrt[3]{n}) = \sqrt[3]{m^3} + \sqrt[3]{m^2n^2} - \sqrt[3]{mn} - \sqrt[3]{n^3}$

$= m - \sqrt[3]{mn} + \sqrt[3]{m^2n^2} - n$

Problema seleccionado 5

Multiplique y simplifique:

(A) $\sqrt{3}(\sqrt{6} - 4)$ (B) $(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 4)$

(C) $(\sqrt{y} - 2)(\sqrt{y} + 4)$ (D) $(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2})(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})$

• **Operaciones de racionalización**

Ahora se consideran las fracciones algebraicas que implican radicales en el denominador. Al hecho de eliminar un radical de un denominador se le llama **racionalización del denominador**. Para racionalizar el denominador se multiplica al numerador y al denominador por un factor adecuado que racionalice al denominador, es decir, que deje al denominador libre de radicales. Al factor se le llama **factor de racionalización**. Los siguientes productos especiales se usan para encontrar algunos factores de racionalización (véase los ejemplos 6(C), (D)):

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 \qquad (1)$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \qquad (2)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \qquad (3)$$

EXPLORACIÓN Y ANÁLISIS 2

Use los anteriores productos especiales (1) a (3) para encontrar un factor de racionalización para cada una de las expresiones siguientes:

(A) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ (B) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ (C) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ (D) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$

EJEMPLO 6 **Racionalización de denominadores**

Racionalice los denominadores.

(A) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$ (B) $\sqrt[3]{\dfrac{2a^2}{3b^2}}$ (C) $\dfrac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{3\sqrt{x} - 2\sqrt{y}}$ (D) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{m} + 2}$

Soluciones

(A) $\sqrt{5}$ es un factor de racionalización para $\sqrt{5}$, ya que $\sqrt{5}\sqrt{5} = \sqrt{5^2} = 5$. Por consiguiente, se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{5}$ para racionalizar el denominador:

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

(B) $$\sqrt[3]{\frac{2a^2}{3b^2}} = \frac{\sqrt[3]{2a^2}}{\sqrt[3]{3b^2}} = \frac{\sqrt[3]{2a^2}\sqrt[3]{3^2b}}{\sqrt[3]{3b^2}\sqrt[3]{3^2b}} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{2 \cdot 3^2a^2b}}{\sqrt[3]{3^3b^3}}} = \frac{\sqrt[3]{18a^2b}}{3b}$$

(C) El producto especial (1) sugiere que si se multiplica el denominador $3\sqrt{x} - 2\sqrt{y}$ por $3\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$ se obtiene la diferencia de los cuadrados y el denominador estará racionalizado.

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{3\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})}{(3\sqrt{x} - 2\sqrt{y})(3\sqrt{x} + 2\sqrt{y})}$$

$$= \frac{3\sqrt{x^2} + 2\sqrt{xy} + 3\sqrt{xy} + 2\sqrt{y^2}}{(3\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2}$$

$$= \frac{3x + 5\sqrt{xy} + 2y}{9x - 4y}$$

(D) El anterior producto especial (3) sugiere que si se multiplica el denominador $\sqrt[3]{m} + 2$ por $(\sqrt[3]{m})^2 - 2\sqrt[3]{m} + 2^2$ se obtiene la suma de dos cubos y el denominador estará racionalizado.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{m} + 2} = \frac{1[(\sqrt[3]{m})^2 - 2\sqrt[3]{m} + 2^2]}{(\sqrt[3]{m} + 2)[(\sqrt[3]{m})^2 - 2\sqrt[3]{m} + 2^2]}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{m^2} - 2\sqrt[3]{m} + 4}{(\sqrt[3]{m})^3 + 2^3}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{m^2} - 2\sqrt[3]{m} + 4}{m + 8}$$

Problema seleccionado 6 Racionalice los denominadores.

(A) $\frac{6}{\sqrt{2x}}$ (B) $\frac{10x^3}{\sqrt[3]{4x}}$ (C) $\frac{\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x} + 3}$ (D) $\frac{1}{1 - \sqrt[3]{y}}$

Respuestas a los problemas seleccionados

1. (A) $\sqrt[5]{u}$ (B) $\sqrt[9]{(6x^2y^3)^2}$ o $(\sqrt[9]{6x^2y^3})^2$ (C) $1/\sqrt[4]{(3xy)^3}$ (D) $(9u)^{1/4}$
   (E) $-(2x)^{4/7}$ (F) $(x^3 + y^3)^{1/3}$
2. (A) $u^2 + v^2$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $(\sqrt[3]{x^2})/2$ o $\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2}$
3. (A) $3x^2yz\sqrt{2xz}$ (B) $3a^2b\sqrt[4]{b^2} = 3a^2b\sqrt{b}$ (C) $\sqrt[3]{2x^2y}$ (D) $\sqrt[3]{2}$
4. (A) $8\sqrt{2}$ (B) $-5\sqrt[5]{2x^2y^3}$ (C) $3\sqrt[3]{mn^2} + 4\sqrt{mn}$
5. (A) $3\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{3} - 5$ (C) $y + 2\sqrt{y} - 8$ (D) $x + \sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2} - y$
6. (A) $\frac{3\sqrt{2x}}{x}$ (B) $5x^2\sqrt[3]{2x^2}$ (C) $\frac{2x + \sqrt{x} - 6}{4x - 9}$ (D) $\frac{1 + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^2}}{1 - y}$

EJERCICIO A-7

A menos que se establezca lo contrario, todas las variables están restringidas a que todas las cantidades implicadas sean números reales.

A

En los problemas del 1 al 8, cambie a la forma radical. No simplifique.

1. $m^{2/3}$
2. $n^{4/5}$
3. $6x^{3/5}$
4. $7y^{2/5}$
5. $(4xy^3)^{2/5}$
6. $(7x^2y)^{5/7}$
7. $(x + y)^{1/2}$
8. $x^{1/2} + y^{1/2}$

En los problemas del 9 al 16, cambie a la forma exponente racional. No simplifique.

9. $\sqrt[5]{b}$
10. $\sqrt{c}$
11. $5\sqrt[4]{x^3}$
12. $7m\sqrt[5]{n^2}$
13. $\sqrt[5]{(2x^2y)^3}$
14. $\sqrt[9]{(3m^4n)^2}$
15. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$
16. $\sqrt[3]{x + y}$

En los problemas del 17 al 32, escriba en forma simplificada.

17. $\sqrt[3]{-8}$
18. $\sqrt[3]{-27}$
19. $\sqrt{9x^8y^4}$
20. $\sqrt{16m^4y^8}$
21. $\sqrt[4]{16m^4n^8}$
22. $\sqrt[5]{32a^{15}b^{10}}$
23. $\sqrt{8a^3b^5}$
24. $\sqrt{27m^2n^7}$
25. $\sqrt[3]{2^4x^4y^7}$
26. $\sqrt[4]{2^4x^5y^8}$
27. $\sqrt[4]{m^2}$
28. $\sqrt[10]{n^6}$
29. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{xy}}$
30. $\sqrt{\sqrt[4]{5x}}$
31. $\sqrt[3]{9x^2}\sqrt[3]{9x}$
32. $\sqrt{2x}\sqrt{8xy}$

En los problemas del 33 al 40, racionalice los denominadores y escriba en forma simplificada.

33. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$
34. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$
35. $\dfrac{6x}{\sqrt{3x}}$
36. $\dfrac{12y^2}{\sqrt{6y}}$
37. $\dfrac{2}{\sqrt{2} - 1}$
38. $\dfrac{4}{\sqrt{6} - 2}$
39. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} + 2}$
40. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{10} - 2}$

En los problemas del 41 al 52, escriba en forma simplificada.

41. $x\sqrt[5]{3^6x^7y^{11}}$
42. $2a\sqrt[3]{8a^8b^{13}}$
43. $\dfrac{\sqrt[4]{32m^7n^9}}{2mn}$
44. $\dfrac{\sqrt[5]{32u^{12}v^8}}{uv}$
45. $\sqrt[6]{a^4(b - a)^2}$
46. $\sqrt[8]{3^6(u + v)^6}$
47. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^9b^3}}$
48. $\sqrt{\sqrt[6]{x^8y^6}}$
49. $\sqrt[3]{2x^2y^4}\sqrt[3]{3x^5y}$
50. $\sqrt[4]{4m^5n}\sqrt[4]{6m^3n^4}$
51. $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$
52. $\sqrt{x^2 + y^2}$

En los problemas del 53 al 64, racionalice los denominadores y escriba en forma simplificada.

53. $\dfrac{\sqrt{2m}\sqrt{5}}{\sqrt{20m}}$
54. $\dfrac{\sqrt{6}\sqrt{8c}}{\sqrt{18c}}$
55. $\dfrac{4a^3b^2}{\sqrt[3]{2ab^2}}$
56. $\dfrac{8x^3y^5}{\sqrt[3]{4x^2y}}$
57. $\sqrt[4]{\dfrac{3y^3}{4x^3}}$
58. $\sqrt[5]{\dfrac{4x^2}{16y^3}}$
59. $\dfrac{3\sqrt{y}}{2\sqrt{y} - 3}$
60. $\dfrac{5\sqrt{x}}{3 - 2\sqrt{x}}$
61. $\dfrac{2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}}{5\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}$
62. $\dfrac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$
63. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3}$
64. $\dfrac{-y^2}{2 - \sqrt{y^2 + 4}}$

Los problemas del 65 al 68 se relacionan con el cálculo. Racionalice los numeradores; esto es, realice las operaciones en las fracciones que eliminen los radicales de los numeradores. (Ésta es una operación particularmente útil en algunos problemas de cálculo).

65. $\dfrac{\sqrt{t} - \sqrt{x}}{t - x}$
66. $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
67. $\dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$
68. $\dfrac{\sqrt{2 + h} + \sqrt{2}}{h}$

En los problemas del 69 al 80, evalúe con cuatro dígitos significativos con una calculadora. (Lea las instrucciones en el manual de su calculadora para el proceso necesario para evaluar $\sqrt[n]{x}$.*)*

69. $\sqrt{0.049\ 375}$

70. $\sqrt{306.721}$

71. $\sqrt[5]{27.0635}$

72. $\sqrt[8]{0.070\ 144}$

73. $\sqrt[7]{0.000\ 000\ 008\ 066}$

74. $\sqrt[12]{6\,423\,000\,000\,000}$

75. $\sqrt[3]{7 + \sqrt[3]{7}}$

76. $\sqrt[5]{4 + \sqrt[5]{4}}$

77. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$ y $\sqrt[12]{2}$

78. $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ y $\sqrt[6]{5}$

79. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ y $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

80. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}}$ y $\dfrac{\sqrt[3]{25}}{5}$

C

¿Para qué números reales los problemas del 81 al 84 son verdaderos?

81. $\sqrt{x^2} = -x$

82. $\sqrt{x^2} = x$

83. $\sqrt[3]{x^3} = x$

84. $\sqrt[3]{x^3} = -x$

En los problemas 85 y 86 evalúe cada expresión con una calculadora y determine cuáles pares tienen el mismo valor. Verifique sus resultados algebraicamente.

85. (A) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$
(B) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}}$
(C) $1 + \sqrt{3}$
(D) $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}$
(E) $\sqrt{8 + \sqrt{60}}$
(F) $\sqrt{6}$

86. (A) $2\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$
(B) $\sqrt{8}$
(C) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$
(D) $\sqrt{3 + \sqrt{8}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}}$
(E) $\sqrt{10 + \sqrt{84}}$
(F) $1 + \sqrt{5}$

En los problemas del 87 al 90, racionalice los denominadores.

87. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}$

88. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{m} + \sqrt[3]{n}}$

89. $\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}}$

90. $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{z}}$

[*Sugerencia para el problema 89*: Comience por multiplicar el numerador y el denominador por $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - \sqrt{z}$).]

Los problemas 91 y 92 están relacionados con el cálculo. Racionalice los numeradores.

91. $\dfrac{\sqrt[3]{x + h} - \sqrt[3]{x}}{h}$

92. $\dfrac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{x}}{t - x}$

93. Demuestre que $\sqrt[kn]{x^{km}} = \sqrt[n]{x^m}$ para k, m y n que son números naturales mayores que 1.

94. Demuestre que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$ para m y n que son números naturales mayores que 1.

APLICACIONES

95. Física: masa relativista. La masa M de un objeto que se mueve a una velocidad v está dada por

$$M = \frac{M_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

donde M_0 = masa en reposo y c = velocidad de la luz. La masa de un objeto aumenta con la velocidad y tiende al infinito conforme la velocidad se aproxima a la velocidad de la luz. Demuestre que M se puede escribir en la forma

$$M = \frac{M_0 c\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2}$$

96. Física: péndulo. Un péndulo simple se forma al colgar un disco de masa M en una cuerda de longitud L de un soporte fijo (véase la figura). El tiempo que le toma al disco oscilar de derecha a izquierda y volver se llama **periodo** T y está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

donde g es la constante gravitacional. Demuestre que T se puede escribir en la forma

$$T = \frac{2\pi\sqrt{gL}}{g}$$



ACTIVIDADES EN GRUPO DEL APÉNDICE A Representaciones numéricas racionales

El conjunto de números reales se puede dividir en dos subconjuntos separados, el conjunto de los números racionales y el conjunto de los números irracionales. Los números racionales se pueden representar de dos formas: como a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$, y como expansiones de terminación o repetición decimal. Los números irracionales se pueden representar como expansiones decimales no repetitivas o de no terminación. En esta actividad se desea explorar la relación entre los dos métodos diferentes para representar números racionales.

Considere el número racional $r = a/b$, donde a y b son enteros sin factor comunes y $b \neq 0$.

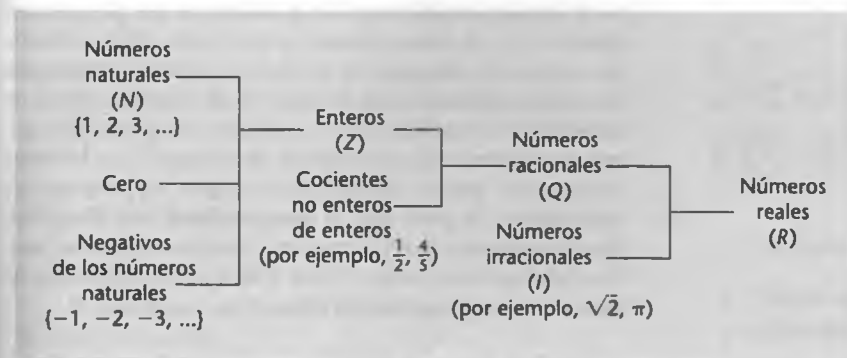
1. Si $b = 10^n$ para un entero positivo n, ¿qué tipo de expansión decimal tendrá r?
2. Si $b = 2^m5^n$ para los enteros positivos m y n, ¿qué tipo de expansión decimal tendrá r?
3. Si r tiene una expansión de terminación decimal, demuestre que r se puede expresar en la forma a/b, donde $b = 2^m5^n$.
4. Encuentre a y b para las siguientes expansiones de repetición (la barra que está arriba de los números indica el bloque que se repite):
   (A) $0.\overline{63}$ (B) $0.\overline{486}$ (C) $0.\overline{846153}$
5. Encuentre a y b para $r = 0.1\overline{9}$ y después encuentre una expansión de terminación decimal para r.

Repaso del apéndice A

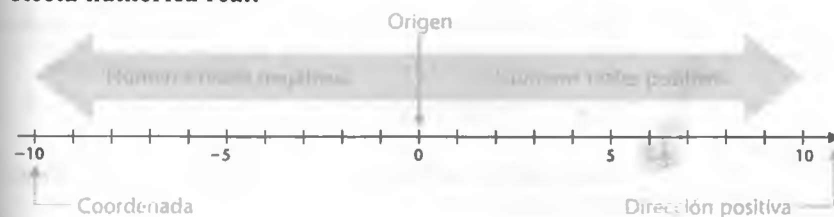
A-1 ÁLGEBRA Y NÚMEROS REALES

Un **conjunto** es una colección de objetos llamados **elementos** o **miembros** del conjunto. Los conjuntos se describen a menudo **enlistando** los elementos o estableciendo una **regla** que determina los elementos. Un conjunto puede ser **finito** o **infinito**. Un conjunto sin elementos se llama **conjunto vacío** o **conjunto nulo** y se denota por $\varnothing$. Una **variable** es un símbolo que representa elementos no especificados de un **conjunto de reemplazo**. Una **constante** es un símbolo para un solo objeto. Si cada elemento del conjunto A está también en el conjunto B, se dice que A es un **subconjunto** de B y se escribe $A \subset B$.

Números reales:



Recta numérica real:



Las propiedades básicas de los números reales incluyen **propiedades asociativas:** $x + (y + z) = (x + y) + z$ y $x(yz) = (xy)z$; **propiedades conmutativas:** $x + y = y + x$ y $xy = yx$; **identidades:** $0 + x = x + 0 = x$ y $(1)x = x(1) = x$; **inversas** $-x$ es el inverso aditivo o **negativo** de x y, si $x \neq 0$ $1/x$ es el inverso multiplicativo o **recíproco** de x; y la **propiedad distributiva:** $x(y + z) = xy + xz$. La **resta** se define por $a - b = a + (-b)$ y la **división** por $a/b = a(1/b)$. La división entre cero nunca se permite. Otras propiedades incluyen **propiedades de negativos:**

1. $-(-a) = a$
2. $(-a)b = -(ab) = a(-b) = -ab$
3. $(-a)(-b) = ab$
4. $(-1)a = -a$
5. $\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{a}{-b} \qquad b \neq 0$
6. $\dfrac{-a}{-b} = -\dfrac{-a}{b} = -\dfrac{a}{-b} = \dfrac{a}{b} \qquad b \neq 0$

propiedades cero:

1. $a \cdot 0 = 0$
2. $ab = 0$ si y sólo si $a = 0$ o $b = 0$ o ambos

y **propiedades con fracciones** (excepto la división entre 0):

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$
2. $\dfrac{ka}{kb} = \dfrac{a}{b}$
3. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
4. $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c}$
5. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a + c}{b}$
6. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a - c}{b}$
7. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

A-2 POLINOMIOS: OPERACIONES BÁSICAS

Para n y m números naturales y a cualquier número real:

$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ (n factores de a) y $a^m a^n = a^{m+n}$

Una **expresión algebraica** se forma al usar constantes y variables y las operaciones de suma, resta, multiplicación, elevación de potencias y extracción de raíces. Un **polinomio** es una expresión algebraica que se forma al sumar y restar constantes y términos de la forma ax^n (una variable), $ax^n y^m$ (dos variables), y así sucesivamente. El **grado de un término** es la suma de las potencias de todas las variables en el término, y el **grado de un polinomio** es el grado de un término diferente de cero con el grado más alto en el polinomio. Los polinomios con uno, dos o tres términos son llamados **monomios**, **binomios** y **trinomios**, respectivamente. Los **términos semejantes** tienen exactamente los mismos factores variables elevados a las mismas potencias y se pueden combinar al sumar sus **coeficientes**. Los polinomios se pueden **sumar, restar** y **multiplicar** de manera repetida aplicando la propiedad distributiva y combinando términos comunes. El **método PEIU** se usa para multiplicar dos binomios. Los **productos especiales** que se obtienen al usar el método PEIU son:

1. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

A-3 POLINOMIOS: FACTORIZACIÓN

Un número o expresión algebraica se **factoriza** si se expresa como un producto de otros números o expresiones algebraicas, que se llaman **factores**. Un entero mayor que 1 es un **número primo** si sólo sus factores enteros positivos son ellos mismos y 1, y de otra forma es un número compuesto. Cada número compuesto se puede **factorizar sólo en un producto de números primos**. Un polinomio es **primo** con respecto de un conjunto dado de números (usualmente el conjunto de enteros) si (1) todos sus coeficientes son de ese conjunto de números, y (2) si no se pueden escribir como un producto de dos polinomios, excepto el 1 y el número mismo, y que tengan coeficientes de ese conjunto de números. Un polinomio no primo se **factoriza de manera completa con respecto a un conjunto dado de números** si se escribe como un producto de polinomios primos con respecto de ese conjunto de números. Los **factores comunes** se pueden factorizar aplicando las propiedades distributivas. Se puede usar el **agrupamiento** para identificar factores comunes. Los polinomios de segundo grado se pueden factorizar por prueba y error. Las siguientes fórmulas de factorización especial son útiles:

1. $u^2 + 2uv + v^2 = (u + v)^2$ Cuadrado perfecto
2. $u^2 - 2uv + v^2 = (u - v)^2$ Cuadrado perfecto
3. $u^2 - v^2 = (u - v)(u + v)$ Diferencia de cuadrados
4. $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$ Diferencia de cubos
5. $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$ Suma de cubos

No hay fórmula de factorización con respecto de los números reales para $u^2 + v^2$.

A-4 EXPRESIONES RACIONALES: OPERACIONES BÁSICAS

Una **expresión fraccional** es el cociente de dos expresiones algebraicas, y una **expresión racional** es el cociente de dos polinomios. Las reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones de números reales (véase sección A-1 en este repaso) se amplían a expresiones fraccionales con la advertencia de que **las variables siempre se restringen a la exclusión de la división entre cero.** Las fracciones se pueden **reducir a sus términos más simples o elevar a términos superiores** mediante la propiedad fundamental de fracciones:

$$\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} \qquad \text{con } b, k \neq 0$$

Una expresión racional se **reduce a sus términos más simples** si el numerador y el denominador no tienen factores en común con respecto de los enteros. El **mínimo común denominador** (MCD) es útil para sumar y restar fracciones con diferentes denominadores y también para reducir **fracciones compuestas a fracciones simples.**

A-5 EXPONENTES ENTEROS

$a^n = a \cdot a \cdot \cdots \cdot a$ (n factores de a) para un entero positivo n, $a^0 = 1$ ($a \neq 0$), $a^n = 1/a^{-n}$ para un entero negativo n ($a \neq 0$). 0^0 no está definido.

Propiedades de exponentes enteros (se excluye la división entre 0):

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^n)^m = a^{mn}$
3. $(ab)^m = a^m b^m$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{1}{a^{n-m}}$

Propiedades adicionales de los exponentes (se excluye la división entre 0):

1. $(a^m b^n)^p = a^{pm} b^{pn}$
2. $\left(\frac{a^m}{b^n}\right)^p = \frac{a^{pm}}{b^{pn}}$
3. $\frac{a^{-m}}{b^{-m}} = \frac{b^m}{a^n}$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Notación científica:

$$a \times 10^n \qquad 1 \leq a < 10$$

n es un entero, a está en forma decimal.

A-6 EXPONENTES RACIONALES

Para un número natural n y los números reales a y b:

$$a \text{ es la } n\text{ésima raíz de } b \text{ si } a^n = b$$

La **raíz principal** n**ésima** de b se denota por $b^{1/n}$. Si n es impar, b tiene una $n$ésima raíz real que es la $n$ésima raíz principal. Si n es par y $b > 0$, b tiene dos $n$ésimas raíces reales y la $n$ésima raíz positiva es la $n$ésima raíz principal. Si n es par y $b < 0$, b no tiene $n$ésimas raíces reales.

Para exponentes con números racionales (se excluyen las raíces pares de números negativos):

$$b^{m/n} = (b^{1/n})^m = (b^m)^{1/n} \qquad \text{y} \qquad b^{-m/n} = \frac{1}{b^{m/n}}$$

A-7 RADICALES

Un **radical con** n**ésima raíz** se define por $\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$, donde $b^{1/n}$ es la n-ésima raíz principal de b, $\sqrt[n]{\ }$ es un **radical**, n es el **índice** y b es el **radicando**. Los exponentes racionales y los radicales se relacionan por

$$b^{m/n} = (b^m)^{1/n} = \sqrt[n]{b^m} = (b^{1/n})^m = (\sqrt[n]{b})^m$$

Propiedades de radicales ($x > 0, y > 0$):

1. $\sqrt[n]{x^n} = x$
2. $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$
3. $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

Un radical está en **forma simplificada** si:

1. Ningún radicando contiene un factor a una potencia mayor que o igual al índice del radical.
2. Ninguna potencia del radicando y el índice del radical tiene un factor común diferente de 1.
3. Ningún radical aparece en un denominador.
4. Ninguna fracción aparece dentro de un radical.

Las fracciones algebraicas que contienen radicales se **racionalizan** al multiplicar el numerador y denominador por un **factor de racionalización** a menudo determinado mediante una fórmula de producto especial.

Ejercicio de repaso del apéndice A

Después de resolver todos los problemas de este capítulo, revise y compruebe las respuestas con las que se dan al final del libro. Ahí están todas las respuestas a los problemas de repaso, seguidas por un número en tipo itálico que indica la sección a la que pertenece el problema que se está analizando. Si se le presentan dudas, repase la sección correspondiente en el texto.

A

1. Para $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 4\}$ y $C = \{4, 1, 2\}$, indique si es verdadero (V) o falso (F):

(A) $3 \in A$ (B) $5 \notin C$ (C) $B \in A$
(D) $B \subset A$ (E) $B \neq C$ (F) $A \subset B$

2. Reemplace cada signo de interrogación con una expresión adecuada que ilustre el uso de la propiedad del número real indicado.

(A) Conmutativa (·): $x(y + z) = ?$
(B) Asociativa (+): $2 + (x + y) = ?$
(C) Distributiva $(2 + 3)x = ?$

Los problemas del 3 al 7 se refieren a los polinomios siguientes:

(a) $3x - 4$ *(b)* $x + 2$ *(c)* $3x^2 + x - 8$ *(d)* $x^3 + 8$

3. Sume los cuatro polinomios.

4. Reste la suma de (*a*) y (*c*) de la suma de (*b*) y (*d*).

5. Multiplique (*c*) y (*d*). **6.** ¿Cuál es el grado de (*d*)?

7. ¿Cuál es el coeficiente del segundo término en (*c*)?

En los problemas del 8 al 11, realice las operaciones indicadas y simplifique.

8. $5x^2 - 3x[4 - 3(x - 2)]$ **9.** $(3m - 5n)(3m + 5n)$

10. $(2x + y)(3x - 4y)$ **11.** $(2a - 3b)^2$

En los problemas del 12 al 14, escriba cada polinomio en forma completamente factorizada respecto de los enteros. Si el polinomio es primo respecto de los enteros, también indíquelo.

12. $9x^2 - 12x + 4$ **13.** $t^2 - 4t - 6$

14. $6n^3 - 9n^2 - 15n$

En los problemas del 15 al 18, realice las operaciones indicadas y reduzca a los términos más simples. Represente todas las fracciones compuestas como fracciones simples reducidas a sus términos más simples.

15. $\dfrac{2}{5b} - \dfrac{4}{3a^3} - \dfrac{1}{6a^2b^2}$ **16.** $\dfrac{3x}{3x^2 - 12x} + \dfrac{1}{6x}$

17. $\dfrac{y - 2}{y^2 - 4y + 4} \div \dfrac{y^2 + 2y}{y^2 + 4y + 4}$

18. $\dfrac{u - \frac{1}{u}}{1 - \frac{1}{u^2}}$

Simplifique los problemas del 19 al 24, y escriba las respuestas usando sólo exponentes positivos. Todas las variables representan números reales positivos.

19. $6(xy^3)^5$ **20.** $\dfrac{9u^8v^6}{3u^4v^8}$

21. $(2 \times 10^5)(3 \times 10^{-3})$ **22.** $(x^{-3}y^2)^{-2}$

23. $u^{5/3}u^{2/3}$ **24.** $(9a^4b^{-2})^{1/2}$

25. Cambie a la forma radical: $3x^{2/5}$

26. Cambie a la forma de exponentes racionales: $-3\sqrt[3]{(xy)^2}$

Simplifique los problemas del 27 al 31, y exprese las respuestas en forma simplificada. Todas las variables representan números reales positivos.

27. $3x\sqrt[3]{x^5y^4}$ **28.** $\sqrt{2x^2y^5}\sqrt{18x^3y^2}$

29. $\dfrac{6ab}{\sqrt{3a}}$ **30.** $\dfrac{\sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}}$ **31.** $\sqrt[8]{y^6}$

B

32. Escriba usando el método de lista:

$\{x \mid x \text{ es un entero impar entre } -4 \text{ y } 2\}$

En los problemas del 33 al 38, cada enunciado ilustra el uso de una de las siguientes propiedades o definiciones de los números reales. Indique cuál es en cada caso.

Conmutativa (+, ·)	*Identidad (+, ·)*
División	*Asociativa (+, ·)*
Inversa (+, ·)	*Cero*
Distributiva	*Resta*
Negativos	

33. $(-3) - (-2) = (-3) + [-(-2)]$

34. $3y + (2x + 5) = (2x + 5) + 3y$

35. $(2x + 3)(3x + 5) = (2x + 3)3x + (2x + 3)5$

36. $3 \cdot (5x) = (3 \cdot 5)x$

37. $\dfrac{a}{-(b - c)} = -\dfrac{a}{b - c}$ **38.** $3xy + 0 = 3xy$

39. Indique si es verdadero (V) o falso (F):

(A) Un entero es un número racional y un número real.
(B) Un número irracional tiene una representación decimal repetitiva.

40. Dé un ejemplo de un entero que no sea un número natural.

41. Dadas las expresiones algebraicas:

(a) $2x^2 - 3x + 5$ (b) $x^2 - \sqrt{x - 3}$
(c) $x^{-3} + x^{-2} - 3x^{-1}$ (d) $x^2 - 3xy - y^2$

(A) Identifique todos los polinomios de segundo grado.
(B) Identifique todos los polinomios de tercer grado.

En los problemas del 42 al 46, realice las operaciones indicadas y simplifique.

42. $(2x - y)(2x + y) - (2x - y)^2$

43. $(m^2 + 2mn - n^2)(m^2 - 2mn - n^2)$

44. $5(x + h)^2 - 7(x + h) - (5x^2 - 7x)$

45. $-2x\{(x^2 + 2)(x - 3) - x[x - x(3 - x)]\}$

46. $(x - 2y)^3$

En los problemas del 47 al 53, escriba una forma completamente factorizada respecto de los enteros.

47. $(4x - y)^2 - 9x^2$ **48.** $2x^2 + 4xy - 5y^2$

49. $6x^3y + 12x^2y^2 - 15xy^3$ **50.** $(y - b)^2 - y + b$

51. $3x^3 + 24y^3$ **52.** $y^3 + 2y^2 - 4y - 8$

53. $2x(x - 4)^3 + 3x^2(x - 4)^2$

En los problemas del 54 al 58, realice las operaciones indicadas y reduzca a los términos más simples. Represente todas las fracciones compuestas como fracciones simples reducidas a sus términos más simples.

54. $\dfrac{3x^2(x + 2)^2 - 2x(x + 2)^3}{x^4}$

55. $\dfrac{m - 1}{m^2 - 4m + 4} + \dfrac{m + 3}{m^2 - 4} + \dfrac{2}{2 - m}$

56. $\dfrac{y}{x^2} \div \left(\dfrac{x^2 + 3x}{2x^2 + 5x - 3} \div \dfrac{x^3y - x^2y}{2x^2 - 3x + 1}\right)$

57. $\dfrac{1 - \dfrac{1}{1 + \dfrac{x}{y}}}{1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{x}{y}}}$ **58.** $\dfrac{a^{-1} - b^{-1}}{ab^{-2} - ba^{-2}}$

59. Compruebe la solución siguiente. Si considera que es incorrecta, explique por qué y cómo se puede corregir, y después muestre la solución correcta.

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 + x - 2} + x + 2 = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 2} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

En los problemas del 60 al 65, realice las operaciones indicadas, simplifique y escriba las respuestas usando sólo exponentes positivos. Todas las variables representan números reales positivos.

60. $\left(\dfrac{8u^{-1}}{2^2u^2v^0}\right)^{-2}\left(\dfrac{u^{-5}}{u^{-3}}\right)^3$ **61.** $\dfrac{5^0}{3^2} + \dfrac{3^{-2}}{2^{-2}}$

62. $\left(\dfrac{27x^2y^{-3}}{8x^{-4}y^3}\right)^{1/3}$ **63.** $(a^{-1/3}b^{1/4})(9a^{1/3}b^{-1/2})^{3/2}$

64. $(x^{1/2} + y^{1/2})^2$ **65.** $(3x^{1/2} - y^{1/2})(2x^{1/2} + 3y^{1/2})$

66. Convierta a notación científica y simplifique:

$$\frac{0.000\ 000\ 000\ 52}{(1\ 300)(0.000\ 002)}$$

Evalúe los problemas del 67 al 74 con cuatro dígitos significativos con una calculadora.

67. $\dfrac{(20\ 410)(0.000\ 003\ 477)}{0.000\ 000\ 022\ 09}$

68. 0.1347^5 **69.** $(-60.39)^{-3}$ **70.** $82.45^{8/3}$

71. $(0.000\ 000\ 419\ 9)^{2/7}$ **72.** $\sqrt[5]{0.006\ 604}$

73. $\sqrt[3]{3 + \sqrt{2}}$ **74.** $\dfrac{2^{-1/2} - 3^{-1/2}}{2^{-1/3} + 3^{-1/3}}$

En los problemas del 75 al 83, realice las operaciones indicadas y exprese las respuestas en forma simplificada. Todos los radicandos representan números reales positivos.

75. $-2x\sqrt[5]{3^6x^7y^{11}}$ **76.** $\dfrac{2x^2}{\sqrt[3]{4x}}$ **77.** $\sqrt[5]{\dfrac{3y^2}{8x^2}}$

78. $\sqrt[9]{8x^6y^{12}}$ **79.** $\sqrt{\sqrt[3]{4x^4}}$

80. $(2\sqrt{x} - 5\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

81. $\dfrac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ **82.** $\dfrac{2\sqrt{u} - 3\sqrt{v}}{2\sqrt{u} + 3\sqrt{v}}$

83. $\dfrac{y^2}{\sqrt{y^2 + 4} - 2}$

84. Racionalice el numerador: $\dfrac{\sqrt{t} - \sqrt{5}}{t - 5}$

85. Escriba en la forma $ax^p + bx^q$, donde a y b son números reales y p y q son números racionales:

$$\frac{4\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x}}$$

C

86. Escriba el decimal repetitivo 0.545 454 . . . en la forma a/b reducida a sus términos más simples, donde a y b son enteros positivos. ¿Este número es racional o irracional?

87. Si $M = \{-4, -3, 2\}$ y $N = \{-3, 0, 2\}$, encuentre:
(A) $\{x \mid x \in M$ o $x \in N\}$
(B) $\{x \mid x \in M$ y $x \in N\}$

88. Evalúe $x^2 - 4x + 1$ para $x = 2 - \sqrt{3}$.

89. Simplifique: $x(2x - 1)(x + 3) - (x - 1)^3$

90. Factorice de manera completa con respecto de los enteros:

$$4x(a^2 - 4a + 4) - 9x^3$$

91. Evalúe cada expresión en una calculadora y determine cuáles pares tienen el mismo valor. Verifique estos resultados de manera algebraica.

(A) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}}$
(B) $\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}$
(C) $\sqrt{10}$

En los problemas del 92 a 95, simplifique y exprese las respuestas usando sólo exponentes positivos (m es un entero mayor que 1).

92. $\dfrac{8(x-2)^{-3}(x+3)^2}{12(x-2)^{-4}(x+3)^{-2}}$

93. $\left(\dfrac{a^{-2}}{b^{-1}}+\dfrac{b^{-2}}{a^{-1}}\right)^{-1}$

94. $(x^{1/3}-y^{1/3})(x^{2/3}+x^{1/3}y^{1/3}+y^{2/3})$

95. $\left(\dfrac{x^{m^2}}{x^{2m-1}}\right)^{1/(m-1)}$ $\quad m>1$

96. Racionalice el denominador: $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{x}}$

97. Racionalice el numerador: $\dfrac{\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{5}}{t-5}$

98. Escriba en forma simplificada: $\sqrt[n+1]{x^{n^2}x^{2n+1}}$ $\quad n>0$

APLICACIONES

99. Construcción. Una fuente circular en un parque incluye una pared de concreto de 3 pies de altura y 2 pies de espesor (véase la figura). El radio interior de la pared tiene x pies, escriba una expresión algebraica en términos de x que represente el volumen del concreto usado en la construcción de la pared. Simplifique la expresión.



100. Consumo de energía. En 1984 la cantidad total de energía que se consumió en Estados Unidos fue equivalente a 2 257 000 000 000 kilogramos de carbón (el consumo de todas las formas de energía se expresa en términos del carbón para propósitos de comparación) y la población era de aproximadamente 235 000 000. Calcule con tres dígitos significativos el consumo promedio de energía por persona. Escriba su respuesta en notación científica y en notación decimal estándar.

101. Economía. El número de unidades N producida por una compañía petrolera a partir del uso de x unidades de capital y y unidades de mano de obra está aproximado por

$$N = 20x^{1/2}y^{1/2}$$

(A) Estime el número de unidades producidas cuando se usan 1 600 unidades de capital y 900 unidades de mano de obra.

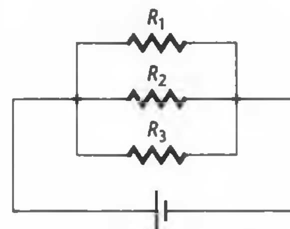
(B) ¿Cuál es el efecto en la producción si el número de unidades de capital y mano de obra se duplican a 3 200 unidades y 1 800 unidades, respectivamente?

(C) ¿Cuál es el efecto en la producción al duplicar las unidades de mano de obra y capital en cualquier nivel de producción?

102. Circuitos eléctricos. Si tres resistores eléctricos con resistencias R_1, R_2 y R_3, se conectan en paralelo, entonces la resistencia total R para el circuito que se muestra en la figura está dada por

$$R = \frac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}$$

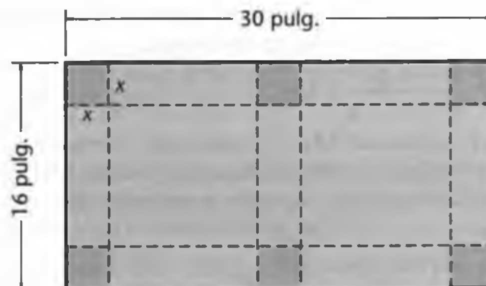
Represente esta fracción compuesta como una fracción simple.



103. Construcción. Se va a hacer una caja con una tapa articulada con un pedazo de cartón que mide 16 por 30 pulgadas. En cada esquina y enmedio se van a cortar cuadros de x pulgadas de lado, después se van a doblar hacia arriba los extremos y los lados para formar la caja y su tapa (véase la figura). Exprese cada una de las cantidades siguientes con un polinomio, tanto en forma factorizada como desarrollada.

(A) El área del pedazo de cartón después de que se le han quitado las esquinas.

(B) El volumen de la caja.





APÉNDICE B

Dígitos significativos

La mayoría de los problemas que implican cálculos del mundo real se relacionan con figuras que son sólo aproximaciones. Por lo tanto, parece razonable suponer que una respuesta final no debe ser más exacta que la exactitud mínima de la figura usada en el cálculo. Éste es un punto importante, ya que las calculadoras tienden a dar la impresión de que se alcanza mayor exactitud de la que se garantiza.

Suponga que se desea calcular la longitud de la diagonal de un campo rectangular a partir de las medidas de sus lados de 237.8 y 61.3 metros. Usando el teorema de Pitágoras y una calculadora, se encuentra

$$d = \sqrt{237.8^2 + 61.3^2}$$
$$= 245.573\ 878 \cdots$$



La respuesta en la calculadora sugiere una exactitud que no se justifica. ¿Qué exactitud se justifica? Para responder esta pregunta, se introduce el concepto de *dígitos significativos*.

Cuando escriba una medida tal como 61.3 metros, se supone que ésta es exacta al ultimo dígito escrito. De manera que, la medida de 61.3 metros indica que se realizó hasta el décimo de metro más cercano. Es decir, el ancho real está entre 61.25 y 61.35 metros. En general, los dígitos en un número que indican la exactitud del número se llaman **dígitos significativos**. Si todos los dígitos en un número son diferentes de cero, entonces todos son significativos. Así, la medida de 61.3 metros tiene tres dígitos significativos, y la medida de 237.8 metros tiene cuatro dígitos significativos.

¿Cuáles son los dígitos significativos en el número 7 800? La exactitud de este número no es clara. Podría representar una medición con cualquiera de las exactitudes siguientes:

Entre 7 750 y 7 850	Correcta hasta las centenas
Entre 7 795 y 7 805	Correcta hasta las decenas
Entre 7 799.5 y 7 800.5	Correcta hasta las unidades

Para dar una definición precisa de dígitos significativos que resuelva esta ambigüedad, se usa la notación científica.

DEFINICIÓN 1 **Dígitos significativos**

Si un número x está escrito en notación científica como

$$x = a \times 10^n \qquad 1 \le a < 10, \qquad n \text{ es un entero}$$

entonces el número de dígitos significativos en x es el número de dígitos en a.

En consecuencia,

7.8×10^3	tiene 2 dígitos significativos
7.80×10^3	tiene 3 dígitos significativos
7.800×10^3	tiene 4 dígitos significativos

Estas tres medidas tienen la misma representación decimal (7 800), pero cada una representa diferente exactitud.

La definición 1 indica cómo escribir un número de manera que el número de dígitos significativos sea claro, pero no indica cómo interpretar la exactitud de un número que no esté escrito en notación científica. Se usa la convención siguiente para números que se escriban como fracciones decimales:

Dígitos significativos en fracciones decimales

El número de dígitos significativos en un número sin punto decimal se encuentra contando los dígitos de izquierda a derecha, comenzando con el primer dígito y terminando con el último dígito *diferente de cero*.

El número de dígitos significativos en un número que contiene un punto decimal se encuentra contando los dígitos de izquierda a derecha, comenzando con el primer dígito diferente de cero y terminando con el último dígito.

Cuando se aplica esta regla al número 7 800, se concluye que este número tiene 2 dígitos significativos. Si se quiere indicar que tiene 3 o 4 dígitos significativos, se debe usar notación científica. Los dígitos significativos en los números siguientes están subrayados:

$$\underline{70\,007} \qquad \underline{82}\,000 \qquad \underline{5.600} \qquad 0.000\underline{8} \qquad 0.000\ \underline{830}$$

En cálculos que implican multiplicación, división, potencias y raíces, se adopta la convención siguiente:

Redondeo de valores calculados

El resultado de un cálculo se redondea al mismo número de dígitos significativos que el número usado en el cálculo que tenga el número mínimo de dígitos significativos.

De esta manera, al calcular la longitud de la diagonal del campo rectangular antes mostrado, se escribe la respuesta redondeada con 3 dígitos significativos, ya que el ancho tiene 3 dígitos significativos y la longitud tiene 4 dígitos significativos:

$$d = 246 \text{ metros} \qquad \text{3 dígitos significativos}$$

Una nota final: Al redondear un número que está exactamente a la mitad entre un número largo y uno pequeño, se usa la convención de hacer que el resultado final sea par.

EJEMPLO 1 **Redondeo de números**

Redondee cada número a 3 dígitos significativos:

(A) 43.0690 (B) 48.05 (C) 48.15 (D) $8.017\ 632 \times 10^{-3}$

Soluciones

(A) 43.1
(B) 48.0 } Use la convención de hacer que el dígito antes
(C) 48.2 } del 5 sea par si es impar, o déjelo así si es par.
(D) 8.02×10^{-3}

Problema seleccionado 1 Redondee cada número a 3 dígitos significativos:

(A) 3.1495 (B) 0.004 135 (C) 32 450 (D) $4.314\ 764\ 09 \times 10^{12}$

Respuestas a los problemas seleccionados

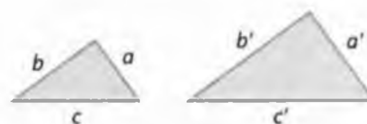
1. (A) 3.15 (B) 0.004 14 (C) 32,400 (D) 4.31×10^{12}

APÉNDICE C
Fórmulas geométricas

- **Triángulos semejantes**

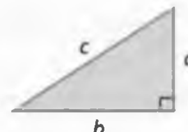
(A) Dos triángulos son semejantes si dos de los ángulos de un triángulo miden lo mismo que dos de los ángulos del otro.
(B) Si dos triángulos son semejantes, sus lados correspondientes son proporcionales:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$



- **Teorema de Pitágoras**

$c^2 = a^2 + b^2$



- **Rectángulo**

$A = ab$ Área

$P = 2a + 2b$ Perímetro

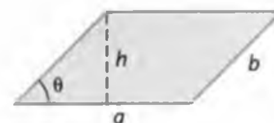


- **Paralelogramo**

$h =$ Altura

$A = ah = ab \operatorname{sen} \theta$ Área

$P = 2a + 2b$ Perímetro



- **Triángulo**

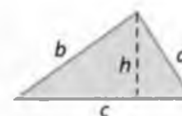
$h =$ Altura

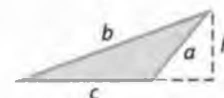
$A = \frac{1}{2}hc$ Área

$P = a + b + c$ Perímetro

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ Semiperímetro

$A = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ Área (fórmula de Herón)



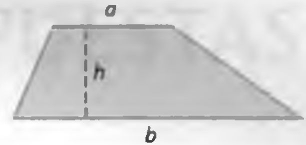


- **Trapezoide**

La base a es paralela a la base b.

h = Altura

$A = \frac{1}{2}(a + b)h$ Área



- **Círculo**

R = Radio

D = Diámetro

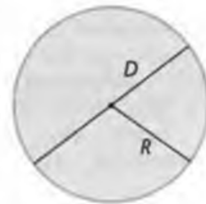
$D = 2R$

$A = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2$ Área

$C = 2\pi R = \pi D$ Circunferencia

$\frac{C}{D} = \pi$ Para todo círculo

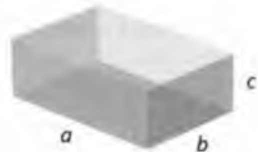
$\pi \approx 3.141\ 59$



- **Sólido rectangular**

$V = abc$ Volumen

$T = 2ab + 2ac + 2bc$ Área de la superficie total



- **Cilindro circular recto**

R = Radio de la base

h = Altura

$V = \pi R^2 h$ Volumen

$S = 2\pi Rh$ Área de la superficie lateral

$T = 2\pi R(R + h)$ Área de la superficie total



- **Cono circular recto**

R = Radio de la base

h = Altura

s = Altura inclinada

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$ Volumen

$S = \pi Rs = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ Área de la superficie lateral

$T = \pi R(R + s) = \pi R(R + \sqrt{R^2 + h^2})$ Área de la superficie total



- **Esfera** R = Radio

D = Diámetro

$D = 2R$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3$ Volumen

$S = 4\pi R^2 = \pi D^2$ Área de la superficie



RESPUESTAS

CAPÍTULO 1

Ejercicio 1-1

1. $x = 18$ **3.** $t = 9$ **5.** $x = 9$ **7.** $x = \frac{11}{2}$, o 5.5 **9.** $x = 10$ **11.** $x = 8$ **13.** $m = 3$ **15.** No hay solución
17. $x = \frac{8}{5}$ **19.** $s = 2$ **21.** No hay solución **23.** $t = -4$ **25.** $x = 1.83$ **27.** $x = -8.55$ **29.** $d = (a_n - a_1)/(n - 1)$
31. $f = d_1d_2/(d_1 + d_2)$ **33.** $a = (A - 2bc)/(2b + 2c)$ **35.** $x = (5y + 3)/(2 - 3y)$ **37.** Incorrecta. No hay solución. **39.** 4
41. Para todos los números reales excepto 0 y 1. **43.** $x = (by + cy - ac)/(a - y)$ **45.** 24 **47.** 8, 10, 12, 14 **49.** 17 por 10 m
51. 42 pies **53.** $90 **55.** $19 750 **57.** (A) $T = 30 + 25(x - 3)$ (B) 330°C (C) 13 km **59.** 90 mi
61. 5 000 truchas **63.** 10 gal **65.** 11.25 litros **67.** 1.5 h **69.** (A) 216 mi (B) 225 mi **71.** 330 Hz; 396 Hz
73. 150 cm **75.** 150 pies **77.** $5\frac{5}{11}$ después de las 1 P.M.

Ejercicio 1-2

1. $x = 8, y = 19$ **3.** $x = 6, y = 2$ **5.** $x = 2, y = -1$ **7.** $x = 5, y = 2$ **9.** $m = 1, n = -2/3$
11. $x = 2\,500, y = 200$ **13.** $u = 1.1, v = 0.3$ **15.** $x = -5/4, y = 5/3$ **17.** El sistema no tiene soluciones
19. $q = x + y - 5, p = 3x + 2y - 12$ **21.** $x = \dfrac{dh - bk}{ad - bc}, y = \dfrac{ak - ch}{ad - bc}, ad - bc \neq 0$
23. Velocidad de vuelo = 330 mph, velocidad del viento = 90 mph **25.** 2.475 km
27. 40 mL de la solución al 50%, 60 mL de la solución al 80% **29.** 5 200 discos **31.** $7 200 al 10% y $4 800 al 15%
33. Planta en México: 75 h; planta en Taiwán: 50 h **35.** Mezcla A: 80 g; Mezcla B: 60 g
37. (A) $p = 0.001q + 0.15$ (B) $p = -0.002q + 1.89$ (C) Precio de equilibrio = $0.73; cantidad de equilibrio = 580 bushels
39. (A) $a = 196, b = -16$ (B) 196 pies (C) 3.5 s **41.** 40 s, 24 s, 120 mi

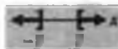
Ejercicio 1-3

1. $-8 \le x \le 7$ **3.** $-6 \le x < 6$ **5.** $x \ge -6$
7. $(-2, 6]$ **9.** $(-7, 8)$ **11.** $(-\infty, -2]$
13. $[-7, 2)$; $-7 \le x < 2$ **15.** $(-\infty, 0]$; $x \le 0$ **17.** $x < 5$ o $(-\infty, 5)$ **19.** $x \ge 3$ o $[3, \infty)$
21. $N < -8$ o $(-\infty, -8)$ **23.** $t > 2$ o $(2, \infty)$ **25.** $m > 3$ o $(3, \infty)$
27. $B \ge -4$ o $[-4, \infty)$ **29.** $-2 < t \le 3$ o $(-2, 3]$ **31.** $-5 < x \le 7$
33. $2 < x < 4$ **35.** $-\infty < x < \infty$ **37.** $x < -1$ o $3 \le x < 7$
39. $1 < x < 5$ **41.** $x \le 6$ **43.** $q < -14$ o $(-\infty, -14)$
45. $x \ge 4.5$ o $[4.5, \infty)$ **47.** $-20 \le x \le 20$ o $[-20, 20]$
49. $-30 \le x < 18$ o $[-30, 18)$ **51.** $-8 \le x < -3$ o $[-8, -3)$
53. $-14 < x \le 11$ o $(-14, 11]$ **55.** $x \ge -0.60$ **57.** $-0.259 < x < 0.357$ **59.** $x \le 1$ **61.** $x \ge -\frac{5}{3}$
63. $x > -\frac{3}{2}$ **65.** (A) y (C) $a > 0$ y $b > 0$, o $a < 0$ y $b < 0$ (B) y (D) $a > 0$ y $b < 0$, o $a < 0$ y $b > 0$
67. (A) > (B) < **69.** Positivo **71.** (A) F (B) V (C) V **77.** $9.8 \le x \le 13.8$ (de 9.8 a 13.8 km)
79. (A) $x > 40\,625$ (B) $x = 40\,625$ **81.** (B) $x > 52\,000$ (C) Aumento en el precio al mayoreo de $3.50 a $66.50
83. $2 \le I \le 25$ o $[2, 25]$ **85.** $2 060 ≤ Beneficio en la reducción ≤ $3 560

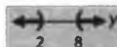
Ejercicio 1-4

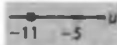
1. $\sqrt{5}$ 3. 4 5. $5 - \sqrt{5}$ 7. $5 - \sqrt{5}$ 9. 12 11. 12 13. 4 15. 4 17. 9 19. $|x - 3| = 4$
21. $|m + 2| = 5$ 23. $|x - 3| < 5$ 25. $|p + 2| > 6$ 27. $|q - 1| \geq 2$

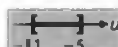
29. x no está a más de 7 unidades del origen. $-7 \leq x \leq 7$ o $[-7, 7]$ 

31. x está al menos a 7 unidades del origen. $x \leq -7$ o $x \geq 7$ o $(-\infty, -7] \cup [7, \infty)$ 

33. y está a 3 unidades de 5. $y = 2, 8$  35. y está a menos de 3 unidades de $2 < y < 8$ o $(2, 8)$ 

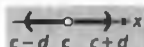
37. y está a más de tres unidades de 5. $y < 2$ o $y > 8$ o $(-\infty, 2) \cup (8, \infty)$ 

39. u está a 3 unidades de -8. $u = -11, -5$ 

41. u no está a más de tres unidades de -8. $-11 \leq u \leq -5$ o $[-11, -5]$ 

43. u está al menos a 3 unidades de -8. $u \leq -11$ o $u \geq -5$ o $(-\infty, -11] \cup [-5, \infty)$ 

45. $-\frac{9}{5} \leq x \leq 3$ o $[-\frac{9}{5}, 3]$ 47. $y < 3$ o $y > 5$ o $(-\infty, 3) \cup (5, \infty)$ 49. $t = -\frac{4}{5}, \frac{18}{5}$ 51. $-\frac{5}{7} < u < \frac{23}{7}$ o $(-\frac{5}{7}, \frac{23}{7})$
53. $x \leq -6$ o $x \geq 9$ o $(-\infty, -6] \cup [9, \infty)$ 55. $-35 < C < -\frac{5}{9}$ o $(-35, -\frac{5}{9})$ 57. $-2 < x < 2$ o $(-2, 2)$
59. $-\frac{1}{3} \leq t \leq 1$ o $[-\frac{1}{3}, 1]$ 61. $t < 0$ o $t > 3$ o $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ 63. $(2.9, 3) \cup (3, 3.1)$ 

65. $(c - d, c) \cup (c, c + d)$  67. $x \geq 5$ 69. $x \leq -8$ 71. $x \geq -\frac{3}{4}$ 73. $x \leq \frac{2}{3}$ 75. $x = -2, 2$

77. ± 1 91. $42.2 < x < 48.6$ 93. $|P - 500| \leq 20$ 95. $|A - 12.436| < 0.001$, $(12.435, 12.437)$ 97. $|N - 2.37| \leq 0.005$

Ejercicio 1-5

1. $7 + 5i$ 3. $5 + 3i$ 5. $2 + 4i$ 7. $5 + 9i$ 9. $4 - 3i$ 11. -24 o $-24 + 0i$ 13. $-12 - 6i$ 15. $15 - 3i$
17. $-4 - 33i$ 19. 65 o $65 + 0i$ 21. $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$ 23. $\frac{3}{13} + \frac{11}{13}i$ 25. $5 + 3i$ 27. $7 - 5i$ 29. $-3 + 2i$
31. $8 + 25i$ 33. $\frac{5}{7} - \frac{2}{7}i$ 35. $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$ 37. $-\frac{2}{5}i$ o $0 - \frac{2}{5}i$ 39. $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ 41. $-6i$ o $0 - 6i$ 43. 0 o $0 + 0i$
45. $i^{18} = -1, i^{32} = 1, i^{67} = -i$ 47. $x = 3, y = -2$ 49. $x > 3$ 51. $x > \frac{2}{3}$ 53. $33.89 - 20.38i$ 55. $0.85 - 0.89i$
57. $(a + c) + (b + d)i$ 59. $a^2 + b^2$ o $(a^2 + b^2) + 0i$ 61. $(ac - bd) + (ad + bc)i$
63. $i^{4k} = (i^4)^k = (i^2 \cdot i^2)^k = [(-1)(-1)]^k = 1^k = 1$
65. (*1*) Definición de suma; (*2*) Conmutativa (+) propiedad para R; (*3*) Definición de suma

Ejercicio 1-6

1. $u = 0, 2$ 3. $y = \frac{2}{3}$ (raíz doble) 5. $x = \frac{5}{2}, 4$ 7. $m = \pm 2\sqrt{3}$ 9. $x = \pm 5i$ 11. $y = \pm\frac{4}{3}$ 13. $x = \pm\frac{5}{2}i$
15. $n = -2, -8$ 17. $d = 3 \pm 2i$ 19. $x = 5 \pm 2\sqrt{7}$ 21. $x = 2 \pm 2i$ 23. $x = (2 \pm \sqrt{2})/2$ 25. $x = \frac{1}{5} \pm \frac{3}{5}i$
27. $x = 3 \pm 2\sqrt{3}$ 29. $y = (3 \pm \sqrt{3})/2$ 31. $x = (1 \pm \sqrt{7})/3$ 33. $x = (-m \pm \sqrt{m^2 - 4n})/2$ 35. $x = -\frac{5}{4}, \frac{2}{3}$
37. $y = (3 \pm \sqrt{5})/2$ 39. $x = (3 \pm \sqrt{13})/2$ 41. $n = -\frac{4}{7}, 0$ 43. $x = 2 \pm 2i$ 45. $m = -50, 2$
47. $x = (-5 \pm \sqrt{57})/2$ 49. $x = (-3 \pm \sqrt{57})/4$ 51. $u = 1, 2, (-3 \pm \sqrt{17})/2$ 53. $t = \sqrt{2s/g}$
55. $I = (E + \sqrt{E^2 - 4RP})/2R$ 57. $x = 1.35, 0.48$ 59. $x = -1.05, 0.63$
61. Si $c < 4$, hay dos raíces reales distintas; si $c = 4$, hay una raíz real doble; y si $c > 4$, hay dos raíces imaginarias distintas.
63. Tiene soluciones reales, ya que el discriminante es positivo. 65. No tiene soluciones reales, ya que el discriminante es negativo.
67. $x = \frac{4}{3}\sqrt{6} \pm \frac{2}{3}\sqrt{15}$ o $(4\sqrt{6} \pm 2\sqrt{15})/3$ 69. $x = \sqrt{2} - i, -\sqrt{2} - i$ 71. $x = 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$
75. $[(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})/2a] \times [(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})/2a] = [b^2 - (b^2 - 4ac)]/4a^2 = c/a$
77. El signo $\pm$ al frente vale para los dos mismos números pares si a es negativa. 79. 8, 13 81. 12, 14 83. 5.12 por 3.12 pulg
85. 20% 87. 100 mph, 240 mph 89. 13.09 h y 8.09 h 91. 50 mph
93. 50 pies de ancho y 300 pies de largo o 150 pies de ancho y 100 pies de largo 95. 52 millas

Ejercicio 1-7

1. $x = 22$ 3. $n = 8$ 5. No hay solución 7. $x = 0, 4$ 9. $y = \pm 2, \pm i\sqrt{2}$ 11. $x = -\sqrt[5]{5}, \sqrt[5]{2}$ 13. $x = \frac{1}{8}, -8$
15. $m = -2, 3, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{7}$ 17. No hay solución 19. $y = 1$ 21. $x = 2$ 23. $n = -\frac{3}{4}, \frac{1}{5}$ 25. $y = \pm 1, \pm 3$

27. $y = 1, 16$ **29.** $m = 2, 3, 7, 8$ **31.** $x = -2$ **33.** $y = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}}$ (cuatro raíces) **35.** $m = 9, 16$ **37.** $t = 4, 81$
39. 13.1 pulg por 9.1 pulg **41.** 1.65 pies o 3.65 pies **43.** \$30; 1 600 teléfonos.

Ejercicio 1-8

1. $-5 < x < 2$ $(-5, 2)$ **3.** $x < 3$ o $x > 7$ $(-\infty, 3) \cup (7, \infty)$ **5.** $0 \le x \le 8$ $[0, 8]$ **7.** $-5 \le x \le 0$ $[-5, 0]$ **9.** $x < -2$ o $x > 2$ $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

11. $-4 < x \le 2$ $(-4, 2]$ **13.** $x \le -4$ o $x > 1$ $(-\infty, -4] \cup (1, \infty)$ **15.** $-5 \le x \le 0$ o $x > 3$ $[-5, 0] \cup (3, \infty)$ **17.** $-3 < x < 1$ $(-3, 1)$ **19.** $x < 0$ o $x > \frac{1}{4}$ $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{4}, \infty)$

21. $-4 < x \le \frac{3}{2}$ $(-4, \frac{3}{2}]$ **23.** $-1 < x < 2$ o $x \ge 5$ $(-1, 2) \cup [5, \infty)$ **25.** $x \le -4$ o $0 \le x \le 2$ $(-\infty, -4] \cup [0, 2]$ **27.** $x \le -3$ o $x \ge 3$ **29.** $x \le -2$ o $x \ge \frac{1}{2}$

31. $-7 \le x < 3$ **33.** Si $a > 0$, el conjunto de solución es $(-\infty, r_1) \cup (r_2, \infty)$. Si $a < 0$, el conjunto solución es (r_1, r_2).
35. Si $a > 0$, el conjunto solución es R, el conjunto de números reales. Si $a < 0$ el conjunto solución es $\{r\}$. **37.** $x^2 \ge 0$
39. No hay solución; $\varnothing$ **41.** No hay solución: $\varnothing$
43. $x \le 2 - \sqrt{5}$ o $x \ge 2 + \sqrt{5}$ $(-\infty, 2 - \sqrt{5}] \cup [2 + \sqrt{5}, \infty)$ **45.** $1 - \sqrt{2} < x < 0$ o $x > 1 + \sqrt{2}$ $(1 - \sqrt{2}, 0) \cup (1 + \sqrt{2}, \infty)$ **47.** $-2 \le x \le -\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{2} \le x \le 2$ $[-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2]$ **49.** $-2 \le x \le 2$ $[-2, 2]$

51. (A) Ganancia: $\$4 < p < \$7$ o $(\$4, \$7)$ (B) Pérdida: $\$0 \le p < \$4$ o $p > \$7$ o $[\$0, \$4) \cup (\$7, \infty)$ **53.** $2 \le t \le 5$
55. $v > 75$ mph **57.** $5 \le t \le 20$

Ejercicio de repaso del capítulo 1*

1. $x = 21$ *(1-1)* **2.** $x = \frac{30}{11}$ *(1-1)* **3.** $x = 3, y = 3$ *(1-2)*
4. $x \ge 1$ *(1-3)* $[1, \infty)$ **5.** $-14 < y < -4$ *(1-4)* $(-14, -4)$ **6.** $-1 \le x \le 4$ *(1-4)* $[-1, 4]$ **7.** $-5 < x < 4$ *(1-8)* $(-5, 4)$ **8.** $x \le -3$ o $x \ge 7$ *(1-8)* $(-\infty, -3] \cup [7, \infty)$

9. (A) $3 - 6i$ (B) $15 + 3i$ (C) $2 + i$ *(1-5)* **10.** $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ o $\pm\frac{1}{2}\sqrt{14}$ *(1-6)* **11.** $x = 0, 2$ *(1-6)*
12. $x = \frac{1}{2}, 3$ *(1-6)* **13.** $m = -\frac{1}{2} \pm (\sqrt{3}/2)i$ *(1-6)* **14.** $y = (3 \pm \sqrt{33})/4$ *(1-6)* **15.** $x = 2, 3$ *(1-7)*
16. $x = 3, y = -2$ *(1-2)* **17.** $x \le \frac{3}{5}$ *(1-3)* **18.** $x = -15$ *(1-1)* **19.** No hay solución *(1-1)* **20.** $m = 2, n = -\frac{4}{3}$ *(1-2)*
21. $x \ge -19$ *(1-3)* $[-19, \infty)$ **22.** $x < 2$ o $x > \frac{10}{3}$ *(1-4)* $(-\infty, 2) \cup (\frac{10}{3}, \infty)$ **23.** $x < 0$ o $x > \frac{1}{2}$ *(1-8)* $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ **24.** $x \le 1$ o $3 < x < 4$ *(1-8)* $(-\infty, 1] \cup (3, 4)$

25. $-1 \le m \le 2$ *(1-4)* $[-1, 2]$ **26.** $-4 \le x < 2$ o $[-4, 2)$ *(1-8)* **27.** (A) 6 (B) 6 *(1-4)* **28.** (A) $5 + 4i$ (B) $-i$ *(1-5)*

29. (A) $-1 + i$ (B) $\frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$ (C) $\frac{5}{2} - 2i$ *(1-5)* **30.** $u = (-5 \pm \sqrt{5})/2$ *(1-6)* **31.** $u = 1 \pm i\sqrt{2}$ *(1-6)*
32. $x = (1 \pm \sqrt{43})/3$ *(1-6)* **33.** $x = -\frac{27}{8}, 64$ *(1-7)* **34.** $m = \pm 2, \pm 3i$ *(1-7)* **35.** $y = \frac{9}{4}, 3$ *(1-7)* **36.** $x = 0.45$ *(1-1)*
37. $-2.24 \le x \le 1.12$ o $[-2.24, 1.12]$ *(1-3)* **38.** $0.89 - 0.32i$ *(1-5)* **39.** $x = -1.64, 0.89$ *(1-6)*
40. $x = 0.94, y = 1.02$ *(1-2)* **41.** $M = P/(1 - dt)$ *(1-1)* **42.** $I = (E \pm \sqrt{E^2 - 4PR})/2R$ *(1-6)*
43. $y = (5 - x)/(2x - 4)$ *(1-1)* **44.** La respuesta correcta es $x = -1$. *(1-1)*
45. Si $c < 9$, hay dos raíces reales distintas; si $c = 9$, hay una raíz doble real; y si $c > 9$, hay dos raíces imaginarias distintas. *(1-6)*

* El número entre paréntesis después de cada respuesta de un problema de repaso del capítulo se refiere a la sección a la que pertenece el problema que se está analizando.

46. Todas las b reales y todas las a negativas *(1-3)* **47.** Menor que 1 *(1-3)* **48.** $x = 1/(1 - y)$ *(1-1)*

49. $6 - d < x < 6 + d, x \neq 6$ *(1-4)* **50.** $x = \frac{1}{4}\sqrt{3} \pm \frac{1}{4}i$ *(1-6)* **51.** $x = \pm\sqrt{(2 + \sqrt{5})/2}$ (dos raíces reales) *(1-7)*

52. 1 *(1-5)* $(6 - d, 6) \cup (6, 6 + d)$



53. No hay solución *(1-8)* **54.** Conjunto de todos los números reales *(1-8)*

55. $x \leq -4$ o $-2 \leq x < 0$ o $0 < x \leq 2$ o $x \geq 4$; $(-\infty, -4] \cup [-2, 0) \cup (0, 2] \cup [4, \infty)$ *(1-8)*

56. $u = -31 + 5x - 7y, v = 13 - 2x + 3y$ *(1-2)* **57.** (A) Número infinito de soluciones (B) No hay solución *(1-2)*

58. $\frac{5}{3}$ o $-\frac{3}{5}$ *(1-6)* **59.** (A) $H = 0.7(220 - A)$ (B) 140 latidos/min (C) 40 años de edad *(1-1)*

60. 20 mL de 30% solución, 30 mL de 80% solución *(1-1)* **61.** 3 mph *(1-6)*

62. (A) 3 km (B) 16.2 km/h (C) 20.6 min *(1-1, 1-6)* **63.** 85 bolsas de la marca A y 45 bolsas de la marca B *(1-2)*

64. (A) 2 000 y 8 000 (B) 5 000 *(1-6)* **65.** $x = (13 \pm \sqrt{45})/2$ miles, o aprox. 3 146 y 9 854 *(1-6)*

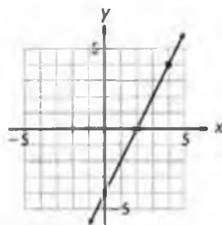
66. $(13 - \sqrt{45})/2 < x < (13 + \sqrt{45})/2$ o aprox. $3\,146 < x < 9\,854$, x en miles *(1-8)* **67.** $|T - 110| \leq 5$ *(1-4)*

68. 20 cm por 24 cm *(1-6)* **69.** 6.58 pies o 14.58 pies *(1-7)*

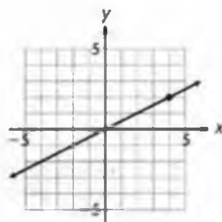
CAPÍTULO 2

Ejercicio 2-1

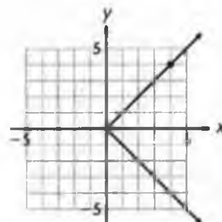
1.



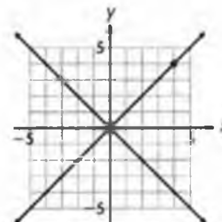
3. Simétrica con respecto al origen



5. Simétrica con respecto al eje x



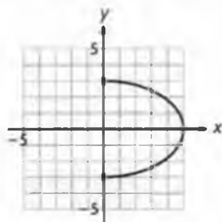
7. Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen.



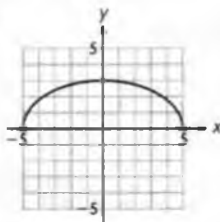
9. $\sqrt{145}$ **11.** $\sqrt{68}$ **13.** $x^2 + y^2 = 49$ **15.** $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 36$ **17.** $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 7$

19. (A) 3 (B) −2 (C) −3, −1, 4 (D) −4, 1, 3

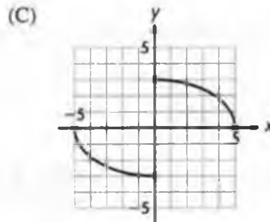
21. (A)



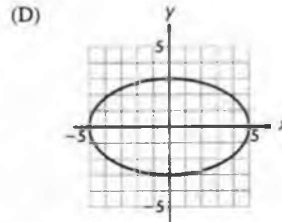
(B)



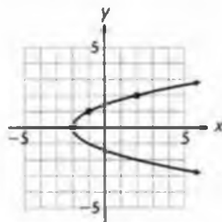
(C)



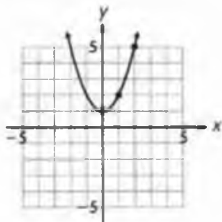
(D)



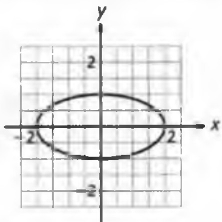
23. Simétrica con respecto al eje x



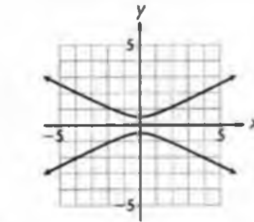
25. Simétrica con respecto al eje y



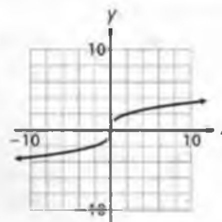
27. Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen



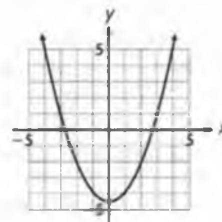
29. Simétrica con respecto al eje x, al eje y y al origen



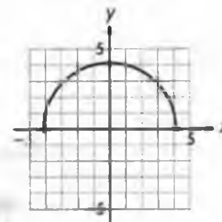
31. Simétrica con respecto al origen



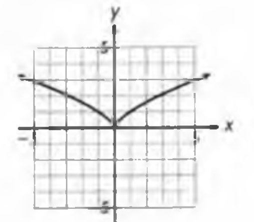
33. Simétrica con respecto al eje y



35. Simétrica con respecto al eje y



37. Simétrica con respecto al eje y

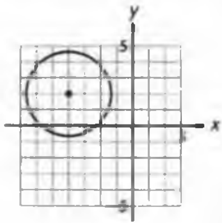


39. Un triángulo rectángulo

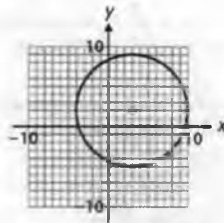
41. 18.11

43. $x = -3, 7$

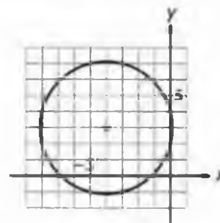
45. Centro: $(-4, 2)$; radio: $\sqrt{7}$



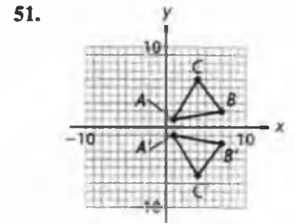
47. Centro: $(3, 2)$; radio: 7



49. Centro: $(-4, 3)$; radio: $\sqrt{17}$



51.



53.

y
10
C
B
-10
A
10
x
B'
A'
C'
-10

55. $y = \pm\sqrt{3 - x^2}$

3.1
-4.7
4.7
-3.1

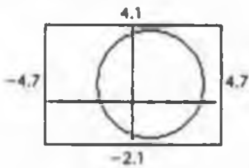
57. $y = -1 \pm \sqrt{2 - (x + 3)^2}$

3.1
-4.7
4.7
-3.1

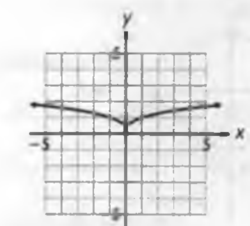
59. Centro: $(1, 0)$; radio: 1; $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

3.1
-4.7
4.7
-3.1

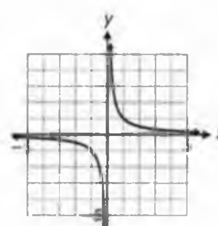
61. Centro: $(2, 1)$; radio: 3; $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$



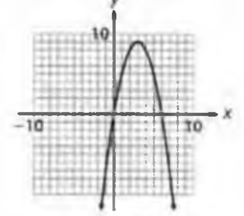
63. Simétrica con respecto al eje y



65. Simétrica con respecto al origen



67.



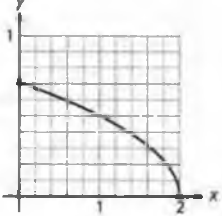
69. $5x + 3y = -2$

71. $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 34$

73. (A) 3 000 casos (B) La demanda disminuye en 400 casos (C) La demanda aumenta en 600 casos

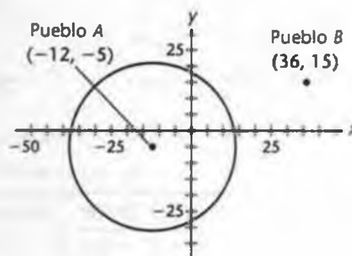
75. (A) 53° (B) 68° en 3 P.M. (C) 1 A.M., 7 A.M., 11 P.M.

77.



79. 2.5 pies

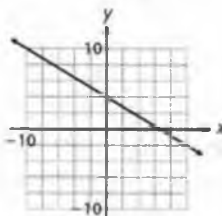
81. (A) $(x + 12)^2 + (y + 5)^2 = 26^2$; centro: $(-12, -5)$; radio: 26 (B) 13.5 mi



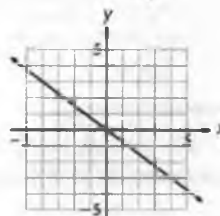
Ejercicio 2-2

1. Intersección con el eje x: -2; intersección con el eje y: 2; pendiente: 1
3. Intersección con el eje x: -2; intersección con el eje y: -4; pendiente: -2
5. Intersección con el eje x: 3; intersección con el eje y: -1; pendiente: $\frac{1}{3}$

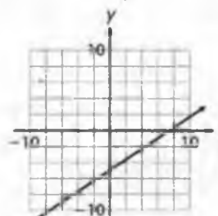
7. Pendiente $= -\frac{3}{5}$



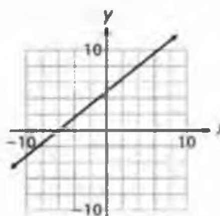
9. Pendiente $= -\frac{3}{4}$



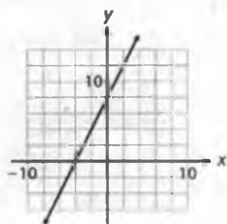
11. Pendiente $= \frac{2}{3}$

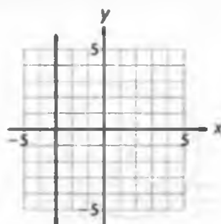


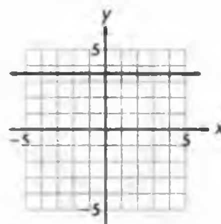
13. Pendiente $= \frac{4}{3}$



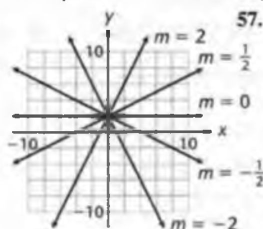
15. Pendiente = 2 **17.** Pendiente no definida **19.** Pendiente = 0 **21.** $y = x$ **23.** $y = -\frac{2}{3}x - 4$





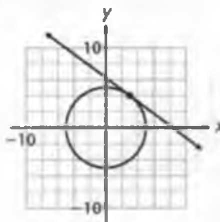


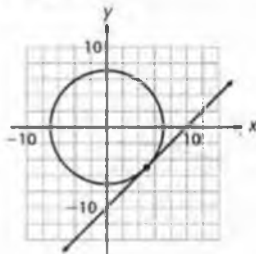
25. $y = -3x + 4$ **27.** $y = -\frac{2}{5}x + 2$ **29.** $y = 5$ **31.** $y = -2x + 8$ **33.** $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$ **35.** $y = 4$ **37.** $x = 4$
39. $y = -\frac{1}{3}x + 2$ **41.** $y = \frac{3}{4}x + 3$ **43.** $3x - y = -13$ **45.** $3x - y = 9$ **47.** $x = 2$ **49.** $x = 3$ **51.** $3x - 2y = 15$
53. $3x - y = 4$ **55.**

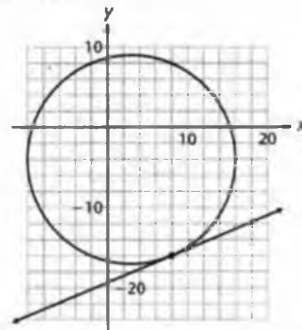


57. Pendiente $AB = -\frac{3}{4}$ = Pendiente DC **59.** (Pendiente AB)(Pendiente BC) = $(-\frac{3}{4})(\frac{4}{3}) = -1$

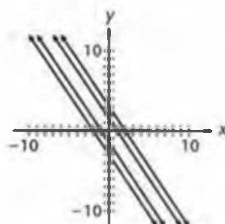
61. $6x + 8y = -9$ **63.** $3x + 4y = 25$ **65.** $x - y = 10$ **67.** $5x - 12y = 232$



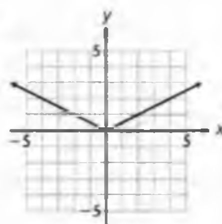




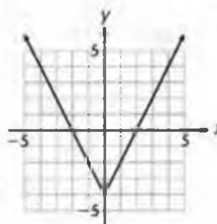
69. (A)



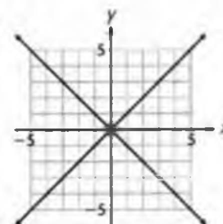
71.



73.



75.



81. (A)

x	0	5 000	10 000	15 000	20 000	25 000	30 000
B	212	203	194	185	176	167	158

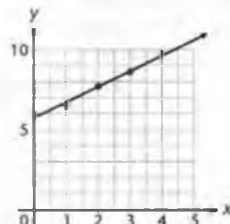
(B) El punto de ebullición disminuye 9°F por cada 5 000 pies de aumento de altura.

83. Los cargos de renta son $25 por día más $0.25 por milla manejada.

85. (A)

x	0	1	2	3	4
Ventas	5.9	6.5	7.7	8.6	9.7
$f(x)$	5.7	6.7	7.7	8.6	9.6

(B)



(C) $10.6 mil millones, $17.4 mil millones

87. (A) $F = \frac{9}{5}C + 32$ (B) 68°F; 30°C (C) $\frac{9}{5}$ **89.** (A) $V = -1\,600t + 8\,000,\ 0 \le t \le 5$ (B) $3 200 (C) −1 600
91. (A) $T = -5A + 70,\ A \ge 0$ (B) 14 000 pies (C) −5; la temperatura cambia 25°F para cada aumento de 1 000 pies en altura
93. (A) $h = 1.13t + 12.8$ (B) 32.9 h
95. (A) $R = 0.001\,52C - 0.159,\ C \ge 210$ (B) 0.236
(C) 0.001 52; el riesgo coronario aumenta 0.001 52 por unidad de aumento de colesterol arriba del nivel de 210 de colesterol.

Ejercicio 2-3

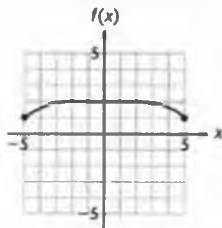
1. Función **3.** No es una función **5.** Función **7.** Función; dominio = {2, 3, 4, 5}; rango = {4, 6, 8, 10}
9. No es una función **11.** Función; dominio = {0, 1, 2, 3, 4, 5}; rango {1, 2} **13.** Función **15.** No es una función
17. No es una función **19.** −8 **21.** −6 **23.** 1 **25.** 10 **27.** $-\frac{10}{17}$ **29.** 7 **31.** −1, −5, 6
33. Una función con dominio R
35. No es una función, por ejemplo, cuando $x = 2$, $y = \pm 2$ **37.** No es una función, por ejemplo, cuando $x = 1$, $y = \pm 2$
39. Una función con dominio en todos los números reales excepto $x = 5$ **41.** No es una función; por ejemplo, cuando $x = 0$, $y = \pm 9$
43. Dominio: todos los números reales **45.** Dominio: $x \geq -2$ **47.** Dominio: todos los números reales excepto 4
49. Dominio: todos los números reales excepto −2 y 4 **51.** Dominio: $-2 \leq x \leq 2$ **53.** Dominio: $x \leq -1$ o $x \geq 4$
55. Dominio: $2 < x \leq 5$ **57.** $g(x) = 2x^3 - 5$ **59.** $G(x) = 2\sqrt{x} - x^2$
61. La función f multiplica el elemento del dominio por 2 y le resta 3 al resultado.
63. La función F multiplica el cubo del elemento del dominio por 3 y le resta dos veces la raíz cuadrada del elemento del dominio al resultado.
65. 3 **67.** $-6 - h$ **69.** $-2h + 11$ **71.** $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ **73.** $m(x) = 4x - 3\sqrt{x} + 9$ **75.** (A) 3 (B) 3
77. (A) $2x + h$ (B) $x + a$ **79.** (A) $-6x - 3h + 9$ (B) $-3x - 3a + 9$
81. (A) $3x^2 + 3xh + h^2$ (B) $x^2 + ax + a^2$ **83.** $P(w) = 2w + (128/w)$, $w > 0$ **85.** $h(b) = \sqrt{b^2 + 25}$, $b > 0$
87. $C(x) = 300 + 1.75x$
89. (A) $s(0) = 0$, $s(1) = 16$, $s(2) = 64$, $s(3) = 144$ (B) $64 + 16h$
(C) El valor de la expresión tiende a 64; este número parece ser la velocidad del objeto después de transcurridos 2 segundos.
91. $V(x) = x(8 - 2x)(12 - 2x)$; dominio: $0 < x < 4$
93. $F(x) = 8x + (250/x) - 12$;

x	4	5	6	7
$F(x)$	82.5	78	77.7	79.7

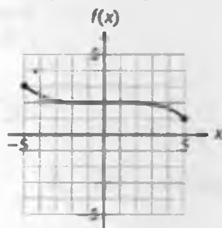
95. $C(x) = 10\,000(20 - x) + 15\,000\sqrt{x^2 + 64}$; dominio: $0 \leq x \leq 20$ **97.** $C(v) = 100v + (200\,000/v)$

Ejercicio 2-4

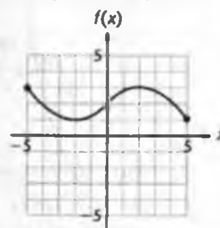
1. (A) [−4, 4) (B) [−3, 3) (C) 0 (D) 0 (E) [−4, 4) (F) Ninguna (G) Ninguna (H) Ninguna
3. (A) (−∞, ∞) (B) [−4, ∞) (C) −3, 1 (D) −3 (E) [−1, ∞) (F) (−∞, −1] (G) Ninguna (H) Ninguna
5. (A) (−∞, 2) ∪ (2, ∞) (B) (−∞, −1) ∪ [1, ∞) (C) Ninguna (D) 1 (E) Ninguna (F) (−∞, −2], (2, ∞)
(G) [−2, 2) (H) $x = 2$
7. Una posible respuesta:



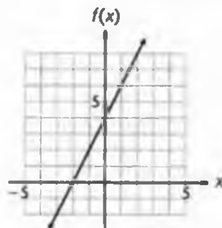
9. Una posible respuesta:

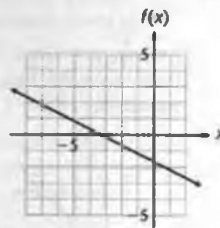


11. Una posible respuesta:

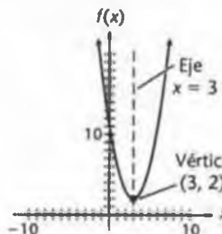


13. Pendiente = 2, intersección con el eje $x = -2$, intersección con el eje $y = 4$
15. Pendiente = $-\frac{1}{2}$, intersección con el eje $x = -\frac{10}{3}$, intersección con el eje $y = -\frac{5}{3}$ **17.** $f(x) = \frac{3}{2}x + 4$

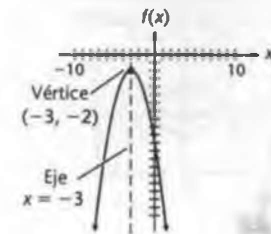




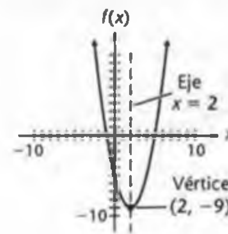
19. Min $f(x) = f(3) = 2$
Rango = [2, ∞)



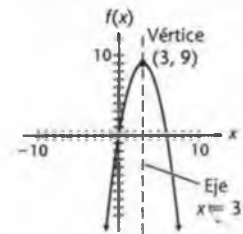
21. Máx $f(x) = f(-3) = -2$
Rango = (−∞, −2]



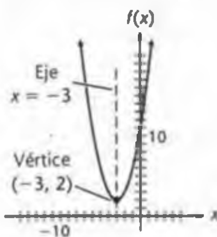
23. Intersección con el eje x: −1, 5
Intersección con el eje $y = -5$



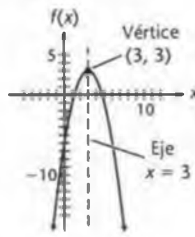
25. Intersección con el eje x: 0, 6
Intersección con el eje $y = 0$



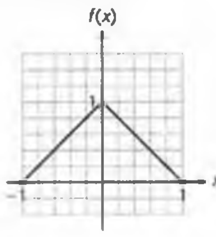
27. Aumenta en $[-3, \infty)$
Disminuye en $(-\infty, -3]$



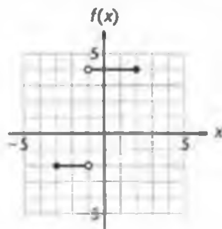
29. Aumenta en $(-\infty, 3]$
Disminuye en $[3, \infty)$



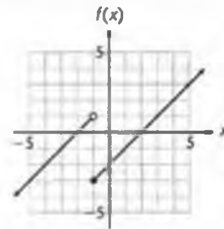
31. Dominio: $[-1, 1]$
Rango: $[0, 1]$



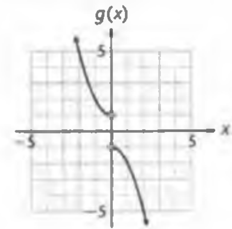
33. Dominio: $[-3, -1) \cup (-1, 2]$
Rango: $\{-2, 4\}$ (un conjunto, no un intervalo)
Discontinua en $x = -1$



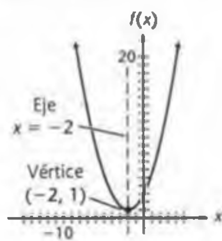
35. Dominio: todos los números reales
Rango: todos los números reales
Discontinua en $x = -1$



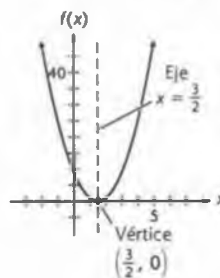
37. Dominio: $x \neq 0$, o $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango: $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Discontinua en $x = 0$



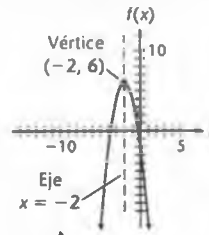
39. Mín $f(x) = f(-2) = 1$
Rango: $[1, \infty)$
No intersecta al eje x
Intersección con el eje $y = f(0) = 3$
Aumenta en $[-2, \infty)$
Disminuye en $(-\infty, -2]$



41. Mín $f(x) = f(\frac{3}{2}) = 0$
Rango: $[0, \infty)$
Intersección con el eje $x = \frac{3}{2}$
Intersección con el eje $y = f(0) = 9$
Aumenta en $[\frac{3}{2}, \infty)$
Disminuye en $(-\infty, \frac{3}{2}]$

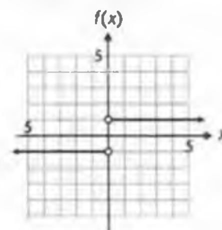


43. Máx $f(x) = f(-2) = 6$
Rango: $(-\infty, 6]$
Intersecciones con el eje x: $-2 \pm \sqrt{3}$
Intersección con el eje $y = f(0) = -2$
Aumenta en $(-\infty, -2]$
Disminuye en $[-2, \infty)$



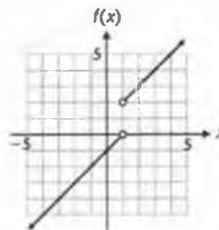
45. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Dominio: $x \neq 0$, o $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
Rango: $\{-1, 1\}$ (un conjunto, no un intervalo)
Discontinua en $x = 0$



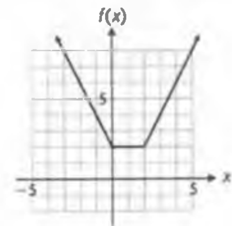
47. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Dominio: $x \neq 1$, o $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$
Rango: $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$
Discontinua en $x = 1$



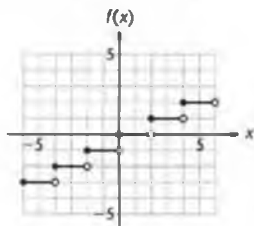
49. $f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -2 + 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Dominio: todos los números reales
Rango: $[2, \infty)$
No hay discontinuidades



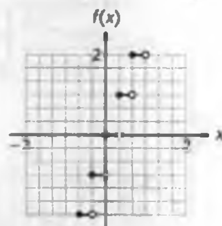
51. Dominio: todos los números reales
Rango: todos los enteros
Discontinua en los enteros pares

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ -2 & \text{si } -4 \le x < -2 \\ -1 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \le x < 4 \\ 2 & \text{si } 4 \le x < 6 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



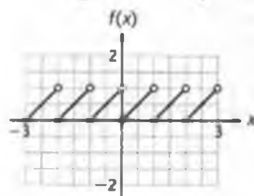
53. Dominio: todos los números reales
Rango: todos los enteros
Discontinua en los números racionales de la forma $k/3$, donde k es un entero

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ -2 & \text{si } -\frac{2}{3} \le x < -\frac{1}{3} \\ -1 & \text{si } -\frac{1}{3} \le x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{3} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{3} \le x < \frac{2}{3} \\ 2 & \text{si } \frac{2}{3} \le x < 1 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



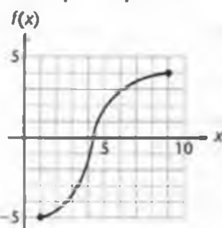
55. Dominio: todos los números reales
Rango: [0, 1)
Discontinua en todos los enteros

$$f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ x+2 & \text{si } -2 \le x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x-1 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ x-2 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$



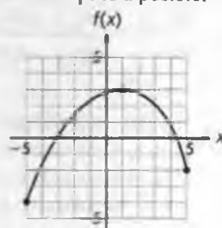
57. Eje: $x = 2$; vértice: (2, 4); rango: $[4, \infty]$; no hay intersección con el eje x

59. (A) Una respuesta posible



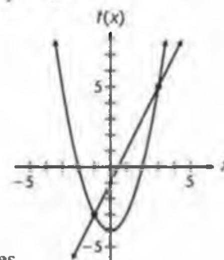
(B) La gráfica debe cruzar al eje x exactamente una vez

61. (A) Una respuesta posible:



(B) La gráfica debe intersectar al eje x por lo menos dos veces. No hay un límite superior en el número de veces que puede cruzar al eje x

63. $y = 2x - 1$

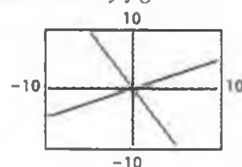


65. (A) $h + 1$ (B)

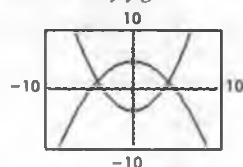
h	1	0.1	0.01	0.001
Pendiente	2	1.1	1.01	1.001

; aproximándose a 1

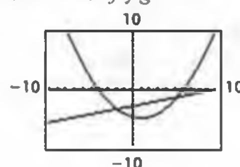
67. Gráficas de f y g



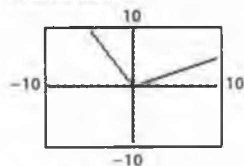
69. Gráficas de f y g



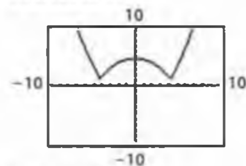
71. Gráficas de f y g



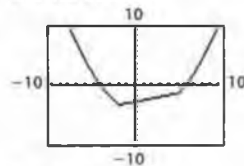
Gráfica de m



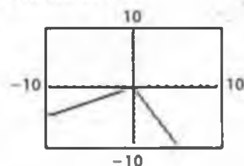
Gráfica de m



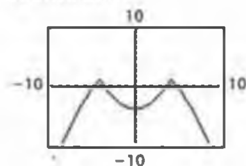
Gráfica de m



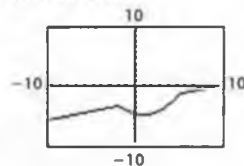
Gráfica de n



Gráfica de n



Gráfica de n

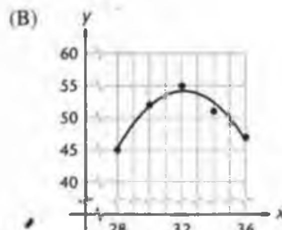


73. $m(x)$ 5 máx$[f(x), g(x)]$

75. (A)

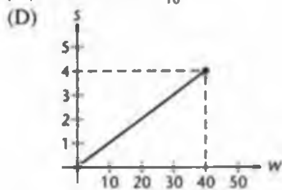
x	28	30	32	34	36
Millas recorridas	45	52	55	51	47
$f(x)$	45.3	51.8	54.2	52.4	46.5

(B)



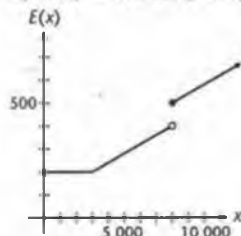
(C) $f(31) \approx 53.50$ miles de millas
$f(35) \approx 49.95$ miles de millas

77. (A) $s = f(w) = w/10$
(B) $f(15) = 1.5$ pulg. $f(30) = 3$ pulg.
(C) Pendiente $= \frac{1}{10}$
(D)

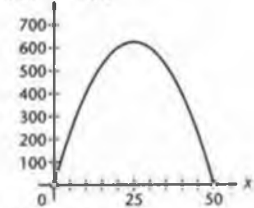


79. $E(x) = \begin{cases} 200 & \text{si } 0 \le x \le 3\,000 \\ 80 + 0.04x & \text{si } 3\,000 < x < 8\,000 \\ 180 + 0.04x & \text{si } x \ge 8\,000 \end{cases}$

Discontinua en $x = 8\,000$
$E(5\,750) = \$310$, $E(9\,200) = \$548$



81. (A) $A(x) = 50x - x^2$
(B) Dominio: $0 < x < 50$
(C)



(D) 25 por 25 pies

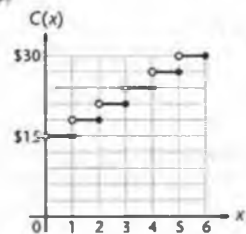
83.

x	4	−4	6	−6	24	25	247	−243	−245	−246
$f(x)$	0	0	10	−10	20	30	250	−240	−240	−250

; f redondea los números a decenas.

85. $f(x) = [\![0.5 + 100x]\!]/100$

87. (A) $C(x) = \begin{cases} 15 & 0 < x \le 1 \\ 18 & 1 < x \le 2 \\ 21 & 2 < x \le 3 \\ 24 & 3 < x \le 4 \\ 27 & 4 < x \le 5 \\ 30 & 5 < x \le 6 \end{cases}$



(B) No, ya que $f(x) \ne C(x)$ en $x = 1, 2, 3, 4, 5$ o 6

89. \$50 por día; máximo ingreso = \$12 500

91. (A) $32\sqrt{5} \approx 71.55$ pies/seg (B) 15 pies

Ejercicio 2-5

1. Dominio: $[0, \infty)$; Rango: $(-\infty, 0]$ **3.** Dominio: R; Rango: $(-\infty, 0]$ **5.** Dominio: R; Rango: R

7. $(f + g)(x) = 5x + 1$, $(f - g)(x) = 3x - 1$, $(fg)(x) = 4x^2 + 4x$, $(f/g)(x) = 4x/(x + 1)$;
Dominio de $f + g$ = Dominio de $f - g$ = Dominio de $fg = (-\infty, \infty)$, Dominio de $f/g = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

9. $(f + g)(x) = 3x^2 + 1$, $(f - g)(x) = x^2 - 1$, $(fg)(x) = 2x^4 + 2x^2$, $(f/g)(x) = 2x^2/(x^2 + 1)$; Dominio de cada función $= (-\infty, \infty)$

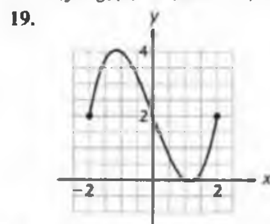
11. $(f + g)(x) = x^2 + 3x + 4$, $(f - g)(x) = -x^2 + 3x + 6$, $(fg)(x) = 3x^3 + 5x^2 - 3x - 5$, $(f/g)(x) = (3x + 5)/(x^2 - 1)$; Dominio de $f + g$ = Dominio de $f - g$ = Dominio de $fg = (-\infty, \infty)$, Dominio de $f/g = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

13. $(f \circ g)(x) = (x^2 - x + 1)^3$, $(g \circ f)(x) = x^6 - x^3 + 1$; Dominio de $f \circ g$ = Dominio de $g \circ f = (-\infty, \infty)$

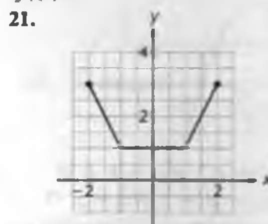
15. $(f \circ g)(x) = |2x + 4|$, $(g \circ f)(x) = 2|x + 1| + 3$; Dominio de $f \circ g$ = Dominio de $g \circ f = (-\infty, \infty)$

17. $(f \circ g)(x) = (2x^3 + 4)^{1/3}$, $(g \circ f)(x) = 2x + 4$; Dominio de $f \circ g$ = Dominio de $g \circ f = (-\infty, \infty)$

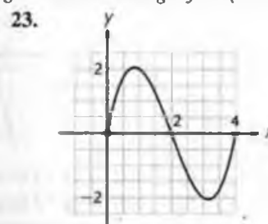
19.



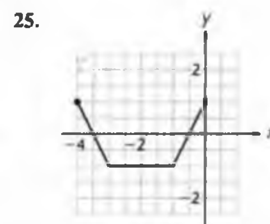
21.



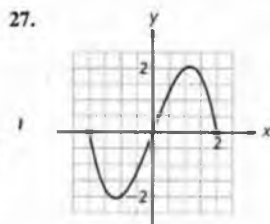
23.



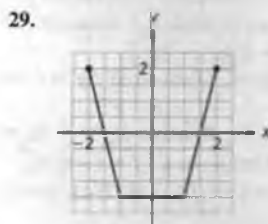
25.



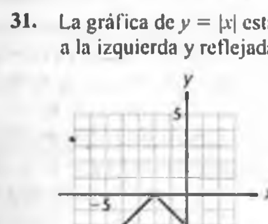
27.



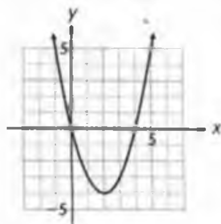
29.



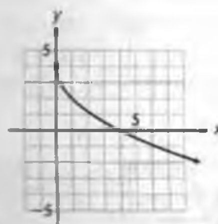
31. La gráfica de $y = |x|$ está corrida 2 unidades a la izquierda y reflejada en el eje x



33. La gráfica de $y = x^2$ está corrida 2 unidades a la derecha y 4 unidades hacia abajo



35. La gráfica de $y = \sqrt{x}$ está expandida verticalmente por un factor de 2, reflejada en el eje x, y corrida 4 unidades hacia arriba.



37. $(f + g)(x) = \sqrt{2 - x} + \sqrt{x + 3}$, $(f - g)(x) = \sqrt{2 - x} - \sqrt{x + 3}$, $(fg)(x) = \sqrt{6 - x - x^2}$, $(f/g)(x) = \sqrt{(2 - x)/(x + 3)}$; Dominio de $f + g$ = Dominio de $f - g$ = Dominio de $fg = [-3, 2]$, Dominio de $f/g = (-3, 2]$

39. $(f + g)(x) = 2\sqrt{x} - 2$, $(f - g)(x) = 6$, $(fg)(x) = x - 2\sqrt{x} - 8$, $(f/g)(x) = (\sqrt{x} + 2)/(\sqrt{x} - 4)$; Dominio de $f + g$ = Dominio de $f - g$ = Dominio de $fg = [0, \infty)$, Dominio de $f/g = [0, 16) \cup (16, \infty)$

41. $(f + g)(x) = \sqrt{x^2 + x - 6} + \sqrt{7 + 6x - x^2}$, $(f - g)(x) = \sqrt{x^2 + x - 6} - \sqrt{7 + 6x - x^2}$, $(fg)(x) = \sqrt{-x^4 + 5x^3 + 19x^2 - 29x - 42}$, $(f/g)(x) = \sqrt{(x^2 + x - 6)/(7 + 6x - x^2)}$; Dominio de $f + g$ = Dominio de $f - g$ = Dominio de $fg = [2, 7]$, Dominio de $f/g = [2, 7)$

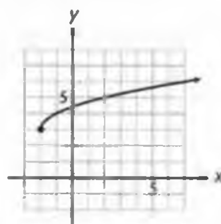
43. $(f \circ g)(x) = \sqrt{x - 4}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x} - 4$; Dominio de $f \circ g = [4, \infty)$, Dominio de $g \circ f = [0, \infty)$

45. $(f \circ g)(x) = (1/x) + 2$, $(g \circ f)(x) = 1/(x + 2)$; Dominio de $f \circ g = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, Dominio de $g \circ f = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

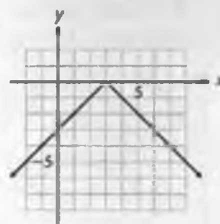
47. $(f \circ g)(x) = 1/|x - 1|$, $(g \circ f)(x) = 1/(|x| - 1)$; Dominio de $f \circ g = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, Dominio de $g \circ f = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$

49. $y = |x + 1| - 2$ **51.** $y = 3 - \sqrt[3]{x}$ **53.** $y = 1 - (x + 2)^3$

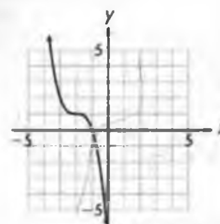
55. $y = \sqrt{x + 2} + 3$



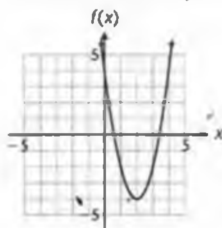
57. $y = -|x - 3|$



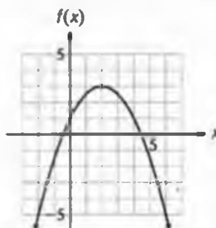
59. $y = -(x + 2)^3 + 1$



61. Es igual que la gráfica de $p(x) = x^2$ corrida 2 unidades a la derecha, y expandida por un factor de 2 y corrida 4 unidades hacia abajo.



63. Es igual que la gráfica de $p(x) = x^2$ corrida 2 unidades a la derecha, y contraída por un factor de $\frac{1}{2}$, reflejada con respecto al eje x y corrida 3 unidades hacia arriba.



65. $h(x) = (f \circ g)(x)$; $f(x) = x^4$, $g(x) = 2x - 7$

67. $h(x) = (f \circ g)(x)$; $f(x) = x^{1/2}$, $g(x) = 4 + 2x$

69. $h(x) = (g \circ f)(x)$; $g(x) = 3x - 5$, $f(x) = x^7$

71. $h(x) = (g \circ f)(x)$; $g(x) = 4x + 3$, $f(x) = x^{-1/2}$

73. La gráfica de $y = |x|$ está reflejada en el eje x y expandida verticalmente por un factor de 3. Ecuación: $y = -3|x|$.

75. La gráfica de $y = x^3$ está reflejada en el eje x y contraída verticalmente por un factor de 0.5. Ecuación: $y = -0.5x^3$.

77. $(f + g)(x) = 2x$, $(f - g)(x) = 2/x$, $(fg)(x) = x^2 - (1/x^2)$, $(f/g)(x) = (x^2 + 1)/(x^2 - 1)$;
Dominio de $f + g$ = Dominio de $f - g$ = Dominio de $fg = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, Dominio de $f/g = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$

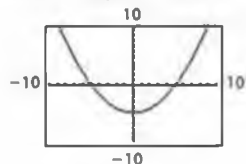
79. $(f + g)(x) = 2$, $(f - g)(x) = -2x/|x|$, $(fg)(x) = 0$, $(f/g)(x) = 0$;
Dominio de $f + g$ = Dominio de $f - g$ = Dominio de $fg = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, Dominio de $f/g = (0, \infty)$

81. $(f \circ g)(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $(g \circ f)(x) = 4 - x$; Dominio de $f \circ g = [-2, 2]$, Dominio de $g \circ f = (-\infty, 4]$

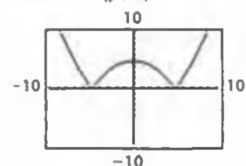
83. $(f \circ g)(x) = (6x - 10)/x$, $(g \circ f)(x) = (x + 5)/(5 - x)$; Dominio de $f \circ g = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$, Dominio de $g \circ f = (-\infty, 0) \cup (0, 5) \cup (5, \infty)$

85. $(f \circ g)(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{34 - x^2}$; Dominio de $f \circ g = [-4, 4]$, Dominio de $g \circ f = [-5, 5]$

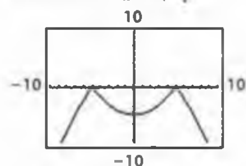
87. Gráfica de $f(x)$



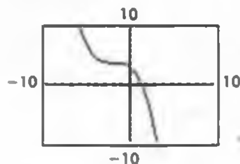
Gráfica de $|f(x)|$



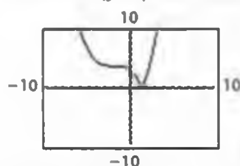
Gráfica de $-|f(x)|$



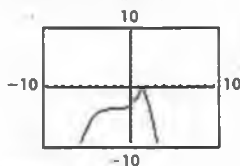
89. Gráfica de $f(x)$



Gráfica de $|f(x)|$



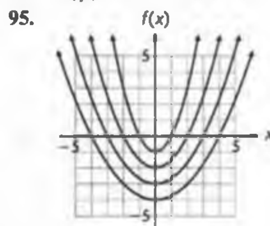
Gráfica de $-|f(x)|$



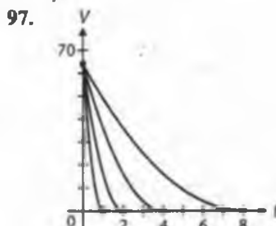
91. La gráfica de $y = |f(x)|$ es igual que la gráfica de $y = f(x)$ siempre que $f(x) \geq 0$ y es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ con respecto al eje x siempre que $f(x) < 0$.

93. $P(p) = -70\,000 + 6\,000p - 200p^2$

95.



97.

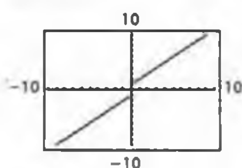


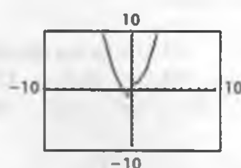
99. (A) $r(h) = \frac{1}{2}h$ (B) $V(h) = \frac{1}{12}\pi h^3$ (C) $V(t) = \frac{0.125}{12}\pi t^{3/2}$

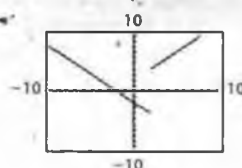
Ejercicio 2-6

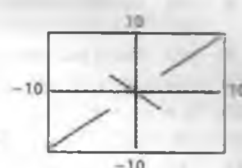
1. Uno a uno **3.** No es uno a uno **5.** Uno a uno **7.** No es uno a uno **9.** Uno a uno **11.** No es uno a uno

13. Uno a uno **15.** Uno a uno **17.** Uno a uno **19.** No es uno a uno **21.** Uno a uno
23. Uno a uno **25.** No es uno a uno **27.** No es uno a uno **29.** Uno a uno

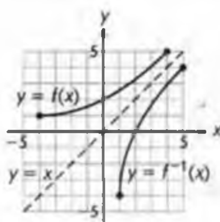




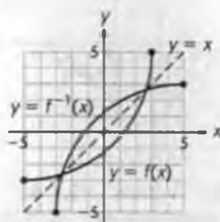




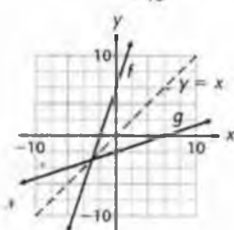
31. Dominio de $f^{-1} = [1, 5]$
Rango de $f^{-1} = [-4, 4]$



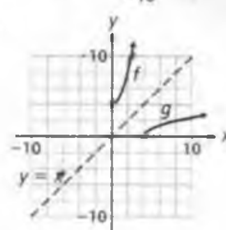
33. Dominio de $f^{-1} = [-3, 5]$
Rango de $f^{-1} = [-5, 3]$



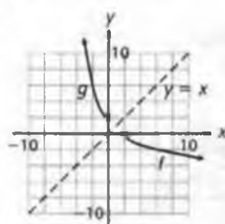
35.



37.



39.



41. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x$ **43.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ **45.** $f^{-1}(x) = 10x - 6$ **47.** $f^{-1}(x) = (2 + x)/x$

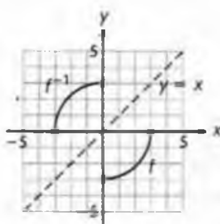
49. $f^{-1}(x) = 2x/(1 - x)$ **51.** $f^{-1}(x) = (4x + 5)/(3x - 2)$ **53.** $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ **55.** $f^{-1}(x) = (4 - x)^5 - 2$
57. $f^{-1}(x) = 16 - 4x^2, x \geq 0$ **59.** $f^{-1}(x) = (3 - x)^2 + 2, x \leq 3$
61. La intersección de f con el eje x es la intersección de f^{-1} con el eje y, y la intersección de f con el eje y es la intersección de f^{-1} con el eje x.
63. $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x - 2}$ **65.** $f^{-1}(x) = -1 - \sqrt{x + 3}$

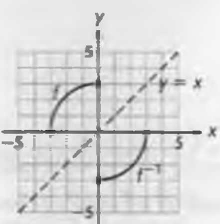
67. $f^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$
Dominio de $f^{-1} = [-3, 0]$
Rango de $f^{-1} = [0, 3]$

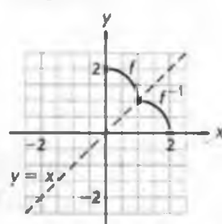
69. $f^{-1}(x) = -\sqrt{9 - x^2}$
Dominio de $f^{-1} = [0, 3]$
Rango de $f^{-1} = [-3, 0]$

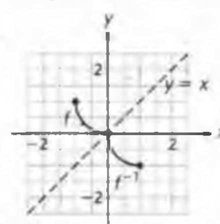
71. $f^{-1}(x) = \sqrt{2x - x^2}$
Dominio de $f^{-1} = [1, 2]$
Rango de $f^{-1} = [0, 1]$

73. $f^{-1}(x) = -\sqrt{2x - x^2}$
Dominio de $f^{-1} = [0, 1]$
Rango de $f^{-1} = [-1, 0]$





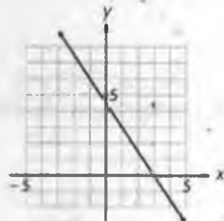




75. $f^{-1}(x) = (x - b)/a$ **77.** $a = 1$ y $b = 0$ o $a = -1$ y b es arbitraria **81.** (A) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$ (B) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x}$
83. (A) $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2$ (B) $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{4 - x^2}, 0 \leq x \leq 2$

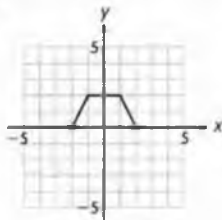
Ejercicio de repaso del capítulo 2

1. (A) $\sqrt{45}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 2 *(2-1, 2-2)* **2.** (A) $x^2 + y^2 = 7$ (B) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 7$ *(2-1)*
3. Centro: $(-3, 2)$; radio $= \sqrt{5}$ *(2-1)* **4.** Pendiente $= -\frac{3}{2}$ *(2-2)* **5.** $2x + 3y = 12$ *(2-2)* **6.** $y = -\frac{2}{3}x + 2$ *(2-2)*

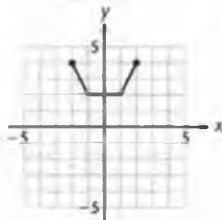


$yx - y = 2$
$x = \frac{2 + y}{y}$
$f^{-1}(x) = \frac{2 + x}{x}$

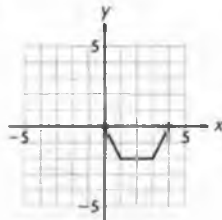
7. Vertical: $x = -3$, la pendiente no está definida; horizontal: $y = 4$, pendiente $= 0$ *(2-2)*
8. (A) Función; dominio $= \{1, 2, 3\}$, rango $= \{1, 4, 9\}$ (B) No es una función
(C) Función; dominio $= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, rango $= \{2\}$ *(2-3)*
9. (A) No es una función (B) Una función (C) Una función (D) No es una función *(2-3)*
10. Los incisos (A) y (C) especifican funciones *(2-3)* **11.** 16 *(2-3)* **12.** 1 *(2-3)* **13.** 3 *(2-3)* **14.** $-2a - h$ *(2-3)*
15. $9 + 3x - x^2$ *(2-7)* **16.** $1 + 3x + x^2$ *(2-5)* **17.** $20 + 12x - 5x^2 - 3x^3$ *(2-5)* **18.** $(3x + 5)/(4 - x^2)$, $x \neq \pm 2$ *(2-5)*
19. $17 - 3x^2$ *(2-5)* **20.** $-21 - 30x - 9x^2$ *(2-5)*
21. (A)



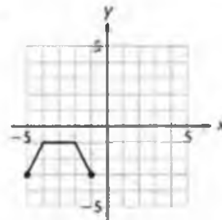
(B)



(C)

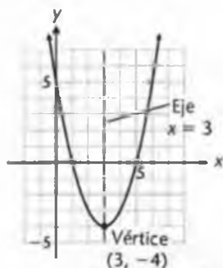


(D)

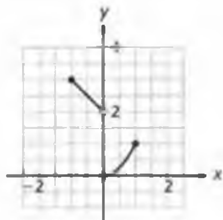


(2-5)

22. (A) g (B) m (C) n (D) f *(2-4, 2-5)*
23. (A) Intersecciones con el eje x: -4, 0; intersección con el eje y: 0 (B) Vértice: $(-2, -4)$ (C) Mínimo: -4
(D) Rango: $y \geq -4$ o $[-4, \infty)$ (E) Aumenta en $[-2, \infty)$ (F) Disminuye en $(-\infty, -2]$ *(2-4)*
24. Mín $f(x) = f(3) = 2$; vértice $(3, 2)$ *(2-4)*
25. (A) Reflejada a través del eje x (B) Corrida hacia abajo 3 unidades (C) Corrida 3 unidades hacia la izquierda *(2-5)*
26. (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 0 *(2-4)* **27.** (A) $-2, 0$ (B) 1 (C) No hay solución (D) $x = 3$ y $x < -2$ *(2-4)*
28. Dominio $= (-\infty, \infty)$, rango $= (-3, \infty)$ *(2-4)* **29.** $[-2, -1], [1, \infty)$ *(2-4)* **30.** $[-1, 1)$ *(2-4)* **31.** $(-\infty, -2)$ *(2-4)*
32. $x = -2, x = 1$ *(2-4)* **33.** $f(x) = 4x^3 - \sqrt{x}$ *(2-3)*
34. La función f multiplica el cuadrado del dominio del elemento por 3, suma cuatro veces el elemento del dominio, y luego resta 6. *(2-3)*
35. (A) $3x + 2y = -6$ (B) $\sqrt{52}$ *(2-1, 2-2)* **36.** (A) $y = -2x - 3$ (B) $y = \frac{1}{2}x + 2$ *(2-2)*
37. Es simétrica con respecto a los tres *(2-1)* **38.** $(-\infty, 3)$ *(2-3)*
39. Rango $= [-4, \infty)$ *(2-4)* **40.** $[0, 16) \cup (16, \infty)$ *(2-3)*
Intersecciones: $x = 1$ y $x = 5$, $y = 5$
Mín $f(x) = f(3) = -4$

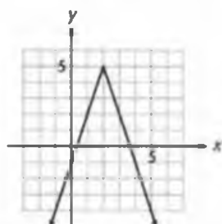


41. (A) $(f \circ g)(x) = \sqrt{|x|} - 8$, $(g \circ f)(x) = |\sqrt{x} - 8|$ (B) Dominio de $f \circ g = (-\infty, \infty)$, dominio de $g \circ f = [0, \infty)$ *(2-5)*
42. Funciones (A), (C) y (D) son uno a uno *(2-6)* **43.** (A) $(x + 7)/3$ (B) 4 (C) x (D) Aumenta *(2-6)*
44. Dominio $= [-1, 1]$ *(2-4)*
Rango $= [0, 1] \cup (2, 3]$
Discontinua en $x = 0$

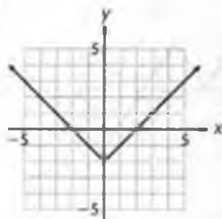


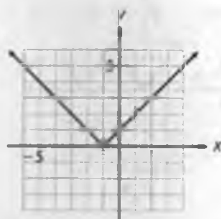
45. La gráfica de $y = x^2$ es verticalmente expandida por un factor de 2, reflejada con respecto al eje x, y corrida hacia la izquierda 3 unidades.
Ecuación: $y = -2(x + 3)^2$. *(2-5)*

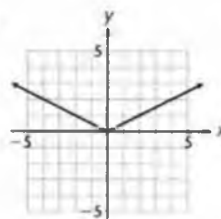
46. $g(x) = 5 - 3|x - 2|$ *(2-5)* **47.** $y = -(x - 4)^2 + 3$ *(2-4, 2-5)*



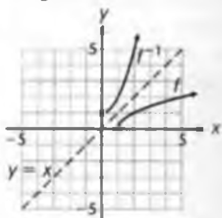
48. (A) (B) (C) *(2-5)*





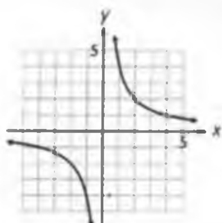


49. (A) $f^{-1}(x) = x^2 + 1$
(B) Dominio de $f = [1, \infty)$ = Rango de f^{-1}
Rango de $f = [0, \infty)$ = Dominio de f^{-1}
(C) *(2-6)*



50. $(x - 3)^2 + y^2 = 32$ *(2-1)* **51.** Centro: $(-2, 3)$, radio $= 4$ *(2-1)*

52. Simétrica con respecto al origen *(2-1)* **53.** Disminuye en *(2-2, 2-3)*

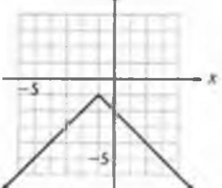


54. (A) Dominio de $f = [0, \infty)$ = Rango de f^{-1}; Rango de $f = [-1, \infty)$ = Dominio de f^{-1} (B) $\sqrt{x + 1}$ (C) 2 (D) 4
(E) x *(2-6)*

55. La gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ es verticalmente expandida por un factor de 2, reflejada en el eje x, corrida una unidad hacia la izquierda y una unidad hacia abajo. Ecuación $y = -2\sqrt[3]{x + 1} - 1$ *(2-4)*

56. Es igual que la gráfica de g cambiada 2 unidades a la derecha, reflejada en el eje x, y corrida 1 unidad hacia abajo. *(2-5)*

57. *(2-5)* **58.** $[-5, 5]$ *(1-8, 2-3)*

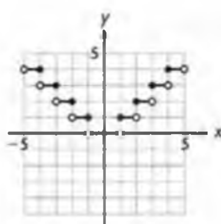


59. (A) $x^2\sqrt{1 - x}$; dominio $= (-\infty, 1]$ (B) $x^2/\sqrt{1 - x}$, dominio $= (-\infty, 1)$
(C) $1 - x$, dominio $= (-\infty, 1]$ (D) $\sqrt{1 - x^2}$, dominio $= [-1, 1]$ *(2-5)*

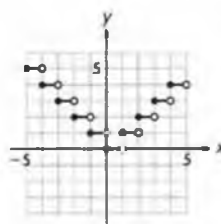
60. (A) $(3x + 2)/(x - 1)$ (B) $\frac{11}{2}$ (C) x *(2-6)*

61. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$; dominio $= (-\infty, \infty)$, rango $= [-2, 2]$ *(2-4)*

62. $x - y = 3$; una recta *(2-1, 2-2)* **65.** (A)

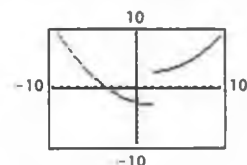


(B)

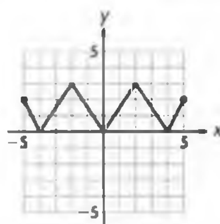


(2-5)

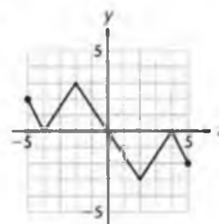
66. Dominio: Todos los números reales excepto $x = 2$.
Rango: $y > -3$ o $(-3, \infty)$
discontinua en $x = 2$ *(2-4)*



67. (A)



(B)



(2-1, 2-5)

68. (A) La gráfica debe cruzar el eje x exactamente una vez. (B) La gráfica puede intersectar al eje x una vez o ninguna. *(2-4)*

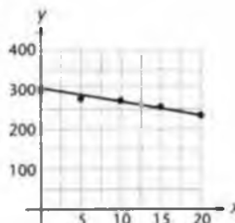
69. (A) $V = -1\,250t + 12\,000$ (B) \$5 750 *(2-2)* **70.** (A) $R = 1.6C$ (B) \$168 *(2-2)*

71. $E(x) = \begin{cases} 200 & \text{si } 0 \leq x \leq 3\,000 \\ 0.1x - 100 & \text{si } x > 3\,000 \end{cases}$; $E(2\,000) = \$200$, $E(5\,000) = \$400$ *(2-4)*

72. (A)

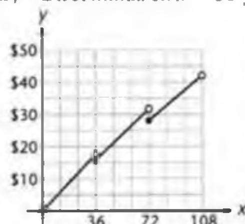
x	0	5	10	15	20
Destrucción	309	276	271	255	233
$f(x)$	303	286	269	252	234

(B)

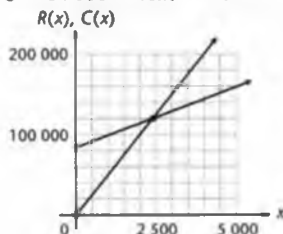


(C) 217 en 1995, 200 en 2000 (D) El consumo de huevo per cápita es de aproximadamente 17 huevos cada 5 años *(2-4)*

73. (A) $C(x) = \begin{cases} 0.49x & \text{para } 0 \leq x < 36 \\ 0.44x & \text{para } 36 \leq x < 72 \\ 0.39x & \text{para } 72 \leq x \end{cases}$ (B) Discontinua en $x = 36$ y $x = 72$ *(2-4)*



74. (A) $C = 84\,000 + 15x$; $R = 50x$ (B) $R = C$ en $x = 2\,400$ unidades; $R < C$ para $0 \leq x < 2\,400$; $R > C$ para $x > 2\,400$ *(2-2)*



75. $P(p) = -14\,000 + 700p - 10p^2$ *(2-5)* **76.** 5 pies *(2-1)*

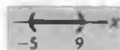
77. (A) $A(x) = 60x - \frac{3}{2}x^2$ (B) $0 < x < 40$ (C) $x = 20$, $y = 15$ *(2-4)*

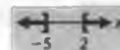
78. (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 0 (E) 1 (F) 0 *(2-4)*

Ejercicio de repaso acumulativo de los capítulos 1 y 2

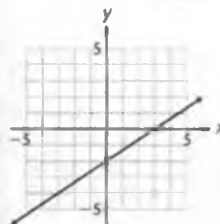
1. $x = \frac{5}{2}$ *(1-1)** **2.** $x = 1, y = -2$ *(1-2)* **3.** $y \geq 5$ *(1-3)* $[5, \infty)$ **4.** $-5 < x < 9$ *(1-4)* $(-5, 9)$ **5.** $x \leq -5$ o $x \geq 2$ *(1-8)* $(-\infty, -5] \cup [2, \infty)$



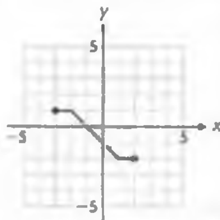


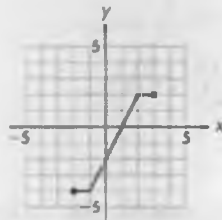


6. (A) $7 - 10i$ (B) $23 + 7i$ (C) $1 - i$ *(1-5)* **7.** $x = -4, 0$ *(1-6)* **8.** $x = -\sqrt{5}, \sqrt{5}$ *(1-6)*
9. $x = 3 \pm \sqrt{7}$ *(1-6)* **10.** $x = 3$ *(1-7)* **11.** $x \geq -\frac{2}{3}$ o $[-\frac{2}{3}, \infty)$ *(1-3)*
12. (A) $2\sqrt{5}$ (B) 2 (C) $-\frac{1}{2}$ *(2-1, 2-2)*
13. (A) $x^2 + y^2 = 2$ (B) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$ *(2-1)* **14.** Pendiente: $\frac{2}{3}$, intersección con el eje y: -2; intersección con el eje x: 3 *(2-2)*

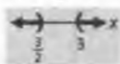


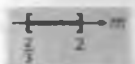
15. (A) Función: dominio: $\{1, 2, 3\}$; rango: $\{1\}$ (B) No es una función
(C) Función: dominio: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; rango: $\{-1, 0, 2\}$ *(2-3)*
16. (A) 20 (B) $x^2 + x + 3$ (C) $9x^2 - 18x + 13$ (D) $2a + h - 2$ *(2-2, 2-5)*
17. (A) Expandida por un factor de 2 (B) Corrida 2 unidades a la derecha (C) Corrida 2 unidades hacia abajo *(2-5)*
18. (A) (B) *(2-5)*

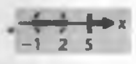


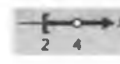


19. No hay solución *(1-1)* **20.** $x = \frac{1}{2}, 3$ *(1-6)* **21.** $x = 1, \frac{5}{2}$ *(1-7)* **22.** $x = 87/16, y = 5/8$ *(1-2)*
23. $x < \frac{3}{2}$ o $x > 3$ *(1-4)* $(-\infty, \frac{3}{2}) \cup (3, \infty)$ **24.** $\frac{2}{3} \leq m \leq 2$ *(1-4)* $[\frac{2}{3}, 2]$ **25.** $-1 < x < 2$ o $x \geq 5$ *(1-8)* $(-1, 2) \cup [5, \infty)$ **26.** $x \geq 2, x \neq 4$ *(1-3)* $[2, 4) \cup (4, \infty)$

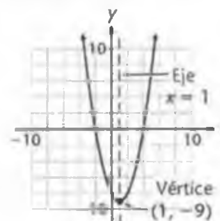








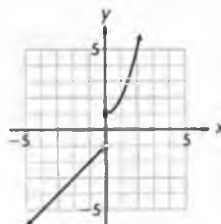
27. (A) 0 (B) $\frac{6}{5}$ (C) $-i$ *(1-5)* **28.** (A) $3 + 18i$ (B) $-2.9 + 10.7i$ (C) $-4 - 6i$ *(1-5)*
29. (A) Todos los números reales (B) $\{-2\} \cup [1, \infty)$ (C) 1 (D) $[-3, -2]$ y $[2, \infty)$ (E) $-2, 2$ *(2-3, 2-4)*
30. (A) $y = -\frac{3}{2}x - 8$ (B) $y = \frac{2}{3}x + 5$ *(2-2)* **31.** $[-4, \infty)$ *(2-3)* **32.** Rango: $[-9, \infty)$ *(2-4)*
Intersecciones: $x = -2$ y $x = 4$, $y = -8$
Mín $f(x) = f(1) = -9$



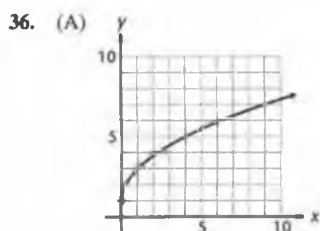
33. $(f \circ g)(x) = \dfrac{x}{3 - x}$;
Dominio: $x \neq 0, 3$ *(2-5)*

34. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ *(2-6)*

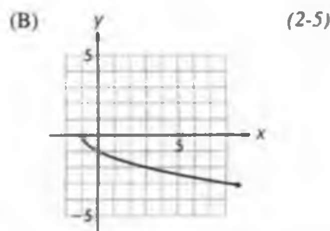
35. Dominio: todos los números reales *(2-4)*
Rango: $(-\infty, -1) \cup [1, \infty)$
Discontinua en $x = 0$



36. (A)



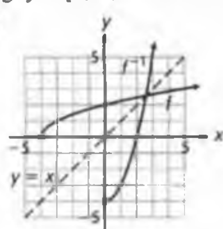
(B)



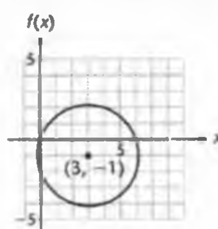
(2-5)

37. La gráfica de $y = |x|$ es contraída por $\frac{1}{2}$, reflejada en el eje x, corrida 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba; $y = -\frac{1}{2}|x - 2| + 3$. *(2-5)*

38. (A) $f^{-1}(x) = x^2 - 4, x \geq 0$
(B) Dominio $f = [-4, \infty) =$ Rango f^{-1};
Rango $f = [0, \infty) =$ Dominio f^{-1}
(C) *(2-6)*



39. Centro: $(3, -1)$; radio: $\sqrt{10}$ *(2-1)*



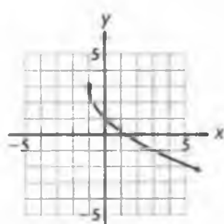
40. Simétrica con respecto al origen *(2-1)*

41. $y = (x + 2)^2 - 3$ *(2-4)* **42.** $y = 3 \pm i\sqrt{5}$ *(1-6)* **43.** $x = -\frac{1}{8}, \frac{27}{8}$ *(1-7)* **44.** $u = \pm\sqrt{3}, \pm 2i$ *(1-7)*

45. $t = \frac{9}{4}$ *(1-7)* **46.** $-18.36 \leq x < 16.09$; $[-18.36, 16.09)$ *(1-3)* **47.** $x = -5.68, 1.23$ *(1-6)*

48. $x = 1.49, y = 0.55$ *(1-2)* **49.** $y = \dfrac{3 - 3x}{x + 4}$ *(1-1)* **50.** $s = 5 + x - 2y, t = -12 - 2x + 5y$ *(1-2)*

51. *(2-5)*



52. 0 *(1-5)* **53.** Todas las a y b tales que $a < b$ *(1-3)* **54.** $y = \dfrac{x + x^2}{x - 1}$ *(1-1)*

55. $x = (\sqrt{2} \pm i)/3$ *(1-6)*

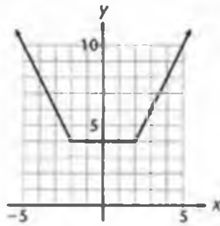
56. Si $b < -2$ o $b > 2$, hay dos raices reales distintas; si $b = -2$ o $b = 2$, hay una raiz real doble; y si $-2 < b < 2$, hay dos raices imaginarias distintas. (1-6, 1-8)

57. $x = \pm\sqrt{3\sqrt{2} + 3}$ (dos raices reales) *(1-7)* **58.** $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}i$ *(1-5)*

59. $x < -1$ o $x > 2$; $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ *(1-8)*

60. $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x < -2 \\ 4 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Dominio: todos los números reales; Rango: $[4, \infty)$ *(2-4)*



61. (A) Dominio g: $[-2, 2]$

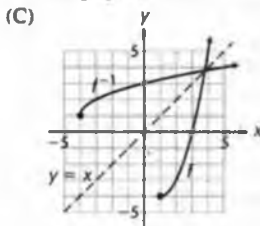
(B) $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$; Dominio $\left(\frac{f}{g}\right)$: $(-2, 2)$

(C) $(f \circ g)(x) = 4 - x^2$; Dominio $(f \circ g)$: $[-2, 2]$ *(2-5)*

62. (A) $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x + 4}$

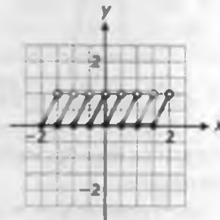
(B) Dominio f^{-1}: $[-4, \infty)$; Rango f^{-1}: $[1, \infty)$

(C) *(2-6)*



63. $f(x) = \begin{cases} \vdots & \vdots \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \le x < -\frac{1}{2} \\ 2x + 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \le x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x - 1 & \text{si } \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 2x - 2 & \text{si } 1 \le x < \frac{3}{2} \\ 2x - 3 & \text{si } \frac{3}{2} \le x < 2 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$

Dominio: todos los números reales; Rango: $[0, 1)$; discontinua en $x = k/2$, k es un entero *(2-4)*



64. 2 o $-\frac{1}{2}$ *(1-6)* **65.** 10.5 min *(1-1)* **66.** 2.5 mph *(1-6)* **67.** 12 gal *(1-1)* **68.** 8 800 libros *(1-2)*

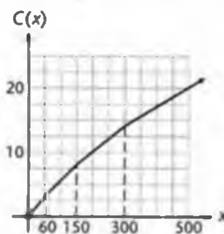
69. $|p - 200| \le 10$ *(1-4)* **70.** \$16.50, 5 500 piezas de queso *(1-2)*

71. (A) Ganancia: $\$5.5 < p < \$8$ o $(\$5.5, \$8)$ (B) Pérdida: $\$0 \le p < 5.5$ o $p > \$8$ o $[\$0, \$5.5) \cup (\$8, \infty)$ *(1-8)*

72. 40 millas de A a B y 75 millas de B a C o 75 millas de A a B y 40 millas de B a C *(1-6)*

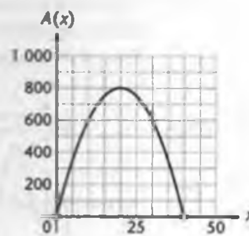
73. $x = -900p + 4\,571$; 1 610 botellas *(2-2)*

74. $C(x) = \begin{cases} 0.06x & \text{si } 0 \le x \le 60 \\ 0.05x + 0.6 & \text{si } 60 < x \le 150 \\ 0.04x + 2.1 & \text{si } 150 < x \le 300 \\ 0.03x + 5.1 & \text{si } 300 < x \end{cases}$



75. (A) $A(x) = 80x - 2x^2$ (B) $0 < x < 40$

(C) 20 × 40 pies *(2-4)*



76. (A) $f(1) = f(3) = 1, f(2) = f(4) = 0$ (B) $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es un entero impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es un entero par} \end{cases}$ *(2-4)*

77. (A) $a = 2\,500, b = -16$ (B) 2 500 pies (C) 12.5 s *(1-1, 1-2, 1-6)*

CAPÍTULO 3

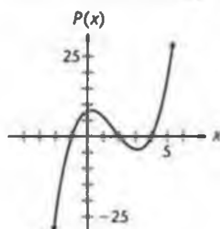
Ejercicio 3-1

1. c **3.** d **5.** h **7.** h, k **9.** $2m + 1$ **11.** $4x - 5, R = 11$ **13.** $x^2 + x + 1$ **15.** $2y^2 - 5y + 13, R = -27$

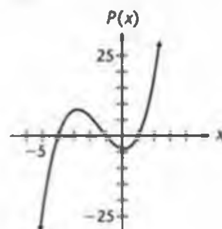
17. $\frac{x^2 + 3x - 7}{x - 2} = x + 5 + \frac{3}{x - 2}$ **19.** $\frac{4x^2 + 10x - 9}{x + 3} = 4x - 2 - \frac{3}{x + 3}$ **21.** $\frac{2x^3 - 3x + 1}{x - 2} = 2x^2 + 4x + 5 + \frac{11}{x - 2}$ **23.** 4

25. 3 **27.** -6 **29.** $3x^3 - 3x^2 + 3x - 4$, $R = 0$ **31.** $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$, $R = 0$ **33.** $3x^3 - 7x^2 + 21x - 67$, $R = 200$
35. $2x^5 - 3x^4 - 15x^3 + 2x + 10$, $R = 0$ **37.** $4x^3 - 6x - 2$, $R = 2$ **39.** $4x^2 - 2x - 4$, $R = 0$
41. $3x^3 - 0.8x^2 + 1.68x - 2.328$, $R = 0.0688$ **43.** $3x^4 - 0.4x^3 + 5.32x^2 - 4.256x - 3.5952$, $R = -0.123\ 84$

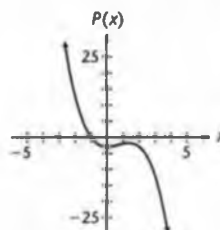
45. La gráfica tiene tres intersecciones con el eje x y dos puntos de retorno; $P(x) \to \infty$ como $x \to \infty$ y $P(x) \to -\infty$ como $x \to -\infty$



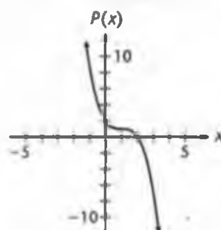
47. La gráfica tiene tres intersecciones con el eje x y dos puntos de retorno $P(x) \to \infty$ como $x \to \infty$ y $P(x) \to -\infty$ como $x \to -\infty$



49. La gráfica tiene una intersección con el eje x y dos puntos de retorno; $P(x) \to -\infty$ como $x \to \infty$ y $P(x) \to \infty$ como $x \to -\infty$

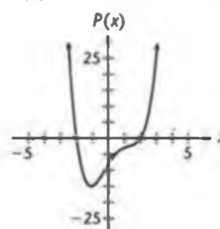


51. La gráfica tiene una intersección con el eje x y no tiene puntos de retorno $P(x) \to -\infty$ como $x \to \infty$ y $P(x) \to \infty$ como $x \to -\infty$

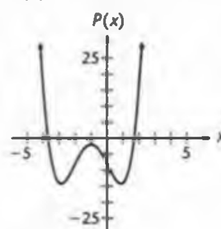


53. $P(x) = x^3$ **55.** No existe dicho polinomio. **57.** $2.14x^2 + 1.98x - 2.03$, $R = 0.00$
59. $0.96x^3 - 1.32x^2 + 5.89x + 1.37$, $R = -3.74$ **61.** $2x^2 - 3x + 2$, $R = 0$ **63.** $x^2 + (-3 + i)x - 3i$

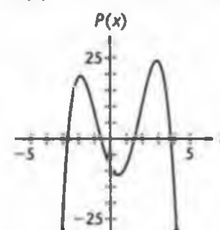
65. La gráfica tiene dos intersecciones con el eje x y un punto de retorno $P(x) \to \infty$ como $x \to \infty$ y como $x \to -\infty$



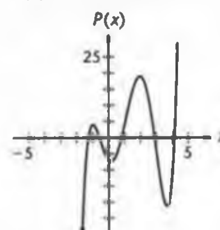
67. La gráfica tiene dos intersecciones con el eje x y tres puntos de retorno, $P(x) \to \infty$ como $x \to \infty$ y como $x \to -\infty$



69. La gráfica tiene cuatro intersecciones con el eje x y tres puntos de retorno; $P(x) \to -\infty$ como $x \to \infty$ y como $x \to -\infty$



71. La gráfica tiene cinco intersecciones con el eje x y cuatro puntos de retorno; $P(x) \to \infty$ como $x \to \infty$ y $P(x) \to -\infty$ como $x \to -\infty$



73. **(A)** En ambos casos, el coeficiente de x es a_2, el término constante es $a_2r + a_1$, y el residuo es $(a_2r + a_1)r + a_0$.
(B) El residuo desarrollado es $a_2r^2 + a_1r + a_0 = P(r)$.
75. $P(-2) = 81$; $P(1.7) = 6.2$

Ejercicio 3-2

1. -8 (multiplicidad 3), 6 (multiplicidad 2); grado de $P(x)$ es 5 **3.** -4 (multiplicidad 3), 3 (multiplicidad 2); -1; grado de $P(x)$ es 6
5. $P(x) = (x - 3)^2(x + 4)$; grado 3 **7.** $P(x) = (x + 7)^3[x - (-3 + \sqrt{2})][x - (-3 - \sqrt{2})]$; grado 5
9. $P(x) = [x - (2 - 3i)][x - (2 + 3i)](x + 4)^2$; grado 4 **11.** $(x + 2)(x - 1)(x - 3)$, grado 3 **13.** $(x + 2)^2(x - 1)^2$, grado 4
15. $(x + 3)(x + 2)x(x - 1)(x - 2)$, grado 5 **17.** Sí **19.** Sí **21.** $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ **23.** $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$
25. $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{1}{12}$ **27.** $\frac{1}{2}$, $1 \pm \sqrt{2}$ **29.** -2 (raíz doble), $\pm\sqrt{5}$ **31.** ± 2, $1 \pm \sqrt{2}$ **33.** $\pm 1, \frac{3}{2}, \pm i$

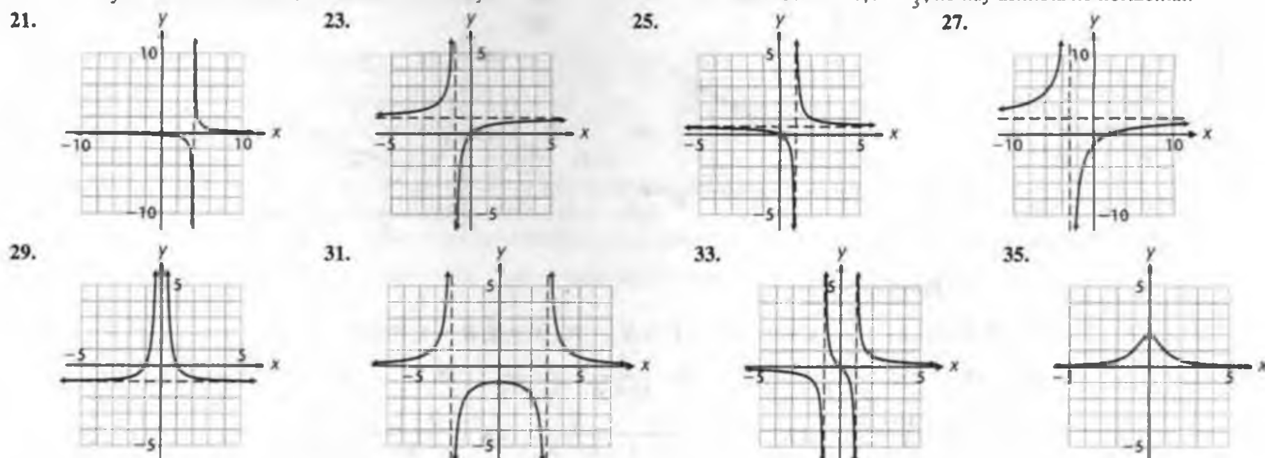
35. $-5, 2, 3$ **37.** $-\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{2}, 2$ **39.** $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, 2 (doble raíz) **41.** -1 (doble raíz), $-\frac{1}{3}, 2 \pm i$
43. $P(x) = (x + 2)(2x - 1)(3x + 2)$ **45.** $P(x) = (x + 4)[x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})]$
47. $P(x) = (2x - 1)(2x + 1)(x - 2)(x + 1)$ **49.** Notación de desigualdad: $2 - \sqrt{3} \le x \le 2 + \sqrt{3}$; notación de intervalo: $[2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}]$
51. Notación de desigualdad: $x \le -1$ o $1 \le x \le 3$; notación de intervalo: $(-\infty, -1] \cup [1, 3]$
53. Notación de desigualdad: $-3 \le x \le \frac{1}{2}$ o $x \ge 2$; notación de intervalo: $[-3, \frac{1}{2}] \cup [2, \infty)$
55. $x^2 - 8x + 41$ **57.** $x^2 - 6x + 25$ **59.** $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ **61.** $3 + i, -1$ **63.** $5i, 3$ **65.** $2 - i, \pm\sqrt{2}$
67. Notación de desigualdad: $-\frac{5}{2} < x < -1$ o $x > 1$; notación de intervalo: $(-\frac{5}{2}, -1) \cup (1, \infty)$
69. Notación de desigualdad: $x \le -2$ o $-1 < x < 2$ o $3 < x \le 5$; notación de intervalo: $(-\infty, -2] \cup (-1, 2) \cup (3, 5]$
71. $\sqrt{6}$ es una raíz de $P(x) = x^2 - 6$, pero $P(x)$ no tiene raíces racionales.
73. $\sqrt[3]{5}$ es una raíz de $P(x) = x^3 - 5$, pero $P(x)$ no tiene raíces racionales
75. $\frac{1}{2}, 6 \pm 2\sqrt{3}$ **77.** $-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \pm 4i$ **79.** $\frac{3}{2}$ (doble raíz), $4 \pm \sqrt{6}$ **81.** (A) 3 (B) $-\frac{1}{2} - (\sqrt{3}/2)i, -\frac{1}{2} + (\sqrt{3}/2)i$
83. Máx $= n$, mín. $= 1$ **85.** No, ya que $P(x)$ no es un polinomio con coeficientes reales (el coeficiente de x es el número imaginario $2i$)
87. 2 pies **89.** 0.5 por 0.5 pulg o 1.59 por 1.59 pulg

Ejercicio 3-3

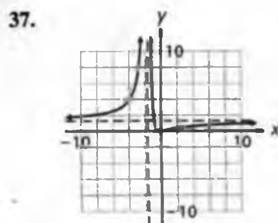
1. Hay por lo menos una intersección con el eje x en cada uno de los intervalos $(-5, -1)$, $(-1, 3)$ y $(5, 8)$
3. Hay por lo menos una intersección con el eje x en cada uno de los intervalos $(-6, -4)$, $(-4, 0)$, $(2, 4)$ y $(4, 7)$
5. Raíces en $(0, 1)$, $(3, 4)$ y $(4, 5)$ **7.** Raíces en $(-3, -2)$, $(-2, -1)$ y $(1, 2)$ **9.** Límite superior 2; límite inferior: -2
11. Límite superior: 3; límite inferior: -2 **13.** Límite superior: 2; límite inferior: -3
15. (A) Límite superior: 4; límite inferior: -2; raíces reales en $(-2, -1)$, $(0, 1)$ y $(3, 4)$ (B) 3.2
17. (A) Límite superior: 3; límite inferior: -2; raíces reales en $(-2, -1)$ (B) -1.4
19. (A) Límite superior: 4; límite inferior: -3; raíces reales en $(-3, -2)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$ y $(3, 4)$ (B) 3.1
21. (A) Límite superior: 3; límite inferior: -2; raíces reales en $(-2, -1)$ y $(-1, 0)$ (B) -0.5
23. (A) Límite superior: 3; límite inferior: -1 (B) 2.25 **25.** (A) Límite superior: 3; límite inferior: -4 (B) $-3.51, 2.12$
27. (A) Límite superior: 2; límite inferior: -3 (B) $-2.09, 0.75, 1.88$ **29.** (A) Límite superior: 1; límite inferior: -1 (B) 0.83
31. (A) Límite superior: 5; límite inferior: -2; raíces reales en $(-2, -1)$, $(1, 2)$ y $(3, 4)$ (B) 3.22
33. (A) Límite superior: 4; límite inferior: -4; raíces reales en $(-4, -3)$, $(1, 2)$ y $(2, 3)$ (B) 2.92
35. (A) Límite superior: 30; límite inferior: -10 (B) $-1.29, 0.31, 24.98$
37. (A) Límite superior: 30; límite inferior: -40 (B) $-36.53, -2.33, 2.40, 24.46$
39. (A) Límite superior: 20; límite inferior: -10 (B) $-7.47, 14.03$
41. (A) Límite superior: 30; límite inferior: -20 (B) -17.66, 2.5 (raíz doble), 22.66
43. (A) Límite superior: 40; límite inferior: -40 (B) $-30.45, 9.06, 39.80$
45. $x^4 - 3x^3 - 2x + 4 = 0$; $(1, 1)$ y $(1.7, 2.9)$ **47.** $4x^3 - 84x^2 + 432x - 600 = 0$; 2.3 pulg o 4.6 pulg. **49.** $x^3 - 15x^2 + 30 = 0$; 1.5 pies

Ejercicio 3-4

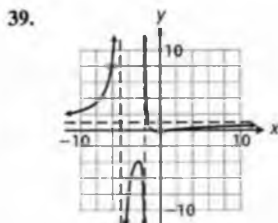
1. $g(x)$ **3.** $h(x)$ **5.** Dominio: $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$; intersección con el eje x: 2 **7.** Dominio: $(-\infty, -4) \cup (-4, 4) \cup (4, \infty)$; intersección con el eje x: $-1, 1$ **9.** Dominio $(-\infty, -3) \cup (-3, 4) \cup (4, \infty)$; intersecciones con el eje x: $-2, 3$
11. Dominio: todos los números reales; intersección con el eje x: 0
13. Asíntota vertical: $x = 4$; asíntota horizontal: $y = 2$ **15.** Asíntotas verticales: $x = -4$, $x = 4$; asíntota horizontal: $y = 2/3$
17. No hay asíntotas verticales; asíntota horizontal: $y = 0$ **19.** Asíntotas verticales $x = -1$, $x = \frac{5}{3}$; no hay asíntota no horizontal.



37.



39.



41. El número máximo de intersecciones con el eje x es 2 y el número mínimo es 0. Por ejemplo, $(x^2 - 1)/x^2$ tiene dos intersecciones con el eje x y $(x^2 + 1)/x^2$ no tiene ninguna.

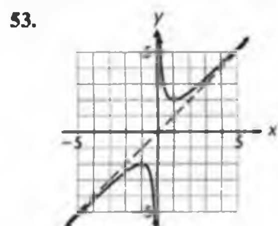
43. Asíntota vertical: $x = 1$; asíntota oblicua: $y = 2x + 2$ **45.** Asíntota oblicua: $y = x$

47. Asíntota vertical: $x = 0$; asíntota oblicua: $y = 2x - 3$

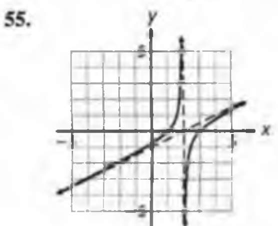
49. $f(x) \to 5$ como $x \to \infty$ y $f(x) \to -5$ como $x \to -\infty$; las rectas $y = 5$ y $y = -5$ son asíntotas horizontales.

51. $f(x) \to 4$ como $x \to \infty$ y $f(x) \to -4$ como $x \to -\infty$; las rectas $y = 4$ y $y = -4$ son asíntotas horizontales.

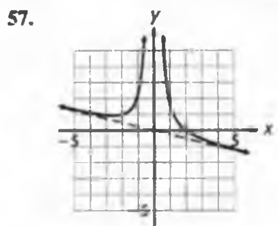
53.



55.

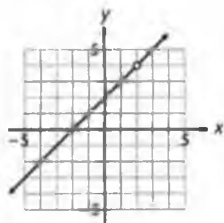


57.

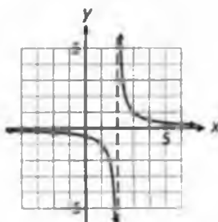


59. $p(x) = x^2 - 1$, $[f(x) - p(x)] \to 0$ como $x \to \pm\infty$ **61.** $p(x) = x^3 + x$, $[f(x) - p(x)] \to 0$ como $x \to \pm\infty$

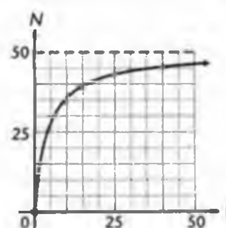
63. Dominio: $x \neq 2$, o $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$; $f(x) = x + 2$



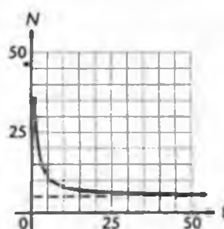
65. Dominio: $x \neq 2, -2$, o $(-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$; $f(x) = \frac{1}{x - 2}$



67. $N \to 50$ como $t \to \infty$



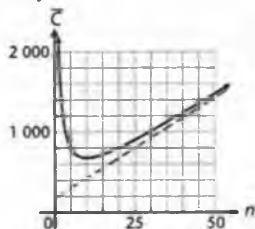
69. $N \to 5$ como $t \to \infty$



71. (A) $\overline{C}(n) = 25n + 175 + \frac{2{,}500}{n}$

(B) 10 yardas

(C)

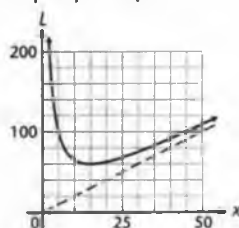


73. (A) $L(x) = 2x + \frac{450}{x}$

(B) $(0, \infty)$

(C) 15 pies por 15 pies

(D)



Ejercicio 3-5

1. $A = 2, B = 5$ **3.** $A = 7, B = -2$ **5.** $A = 1, B = 2, C = 3$ **7.** $A = 2, B = 1, C = 3$

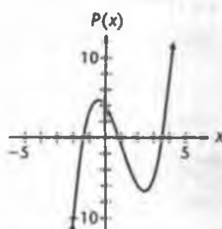
9. $A = 0, B = 2, C = 2, D = -3$ **11.** $\frac{3}{x - 4} - \frac{4}{x + 2}$ **13.** $\frac{3}{3x + 4} - \frac{1}{2x - 3}$ **15.** $\frac{2}{x} - \frac{1}{x - 3} - \frac{3}{(x - 3)^2}$

17. $\frac{2}{x} + \frac{3x - 1}{x^2 + 2x + 3}$ **19.** $\frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3x + 5}{(x^2 + 2)^2}$ **21.** $x - 2 + \frac{3}{x - 2} - \frac{2}{x - 3}$ **23.** $\frac{2}{x - 3} + \frac{2x + 5}{x^2 + 3x + 3}$

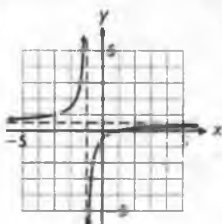
25. $\frac{2}{x - 4} - \frac{1}{x + 3} + \frac{3}{(x + 3)^2}$ **27.** $\frac{2}{x - 2} - \frac{3}{(x - 2)^2} - \frac{2x}{x^2 - x + 1}$ **29.** $x + 2 + \frac{1}{2x - 1} - \frac{2}{x + 2} + \frac{x - 1}{2x^2 - x + 1}$

Ejercicio de repaso del capítulo 3

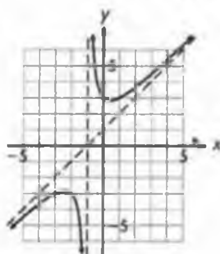
1. $2x^3 + 3x^2 - 1 = (x + 2)(2x^2 - x + 2) - 5$ *(3-1)* **2.** $P(3) = -8$ *(3-1, 3-2)* **3.** $2, -4, -1$ *(3-2)* **4.** $1 - i$ *(3-3)*
5. (A) $P(x) = (x + 2)x(x - 2) = x^3 - 4x$ (B) $P(x) \to \infty$ como $x \to \infty$ y $P(x) \to -\infty$ como $x \to -\infty$ *(3-1)*
6. Límite inferior: $-2, -1$; límite superior: 4 *(3-3)* **7.** $P(1) = -5$ y $P(2) = 1$ son de signo contrario. *(3-3)*
8. $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ *(3-2)* **9.** $-1, 2, 3$ *(3-2)*
10. (A) Dominio: $(-\infty, -4) \cup (-4, \infty)$; intersección con el eje x: $\frac{3}{2}$ (B) Dominio: $(-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$; intersección con el eje x: 0 *(3-4)*
11. (A) Asíntota horizontal: $y = 2$; asíntota vertical: $x = -4$
(B) Asíntota horizontal: $y = 0$; asíntotas verticales: $x = -2, x = 3$ *(3-4)*
12. $\dfrac{2}{x - 3} + \dfrac{5}{x + 2}$ *(3-5)*
13. (A) La gráfica de $P(x)$ tiene tres intersecciones con el eje x y dos puntos de retorno: $P(x) \to \infty$ como $x \to \infty$ y $P(x) \to -\infty$ como $x \to -\infty$ (B) 3.5 *(3-1, 3-3)*



14. $Q(x) = 8x^3 - 12x^2 - 16x - 8$, $R = 5$; $P(\frac{1}{2}) = R = 5$ *(3-1)* **15.** -4 *(3-1)* **16.** $P(x) = [x - (1 + \sqrt{2})][x - (1 - \sqrt{2})]$ *(3-2)*
17. Sí ya que $P(-1) = 0$, $x - (-1) = x + 1$ debe ser un factor. *(3-2)* **18.** $-2, -\frac{1}{2}, 4$ *(3-2)*
19. $P(x) = (x + 2)(2x + 1)(x - 4)$ *(3-2)* **20.** No hay raíces racionales *(3-2)* **21.** $-1, \frac{1}{2}, \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ *(3-2)*
22. $(x + 1)(2x - 1)\left(x - \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)$ *(3-2)*
23. Notación de desigualdad: $x \le -3$ o $-\frac{1}{2} \le x \le 2$; notación de intervalo $(-\infty, -3] \cup [-\frac{1}{2}, 2]$ *(3-2, 1-8)*
24. (A) Límite superior: 7; límite inferior: -5 (B) 6.62 (C) $-4.67, 6.62$ *(3-3)*
25. (A) Dominio: $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$ intersección con el eje x: 1; intersección con el eje y: $-\frac{1}{2}$
(B) Asíntota vertical: $x = -1$; asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$
(C) *(3-4)*



26. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{3}{(x - 2)^2}$ *(3-5)* **27.** $\dfrac{3}{x} + \dfrac{2x - 1}{2x^2 - 3x + 3}$ *(3-5)*
28. $P(x) = [x - (1 + i)][x^2 + (1 + i)x + (3 + 2i)] + (3 + 5i)$ *(3-1)* **29.** $P(x) = (x + \frac{1}{2})^2(x + 3)(x - 1)^3$, grado 6 *(3-2)*
30. $P(x) = (x + 5)[x - (2 + 3i)][x - (2 + 3i)]$, grado 3 *(3-2)* **31.** $\frac{1}{2}, \pm 2, 1 \pm \sqrt{2}$ *(3-2)*
32. $(x - 2)(x + 2)(2x - 1)[x - (1 - \sqrt{2})][x - (1 + \sqrt{2})]$ *(3-2)*
33. Notación de desigualdad: $-3 < x \le -\frac{3}{2}$ o $-\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{2}$ o $x > 2$; notación de intervalo: $(-3, -\frac{3}{2}] \cup (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \cup (2, \infty)$ *(3-2, 1-8)*
34. Ya que $P(x)$ cambia el signo tres veces, el grado mínimo es 3. *(3-3)*
35. $P(x) = a(x - r)(x^2 - 2x + 5)$, y ya que el término constante, $-5ar$, debe ser un entero, r debe ser un número racional. *(3-2)*
36. (A) 3 (B) $-\frac{3}{2} \pm \dfrac{3i\sqrt{3}}{2}$ *(3-2)* **37.** (A) Límite superior: 30; límite inferior: -30 (B) $-23.54, 21.57$ *(3-3)*
38. *(3-4)*



39. $y = 2$ y $y = -2$ *(3-4)* **40.** $\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x} + \frac{x-1}{x^2+1}$ *(3-5)* **41.** $2x^3 - 32x + 48 = 0$, 4 × 12 pies o 5.2 × 9.2 pies *(3-2)*
42. $x^3 + 27x^2 - 729 = 0$, 4.8 pies *(3-3)* **43.** $4x^3 - 70x^2 + 300x - 300$, 1.4 pulg o 4.5 pulg *(3-3)*
44. $x^4 - 7x^2 - 2x + 8$, (−2, 4), (−1.6, 2.6), (1, 1), (2.6, 6.8) *(3-2)*

CAPÍTULO 4

Ejercicio 4-1

1.

x	y
−3	0.04
−2	0.11
−1	0.33
0	1
1	3
2	9
3	27

3.

x	y
−3	27
−2	9
−1	3
0	1
1	0.33
2	0.11
3	0.04

5.

x	$g(x)$
−3	−27
−2	−9
−1	−3
0	−1
1	−0.33
2	−0.11
3	−0.04

7.

x	$h(x)$
−3	0.19
−2	0.56
−1	1.67
0	5
1	15
2	45
3	135

9.

x	$h(x)$
−6	−4.96
−5	−4.89
−4	−4.67
−3	−4
−2	−2
−1	4
0	22

11. 10^{2x+3} **13.** 3^{2x-1} **15.** $\frac{4^{3xz}}{5^{3yz}}$

17. $x = 2$ **19.** $x = -1, 3$ **21.** $x = \frac{2}{3}$ **23.** $x = -2$ **25.** $\frac{1}{2}$ **27.** $\frac{1}{2}, 1$ **29.** $a = 1, -1$

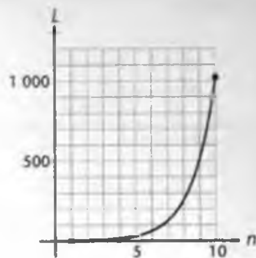
31. **33.** **35.** **37.**

39. **41.** 16.24 **43.** 5.047 **45.** 4.469 **47.** $6^{2x} - 6^{-2x}$ **49.** 4 **51.**

53. **55.** (A) 1.46 (B) $f(x) \to \infty$ como $x \to \infty$; $f(x) \to -5$ como $x \to -\infty$; $y = -5$

57. (A) −1.08 (B) $f(x) \to \infty$ como $x \to \infty$; $f(x) \to -\infty$ como $x \to -\infty$; ninguno

59.



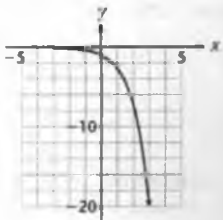
61. (A) 76 vuelos (B) 570 vuelos 63. (A) 19 lb (B) 7.9 lb

65. (A) $4 225.92 (B) $12 002.71 67. $9 841 69. No

Ejercicio 4-2

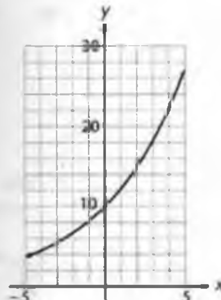
1.

x	y
−3	−0.05
−2	−0.14
−1	−0.37
0	−1
1	−2.72
2	−7.39
3	−20.09



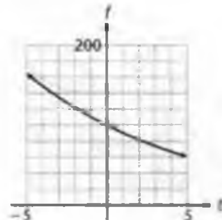
3.

x	y
−5	3.68
−4	4.49
−3	5.49
−2	6.7
−1	8.19
0	10
1	12.21
2	14.92
3	18.22
4	22.26
5	27.18



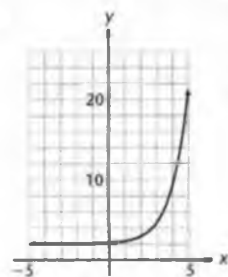
5.

t	$f(t)$
−5	164.87
−4	149.18
−3	134.99
−2	122.14
−1	110.52
0	100
1	90.48
2	81.87
3	74.08
4	67.03
5	60.65



7. e^{-x} 9. e^{3x} 11. e^{3x-1} 13. (A) $1 + 1/m$ no es igual a 1 (B) e

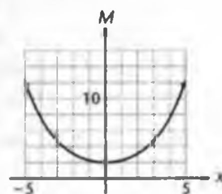
15.



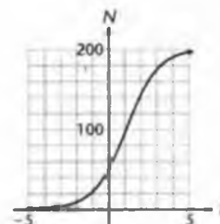
17.



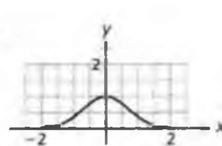
19.



21.



23. $\dfrac{e^{-2x}(-2x-3)}{x^4}$ 25. $2e^{2x} + 2e^{-2x}$ 27. $2e^{2x}$ 29. $x = 0$ 31. $x = 0, 5$ 33.

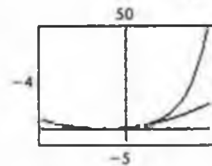


35. (A)

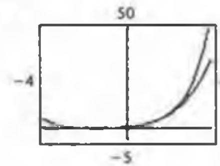
s	$f(s)$	s	$f(s)$
−0.5	4.0000	0.5	2.2500
−0.2	3.0518	0.2	2.4883
−0.1	2.8680	0.1	2.5937
−0.01	2.7320	0.01	2.7048
−0.001	2.7196	0.001	2.7169
−0.0001	2.7184	0.0001	2.7181

(B) $2.718\cdots \approx e$

37.



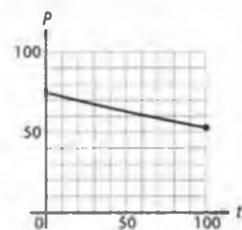
39.



41. Como $x \to \infty, f_n(x) \to 0$; como $x \to -\infty, f_n(x) \to \infty$ si n es par, y $f_n(x) \to -\infty$ si n es impar; $y = 0$ es una asíntota horizontal.

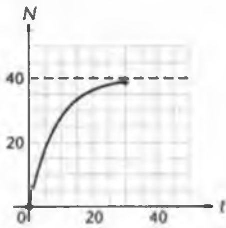
43. 7.1 miles de millones 45. 2 006

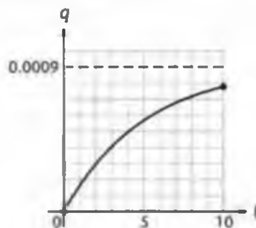
47.

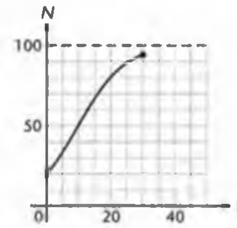


49. (A) 62% (B) 39% 51. (A) $10 691.81 (B) $36 336.69

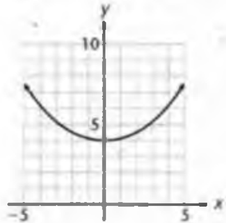
53. Ahorros de Gill: \$1 230.60; Richardson SyL: \$1 231.00; ahorros de Estados Unidos: \$1 229.03 **55.** \$12 197.09
57. (A) 15 millones (B) 30 millones
59. 40 tableros **61.** 50°F **63.** 0.0009 coulomb **65.** 100 venados







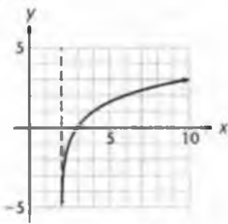
67.



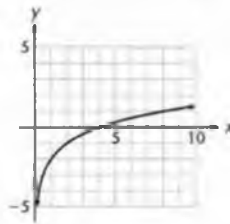
Ejercicio 4-3

1. $81 = 3^4$ **3.** $0.001 = 10^{-3}$ **5.** $3 = 81^{1/4}$ **7.** $16 = (\frac{1}{2})^{-4}$ **9.** $\log_{10} 0.0001 = -4$ **11.** $\log_4 8 = \frac{3}{2}$
13. $\log_{32} (\frac{1}{2}) = -\frac{1}{5}$ **15.** $\log_{49} 7 = \frac{1}{2}$ **17.** 0 **19.** 1 **21.** 4 **23.** −2 **25.** $\frac{1}{3}$ **27.** $\sqrt{x}$ **29.** x^2 **31.** $x = 4$
33. $y = 2$ **35.** $b = 4$ **37.** $b =$ cualquier número real positivo excepto el 1. **39.** $x = 2$ **41.** $y = -2$ **43.** $b = 100$
45. $2 \log_b u + 7 \log_b v$ **47.** $\frac{2}{3} \log_b m - \frac{1}{2} \log_b n$ **49.** $\log_b u - \log_b v - \log_b w$ **51.** $-2 \log_b a$ **53.** $\frac{1}{3} \log_b (x^2 - y^2)$
55. $\frac{1}{3} \log_b N - 2 \log_b p - 3 \log_b q$ **57.** $\frac{1}{4}(2 \log_b x + 3 \log_b y - \frac{1}{2} \log_b z)$ **59.** $\log_b (x^2/y)$ **61.** $\log_b (w/xy)$
63. $\log_b (x^3y^2/\sqrt[4]{z})$ **65.** $\log_b (\sqrt{u}/v^2)^5$ **67.** $\log_b \sqrt[5]{x^2y^3}$ **69.** $5 \log_b (x + 3) + 2 \log_b (2x - 7)$
71. $7 \log_b (x + 10) - 2 \log_b (1 + 10x)$ **73.** $2 \log_b x - \frac{1}{2} \log_b (x + 1)$ **75.** $2 \log_b x + \log_b (x + 5) + \log_b (x - 4)$ **77.** $x = 4$
79. $x = \frac{1}{3}$ **81.** $x = \frac{8}{7}$ **83.** $x = 2$ **85.** $x = 2$ **87.** 3.40 **89.** −0.92 **91.** 3.30 **93.** 0.23 **95.** −0.05

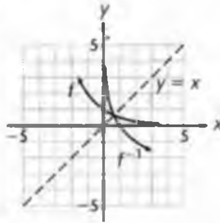
97.



99.



101. (A)



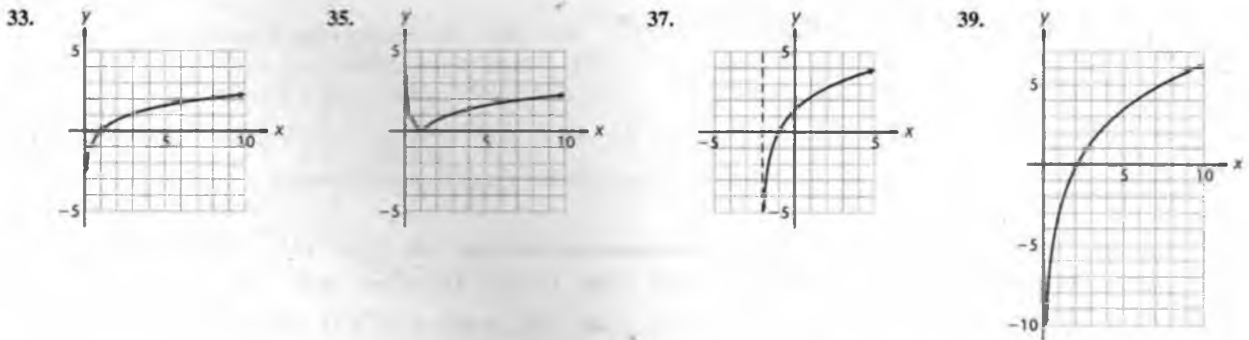
(B) Dominio $f = (-\infty, \infty) =$ Rango f^{-1}
Rango $f = (0, \infty) =$ Dominio f^{-1}
(C) $f^{-1}(x) = \log_{1/2} x = -\log_2 x$

103. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}[1 + \log_5 (x - 4)]$ **105.** $g^{-1}(x) = \frac{1}{3}(e^{x/2} + 2)$ **107.** La reflexión no es una función, ya que $y = 3^x$ no es uno a uno.
109. $x = 100e^{-0.08t}$

Ejercicio 4-4

1. 4.9177 **3.** −2.8419 **5.** 3.7623 **7.** −2.5128 **9.** 200 800 **11.** 0.000 664 8 **13.** 47.73 **15.** 0.6760
17. 4.959 **19.** 7.861 **21.** 3.301 **23.** 4.561 **25.** $x = 12.725$ **27.** $x = -25.715$ **29.** $x = 1.1709 \times 10^{32}$
31. $x = 4.2672 \times 10^{-7}$

33. **35.** **37.** **39.**



41. El signo de desigualdad en el último paso es opuesto porque $\log \frac{1}{3}$ es negativo. **43.** (B) Dominio = $(1, \infty)$; rango = $(-\infty, \infty)$
45. (0.90, −0.11), (38.51, 3.65) **47.** (6.41, 1.86), (93.35, 4.54) **49.** **51.**

53. (A) 0 decibeles (B) 120 decibeles **55.** 30 decibeles más **57.** 8.6 **59.** 1 000 veces más potente **61.** 7.67 km/s
63. (A) 8.3, básico (B) 3.0, ácido **65.** 6.3×10^{-8} mol/litro

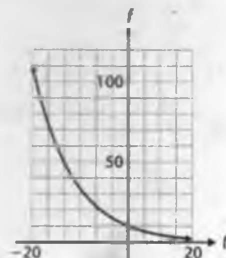
Ejercicio 4-5

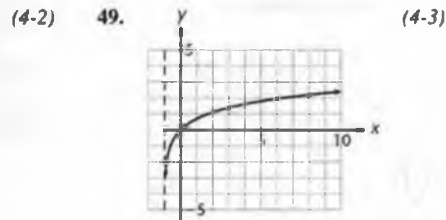
1. $x = 1.46$ **3.** $x = 0.321$ **5.** $x = 1.29$ **7.** $x = 3.50$ **9.** $x = 1.80$ **11.** $x = 2.07$ **13.** $x = 20$ **15.** $x = 5$
17. $x = \frac{11}{9}$ **19.** $x = 14.2$ **21.** $x = -1.83$ **23.** $x = 11.7$ **25.** $x = \pm 1.21$ **27.** $x = 5$ **29.** $x = 2 + \sqrt{3}$
31. $x = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{89})$ **33.** $x = 1, e^2, e^{-2}$ **35.** $x = e^e$ **37.** $x = 0.1, 100$ **39.** (B) 2 **41.** (B) −1.252, 1.707
43. 3.6776 **45.** −1.6094 **47.** −1.7372 **49.** $r = \frac{\ln(A/P)}{t}$ **51.** $I = I_0(10^{D/10})$ **53.** $I = I_0[10^{(6-M)/2.5}]$
55. $t = \frac{-L}{R}\ln\left(1 - \frac{RI}{E}\right)$ **57.** $x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$ **59.** $x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$
61. **63.** **65.** 0.38 **67.** 0.55 **69.** 0.57 **71.** 0.85 **73.** 0.43

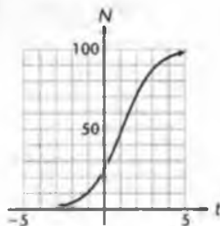
75. 0.27 **77.** Aproximadamente 5 años **79.** 9.16% **81.** (A) 6 (B) 100 veces más brillante
83. Aproximadamente 35 años **85.** 18 600 años de antigüedad **87.** 7.52 s **89.** $k = 0.40$; $t = 2.9$ h **91.** 10 años

Ejercicio de repaso del capítulo 4

1. $\log m = n$ *(4-3)* **2.** $\ln x = y$ *(4-3)* **3.** $x = 10^y$ *(4-3)* **4.** $y = e^x$ *(4-3)* **5.** 7^{2x} *(4-1)* **6.** e^{2x^2} *(4-1)*
7. $x = 8$ *(4-3)* **8.** $x = 5$ *(4-3)* **9.** $x = 3$ *(4-3)* **10.** $x = 1.24$ *(4-3)* **11.** $x = 11.9$ *(4-3)* **12.** $x = 0.984$ *(4-3)*
13. $x = 103$ *(4-3)* **14.** $x = 4$ *(4-3)* **15.** $x = 2$ *(4-3)* **16.** $x = -1, 3$ *(4-2)* **17.** $x = 1$ *(4-1)* **18.** $x = \pm 3$ *(4-2)*
19. $x = -2$ *(4-3)* **20.** $x = \frac{1}{3}$ *(4-3)* **21.** $x = 64$ *(4-3)* **22.** $x = e$ *(4-3)* **23.** $x = 33$ *(4-3)* **24.** $x = 1$ *(4-3)*
25. 1.145 *(4-3)* **26.** No está definido *(4-3)* **27.** 2.211 *(4-3)* **28.** 11.59 *(4-3)* **29.** $x = 41.8$ *(4-1)*
30. $x = 1.95$ *(4-3)* **31.** $x = 0.0400$ *(4-3)* **32.** $x = -6.67$ *(4-3)* **33.** $x = 1.66$ *(4-3)* **34.** $x = 2.32$ *(4-5)*
35. $x = 3.92$ *(4-5)* **36.** $x = 92.1$ *(4-5)* **37.** $x = 2.11$ *(4-5)* **38.** $x = 0.881$ *(4-5)* **39.** $x = 300$ *(4-5)*
40. $x = 2$ *(4-5)* **41.** $x = 1$ *(4-5)* **42.** $x = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{13})$ *(4-5)* **43.** $x = 1, 10^3, 10^{-3}$ *(4-5)* **44.** $x = 10^e$ *(4-5)*
45. $e^{-x} - 1$ *(4-2)* **46.** $2 - 2e^{-2x}$ *(4-2)*
47. *(4-1)* **48.** *(4-2)* **49.** *(4-3)*





50. 

(4-2) **51.** $y = -e^x$; $y = (\frac{1}{e})^x = e^{-x}$ *(4-3)*

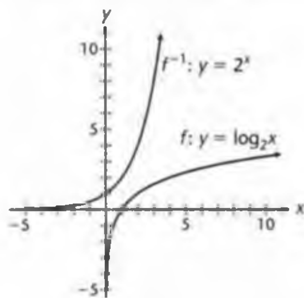
52. (A) $y = e^{-x/3}$ está disminuyendo, mientras $y = 4 \ln (x + 1)$ está aumentando sin límite. (B) 0.258 *(4-5)* **53.** 0.018, 2.187 *(4-3)*

54. (1.003, 0.010), (3.653, 4.502) *(4-4)* **55.** $I = I_0(10^{D/10})$ *(4-5)* **56.** $x = \pm\sqrt{-2 \ln (\sqrt{2\pi}y)}$ *(4-5)* **57.** $I = I_0(e^{-kx})$ *(4-5)*

58. $n = -\dfrac{\ln [1 - (Pi/r)]}{\ln (1 + i)}$ *(4-5)* **59.** $f^{-1}(x) = e^{x/2} + 1$ *(4-5, 2-7)* **60.** $f^{-1}(x) = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$ *(4-5, 2-6)*

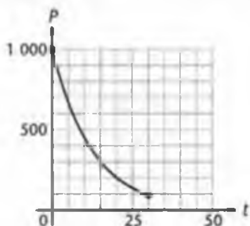
61. $y = ce^{-5t}$ *(4-3, 4-5)*

62. Dominio $f = (0, \infty) =$ Rango f^{-1} *(4-3)*
Rango $f = (-\infty, \infty) =$ Dominio f^{-1}



63. Si $\log_1 x = y$, entonces se tiene $1^y = x$; esto es, $1 = x$ para un x positivo arbitrario, el cual es imposible. *(4-3)* **65.** 23.4 años *(4-5)*

66. 23.1 años *(4-5)* **67.** 37 100 años *(4-5)* **68.** (A) $N = 2^{2t}$ o $N = 4^t$ (B) 15 días *(4-5)* **69.** \$1.1 × 10^{26} *(4-2)*

70. (A) 

(B) 0 *(4-2)* **71.** 6.6 *(4-4)* **72.** 7.08 × 10^{16} joules *(4-4)*

73. 50 decibeles más *(4-4)* **74.** $k = 0.009\,42$; 489 pies *(4-2)* **75.** 3 años *(4-5)*

Ejercicio de repaso acumulativo de los capítulos 3 y 4

1. (A) $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)(x - 2)$ (B) $P(x) \to \infty$ como $x \to \infty$ y como $x \to -\infty$ *(3-1)*

2. $3x^3 + 5x^2 - 18x - 3 = (x + 3)(3x^2 - 4x - 6) + 15$ *(3-1)* **3.** −2, 3, 5 *(3-2)*

4. $P(1) = -5$ y $P(2) = 5$ son de signo opuesto *(3-3)* **5.** 1, 2, −4 *(3-2)*

6. $\dfrac{3}{x + 1} + \dfrac{2}{x - 2}$ *(3-5)* **7.** (A) $x = \log y$ (B) $x = e^y$ *(4-4)* **8.** (A) $8e^{3x}$ (B) e^{5x} *(4-2)*

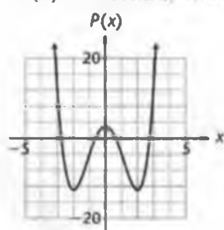
9. (A) 9 (B) 4 (C) $\frac{1}{2}$ *(4-3)* **10.** (A) 0.371 (B) 11.4 (C) 0.0562 (D) 15.6 *(4-4)*

11. $f(x) = 3 \ln x - \sqrt{x}$ *(4-3)*

12. La función f multiplica la base e elevada a la potencia $\frac{1}{2}$ del elemento del dominio por 100 y después le resta 50. *(4-2)*

13. $P(\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$ *(3-2)* **14.** Inciso (B) *(3-1)*

15. (A) La gráfica de $P(x)$ tiene cuatro intersecciones, el eje x y tres puntos de retorno; (B) 2.8 *(3-1, 3-3)*
$P(x) \to \infty$ como $x \to \infty$ y como $x \to -\infty$



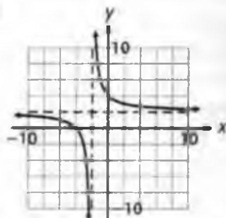
16. (A) Límite superior: 4; límite inferior: -6 (B) 3.80 (C) $-5.68, 3.80$ *(3-3)*

17. $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1$, $R = -2$, $P(2) = -2$ *(3-2)* **18.** $3, 1 \pm \frac{1}{2}i$ *(3-2)*

19. $-4, -1, \pm\sqrt{3}$; $P(x) = (x + 4)(x + 1)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$ *(3-2)* **20.** $x \le -2$ o $3 \le x \le 6$; $(-\infty, -2] \cup [3, 6]$ *(3-2)*

21. 2.23 *(3-3)* **22.** $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2}$ *(3-5)* **23.** $-\frac{2}{x} + \frac{3x-1}{x^2 - x + 1}$ *(3-5)*

24. (A) Dominio: $x \ne -2$; intersección con el eje x: -4; intersección con el eje y: 4.
(B) Asíntota vertical: $x = -2$
Asíntota horizontal: $y = 2$
(C) *(3-4)*

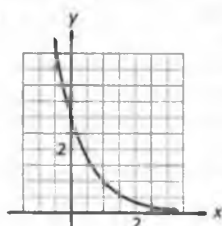


25. $x = -2, 4$ *(4-1)* **26.** $x = -1, \frac{1}{2}$ *(4-2)* **27.** $x = 2.5$ *(4-3)* **28.** $x = 10$ *(4-3)* **29.** $x = \frac{1}{27}$ *(4-3)*

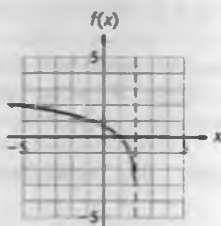
30. $x = 5$ *(4-5)* **31.** $x = 7$ *(4-5)* **32.** $x = 5$ *(4-5)* **33.** $x = e^{0.1}$ *(4-4)* **34.** $x = 1, e^{0.5}$ *(4-5)*

35. $x = 3.38$ *(4-5)* **36.** $x = 4.26$ *(4-4)* **37.** $x = 2.32$ *(4-4)* **38.** $x = 3.67$ *(4-5)* **39.** $x = 0.549$ *(4-5)*

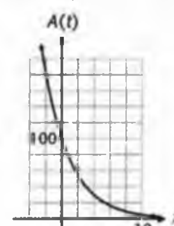
40. *(4-1)*



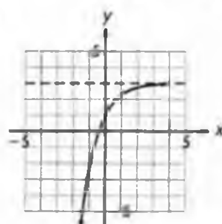
41. *(4-4)*



42. *(4-2)*



43. *(4-2)*



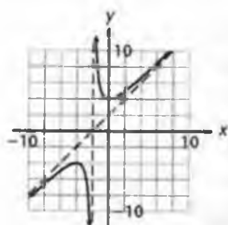
44. Una reflexión en el eje x transforma la gráfica de $y = \ln x$ en la gráfica de $y = -\ln x$. Una reflexión en el eje y transforma la gráfica de $y = \ln x$ en la gráfica de $y = \ln(-x)$. *(4-3)*

45. (A) Para $x > 0$, $y = e^{-x}$ disminuye de 1 a 0, mientras $\ln x$ aumenta de $-\infty$ a ∞. Consecuentemente, las gráficas se pueden intersectar exactamente en un punto. (B) 1.31 *(4-3)*

46. Sí, por ejemplo: $P(x) = (x + i)(x - i)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = x^4 - x^2 - 2$ *(3-2)*

47. (A) Límite superior: 20; límite inferior: -30 (B) $-26.29, -6.22, 7.23, 16.67$ *(3-3)*

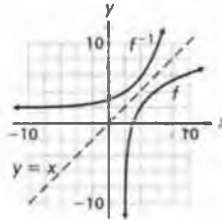
48. Asíntota vertical: $x = -2$ **49.** $P(x) = (x + 1)^2x^3(x - 3 - 5i)(x - 3 + 5i)$; grado 7 *(3-2)*
Asíntota oblicua: $y = x + 2$ *(3-4)*



50. -1 (raíz doble), $2, 2 \pm i\sqrt{2}$; $P(x) = (x + 1)^2(x - 2)(x - 2 - i\sqrt{2})(x - 2 + i\sqrt{2})$ *(3-2)*

51. -2 (raíz doble), $-1.88, 0.35, 1.53$ *(3-3)* **52.** $\frac{-2}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2x+3}{x^2 + x + 2}$ *(3-5)*

53. (A) $f^{-1}(x) = e^{x/3} + 2$
(B) Dominio $f = (2, \infty) =$ Rango f^{-1}
Rango $f =$ Dominio $f^{-1} = (-\infty, \infty)$
(C) *(4-5)*



54. $n = \dfrac{\ln(1 + Ai/P)}{\ln(1 + i)}$ *(4-5)*

55. $y = Ae^{5t}$ *(4-5)* **56.** $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 2})$ *(4-5)* **57.** $x = 2$ pies y $y = 2$ pies o $x = 1.3$ pies y $y = 4.8$ pies *(3-2)*
58. 1.8 por 3.3 pies *(3-3)* **59.** (A) 46.8 millones (B) 103 millones *(4-1)* **60.** 10.2 años *(4-5)* **61.** 9.90 años *(4-5)*
62. 63.1 veces más potente *(4-4)* **63.** 6.31×10^{-4} W/m² *(4 – 4)*

CAPÍTULO 5

Ejercicio 5-1

1. $(-1, 0)$ **3.** $(1, 0)$ **5.** $(-1, 0)$ **7.** $(0, -1)$ **9.** $(0, -1)$ **11.** $(0, -1)$ **13.** $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
15. $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ **17.** $(1/2, -\sqrt{3}/2)$ **19.** $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ **21.** $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ **23.** $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$
25. a, −; b, + **27.** a, −; b, + **29.** a, +; b, − **31.** a, −; b, − **33.** a, +; b, + **35.** 0; $2k\pi$, k cualquier entero
37. $3\pi/4$; $3\pi/4 + 2k\pi$, k cualquier entero
39. $W(x)$ son las coordenadas de un punto en un círculo unitario que está a $|x|$ unidades de (1, 0), en dirección contraria a la de las manecillas del reloj si x es positiva y en dirección de las manecillas del reloj si x es negativa. $W(x + 4\pi)$ tiene las mismas coordenadas que $W(x)$, ya que se regresa al mismo punto cada vez que se va alrededor del círculo unitario cualquier múltiplo entero de 2π unidades (la circunferencia del círculo) en cualquier dirección.
41. V **43.** F **45.** V **47.** $-7\pi/4, \pi/4$ **49.** $-4\pi/3, 2\pi/3$ **51.** $-5\pi/6, 7\pi/6$ **53.** $x = \pi/4 + 2k\pi$, k cualquier entero.

Ejercicio 5-2

1. (A) a (B) $1/b$ (C) a/b (D) $1/a$ (E) b/a (F) b **3.** 1 **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** 1 **9.** $\sqrt{3}$
11. No está definido **13.** 1 **15.** $\sqrt{2}$ **17.** 1 **19.** No está definido **21.** Cuadrante II o III **23.** Cuadrante I o II
25. Cuadrante II o IV **27.** −0.6573 **29.** −14.60 **31.** 1.000 **33.** −1 **35.** 0 **37.** $1/\sqrt{2}$ **39.** No está definido
41. $-1/\sqrt{3}$ **43.** $\sqrt{3}/2$ **45.** 2 **47.** 1 **49.** (A) sen 0.4 = 0.4 (B) cos 0.4 = 0.9 (C) tan 0.4 = 0.4
51. (A) sec 2.2 = −2 (B) tan 5.9 = −0.4 (C) cot 3.8 = 1
53. sen $x < 0$ en los cuadrantes III y IV, cot $x < 0$ en los cuadrantes II y IV; por tanto, ambos son verdaderos en el cuadrante IV.
55. cos $x < 0$ en los cuadrantes II y III, sec $x > 0$ en los cuadrantes I y IV; por tanto, no es posible que ambos sean verdaderos para el mismo valor de x.
57. Ninguno **59.** $\pi/2, 3\pi/2$ **61.** $\pi/2, 3\pi/2$ **63.** (A) 0 a 1 (B) 1 a 0 (C) 0 a −1 (D) −1 a 0
65. 0.8138 **67.** 0.5290 **69.** $\frac{1}{2}$ **71.** $\sqrt{3}$ **73.** −5
75. sen $x = -\sqrt{3}/2$, tan $x = -\sqrt{3}$, cot $x = -1/\sqrt{3}$, csc $x = -2/\sqrt{3}$, sec $x = 2$
77. cos $x = -1/\sqrt{2}$, tan $x = 1$, cot $x = 1$, csc $x = -\sqrt{2}$, sec $x = -\sqrt{2}$
79. cot $x = 1/\sqrt{3}$, sen $x = -\sqrt{3}/2$, cos $x = -\frac{1}{2}$, csc $x = -2/\sqrt{3}$, sec $x = -2$ **81.** π **83.** $5\pi/6$ **85.** $5\pi/6$
87. (A) Identidad (5) (B) Identidad (9) (C) Identidad (1) **89.** 75 m² **91.** $12\sqrt{3} \approx 20.78$ pulg²
93. $a_1 = 0.5$, $a_2 = 1.377\,583$, $a_3 = 1.569\,596$, $a_4 = 1\,570\,796$; $a_5 = 1\,570\,796$; $\pi/2 = 1.570\,796$

Ejercicio 5-3

1. 40° **3.** 270° **5.** 405° **7.** 6 **9.** 2.5 **11.** $\pi/4$ **13.** $3\pi/2$ **15.** $13\pi/6$ **17.** $\pi/6, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, 5\pi/6, \pi$
19. $-\pi/4, -\pi/2, -3\pi/4, -\pi$ **21.** 60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360° **23.** −90°, −180°, −270°, −360° **25.** 5.859°
27. 354.141° **29.** 3°2′31″ **31.** 403°13′23″ **33.** 1.117 **35.** 1.892 **37.** 0.234 **39.** 53.29° **41.** 64.74°
43. −134.65 **45.** Cuadrante III **47.** Cuadrante II **49.** Cuadrante III **51.** Angulo cuadrantal **53.** Cuadrante IV
55. Cuadrante IV **57.** Cuadrante II **59.** Ángulo cuadrantal **61.** Cuadrante II **63.** Cuadrante III
65. Un ángulo central que mide un radián es un ángulo subtendido por un arco de la misma longitud que la del radio del círculo.
67. Coterminal **69.** Coterminal **71.** Coterminal **73.** No coterminal **75.** Coterminal **77.** Coterminal **79.** 24 000 millas
81. El ángulo de 7.5° y θ tienen un lado en común. (Un polo vertical extendido en Alejandría pasa por el centro de la Tierra.) Los rayos del Sol son esencialmente paralelos cuando llegan a la Tierra. De manera que, los otros dos lados de los ángulos son paralelos, ya que un rayo de Sol hacia el fondo del pozo, cuando se extiende, pasa por el centro de la Tierra. Con base en la geometría se sabe que los ángulos interiores alternados forman una línea que intersecta a dos líneas paralelas que son iguales Por lo tanto, $\theta = 7.5°$.
83. $7\pi/4$ rad **85.** 200 rad **87.** $\pi/26 \approx 0.12$ rad **89.** 12 **91.** 865 000 mi **93.** 33 pies

Ejercicio 5-4

1. $\operatorname{sen}\theta = 4/5$, $\cos\theta = 3/5$, $\tan\theta = 4/3$, $\csc\theta = 5/4$, $\sec\theta = 5/3$, $\cot\theta = 3/4$
3. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{3}/2$, $\cos\theta = -1/2$, $\tan\theta = -\sqrt{3}$, $\csc\theta = 2/\sqrt{3}$, $\sec\theta = -2$, $\cot\theta = -1/\sqrt{3}$
5. 0.4226 **7.** −1.573 **9.** 0.8439 **11.** −0.3363 **13.** 0.9174 **15.** 0 **17.** $\sqrt{3}$ **19.** $1/\sqrt{2}$ **21.** $\sqrt{2}$
23. No está definido **25.** No está definido **27.** 60° **29.** $\pi/6$ **31.** $\pi/3$ **33.** $-1/2$ **35.** 0 **37.** $-1/\sqrt{3}$ **39.** $\sqrt{3}/2$
41. $1/\sqrt{2}$ **43.** 2 **45.** $-\sqrt{3}$ **47.** $-\sqrt{3}/2$ **49.** Definido para todo θ, ya que $\cos\theta = a/r$ y r nunca es cero.
51. 90° y 270°, ya que $\tan\theta = b/a$ y $a = 0$ en $\theta = 90°, 270°$ **53.** 0° y 180°, ya que $\csc\theta = r/b$ y $b = 0$ en $\theta = 0°$ y 180°
55. 120° o $2\pi/3$ rad **57.** 210° o $7\pi/6$ rad **59.** 240° o $4\pi/3$ rad
61. $\cos\theta = -4/5$, $\tan\theta = -3/4$, $\csc\theta = 5/3$, $\sec\theta = -5/4$, $\cot\theta = -4/3$
63. $\operatorname{sen}\theta = -2/3$, $\tan\theta = 2/\sqrt{5}$, $\csc\theta = -3/2$, $\sec\theta = -3/\sqrt{5}$, $\cot\theta = \sqrt{5}/2$
65. Tangente y secante, ya que $\tan\theta = b/a$ y $\sec\theta = r/a$ y $a = 0$ si $P(a, b)$ está sobre el eje vertical (la división entre cero no está definida)
67. 150°, 210° **69.** $\pi/4$, $5\pi/4$ **71.** (A) 1.75 rad (B) (−0.713, 3.936) **73.** 9.27 unidades
75. (A) k, $0.866k$, $0.5k$ (B) 75.5° **79.** (A) 3.31371, 3.14263, 3.14160, 3.14159 (B) $\pi = 3.1315926\cdots$
81. (A) 44.07; −0.32 (B) $y = -0.93x + 1.27$

Ejercicio 5-5

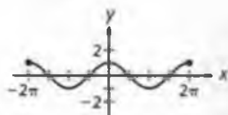
1. b/c **3.** c/b **5.** b/a **7.** $\cos\theta$ **9.** $\sec\theta$ **11.** $\cot\theta$ **13.** 60.55° **15.** 82.90° **17.** 37.09°
19. $\alpha = 72.2°$, $a = 3.28$, $b = 1.05$ **21.** $\alpha = 46°40'$, $b = 116$, $c = 169$ **23.** $\beta = 67°0'$, $b = 127$, $c = 138$
25. $\beta = 36.79°$, $a = 31.85$, $c = 39.77$ **27.** $\alpha = 35°20'$, $\beta = 54°40'$, $c = 10.4$ **29.** $\alpha = 37°30'$, $\beta = 52°30'$, $a = 7.67$
31. (A) $\cos\theta = OA/1 = OA$ (B) Ángulo $OED = \theta$; $\cot\theta = DE/1 = DE$ (C) $\sec\theta = OC/1 = OC$
33. (A) Conforme θ tiende a 90°, $OA = \cos\theta$ tiende a 0 (B) Conforme θ tiende a 90°, $DE = \cot\theta$ tiende a 0.
(C) Conforme θ tiende a 90°, $OC = \sec\theta$ aumenta sin límite.
35. (A) Conforme θ tiende a 0°, $AD = \operatorname{sen}\theta$ tiende a 0 (B) Conforme θ tiende a 0°, $CD = \tan\theta$ tiende a 0.
(C) Conforme θ tiende a 0°, $OE = \csc\theta$ aumenta sin límite.
39. 228 pies **41.** 127.5 pies **43.** 2 225 millas **45.** 44° **47.** 9.8 m/s² **49.** (B)

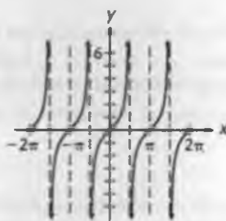
θ	$C(\theta)$
10°	$368 222
20°	$363 435
30°	$360 622
40°	$360 146
50°	$363 050

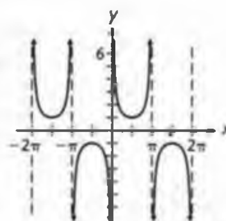
51. 0.77 m

Ejercicio 5-6

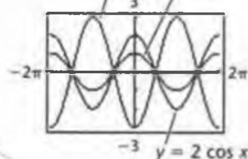
1. $2\pi, \pi, 2\pi$ **3.** (A) 1 unidad (B) Indefinidamente lejos (C) Indefinidamente lejos
5. (A) $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$ (B) $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ (C) No hay intersecciones con el eje x
7. (A) Ninguna (B) $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ (C) $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$
9. (A) No tiene asíntotas verticales (B) $-3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2$ (C) $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$
11. (A) $y = \cos x$ (B) $y = \tan x$ (C) $y = \csc x$





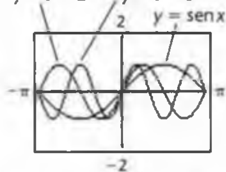


13. (A) Un corrimiento de $\pi/2$ a la izquierda transforma la gráfica de la cosecante en la gráfica de la secante. [La respuesta no es única (véase el inciso (B).]
(B) La gráfica de $y = -\csc(x - \pi/2)$ es un corrimiento de $\pi/2$ a la derecha y una reflexión en el eje de las x de la gráfica de $y = \csc x$. El resultado es la gráfica de $y = \sec x$.
15. (A)

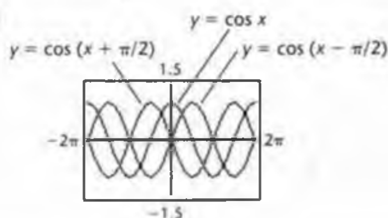


(B) No (C) 1 unidad; 2 unidades; 3 unidades
(D) La desviación de la gráfica con respecto al eje x cambia conforme cambia A. La desviación parece ser $|A|$.

17. (A) (B) 1; 2; 3 (C) n



19. (A)



(B) La gráfica de $y = \cos x$ está corrida $|C|$ unidades a la derecha si $C < 0$ y $|C|$ unidades a la izquierda si $C > 0$.

21. En cada caso, el número no está en el dominio de la función, y aparece algún mensaje de error.

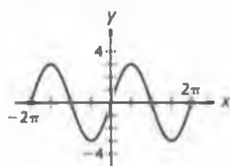
23. (A) Ambas gráficas son casi indistinguibles cuanto más se acercan a x en el origen.

(B)

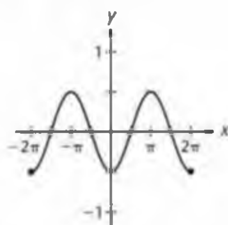
x	−0.3	−0.2	−0.1	0.0	0.1	0.2	0.3
sen x	−0.296	−0.199	−0.100	0.000	0.100	0.199	0.296

Ejercicio 5-7

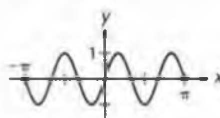
1. $A = 3,\ P = 2\pi$



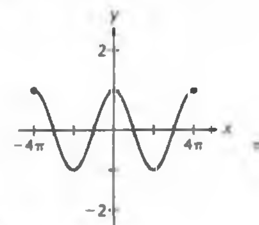
3. $A = \frac{1}{2},\ P = 2\pi$



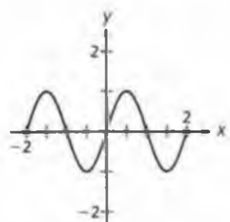
5. $A = 1,\ P = 2\pi/3$



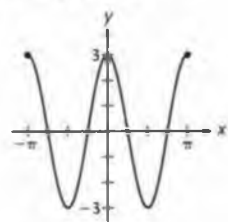
7. $A = 1,\ P = 4\pi$



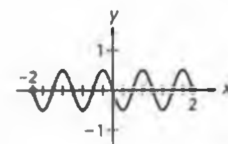
9. $A = 1,\ P = 2$



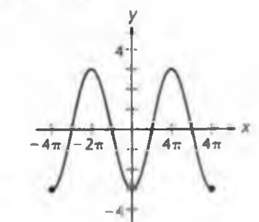
11. $A = 3,\ P = \pi$



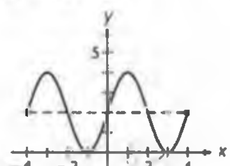
13. $A = \frac{1}{2},\ P = 1$



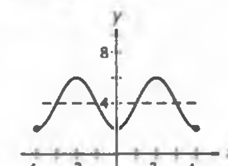
15. $A = 3,\ P = 4\pi$



17. $A = 2,\ P = 4$



19. $A = 2,\ P = 4\pi$

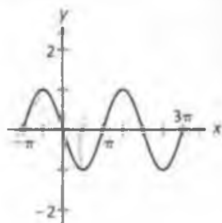


21. $y = 3 \operatorname{sen} 4x,\ -\pi/4 \le x \le \pi/2$

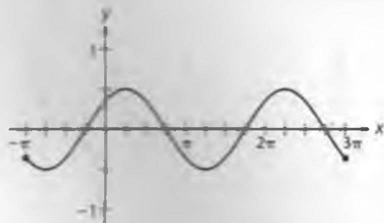
23. $y = -10 \operatorname{sen} \pi x,\ -1 \le x \le 2$ **25.** $y = 5 \cos (x/4),\ -4\pi \le x \le 8\pi$ **27.** $y = -0.5 \cos (\pi x/4),\ -4 \le x \le 8$

29. $y = \cos 2x$ **31.** $y = 1 - \cos 2x$

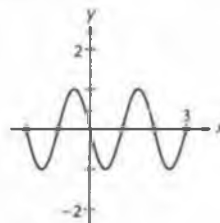
33. $A = 1$, $P = 2\pi$
Corrimiento de fase $= -\pi$



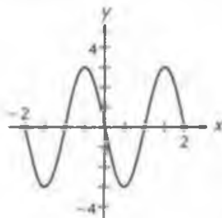
35. $A = \frac{1}{2}$, $P = 2\pi$
Corrimiento de fase $= \pi/4$



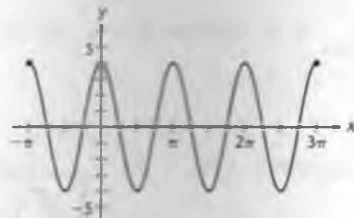
37. $A = 1$, $P = 2$
Corrimiento de fase $= 1$



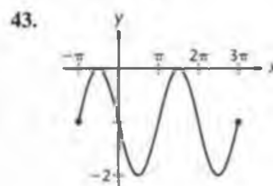
39. $A = 3$, $P = 2$
Corrimiento de fase $= -\frac{1}{2}$



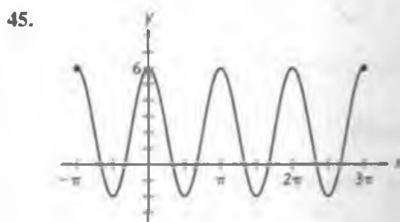
41. $A = 4$, $P = \pi$
Corrimiento de fase $= \pi/2$



43.



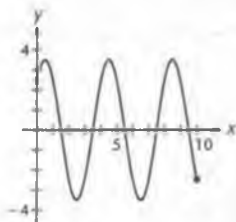
45.



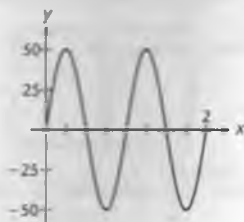
47. $y = -4\ \text{sen}(\pi x/2 - \pi/2)$

49. $y = \frac{1}{2}\cos(x/4 - 3\pi/4)$

51. $A = 3.5$, $P = 4$
Corrimiento de fase $= -0.5$



53. $A = 50$, $P = 1$
Corrimiento de fase $= 0.25$

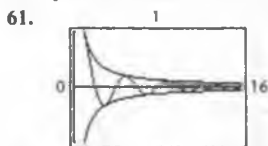


55. $y = 2\ \text{sen}(x + 0.785)$

57. $y = 2\ \text{sen}(x - 0.524)$

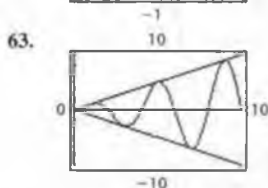
59. $y = 5\ \text{sen}(2x - 0.284)$

61.



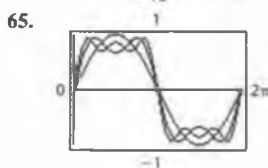
La amplitud está disminuyendo con el tiempo. Esto frecuentemente es referido como una **onda senoidal amortiguada.** Los ejemplos son automóviles en movimiento vertical, el cual se amortigua por el sistema de suspensión después de que el carro tiene un choque y el decaimiento lento de un péndulo que se ha liberado de una línea vertical de suspensión (resistencia del aire y fricción).

63.

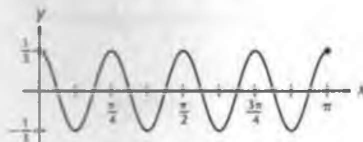


La amplitud está aumentando con el tiempo. En sistemas físicos y eléctricos esto se llama **resonancia**. Algunos ejemplos son el balanceo de un puente cuando hay vientos fuertes y el movimiento de edificios altos durante un terremoto. Algunos puentes y edificios se destruyen cuando la resonancia alcanza límites elásticos de la estructura.

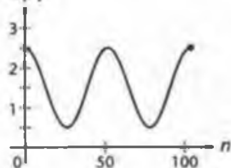
65.



67. $A = \frac{1}{3}$, $P = \pi/4$

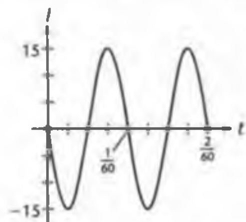


69. $y = -8\cos 4\pi t$

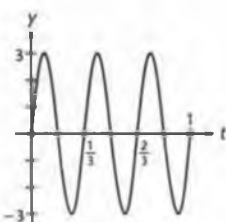
71. 

La gráfica muestra los cambios de estación del contaminante bióxido de sulfuro en la atmósfera; se produce más durante los meses de invierno debido al aumento de calor

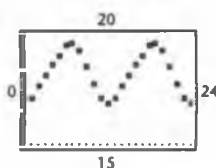
73. $A = 15, P = \frac{1}{60}$
Corrimiento de fase $= -\frac{1}{240}$



75. $A = 3, P = \frac{1}{3}$

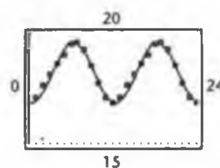


77. (A)

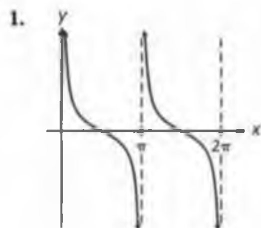


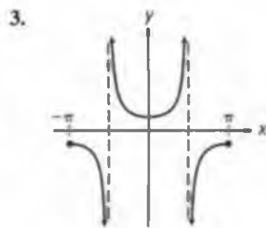
(B) $y = 18.22 + 1.37 \text{ sen } (\pi x/6 - 1.75)$

(C)

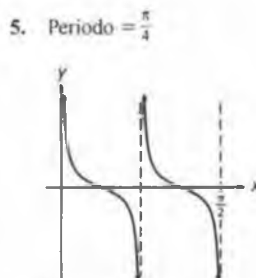


Ejercicio 5-8

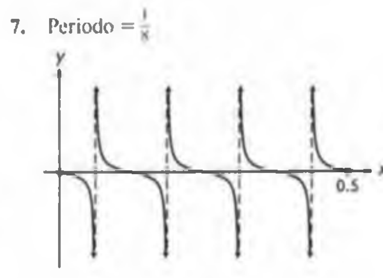
1. 

3. 

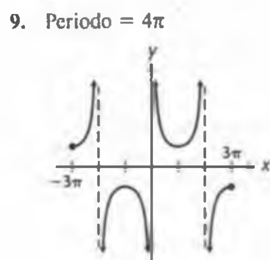
5. Periodo $= \frac{\pi}{4}$



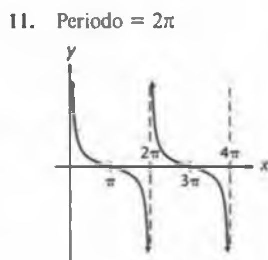
7. Periodo $= \frac{1}{8}$



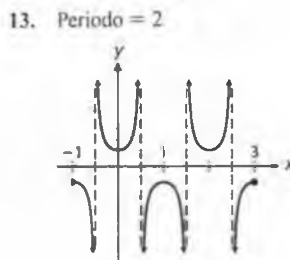
9. Periodo $= 4\pi$



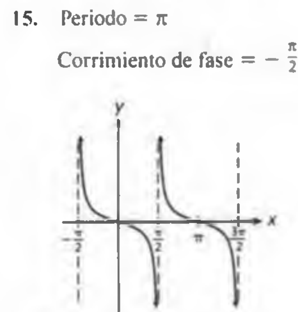
11. Periodo $= 2\pi$



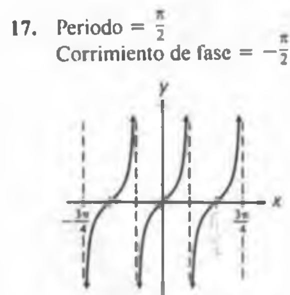
13. Periodo = 2



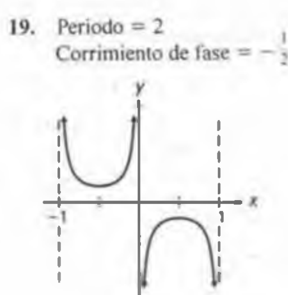
15. Periodo $= \pi$
Corrimiento de fase $= -\frac{\pi}{2}$



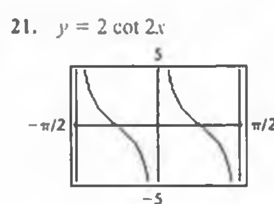
17. Periodo $= \frac{\pi}{2}$
Corrimiento de fase $= -\frac{\pi}{2}$



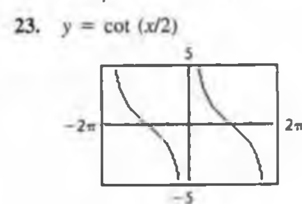
19. Periodo = 2
Corrimiento de fase $= -\frac{1}{2}$



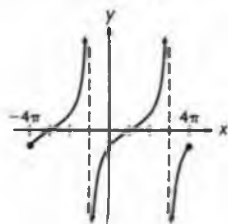
21. $y = 2 \cot 2x$



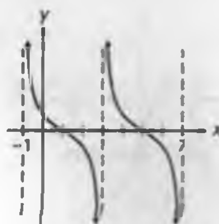
23. $y = \cot (x/2)$



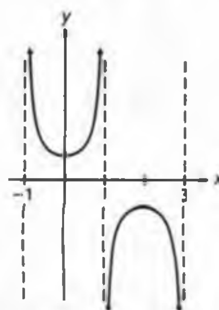
25. Periodo = 4π
Corrimiento de fase = π



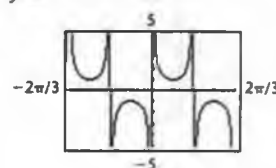
27. Periodo = 4
Corrimiento de fase = 1



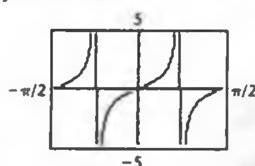
29. Periodo = 4
Corrimiento de fase = -1



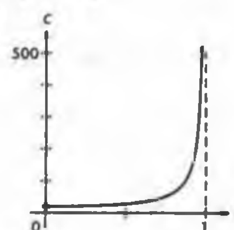
31. $y = \csc 3x$



33. $y = \tan 2x$



35. (A) $c = 20 \sec (\pi t/2)$, [0, 1). (B)

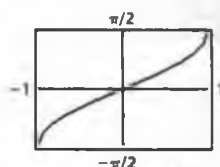


(C) La longitud de un haz de luz empieza en 20 pies y aumenta rápidamente sin límite.

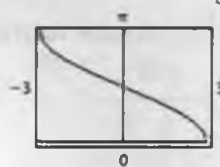
Ejercicio 5-9

1. $\pi/2$ **3.** $\pi/3$ **5.** $\pi/3$ **7.** $\pi/4$ **9.** 0 **11.** $\pi/6$ **13.** 1.144 **15.** 1.561 **17.** No está definido **19.** $-\pi/4$ **21.** $-\pi/3$ **23.** π **25.** $-\pi/2$ **27.** 25 **29.** 2.3 **31.** 1/2 **33.** $-\sqrt{2}$ **35.** -1.472 **37.** -0.9810 **39.** 2.645 **41.** $-45°$ **43.** $-60°$ **45.** $180°$ **47.** $43.51°$ **49.** $-21.48°$ **51.** $-89.93°$
53. $\text{sen}^{-1}(\text{sen } 2) = 1.1416 \neq 2$ Para que la identidad $\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x$ valga, x debe estar en el dominio restringido de la función seno; esto es, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$. El número 2 no está en el dominio restringido.

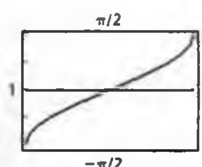
55.



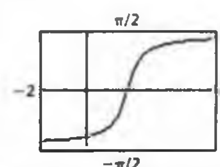
57.



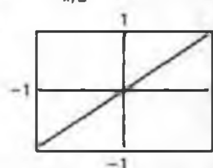
59.



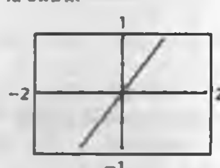
61.



63. (A)

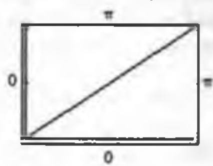


(B) El dominio de $\cos^{-1}$ está restringido $a - 1 \le x \le 1$; por consiguiente, la gráfica no aparece para la otra x.

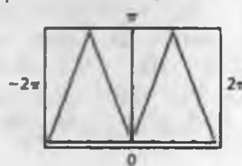


65. $\sqrt{1 - x^2}$ **67.** $1/\sqrt{1 + x^2}$ **69.** $f^{-1}(x) = 3 + \cos^{-1}[(x - 4)/2]$, $2 \le x \le 6$

71. (A)

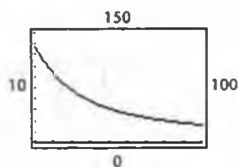


(B) El dominio para $\cos x$ es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $[-1, 1]$ el cual está en el dominio para $\cos^{-1} x$. De manera que, el dominio para $y = \cos^{-1}(\cos x)$ tiene una gráfica en el intervalo $(-\infty, \infty)$, pero $\cos^{-1}(\cos x) = x$ sólo en el dominio restringido de $\cos x$, $[0, \pi]$.

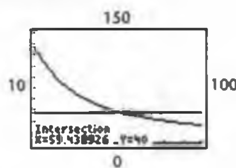


73. 75.38°; 24.41°

75. (A)

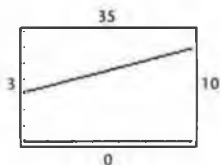


(B) 59.44 mm

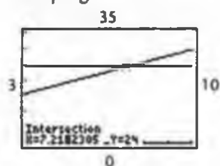


77. 21.59 pulg

79. (A)



(B) 7.22 pulg



81. (B) 76.10 pies

Ejercicio de repaso del capítulo 5

1. 2.5 radianes *(5-1)* **2.** 7.5 cm *(5-1)* **3.** $\alpha = 54.8°$, $a = 16.5$ pies, $b = 11.6$ pies *(5-2)*
4. (A) $\pi/3$ (B) $60°$ (C) $\pi/6$ (D) $30°$ *(5-2, 5-4)* **5.** (A) III, IV (B) II, III (C) II, IV *(5-3)*
6. (A) $-\frac{3}{5}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $-\frac{4}{3}$ *(5-3)*
7.

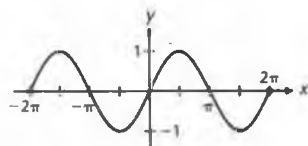
θ°	θ rad	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
0	0	0	1	0	ND*	1	ND
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\pi/4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2	$1/\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	ND	1	ND	0
180	π	0	-1	0	ND	-1	ND
270	$3\pi/2$	-1	0	ND	-1	ND	0
360	2π	0	1	0	ND	1	ND

*ND = No está definida

(5-4) **8.** (A) 2π (B) 2π (C) π *(5-6)*

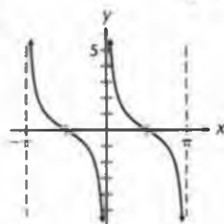
9. (A) Dominio $= (-\infty, \infty)$, rango $= [-1, 1]$
(B) Dominio es el conjunto de todos los números reales excepto $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, k un entero, rango es el conjunto de todos los números reales *(5-6)*

10.



(5-6)

11.

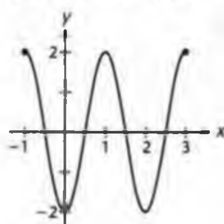


(5-6)

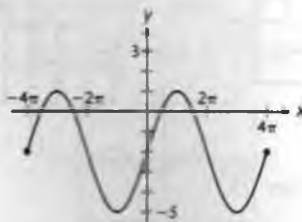
12. El ángulo central en un círculo subtendido por un arco de la mitad de la longitud del radio. *(5-1)*
13. Si la gráfica de $y = \text{sen } x$ está corrida $\pi/2$ unidades a la izquierda, el resultado será la gráfica de $y = \cos x$. *(5-6, 5-7)* **14.** $78.50°$ *(5-1)*
15. $\alpha = 49.7°$, $\beta = 40.3°$ $c = 20.6$ cm *(5-2)* **16.** (A) II (B) Cuadrantal (C) III *(5-1)* **17.** (A) y (C) *(5-1)*
18. (B) y (C) *(5-3, 5-5)* **19.** $\pi/2, 3\pi/2$ (B) $0, \pi$ (C) $0, \pi$ *(5-3, 5-5)*
20. Ya que las coordenadas de un punto en un círculo unitario están dadas por $P(a, b) = P(\cos x, \text{sen } x)$, se evalúa $P(\cos(-8.305), \text{sen}(-8.305))$ (usando calculadora en el modo radián) para obtener $P(-0.436, -0.900)$. Observe que $x = -8.305$, ya que P se mueve en el sentido de las manecillas del reloj. El cuadrante en el cual está $P(a, b)$ se puede determinar por los signos de a y b. En este caso P está en el tercer cuadrante, puesto que a es negativo y b es negativo. *(5-5)*
21. 0 *(5-4)* **22.** No está definido *(5-4)* **23.** 0 *(5-4, 5-9)* **24.** $-1/\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}/2$ *(5-4)* **25.** $\pi/4$ *(5-4, 5-9)*
26. $-2/\sqrt{3}$ o $-2\sqrt{3}/3$ *(5-4)* **27.** $\pi/3$ *(5-4, 5-9)* **28.** $-\frac{1}{2}$ *(5-4)* **29.** $-\pi/4$ *(5-4, 5-9)* **30.** $-1/\sqrt{3}$ o $-\sqrt{3}/3$ *(5-4)*
31. $-\pi/6$ *(5-4, 5-9)* **32.** $5\pi/6$ *(5-4, 5-9)* **33.** 0.33 *(5-4, 5-9)* **34.** $-\sqrt{2}$ *(5-4, 5-9)* **35.** $\sqrt{3}/2$ *(5-4, 5-9)*
36. $-\frac{4}{3}$ *(5-4, 5-9)* **37.** 0.4431 *(5-3)* **38.** -15.17 *(5-3)* **39.** -2.077 *(5-3, 5-5)* **40.** -0.9750 *(5-2, 5-9)*
41. No está definido *(5-2, 5-9)* **42.** 1.557 *(5-2, 5-9)* **43.** 1.095 *(5-9)* **44.** No está definido *(5-9)*
45. (A) $\theta = -30°$ (B) $\theta = 120°$ *(5-9)* **46.** (A) $\Theta = 151.20°$ (B) $\Theta = 82.28°$ *(5-9)*

47. $\cos^{-1}[\cos(-2)] = 2$. Para que la identidad $\cos^{-1}(\cos x) = x$ valga, x debe estar en el dominio restringido de la función coseno; esto es, $0 \le x \le \pi$. El número -2 no está en el dominio restringido. *(5-9)*

48. $A = 2, P = 2$ *(5-7)*



49. *(5-7)*



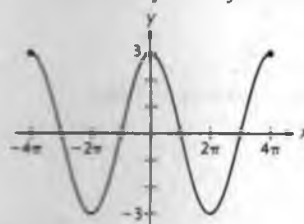
50. $y = 6\cos 2x, -\pi/2 \le x \le \pi$ *(5-7)*

51. $y = -0.5 \operatorname{sen} \pi x, -1 \le x \le 2$ *(5-7)*

52. Si la gráfica de $y = \tan x$ está corrida $\pi/2$ unidades a la derecha y se refleja con respecto al eje x, el resultado será la gráfica de $y = \cot x$. *(5-6, 5-7)*

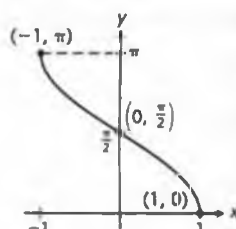
53. (A) $\cos x$ (B) $\tan^2 x$ *(5-5)*

54. *(5-7)*

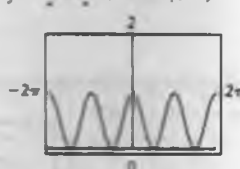


55. $A = 2, P = 4$, corrimiento de fase $= \frac{1}{2}$ *(5-7)*

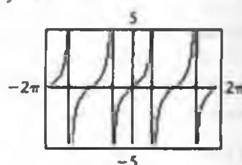
56. $y = \cos^{-1} x = \arccos x$ *(5-9)*
Dominio $= [-1, 1]$
Rango $= [0, \pi]$



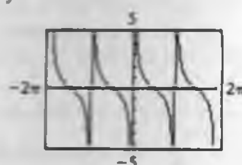
57. $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ *(5-7)*



58. (A) $y = \tan x$

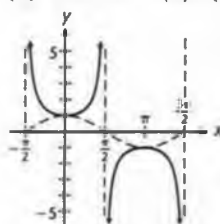


(B) $y = \cot x$ *(5-8)*

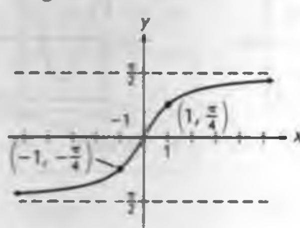


59. (A) 2.5 rad (B) $(-6.41, 4.79)$ *(5-1, 5-3)* **60.** (A) $2\pi/3$ (B) $5\pi/4$ *(5-5)*

61. *(5-6)*



62. $y = \tan^{-1} x = \arctan x$ *(5-9)*
Dominio $= (-\infty, \infty)$
Rango $= (-\pi/2, \pi/2)$



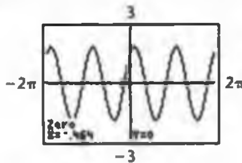
63. $P = 1$; corrimiento de fase $= -\frac{1}{2}$ *(5-8)*

64. Periodo $= 4\pi$; corrimiento de fase $= \pi/2$ *(5-8)* **65.** (A) Origen (B) Eje y (C) Origen *(5-6)* **66.** $1/\sqrt{1 - x^2}$ *(5-9)*

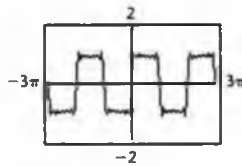
67. Para cada caso, el número no está en el dominio de la función y el mensaje de error aparecerá. *(5-5, 5-9)*

68. $y = 2\operatorname{sen}(\pi x + \pi/4)$ *(5-7)*

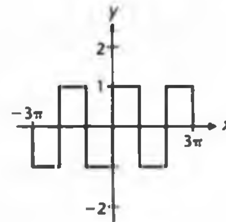
69. $y = 2\,\text{sen}(2x + 0.928)$ *(5-7)*



70. (A)



(B)



(5-7)

71. $2\pi/5$ rad *(5-1)* **72.** 28.3 cm *(5-2)* **73.** $I = 30 \cos 120\pi t$ *(5-7)*

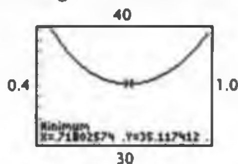
74. (A) $L = 10 \csc \theta + 15 \sec \theta,\ 0 < \theta < \pi/2$

(B) La longitud del tronco más largo que puede hacer la esquina es de 35 pies.

TABLA 2

θ (rad)	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
L (pies)	42.0	38.0	35.9	35.1	35.5	36.9	39.6

(C) La longitud del tronco más largo que puede hacer la esquina es de 35.1 pies.

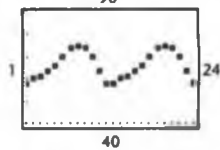


(D) La longitud L aumenta sin fin. *(5-2, 5-5)*

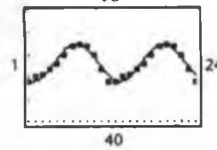
75. (A) $y = 4 - 3\cos(\pi t/6)$

(B) La gráfica muestra los cambios de estación en el consumo de refrescos. La mayor cantidad se consume en agosto y la menor en febrero. *(5-7)*

76. (A)



(B) $y = 66.5 + 8.5\,\text{sen}\,[(\pi x/6) - 2.4]$ (C)

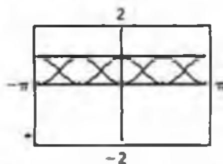


(5-7)

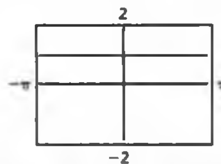
CAPÍTULO 6

Ejercicio 6-1

27.



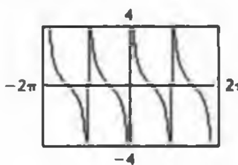
29.



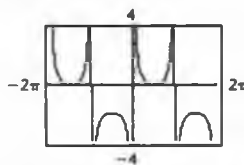
61. No es una identidad **63.** Una identidad **65.** No es una identidad

67. Una identidad **69.** Una identidad **71.** No es una identidad

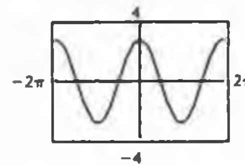
79. $g(x) = \cot x$



81. $g(x) = -1 + \csc x$



83. $g(x) = 3\cos x$



85. III, IV **87.** I, II **89.** Todos los cuadrantes **91.** I, IV **93.** $a \cos x$ **95.** $a \sec x$

Ejercicio 6-2

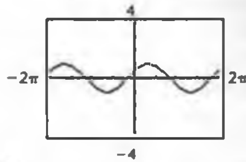
13. $\frac{1}{2}(\cos x - \sqrt{3}\,\text{sen}\,x)$ **15.** $\text{sen}\,x$ **17.** $\dfrac{\tan x + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\tan x}$ **19.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}$ **21.** $\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$ **23.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **25.** 1

27. $\text{sen}(x - y) = \dfrac{-3 - 4\sqrt{8}}{15}$, $\tan(x + y) = \dfrac{4\sqrt{8} - 3}{4 + 3\sqrt{8}}$ **29.** $\text{sen}(x - y) = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$, $\tan(x + y) = \frac{2}{11}$

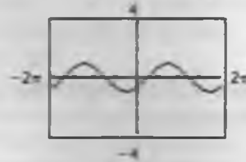
45. −0.3685, −0.3685; 0.9771, 0.9771 **47.** −0.4429, −0.4429; −2.682, −2.682

49. Evalúe cada lado para un conjunto particular de valores de x y y para el cual cada lado está definido. Si el lado izquierdo no es igual al derecho, entonces la ecuación no es una identidad. Por ejemplo, para $x = 2$ y $y = 1$, ambos lados están definidos pero no son iguales.

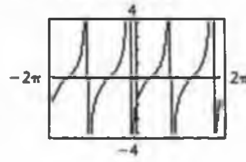
51. $y_1 = \operatorname{sen}(x + \pi/6)$
$y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x$



53. $y_1 = \cos(x - 3\pi/4)$
$y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x$

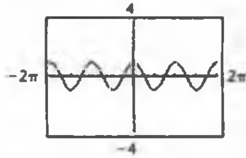


55. $y_1 = \tan(x + 2\pi/3)$
$y_2 = \frac{\tan x - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\tan x}$



57. $\frac{24}{25}$ **59.** $-\frac{1}{2}$ **61.** $xy + (\sqrt{1 - x^2})(\sqrt{1 - y^2})$

65. $y_1 = \cos 1.2x \cos 0.8x - \operatorname{sen} 1.2x \operatorname{sen} 0.8x$
$y_2 = \cos 2x$

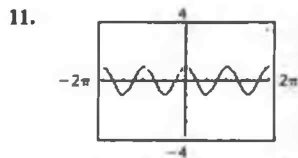


71. (C) 3 510 pies

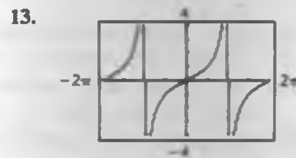
Ejercicio 6-3

1. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ **3.** $-\sqrt{3} = -\sqrt{3}$ **5.** $1 = 1$ **7.** $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ **9.** $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

11.



13.



33. $\operatorname{sen} 2x = -\frac{24}{25}$, $\cos 2x = \frac{7}{25}$, $\tan 2x = -\frac{24}{7}$ **35.** $\operatorname{sen} 2x = -\frac{120}{169}$, $\cos 2x = \frac{119}{169}$, $\tan 2x = -\frac{120}{119}$

37. $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}}$, $\cos\frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}}$, $\tan\frac{x}{2} = -3 - 2\sqrt{2}$ **39.** $\operatorname{sen}\frac{x}{2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\tan\frac{x}{2} = -2$

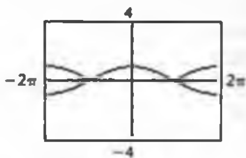
41. (A) 2θ es un ángulo del segundo cuadrante, ya que θ es el ángulo del primer cuadrante y $\tan 2\theta$ es negativo para 2θ en el segundo cuadrante y no para 2θ en el primero.
(B) Construya un triángulo de referencia para 2θ en el segundo cuadrante con $(a, b) = (-3, 4)$. Use el teorema de Pitágoras para encontrar $r = 5$. De manera que, $2\theta = \frac{4}{5}$ y $\cos 2\theta = -\frac{3}{5}$
(C) Las identidades de los ángulos dobles $\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$ y $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$.
(D) Use las identidades en la parte (C) en la forma $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$ y $\cos\theta = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}$

Se usan los radicales positivos porque θ está en el cuadrante I.

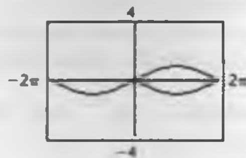
(E) $\operatorname{sen}\theta = 2\sqrt{5}/5$; $\cos\theta = \sqrt{5}/5$

43. (A) $-0.723\ 35 = -0.723\ 35$ (B) $-0.588\ 21 = -0.588\ 21$ **45.** (A) $-3.2518 = -3.2518$ (B) $0.892\ 79 = 0.892\ 79$

47. $y_1 = y_2$ para $[-\pi\ \pi]$

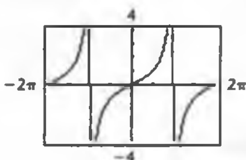


49. $y_1 = y_2$ para $[-2\pi, 0]$

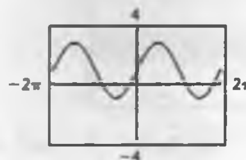


55. $-\frac{7}{25}$ **57.** $-\frac{24}{7}$ **59.** $\sqrt{5}/5$

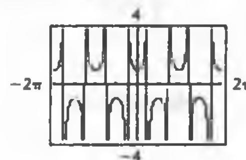
61. $\tan(x/2)$



63. $1 + 2\operatorname{sen} x$



65. $\sec 2x$



67. $x = \frac{224}{17} \approx 13.176$ m; $\theta = 28.955°$ **69.** (A) $d = \dfrac{v_0^2 \text{ sen } 2\theta}{32 \text{ pies } s^2}$ (B) $\theta = 45°$

71. (B)

TABLA 1

n	10	100	1 000	10 000
A_n	2.93893	3.13953	3.14157	3.14159

(C) A_n tiende a π, el área del circulo con radio 1.

(D) A_n no igualará exactamente el área del circulo inscrito para cualquier n sin importar lo larga que se escoja a n; sin embargo, A_n se puede aproximar al área del círculo inscrito tan grande como se desee hacer a n.

Ejercicio 6-4

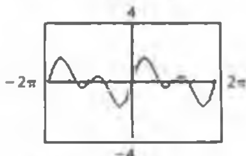
1. $\frac{1}{2}\text{ sen } 4m + \frac{1}{2}\text{ sen } 2m$ **3.** $\frac{1}{2}\cos 2u - \frac{1}{2}\cos 4u$ **5.** $2 \text{ sen } 2t \cos t$ **7.** $2 \text{ sen } 7w \text{ sen } 2w$ **9.** $\dfrac{\sqrt{3}-2}{4}$ **11.** $\frac{1}{4}$

13. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **15.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

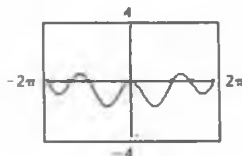
19. Sea $x = u + v$ y $y = u - v$, resuelva el sistema resultante para u y v en términos de x y y, después sustituya los resultados en la primera identidad. La segunda identidad resultará después de una pequeña cantidad de manipulaciones algebraicas.

29. (A) $-0.34207 = -0.34207$ (B) $-0.05311 = -0.05311$ **31.** (A) $-0.19115 = -0.19115$ (B) $-0.46541 = -0.46541$

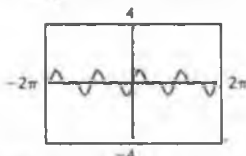
33. $y_2 = 2 \text{ sen } \dfrac{3x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$



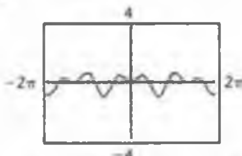
35. $y_2 = -2 \text{ sen } x \text{ sen } 0.7x$



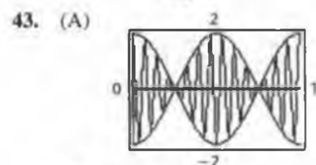
37. $y_2 = \frac{1}{2}(\text{sen } 4x + \text{sen } 2x)$



39. $y_2 = \frac{1}{2}(\cos 1.6x - \cos 3x)$

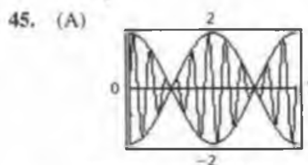


43. (A)



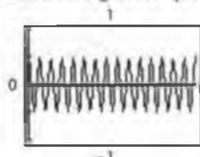
(B) $y_1 = \cos(30\pi x) + \cos(26\pi x)$
La misma gráfica que en el inciso (A)

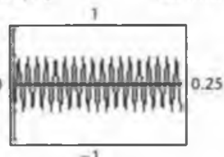
45. (A)

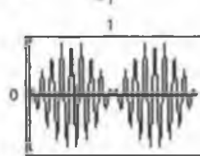


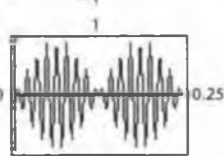
(B) $y_1 = \text{sen}(22\pi x) + \text{sen}(18\pi x)$
La misma gráfica que en el inciso (A)

47. (B)









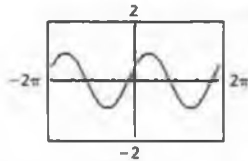
Ejercicio 6-5

1. $7\pi/6$, $11\pi/6$ **3.** $7\pi/6 + 2k\pi$, $11\pi/6 + 2k\pi$, k cualquier entero **5.** $2\pi/3$ **7.** $2\pi/3 + k\pi$, k cualquier entero **9.** 30°, 330°

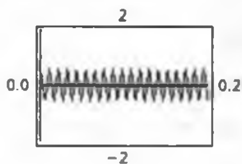
11. $30° + k(360°)$, $330° + k(360°)$, k cualquier entero **13.** 1.1279, 5.1553 **15.** 74.0546°
17. $3.5075 + 2k\pi$, $5.9172 + 2k\pi$, k cualquier entero **19.** 0.3376 **21.** 2.7642 **23.** $k(180°)$, $135° + k(180°)$, k cualquier entero
25. $0, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3$ **27.** $4\pi/3$ **29.** 210°, 330° **31.** 60°, 180°, 300° **33.** $\pi/3, \pi, 5\pi/3$ **35.** 41.81° **37.** 1.911
39. 0.3747, 2.767 **41.** $0.3747 + 2k\pi$, $2.767 + 2k\pi$, k cualquier entero **43.** 0.3747, 2.7669
45. $0.3747 + 2k\pi$, $2.7669 + 2k\pi$, k cualquier entero **47.** $(-1.1530, 1.1530)$ **49.** $[3.5424, 5.3778]$, $[5.9227, \infty)$ **51.** 1.8183
53. $\tan^{-1}(-5.377)$ tiene exactamente un valor, -1.387; la ecuación $\tan x = -5.377$ tiene infinidad de soluciones, las cuales se encuentran al sumar $k\pi$, k cualquier entero, para cada solución en un periodo de $\tan x$.
55. $0, 3\pi/2$ **57.** π **59.** 0.1204, 0.1384
61. (A) La raíz más grande de f es 0.3183. Como x aumenta sin límite, $1/x$ tiende a 0 a través de números positivos, y sen $(1/x)$ tiende a 0 a través de números positivos, $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de f.
(B) Existe un número infinito de raíces entre 0 y b, para cualquier b, sin embargo, pequeña. La exploración de la gráfica sugiere esta conclusión, la cual es reforzada por el siguiente razonamiento: Note que para cada intervalo $(0, b]$, sin embargo, pequeño, conforme x tiende a 0 a través de números positivos, $1/x$ aumenta sin límite, y como $1/x$ aumenta sin límite, sen $1/x$ cruzará el eje x un número ilimitado de veces. La función f no tiene una raíz pequeña, porque entre 0 y b, no importa qué tan pequeña sea b, hay siempre un número ilimitado de raíces.
63. 0.009235 s **65.** 50.77° **67.** 123° **69.** 2.267 rad **71.** (A) 12.4575 mm (B) 2.6496 mm
73. $(r, \theta) = (0, 0), (0, 180°), (0, 360°)$ **75.** $\theta = 45°$

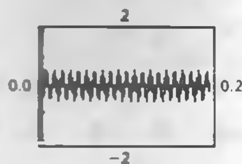
Ejercicio de repaso del capítulo 6

5. $\frac{1}{2}$ (sen 8α + sen 2α) *(6-4)* **6.** -2 sen $6x$ sen x *(6-4)* **7.** $\cos x$ *(6-2)*
8. $135° + k(360°)$, $225° + k(360°)$ k cualquier entero *(6-5)* **9.** $k\pi$, $\pi/4 + k\pi$, k cualquier entero *(6-5)*
10. $0.7878 + 2k\pi$, $2.3538 + 2k\pi$, k cualquier entero *(6-5)* **11.** $75.1849° + k(360°)$, $284.8151° + k(360°)$, k cualquier entero *(6-5)*
12. -1.4032 *(6-5)* **13.** 3.1855 *(6-5)* **14.** (A) No es una identidad (B) Una identidad *(6-1)*
24. $\dfrac{-2-\sqrt{3}}{4}$ *(6-4, 5-4)* **25.** $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ *(6-4, 5-4)* **26.** $\pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$ *(6-5)* **27.** 0°, 120° *(6-5)*
28. $k\pi$, $\pi/6 + 2k\pi$, $5\pi/6 + 2k\pi$, k cualquier entero *(6-5)* **29.** $k\pi$, $\pi/6 + 2k\pi$, $11\pi/6 + 2k\pi$, k cualquier entero *(6-5)*
30. $120° + k(360°)$, $240° + k(360°)$, k cualquier entero *(6-5)* **31.** $14.34° + k(180°)$, k cualquier entero *(6-5)*
32. $0.6259 + 2k\pi$, $2.516 + 2k\pi$, k cualquier entero *(6-5)* **33.** 1.178, 2.749 *(6-5)* **34.** 1.4903 *(6-5)* **35.** $x < 1.4903$ *(6-5)*
36. $-0.6716, 0.6716$ *(6-5)* **37.** $[-0.6716, 0.6716]$ *(6-5)*
38. (A) Sí (B) Ecuación condicional, ya que la ecuación es falsa para $x = 1$ y $y = 1$, por ejemplo, y ambos lados están definidos en $x = 1$ y $y = 1$. *(6-1)*
39. sen^{-1} 0.3351 tiene exactamente un valor, y la ecuación sen $x = 0.3351$ tiene un número infinito de soluciones. *(5-9, 6-5)*
40. (A) No es una identidad (B) Una identidad *(6-1)*
41. $y_2 = \frac{1}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\text{sen}\,x$ *(6-2)*

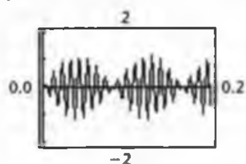


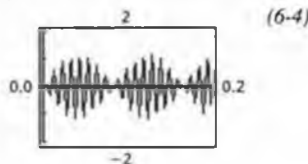
42. (A) $0, 2\pi/3, 4\pi/3$ (B) 0, 2.0944, 4.1888 *(6-5)* **43.** $-2.233, 0.149$ *(6-5)*
44. (A) $3/\sqrt{10}$ o $3\sqrt{10}/10$ (B) 7/25 *(6-3)* **45.** $-24/25$ *(6-3)* **46.** 24/25 *(6-2)*
47. (A) $0, \pi/3, 2\pi/3$ (B) 0, 1.0472, 2.0944 *(6-5)*
48. (A) 0.6817, 1.3183
(B) Conforme x aumenta sin límite, $1/(x-1)$ tiende a 0 a través de números positivos, y sen $[1/(x-1)]$ tiende a 0 a través de números positivos. $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de f.
(C) Hay un número infinito de raíces en cualquier intervalo que contenga a $x = 1$. El número $x = 1$ no es una raíz porque sen $[1/(x-1)]$ no está definido en $x = 1$. *(6-5)*
49. $x = \sqrt{27}$; $x = 5.196$ cm, $\theta = 30.000°$ *(6-3)* **50.** 0.00346 s *(6-5)*
51. $y = 0.6\cos(184\pi t)$ $y = -0.6\cos(208\pi t)$



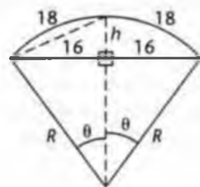


$y = 0.6 \cos(184\pi t) - 0.6 \cos(208\pi t)$ $\qquad$ $y = 1.2 \operatorname{sen}(12\pi t) \operatorname{sen}(196\pi t)$ $\qquad$ *(6-4)*





52. Altura = 7.057 pies, radio = 21.668 pies



De la figura, $R\theta = 18$ y $\operatorname{sen}\theta = 16/R$. De estas dos ecuaciones, al despejar R en términos de θ y establecer que los resultados son iguales entre sí, se obtiene la ecuación trigonométrica deseada. *(6-5)*

CAPÍTULO 7

Ejercicio 7-1

1. $\gamma = 79°$, $a = 41$ pies, $b = 20$ pies **3.** $\beta = 40°$, $a = 16$ km, $c = 5.8$ km **5.** $\alpha = 49°$, $a = 53$ yd, $b = 66$ yd
7. $\beta = 81°$, $b = 16$ cm, $c = 12$ cm **9.** Un triángulo, el caso donde α es agudo y $a = 2 = h$
11. Un triángulo: el caso donde α es agudo y $a \geq b$ ($a = 6$, $b = 4$)
13. Triángulos cero; el caso donde α es agudo y $0 < a < h$ ($a = 1$, $h = 2$)
15. Dos triángulos: el caso donde α es agudo y $h < a < b$ ($h = 2$, $a = 3$, $b = 4$)
17. $\beta = 49.5°$, $a = 20.0$ pies, $c = 4.81$ pies **19.** $\gamma = 58.1°$, $a = 140$ m, $c = 129$ m **21.** No hay solución
23. $\alpha = 63.4°$, $\gamma = 77.7°$, $c = 46.7$ pulg **25.** $\alpha = 116.6°$, $\gamma = 24.5°$, $c = 19.8$ pulg **27.** No hay solución
29. $\alpha = 22°10'$, $\gamma = 128°20'$, $c = 89.8$ mm **31.** $k = 25.2 \operatorname{sen} 42.3° = 16.9599$ **33.** Lado izquierdo: 16.204; lado derecho: 16.073
35. 4.06 mi, 2.47 mi **37.** 353 pies **39.** 5.8 pulg, 3.1 pulg **41.** 4.42×10^7 km, 2.39×10^8 km **43.** 159 pies
45. $R = 7.76$ mm, $s = 13.4$ mm

Ejercicio 7-2

1. El ángulo γ es agudo. Un triángulo puede tener a lo más un ángulo obtuso. Ya que α es agudo, entonces, si el triángulo tiene un ángulo obtuso, puede ser el ángulo opuesto al más largo de los dos lados, b y c. Por consiguiente, γ, el ángulo opuesto al más corto de los dos lados, c, debe ser agudo.
3. $a = 6.03$ yd, $\beta = 56.6°$, $\gamma = 52.2°$ **5.** $c = 14.0$ mm, $\alpha = 20°40'$, $\beta = 39°0'$
7. Si el triángulo tiene un ángulo opuesto, entonces debe ser un ángulo opuesto al lado mayor, en este caso, β.
9. $\alpha = 23.0°$, $\beta = 94.9°$, $\gamma = 62.1°$ **11.** $\alpha = 67.3°$, $\beta = 54.6°$, $\gamma = 58.1°$ **13.** No hay solución, ya que $\alpha + \gamma > 180°$
15. $b = 23.1$ pulg, $\alpha = 46.1°$, $\gamma = 29.4°$ **17.** $\beta = 10.8°$, $a = 22.5$ m, $b = 5.01$ m **19.** $\alpha = 30.7°$, $\gamma = 110.9°$, $c = 21.0$ pulg.
21. $\alpha = 49.1°$, $\beta = 102.9°$, $\gamma = 28.0°$
23. Triángulo 1: $\beta = 70.3°$, $\alpha = 51.3°$, $a = 5.99$ m; Triángulo 2: $\beta = 109.7°$, $\alpha = 11.9°$, $a = 1.58$ m **25.** No hay solución **31.** 120 yd
33. 100.6° **35.** 5.81 pies **37.** 121 mi **39.** 74.1 m **41.** 0.284 rad **43.** $\alpha = 31°50'$, $\beta = 50°10'$, $\gamma = 98°0'$
45. $\angle CAB = 33°$ **47.** 24 800 mi

Ejercicio 7-3

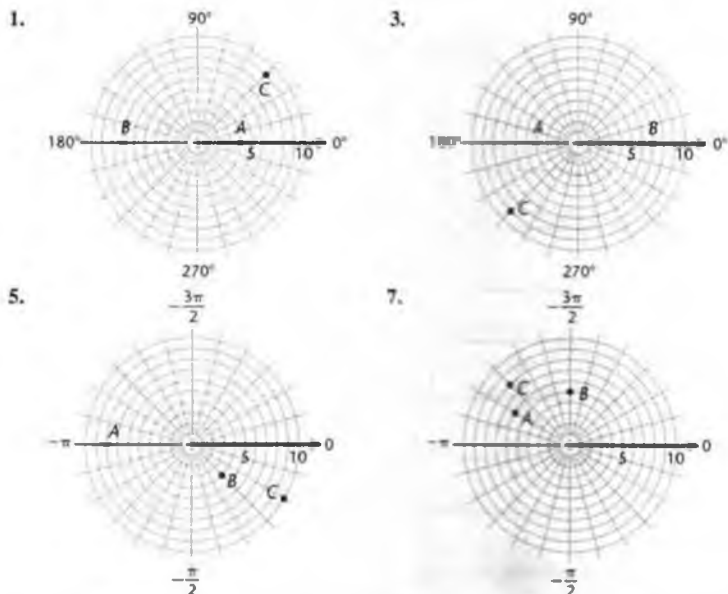
1. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 58$ mph, $\theta = 51°$ **3.** $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 65$ kg, $\theta = 54°$ **5.** $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 447$ km/h, $\theta = 13.6°$ **7.** $|\mathbf{u}| = 30$ lb, $|\mathbf{v}| = 12$ lb
9. $|\mathbf{u}| = 71$ mph, $|\mathbf{v}| = 220$ mph **11.** No. Dos vectores son iguales si y sólo si tienen la misma magnitud y dirección.
13. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 77$g, $\alpha = 15°$ **15.** $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 23$ nudos, $\alpha = 6°$ **17.** $|\mathbf{u}| = 12$kg, $|\mathbf{v}| = 6.0$ kg
19. $|\mathbf{u}| = 109$ mph, $|\mathbf{v}| = 160$ mph **21.** Debido a que el vector cero tiene una dirección arbitraria, puede ser perpendicular a cualquier vector.
23. 260 mph a 282° **25.** 288°, 7.6 nudos **27.** 3 900 libras a 72° **29.** (A) 388 libras (B) 4 030 libras **31.** A la derecha.

Ejercicio 7-4

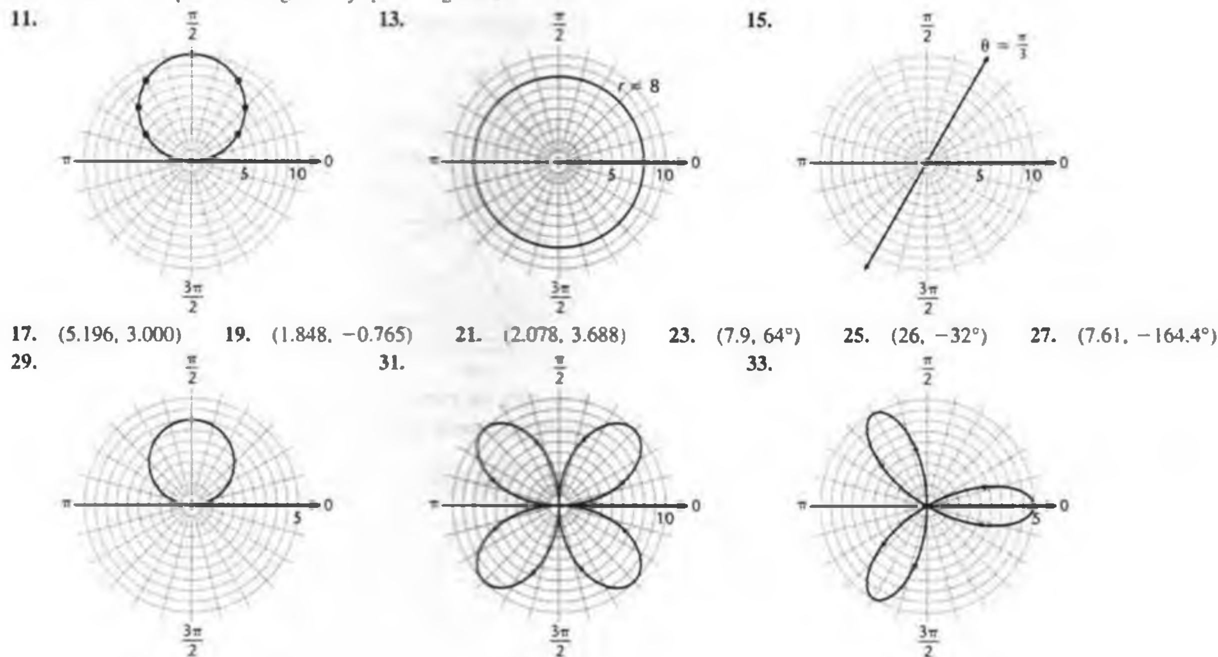
1. $\langle -3, -3\rangle$ **3.** $\langle -6, 7\rangle$ **5.** $\langle 3, 5\rangle$ **7.** 5 **9.** $\sqrt{34}$ **11.** 25
13. Dos vectores algebraicos, $\langle a, b\rangle$ y $\langle c, d\rangle$, son iguales si y sólo si $a = b$ y $c = d$.
15. (A) $\langle 1, 4\rangle$ (B) $\langle 3, -2\rangle$ (C) $\langle 14, -1\rangle$ **17.** (A) $\langle -2, 1\rangle$ (B) $\langle -6, -3\rangle$ (C) $\langle -10, -1\rangle$ **19.** $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
21. $\mathbf{v} = 3\mathbf{i}$ **23.** $\mathbf{v} = -5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **25.** $5\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ **27.** $-16\mathbf{j}$ **29.** $-8\mathbf{j}$ **31.** $\mathbf{u} = \langle -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\rangle$ **33.** $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}\right\rangle$

35. Cualquiera de los vectores de fuerza deben tener la misma magnitud que la suma vectorial de los otros dos y directamente opuestos a la suma vectorial.
45. Lado izquierdo: 760 libras; lado derecho: 761 libras **47.** Cable izquierdo: 897 libras; cable derecho: 732 libras.
49. El miembro AB tiene una fuerza de compresión de 231 libras; el miembro CB tiene una fuerza de tensión de 462 libras.
51. Para AB; compresión: 2 360 libras; para CB: tensión 2 000 libras.

Ejercicio 7-5

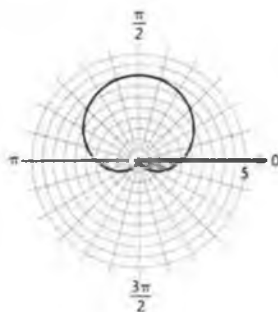


9. $(5, -\pi/4)$: El eje polar está rotado $\pi/4$ radianes a la derecha (dirección negativa), y el punto está localizado a 5 unidades del polo a lo largo del eje polar positivo. $(5, 7\pi/4)$: El eje polar está rotado $7\pi/4$ rad a la izquierda (dirección positiva), y el punto está localizado a 5 unidades del polo a lo largo del eje polar positivo. $(-5, -5\pi/4)$: El eje polar está rotado $5\pi/4$ rad a la derecha (dirección negativa), y el punto está localizado a 5 unidades del polo a lo largo del eje polar negativo.

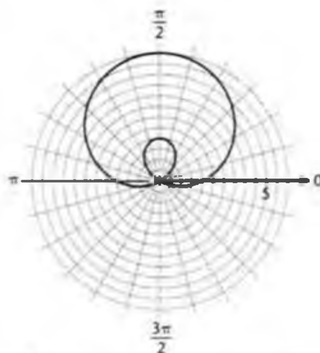


17. (5.196, 3.000) **19.** (1.848, −0.765) **21.** (2.078, 3.688) **23.** (7.9, 64°) **25.** (26, −32°) **27.** (7.61, −164.4°)

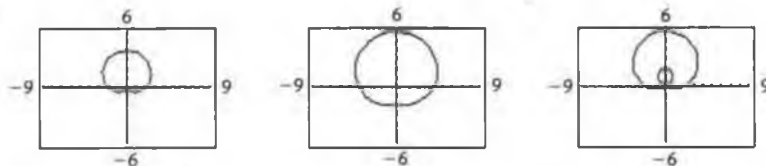
35.



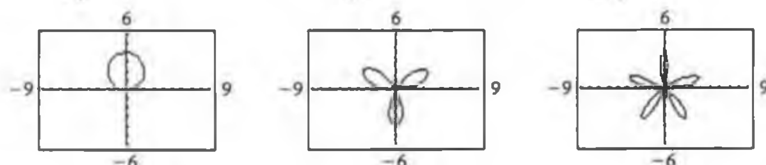
37.



39.

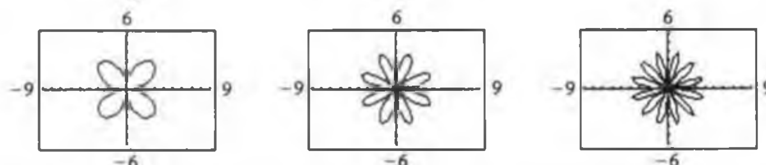


41. (A)



(B) 7 (C) n

43. (A)



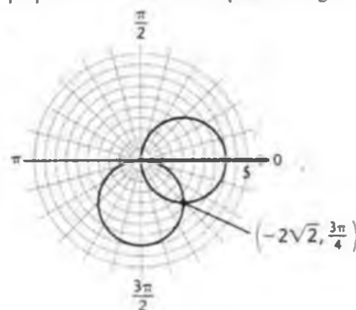
(B) 16 (C) $2n$

45. $r = 5 \operatorname{sen} \theta$ **47.** $\tan \theta = 1$ o $\theta = \pi/4$ **49.** $r = (4 \cos \theta)/(\operatorname{sen}^2 \theta) = 4 \cot \theta \csc \theta$ **51.** $3x - 4y = -1$

53. $x^2 + y^2 = -2y$ **55.** $y = x$

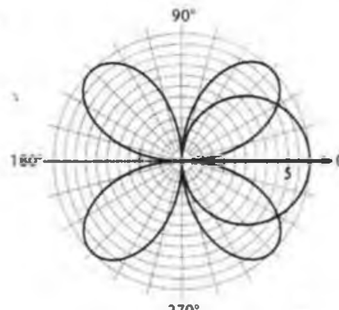
57. Para cada n, hay n pétalos largos y n pétalos pequeños. Para n impar, los pétalos pequeños están dentro de pétalos largos; para n par; los pétalos pequeños están entre los pétalos largos.

59.



$(r, \theta) = (-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$ [*Nota*: (0, 0) no es una solución del sistema aunque las gráficas se intersecten en el origen.]

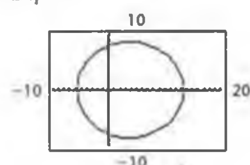
61.

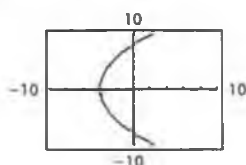


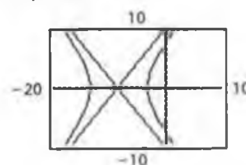
$(r, \theta) = (0, 90°), (0, 270°), (3\sqrt{3}, 30°), (-3\sqrt{3}, 150°)$ [*Nota*: (0, 0) no es una solución del sistema aunque las gráficas se intersecten en el origen.]

63. 3.368 unidades **65.** 6 k, 13 k, 12 k, 9 k

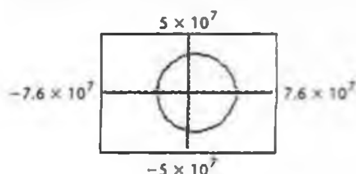
67. (A) Elipse (B) Parábola (C) Hipérbola







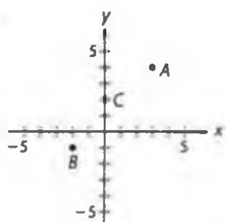
69. (A) Afelio: 4.34×10^7 millas; Perihelio 2.85×10^7 millas



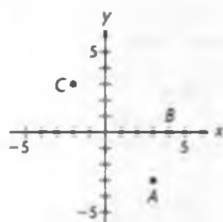
(B) Más rápido en el perihelio. Puesto que la distancia del Sol a Mercurio es menor en el perihelio que en el afelio, el planeta debe viajar más rápidamente cerca del perihelio con el fin de que la línea que une a Mercurio con el Sol barra áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.

Ejercicio 7-6

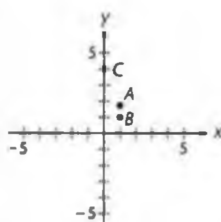
1.



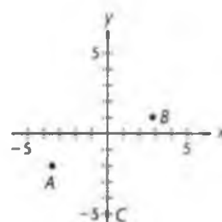
3.



5.



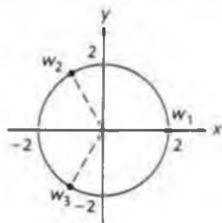
7.

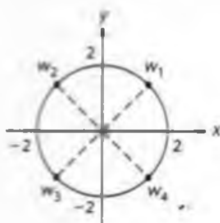


9. (A) $2e^{30°i}$ (B) $\sqrt{2}e^{(-135°)i}$ (C) $7.81e^{(-50.19°)i}$ **11.** (A) $\sqrt{3}e^{(-\pi/2)i}$ (B) $2e^{(-5\pi/6)i}$ (C) $9.43e^{2.58i}$
13. (A) $1 + i\sqrt{3}$ (B) $1 - i$ (C) $-2.35 + 1.99i$ **15.** (A) $3\sqrt{3} + 3i$ (B) $-i\sqrt{7}$ (C) $-2.22 - 3.43i$
17. $14e^{113°i}$; $3.5e^{51°i}$ **19.** $10e^{135°i}$; $2.5e^{(-31°)i}$ **21.** $36.42e^{4.35i}$; $0.26e^{(-0.83i)}$ **23.** $-2i$; $2e^{(-90°)i}$ **25.** -2; $2e^{180°i}$
27. $-2 - 2i$, $2\sqrt{2}e^{(-135°)i}$ **31.** $z^n = r^n e^{n\theta i}$
33. (A) $(20 + 0i) + (5 + i5\sqrt{3}) = 25 + i5\sqrt{3}$ (B) $26.5e^{19.1°i}$ (C) 26.5 lb en un ángulo de 19.1°

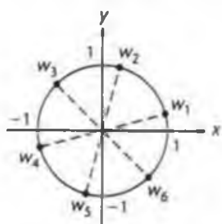
Ejercicio 7-7

1. $8e^{90°i}$ **3.** $8e^{60°i}$ **5.** $8e^{180°i}$ **7.** $-8 + 8\sqrt{3}i$ **9.** 16 **11.** 1
13. $w_1 = 2e^{10°i}$, $w_2 = 2e^{130°i}$, $w_3 = 2e^{250°i}$ **15.** $w_1 = 3e^{15°i}$, $w_2 = 3e^{105°i}$, $w_3 = 3e^{195°i}$, $w_4 = 3e^{285°i}$
17. $w_1 = 2^{1/10}e^{(-9°)i}$, $w_2 = 2^{1/10}e^{63°i}$, $w_3 = 2^{1/10}e^{135°i}$, $w_4 = 2^{1/10}e^{207°i}$, $w_4 = 2^{1/10}e^{279°i}$
19. $w_1 = 2e^{0°i}$, $w_2 = 2e^{120°i}$, $w_3 = 2e^{240°i}$ **21.** $w_1 = 2e^{45°i}$, $w_2 = 2e^{135°i}$, $w_3 = 2e^{225°i}$, $w_4 = 2e^{315°i}$

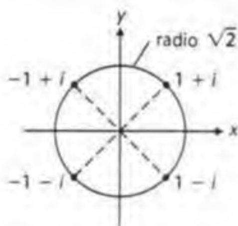




23. $w_1 = 1e^{15°i}$, $w_2 = 1e^{75°i}$, $w_3 = 1e^{135°i}$, $w_4 = 1e^{195°i}$, $w_5 = 1e^{255°i}$, $w_6 = 1e^{315°i}$



25. (A) $(1 + i)^4 + 4 = -4 + 4 = 0$; hay otras tres raíces.
(B) Las cuatro raíces están igualmente espaciadas alrededor del círculo. Debido a que hay cuatro raíces, el ángulo entre las raíces sucesivas en el círculo es de $360°/4 = 90°$.



(C) $(-1 + i)^4 + 4 = -4 + 4 = 0$; $(-1 - i)^4 + 4 = -4 + 4 = 0$; $(1 - i)^4 + 4 = -4 + 4 = 0$

27. $x_1 = 4e^{60°i} = 2 + 2\sqrt{3}i$, $x_2 = 4e^{180°i} = -4$, $x_3 = 4e^{300°i} = 2 - 2\sqrt{3}i$

29. $x_1 = 3e^{0°i} = 3$, $x_2 = 3e^{120°i} = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $x_3 = 3e^{240°i} = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

33. $x_1 = 2e^{0°i}$, $x_2 = 2e^{72°i}$, $x_3 = 2e^{144°i}$, $x_4 = 2e^{216°i}$, $x_5 = 2e^{288°i}$ **35.** $x_1 = e^{36°i}$, $x_2 = e^{108°i}$, $x_3 = e^{180°i}$, $x_4 = e^{252°i}$, $x_5 = e^{324°i}$

37. $P(x) = (x - 2i)(x + 2i)[x - (-\sqrt{3} + i)][x - (-\sqrt{3} - i)][x - (\sqrt{3} + i)][x - (\sqrt{3} - i)]$

Ejercicio de repaso del capítulo 7

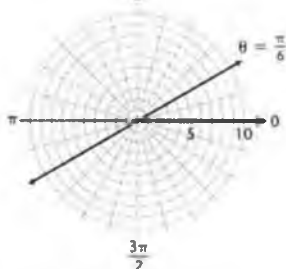
1. 1 *(7-1)* **2.** 0 *(7-1)* **3.** 2 *(7-1)*

4. El ángulo β es agudo. Un triángulo puede tener a lo más un ángulo obtuso. Como α es agudo, entonces, si el triángulo tiene un ángulo obtuso, debe ser el ángulo opuesto al más largo de los dos lados, b y c. Así que, β, el ángulo opuesto al más corto de los dos lados, b, debe ser agudo. *(7-2)*

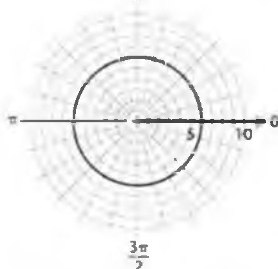
5. $\gamma = 75°$, $a = 47$ m, $b = 31$ m *(7-1)* **6.** $a = 4.0$ ft, $\beta = 36°$, $\gamma = 129°$ *(7-1, 7-2)* **7.** $\alpha = 40°$, $\beta = 19°$, $a = 8.2$ cm *(7-1)*

8. $\theta = 19°$, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 170$ mi/h *(7-3)* **9.** $\langle 3, -7 \rangle$ *(7-4)* **10.** $\sqrt{34}$ *(7-4)*

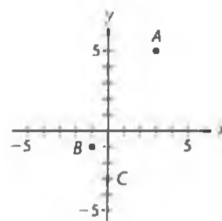
11. *(7-5)*



12. *(7-5)*

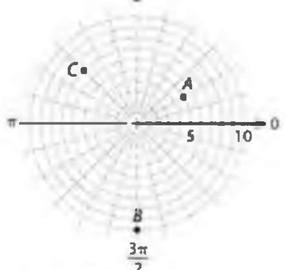


13. *(7-6)*



14. $(-10, -210°)$: El eje polar está rotado 210° en dirección de las manecillas del reloj (dirección negativa), y el punto está localizado a 10 unidades del polo a lo largo del eje polar negativo. $(-10, 150°)$: El eje polar está rotado 150° en sentido contrario al de las manecillas del reloj (dirección positiva), y el punto está localizado a 10 unidades del polo a lo largo del eje polar negativo. $(10, 330°)$: El eje polar está rotado 330° en sentido contrario al de las manecillas del feloj, y el punto está localizado a 10 unidades del polo a lo largo del eje polar positivo. *(7-5)*

15. *(7-6)*



16. (A) $2e^{(-60°)i}$ (B) $2\sqrt{3} - 2i$ *(7-6)* **17.** (A) 1 (B) 1 *(7-7)*

18. $8 + i8\sqrt{3}$ *(7-7)* **19.** Si el triángulo tiene un ángulo obtuso, entonces debe ser el ángulo opuesto al más largo de los lados, en este caso, α *(7-2)*

20. $b = 10.5$ cm, $\alpha = 27.2°$, $\gamma = 37.4°$ *(7-2)* **21.** No hay solución *(7-1)*

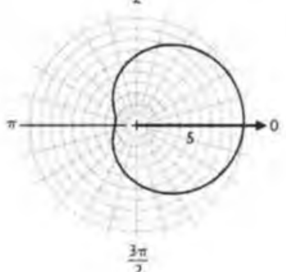
22. Dos soluciones. Caso obtuso: $\beta = 133.9°$, $\gamma = 19.7°$, $c = 39.6$ km *(7-1)* **23.** $\alpha = 41.1°$, $\beta = 74.1°$, $\gamma = 64.8°$ *(7-1, 7-2)*

24. La suma de todos los vectores de fuerza debe ser el vector cero para que el objeto permanezca en reposo. *(7-4)*

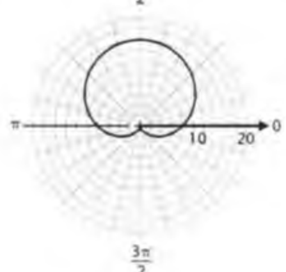
25. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 98.0$ kg, $\alpha = 17.1°$ *(7-3)* **26.** (A) $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ (B) $\mathbf{v} = -2\mathbf{j}$ *(7-4)*

27. (A) $\langle -4, 7 \rangle$ (B) $\langle -14, 13 \rangle$ *(7-4)* **28.** (A) $-2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}, -10\mathbf{j}$ *(7-4)* **29.** $\mathbf{u} = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}} \right\rangle$ *(7-4)*

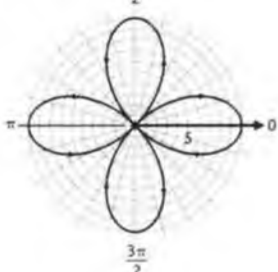
30. *(7-5)*



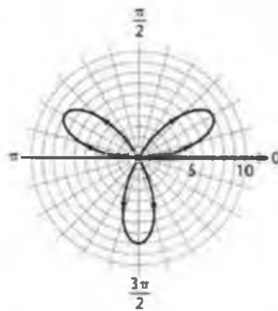
31. *(7-5)*



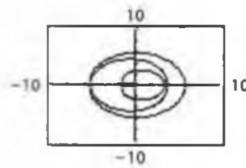
32. *(7-5)*



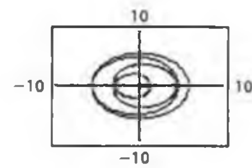
33. *(7-5)*



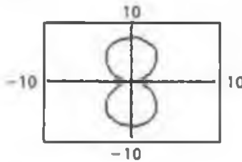
34. *(7-5)*



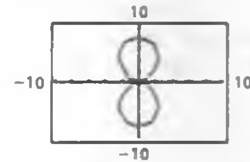
35. *(7-5)*



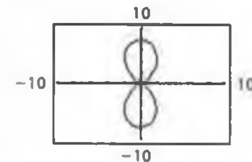
36. $n = 1$



$n = 2$

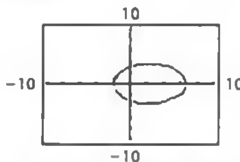


$n = 3$

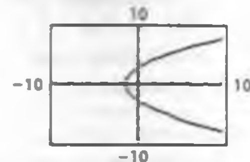


Dos pétalos para todas las n *(7-5)*

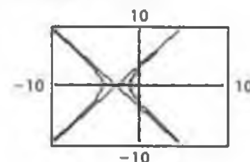
37. (A) Elipse



(B) Parábola



(C) Hipérbola *(7-5)*



38. $r^2 = 6r \cos \theta$ o $r = 6 \cos \theta$ *(7-5)* **39.** $x^2 + y^2 = 5x$ *(7-6)*

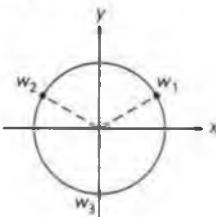
40. $z_1 = \sqrt{2}e^{135°i}$, $z_2 = 2e^{(-120°)i}$, $z_3 = 5e^{0°i}$ *(7-6)* **41.** $z_1 = 1 + i$, $z_2 = (-3\sqrt{3}/2) - \frac{3}{2}i$, $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$ *(7-6)*

42. (A) $32e^{44°i}$ (B) $2e^{6°i}$ *(7-6)* **43.** (A) $-8 - 8\sqrt{3}i$ (B) $-8 - 13.86i$ *(7-7)*

44. $w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ *(7-7)*

$w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

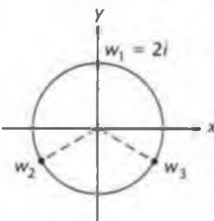
$w_3 = -i$



45. $2e^{50°i}, 2e^{170°i}, 2e^{290°i}$ *(7-7)* **46.** $(4e^{15°i})^2 = 16e^{30°i} = 8\sqrt{3} + 8i$ *(7-7)*

47. $(5.76, -26.08°)$ *(7-5)* **48.** $(-5.30, -2.38)$ *(7-5)* **49.** $5.26e^{127.30°i}$ *(7-6)* **50.** $-7.27 - 2.32i$ *(7-6)*

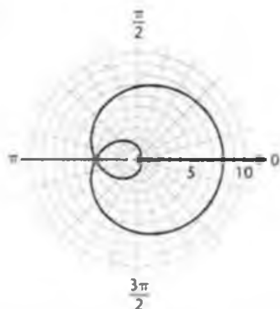
51. (A) Hay un total de tres raíces cúbicas, y están igualmente espaciadas alrededor de un círculo de radio 2



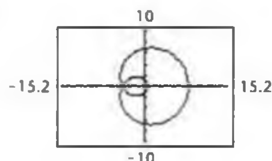
(B) $w_2 = -\sqrt{3} - i$, $w_3 = \sqrt{3} - i$ (C) El cubo de cada raíz cúbica es $-8i$ *(7-7)*

52. $k = 44.6 \text{ sen } 23.4°$ *(7-1)*

55. (A)

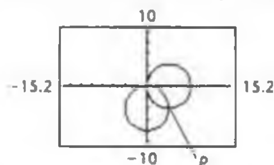


(B)



(7-5)

56. (A) Las coordenadas de P representan una solución simultánea.



(B) $r = -4\sqrt{2}$, $\theta = 3\pi/4$ (C) Las dos gráficas pasan por el polo en diferentes valores de θ. *(7-5)*

57. $1, -1, i, -i, \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$ *(7-7)*

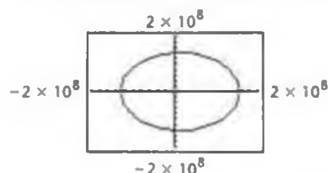
58. $P(x) = (x + 2i)[x - (-\sqrt{3} + i)][x - (\sqrt{3} + i)]$ *(7-7)* **59.** 438 mi *(8-3)* **60.** 438 mph at 83° *(7-3)*

61. 86°, 464 mph *(7-3)* **62.** 0.6 mi *(7-1)* **63.** 177 lb a 15.2° respecto de **v** *(7-3)* **64.** 19 kg a 204° respecto de **v** *(7-4)*

65. 5 740 lb *(7-4)*

66. (A) Distancia al afelio: 1.56×10^8 mi
Distancia al perihelio: 1.29×10^8 mi

(B) Distancia al afelio: 1.56×10^8 mi
Distancia al perihelio: 1.29×10^8 mi *(7-5)*



Ejercicio de repaso acumulativo de los capítulos 5 a 7

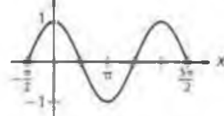
1. 1.86 m *(5-1)* **2.** $\theta = 57.3°$, 14.5 cm, 7.83 cm *(5-2)* **3.** (A) I, II (B) I, IV (C) I, III *(5-3)*

4. (A) $-\frac{3}{5}$ (B) $\frac{5}{4}$ (C) $-\frac{4}{3}$ *(5-3)* **5.** (A) $\pi/4$ (B) 65° (C) 30° *(5-4)*

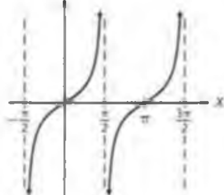
6. (A) Dominio: todos los números reales; Rango: $-1 \le y \le 1$; Periodo: 2π (B) Dominio: todos los números reales; Rango: $-1 \le y \le 1$; Periodo: 2π

(C) Dominio: todos los números reales, excepto, $x = \pi/2 + k\pi$, k cualquier entero
Rango: todos los números reales; Periodo: π *(5-6)*

7.



(5-6) **8.**



(5-6)

9. El ángulo central de un círculo subtendido por un arco dos veces la longitud del radio *(5-1)*

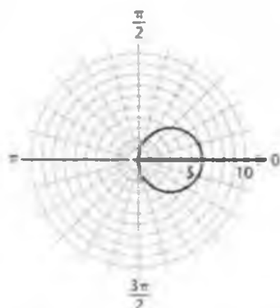
10. Si la gráfica de $y = \cos x$ está corrida $\pi/2$ unidades a la derecha, el resultado será la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ *(5-6, 5-7)*

15. (A) No es una identidad (B) Una identidad *(6-1)*

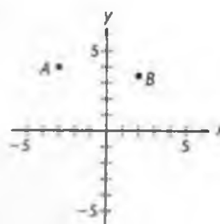
16. El ángulo α es agudo. Un triángulo puede tener a lo más un ángulo obtuso. Ya que β es agudo, entonces si el triángulo tiene un ángulo obtuso, debe ser el ángulo opuesto al más largo de los dos lados, a y c. En consecuencia, α, el ángulo opuesto más corto de los dos lados, a, debe ser agudo. *(7-2)*

17. 0.3245, 2.8171 *(6-5)* **18.** −76.2154° *(6-5)* **19.** $b = 22$ pies, $\alpha = 28°$, $\gamma = 31°$ *(7-2, 7-1)* **20.** (6, −3) *(7-4)*

21. (5, −30°): El eje polar está rotado 30° en el sentido de las manecillas del reloj (dirección negativa), y el punto está localizado a 5 unidades del polo a lo largo del eje polar positivo. (−5, −210°): El eje polar está rotado 210° en el sentido de las manecillas del reloj (dirección negativa), y el punto está localizado a 5 unidades del polo a lo largo del eje polar negativo. (5, 330°): El eje polar está rotado 330° en sentido contrario al de las manecillas del reloj (dirección positiva), y el punto está localizado a 5 unidades del polo a lo largo del eje polar positivo. *(7-5)*

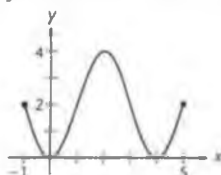
22. 

(7-5)

23. 

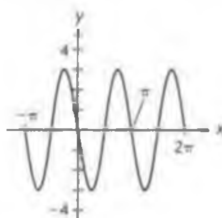
(7-6)

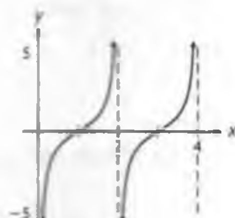
24. $4\sqrt{3} + 4i$ *(7-7)*

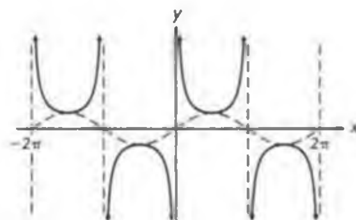
25. $-7\pi/6$, 870° *(5-1)* **26.** 75.06° *(5-1)* **27.** (A) y (C) *(5-3, 5-5)* **28.** $-\frac{1}{2}$ *(5-4)* **29.** No está definido *(5-3, 5-4, 5-5)*
30. -1 *(5-4)* **31.** $2/\sqrt{3}$ *(5-4)* **32.** π *(5-9)* **33.** No está definido *(5-9)* **34.** $2\pi/3$ *(5-9)* **35.** 0.55 *(5-9)*
36. $\frac{3}{5}$ *(5-9, 5-3)* **37.** $1/\sqrt{5}$ *(5-9, 5-3)* **38.** (A) 9.871 (B) -3.748 (C) -1.559 (D) No está definido *(5-3, 5-5, 5-9)*
39. 

(5-7) **40.** (A) 150° (B) $-19.755°$ *(5-9)*

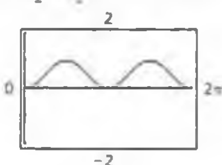
41. $\text{sen}^{-1}(\text{sen } 3) = 0.142$. Para la identidad $\text{sen}^{-1}(\text{sen } x) = x$ para que valga, x debe estar en el dominio restringido de la función seno; esto es, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$. El número 3 no está en el dominio restringido *(5-9)*
42. Ya que las coordenadas de un punto en un círculo unitario están dadas por $P(a, b) = P(\cos x, \text{sen } x)$, se evalúa $P(\cos(11.205), \text{sen}(11.205))$ usando una calculadora en el modo radián, para obtener $P(0.208, -0.978)$. El cuadrante en el cual está $P(a, b)$ se puede determinar por los signos de a y b. En este caso P está en el cuarto cuadrante, ya que a es positivo y b negativo. *(5-5)*
43. La ecuación tiene un número infinito de soluciones [$x = \tan^{-1}(-24.5) + k\pi$, k cualquier entero]; $\tan^{-1}(-24.5)$ tiene un valor único (-1.530 con tres cifras decimales). *(5-9, 6-5)*
44. $y = 3 + 2 \text{ sen } \pi x$ *(5-7)*
45. $A = 3$; $P = \pi$; P.S. $= \pi/2$ *(5-7)* **46.** $P = 2$; P.S. $= 1$ *(5-8)* **47.** *(5-6)*

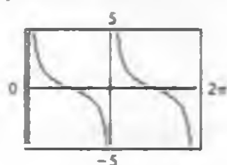






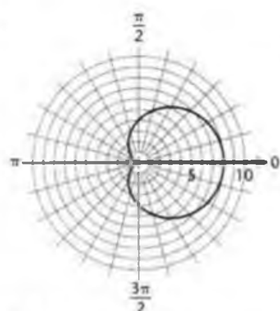
48. Si la gráfica de $y = \cot x$ se corre hacia la izquierda $\pi/2$ unidades y se refleja con respecto al eje x, el resultado será la gráfica de $y = \tan x$. *(5-6, 5-7)*
49. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$ *(5-7)* **50.** $y = \cot x$ *(5-7, 5-8)*



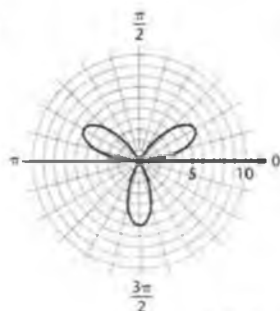


51. (A) Si (B) Condicional, ya que ambos lados están definidos en $x = \pi/2$, por ejemplo, pero $\pi/2$ no es una solución. *(6-1)*
58. (A) No es una identidad (B) Una identidad *(6-1)* **59.** 0 *(6-2)*
60. $\text{sen } 2x = -\frac{24}{25}$, $\cos(x/2) = \sqrt{\frac{1}{10}}$ o $\sqrt{10}/10$ *(5-4, 6-3)* **61.** 30°, 150°, 270° *(6-5)*
62. $k\pi$, $\pi/3 + 2k\pi$, y $-\pi/3 + 2k\pi$, todos para k cualquier entero. *(6-5)*
63. (A) $\pi/2, 3\pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$ (B) 1.571, 3.665, 4.712, 5.760 *(6-5)* **64.** $x = 0.926$ *(6-5)*
65. $\alpha = 25.0°$, $\beta = 47.8°$, $\gamma = 107.2°$ *(7-1, 7-2)* **66.** No hay solución *(7-1)* **67.** $\beta = 120.7°$, $\gamma = 6.4°$, $c = 4.81$ pulg *(7-1)*
68. β debe ser agudo. Un triángulo puede tener a lo más un ángulo obtuso, y ya que γ es agudo, el ángulo obtuso, si está presente, debe ser el opuesto al más largo de los dos lados a y b. *(7-2)*
69. $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| = 35.6$ lb, $\alpha = 16.3°$ *(7-3, 7-1, 7-2)* **70.** (A) $\langle 1, 3\rangle$ (B) $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ *(7-4)* **71.** $r = 8 \text{ sen } \theta$ *(7-5)*
72. $x^2 + y^2 = -4x$ *(7-5)*

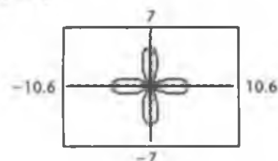
73. *(7-5)*

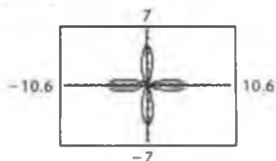


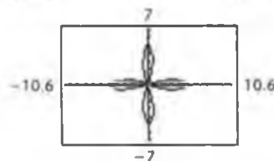
74. *(7-5)*



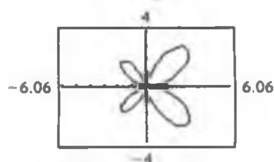
75. $n = 1$ $\quad n = 2 \quad n = 3$ cuatro pétalos para todas las n *(7-5)*





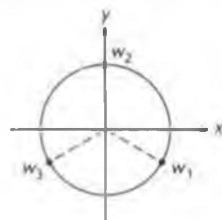


76. *(7-5)*



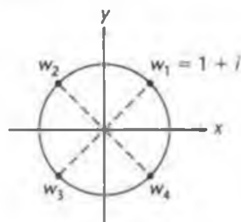
77. $(4.23, -131.07°)$ *(7-5)* **78.** $(-3.68, 5.02)$ *(7-5)* **79.** $\sqrt{3} - i$ *(7-6)*

80. $z = 2e^{120°i}$ *(7-6)* **81.** $64 + 0i = 64$ *(7-7)* **82.** $w_1 = \sqrt{3}/2 - \frac{1}{2}i$, $w_2 = i$, $w_3 = -\sqrt{3}/2 - \frac{1}{2}i$. *(7-8)*



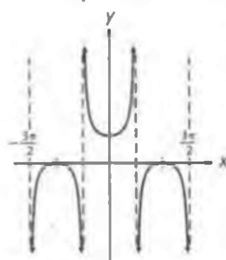
83. $5.82e^{(-146.99°)i}$ *(7-6)* **84.** $-6.70 + 1.94i$ *(7-6)*

85. (A) Hay un total de cuatro raíces cuartas, y están igualmente espaciadas alrededor de un círculo de radio $\sqrt{2}$.



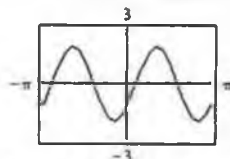
(B) $w_2 = -1 + i$, $w_3 = -1 - i$, $w_4 = 1 - i$ (C) La cuarta potencia de cada raíz cuarta es 4 *(7-7)*

86. $a = \cos 1.2 = 0.362$, $b = \text{sen } 1.2 = 0.932$ *(5-5)* **87.** *(5-8)*

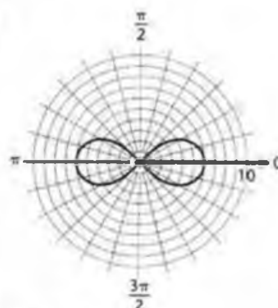


88. $y = 3 \cos (2\pi x - \pi/4)$; amplitud $= 3$, periodo $= 1$, C F. $= \frac{1}{8}$ *(5-7)*

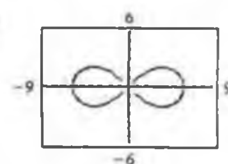
89. $y = 2\,\text{sen}\,(2x - 0.644)$ *(5-7)* **90.** $1/\sqrt{1 - x^2}$ *(5-9)* **91.** $\frac{24}{25}$ *(6-3, 5-9)* **92.** (A) $\sqrt{\frac{8}{10}} = 2\sqrt{5}/5$ (B) $-\frac{7}{25}$ *(6-3)*



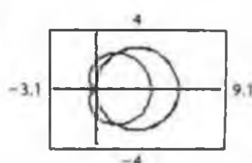
93. (A) $\pi/3, 5\pi/3$ (B) 1.0472, 5.2360 *(6-5)* **94.** (A)



(B) *(7-5)*



95. (A)



(B) 6 (C) $(3, \pi/3), (3, 5\pi/3)$

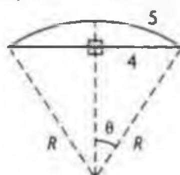
(D) Los puntos en $r2$ y $r1$ llegan en los puntos de intersección con diferentes valores de θ, excepto para los dos encontrados en el inciso C. *(7-5)*

96. $P(x) = (x - i)[x - (\sqrt{3}/2 - i/2)][x - (-\sqrt{3}/2 - i/2)]$ *(7-7)* **97.** $2\pi/73$ rad *(5-1)* **98.** 1 088 m *(5-2)*

99. 5.88 pulg *(5-2 o 7-2)* **100.** 76° *(7-2)* **101.** $I = 50 \cos 220\pi t$ *(5-7)* **102.** 274 mph en 117° *(7-3)*

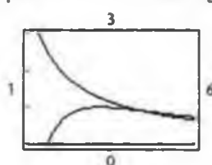
103. Ambos tienen una tensión de 234 libras *(7-4)*

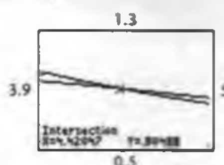
104. (A) Sume la bisectriz perpendicular de la cuerda como se muestra en la figura. Entonces, sen θ = $4/R$ y θ = $5/R$. Sustituyendo el segundo en el primero, se obtiene sen $5/R = 4/R$.



(B) R no puede estar aislado en un lado de la ecuación.

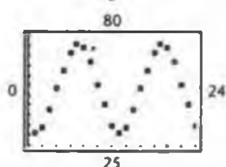
(C) Grafique y_1 = sen $5/R$ y $y_2 = 4/R$ en la misma ventana de visión y resuelva para R en el punto de intersección utilizando una rutina preconstruida (véase figura). R = 4.420 cm.



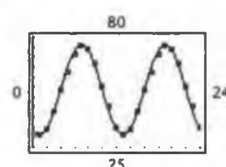


(6-5)

105. (A)



(B) $y = 53.5 + 22.5\,\text{sen}\,(\pi x/6 - 2.1)$ (C)



(5-7)

CAPÍTULO 8

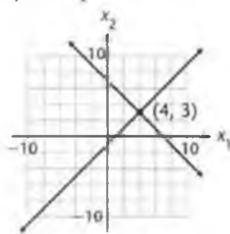
Ejercicio 8-1

1. B, no hay solución **3.** D, (1, −3) **5.** (5, 2) **7.** (2, −3) **9.** No hay solución (líneas paralelas) **11.** (2, −1) **13.** (3, −1)

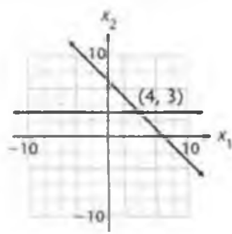
15. 2 × 3, 1 × 3 **17.** C **19.** B **21.** −2, −6 **23.** −2, 6, 0 **25.** $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -6 & -8 \\ 1 & -3 & 2 \end{array}\right]$ **27.** $\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 12 & -8 \\ 4 & -6 & -8 \end{array}\right]$

29. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 8 & -12 & -16 \end{array}\right]$ **31.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & -16 \end{array}\right]$ **33.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -12 \end{array}\right]$ **35.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & -10 \end{array}\right]$

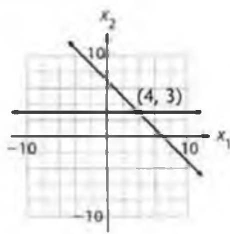
37. $x_1 = 4, x_2 = 3$; cada par de líneas tiene el mismo punto de intersección.



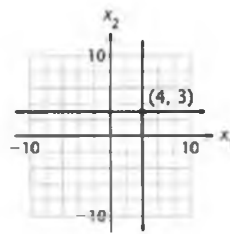
$x_1 + x_2 = 7$
$x_1 - x_2 = 1$



$x_1 + x_2 = 7$
$-2x_2 = -6$



$x_1 + x_2 = 7$
$x_2 = 3$



$x_1 = 4$
$x_2 = 3$

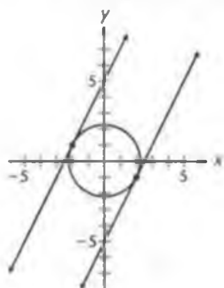
39. $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ **41.** $x_1 = 2$ y $x_2 = 4$ **43.** No hay solución **45.** $x_1 = 1$ y $x_2 = 4$
47. Número infinito de soluciones; para cualquier número real s, $x_2 = s$, $x_1 = 2s - 3$.
49. Número infinito de soluciones; para cualquier número real s, $x_2 = s$, $x_1 = \frac{1}{2}s + 1/2$
51. (1.12, 2.41) **53.** (−2.24, −3.31) **55.** (A) (−24, 20) (B) (6, −4) (C) No hay solución **57.** (−23.125, 7.8125)
59. (3.225, −6.9375) **61.** 25 32¢ timbres, 50 23¢ timbres **63.** $107 500 en el lazo *A* y $92 500 en el lazo *B*
65. 30 litros de la solución al 20% y 70 litros de la solución al 80% **67.** 200 g de la mezcla *A* y 80 g de la mezcla *B*
69. Precio base = $17.95, sobrecargo = $2.45/lb **71.** 5 720 libras de la mezcla fuerte y 6 160 libras de la mezcla suave.

Ejercicio 8-2

1. Sí **3.** No **5.** No **7.** Sí **9.** $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 0$ **11.** $x_1 = 2t + 3, x_2 = -t - 5, x_3 = t$, t cualquier número real
13. No hay solución **15.** $x_1 = 2s + 3t - 5, x_2 = s, x_3 = -3t + 2, x_4 = t$, s y t cualesquiera números reales **17.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$
19. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$ **21.** $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ **23.** $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 1$ **25.** $x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = 2$
27. $x_1 = 2t + 3, x_2 = t - 2, x_3 = t$, t cualquier número real **29.** $x_1 = 1, x_2 = 2$ **31.** No hay solución
33. $x_1 = 2t + 4, x_2 = t + 1, x_3 = t$, t cualquier número real **35.** $x_1 = s + 2t - 1, x_2 = s, x_3 = t$, s y t cualesquiera números reales
37. No hay solución **39.** $x_1 = 2.5t - 4, x_2 = t, x_3 = -5$ para t cualquier número real **41.** $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1$
43. (A) Dependiente con dos parámetros (B) Dependiente con un parámetro (C) Independiente (D) Imposible
45. $x_1 = 2s - 3t + 3, x_2 = s + 2t + 2, x_3 = s, x_4 = t$ para s y t cualesquiera números reales **47.** $x_1 = -0.5, x_2 = 0.2, x_3 = 0.3, x_4 = -0.4$
49. $x_1 = 2s - 1.5t + 1, x_2 = s, x_3 = -t + 1.5, x_4 = 0.5t - 0.5, x_5 = t$, para s y t cualesquiera números reales
51. 15¢ timbres: $3t - 100$, 20 ¢ timbres: $145 - 4t$, 35¢ timbres: t, donde $t = 34$, 35 o 36
53. Contenedores al 10%: $6t - 24$, contenedores al 20%: $48 - 8t$, contenedores al 50%: t, donde $t = 4$, 5 o 6
55. $a = 3, b = 2, c = 1$ **57.** $a = -2, b = -4, c = -20$ **59.** 20 botes para una persona, 20 botes para dos personas, 100 botes para cuatro personas
61. Botes para una persona: $t - 80$, botes para dos personas: $-2t + 420$, botes para cuatro personas: t, $80 \leq t \leq 210$, t un entero
63. No hay solución, la planeación de la producción no usará todas las horas de mano de obra en todos los departamentos. **65.** 8 onzas del alimento *A*, 2 onzas del alimento *B*, 4 onzas del alimento *C*.
67. No hay solución **69.** 8 onzas de la comida *A*, $-2t + 10$ onzas de la comida *B*, t onzas de la comida *C*, $0 \leq t \leq 5$ **71.** Compañía *A*: 10 h, compañía *B*: 15 h

Ejercicio 8-3

1. (−12, 5), (−12, −5) **3.** (2, 4), (−2, −4) **5.** (5, −5), (−5, 5) **7.** $(4 + 2\sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}), (4 - 2\sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$
9. (2, 4), (2, −4), (−2, 4), (−2, −4) **11.** (1, 3), (1, −3), (−1, 3), (−1, −3) **13.** $(1 + \sqrt{5}, -1 + \sqrt{5}), (1 - \sqrt{5}, -1 - \sqrt{5})$
15. $(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (2, 1), (-2, -1)$ **17.** $(2, 2i), (2, -2i), (-2, 2i), (-2, -2i)$ **19.** $(2, \sqrt{2}), (2, -\sqrt{2}), (-1, i), (-1, -i)$
21. $(3, 0), (-3, 0), (\sqrt{5}, 2), (-\sqrt{5}, 2)$ **23.** $(2, 1), (-2, -1), (i, -2i), (-i, 2i)$ **25.** (−1, 4), (3, −4) **27.** (0, 0), (3, 6)
29. (1, 4), (4, 1) **31.** (−1, 3), (4, 8)
33. (A) Las líneas son tangentes al círculo.

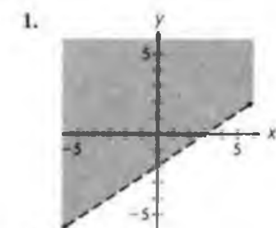


(B) $b = 5$, el punto de intersección es (2, −1); $b = -5$, el punto de intersección es (−2, 1).
(C) La recta $x + 2y = 0$ es perpendicular a todas las líneas en la familia e intersecta el círculo en los puntos de intersección encontrados en el inciso (B). Resolviendo el sistema $x^2 + y^2 = 5$, $x + 2y = 0$ se determinarían los puntos de intersección.

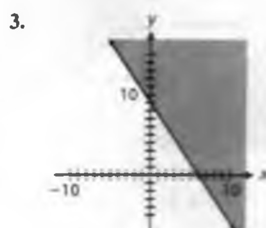
35. $(-5, -\frac{3}{5}), (-\frac{3}{2}, -2)$ **37.** $(0, -1), (-4, -3)$ **39.** $(2, 2), (-2, -2), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
41. $(-3, 1), (3, -1), (-i, i), (i, -i)$ **43.** $(-1.41, -0.82), (-0.13, 1.15), (0.13, -1.15), (1.41, 0.82)$
45. $(-1.66, -0.84), (-0.91, 3.77), (0.91, -3.77), (1.66, 0.84)$ **47.** $(-2.96, -3.47), (-0.89, -3.76), (1.39, 4.05), (2.46, 4.18)$
49. $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}), \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ **51.** 5 pulg y 12 pulg **53.** 6 por 4.5 pulg **55.** 22 por 26 pies **57.** Bote *A*: 30 mph; bote *B*: 25 mph

Ejercicio 8-4

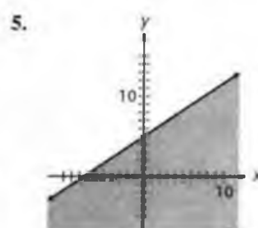
1.



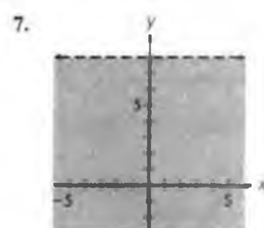
3.



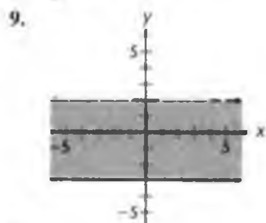
5.



7.

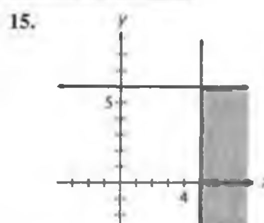


9.

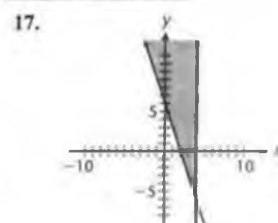


11. Región IV **13.** Región I

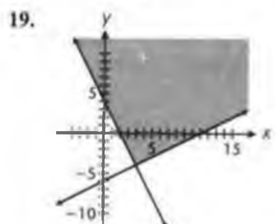
15.



17.

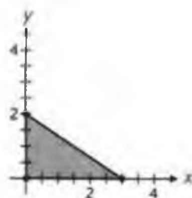


19.

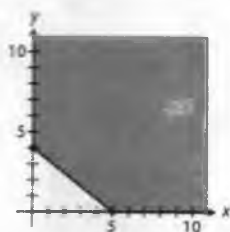


21. Región IV; puntos esquina: (6, 4), (8, 0), (18, 0) **23.** Región I; puntos esquina: (0, 16), (6, 4), (18, 0)

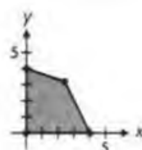
25. Puntos esquina: (0, 0), (3, 0), (0, 2)
Acotada



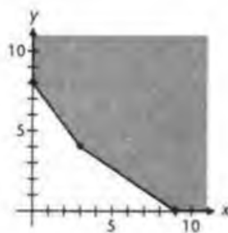
27. Puntos esquina: (5, 0), (0, 4)
No acotada



29. Puntos esquina: (0, 0), (0, 4), $(\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$, (4, 0)
Acotada



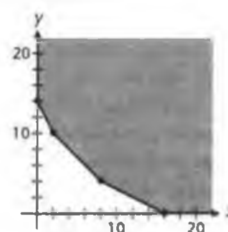
31. Puntos esquina: (0, 8), (3, 4), (9, 0)
No acotada



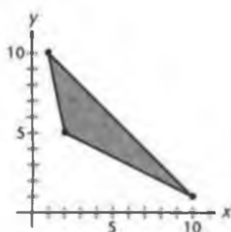
33. Puntos esquina: (0, 0), (0, 5), (4, 3), (5, 2), (6, 0)
Acotada



35. Puntos esquina: (0, 14), (2, 10), (8, 4), (16, 0)
No acotada

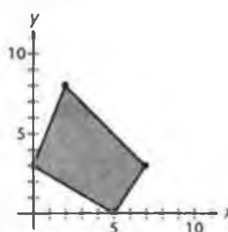


37. Puntos esquina: (2, 5), (10, 1), (1, 10)
Acotada

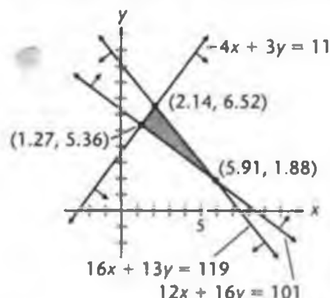


39. La región factible está vacía.

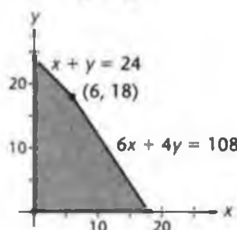
41. Puntos esquina: (0, 3), (5, 0), (7, 3), (2, 8)
Acotada



43. Puntos esquina: (1.27, 5.36), (2.14, 6.52), (5.91, 1.88) Acotada

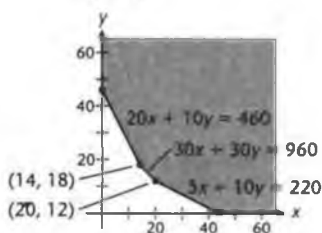


45. $6x + 4y \le 108$
$x + y \le 24$
$x \ge 0$
$y \ge 0$

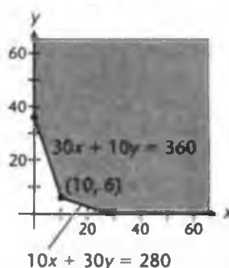


47. (A) Todos los programas de producción en la región factible que están en la gráfica de $50x + 60y = 1\ 100$ resultará en una ganancia de $1 100
(B) Hay muchas opciones posibles. Por ejemplo, produciendo cinco esquíes estándar y 15 esquíes profesionales se producirá una ganancia de $1 150. La gráfica de la recta $50x + 60y = 1\ 150$ incluye todos los programas de producción en la región factible que resulta en una ganancia de $1 150.

49. $20x + 10y \ge 460$
$30x + 30y \ge 960$
$5x + 10y \ge 220$
$x \ge 0$
$y \ge 0$



51. $10x + 30y \ge 280$
$30x + 10y \ge 360$
$x \ge 0$
$y \ge 0$



Ejercicio 8-5

1. Máx $z = 16$ en (7,9) **3.** Máx $z = 84$ en (0, 12) y (7, 9) (soluciones óptimas múltiples) **5.** Min $z = 32$ en (0, 8)
7. Min $z = 36$ en (12, 0) y (4, 3) (soluciones óptimas múltiples) **9.** Máx $z = 18$ en (4, 3) **11.** Min $z = 12$ en (4, 0)
13. Máx $z = 52$ en (4, 10) **15.** Min $z = 44$ en (4, 4)
17. Min $z = 1\ 500$ en (60, 0); máx $z = 3\ 000$ en (60, 30) y (120, 0) (soluciones óptimas múltiples)
19. Min $z = 300$ en (0, 20); máx $z = 1\ 725$ en (60, 15) **21.** Máx $P = 5\ 507$ en $x_1 = 6.62$ y $x_2 = 4.25$
23. (A) $a > 2b$ (B) $\frac{1}{2}b < a < 2b$ (C) $b > 3a$ (D) $a = 2b$ (E) $b = 3a$
25. (A) 6 esquíes estándar, 18 esquíes profesionales; $780 (B) La máxima ganancia disminuye a $720 cuando se producen 18 esquíes estándar y ninguno profesional.
(C) La máxima ganancia aumenta a $1 080 cuando no se producen 24 esquíes profesionales.
27. Nueve camiones del modelo A, seis camiones del modelo B, $279 000
29. (A) 40 mesas, 40 sillas; $4 600 (B) La máxima ganancia disminuye a $3 800 cuando se producen 20 mesas y 80 sillas.
31. (A) Máx $P = \$450$ cuando se producen 750 galones utilizando exclusivamente el viejo proceso.
(B) La máxima ganancia disminuye a $380 cuando se producen 400 galones utilizando el viejo proceso y 700 galones utilizando el nuevo proceso.
(C) La máxima ganancia disminuye a $288 cuando se producen 1 440 galones utilizando sólo el nuevo proceso.
33. El nitrógeno tendrá un rango desde un mínimo de 940 lb cuando se usen 40 bolsas de la marca A y 100 bolsas de la marca B hasta un máximo de 1 190 lb cuando se usen 140 bolsas de la marca A y 50 bolsas de la marca B.

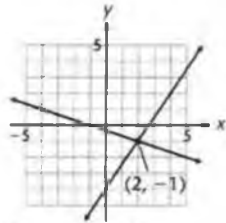
Ejercicio de repaso del capítulo 8

1. (2, 3) *(8-1)* **2.** No hay solución (inconsistente) *(8-1)* **3.** Un número infinito de soluciones $(t, (4t + 8)/3)$, para cualquier número real t *(8-1)*

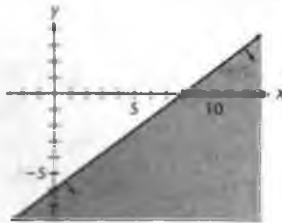
4. $(-1, 3), (5, -3)$ *(8-3)* **5.** $(1, -1), (\frac{7}{5}, -\frac{1}{5})$ *(8-3)*

6. $(1, 3), (1, -3), (-1, 3), (-1, -3)$ *(8-3)*

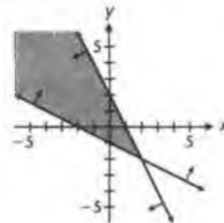
7. *(8-1)*



8. *(8-4)*



9. *(8-4)*



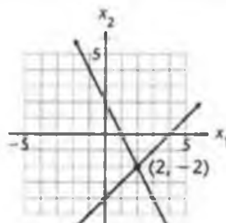
10. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 12 \\ 1 & -4 & 5 \end{array}\right]$ *(8-1)* **11.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right]$ *(8-1)* **12.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 5 \\ 0 & 6 & -3 \end{array}\right]$ *(8-1)* **13.** $x_1 = 4$ *(8-2)*
$x_2 = -7$
$(4, -7)$

14. $x_1 - x_2 = 4$ *(8-2)*
$0 = 1$
No hay solución

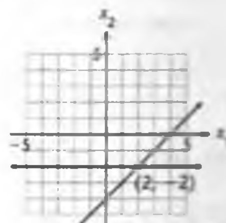
15. $x_1 - x_2 = 4$ *(8-2)*
$x_1 = t + 4$, $x_2 = t$, t cualquier número real

16. Min $z = 18$ en (0, 6); máx $z = 42$ en (6, 4) *(8-5)*

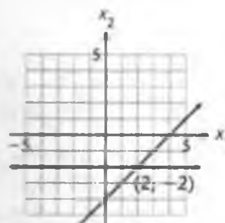
17. $x_1 = 2$, $x_2 = -2$; cada par de rectas tiene el mismo punto de intersección *(8-1)*



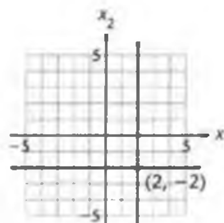
$x_1 - x_2 = 4$
$2x_1 + x_2 = 2$



$x_1 - x_2 = 4$
$3x_2 = -6$



$x_1 - x_2 = 4$
$x_2 = -2$



$x_1 = 2$
$x_2 = -2$

18. (2.54, 2.15) *(8-1)* **19.** $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ *(8-2)* **20.** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$ *(8-2)* **21.** $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ *(8-2)*

22. Un número infinito de soluciones: $x_1 = -5t - 12$, $x_2 = 3t + 7$, $x_3 = t$, t cualquier número real *(8-2)* **23.** No hay solución *(8-2)*

24. Un número infinito de soluciones: $x_1 = -\frac{3}{7}t - \frac{4}{5}$, $x_2 =$ [illegible], $x_3 = t$, t cualquier número real *(8/2)*

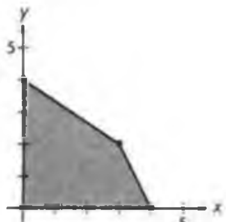
25. $(2, \sqrt{2}), (2, -\sqrt{2}), (-1, i), (-1, -i)$ *(8-3)* **26.** $(1, -2), (-1, 2), (2, -1), (-2, 1)$ *(8-3)*

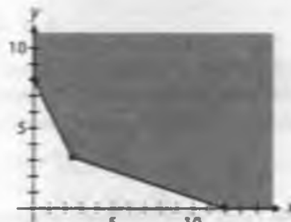
27. $(2, -2), (-2, 2), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ *(8-3)*

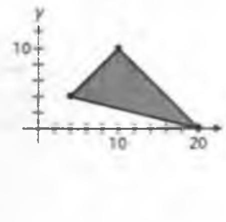
28. Puntos esquina: (0, 0), (0, 4), (3, 2), (4, 0) *(8-4)*
Acotada

29. Puntos esquina: (0, 8), $(\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$, (12, 0) *(8-4)*
No acotada

30. Puntos esquina: (4, 4), (10, 10), (20, 0) *(8-4)*
Acotada:







31. Máx $z = 46$ en (4, 2) *(8-5)* **32.** Min $z = 75$ en (3, 6) y (15, 0) (soluciones óptimas múltiples) *(8-5)*

33. Min $z = 44$ en (4, 3) máx $z = 82$ en (2, 9) *(8-5)* **34.** $x_1 = 1\,000$, $x_2 = 4\,000$, $x_3 = 2\,000$ *(8-2)*

35. $(2, 2), (-2, -2), (\frac{4}{7}\sqrt{7}, -\frac{2}{7}\sqrt{7}), (-\frac{4}{7}\sqrt{7}, \frac{2}{7}\sqrt{7})$ *(8-3)* **36.** Máx $z = 26\,000$ en (600, 400) *(8-5)*

37. (−2.16, −0.37), (−1.09, 5.59), (1.09, −5.59), (2.16, 0.37) *(8-3)*

38. (A) Una solución única (B) No hay solución (C) Un número infinito de soluciones *(8-2)*

39. Paquetes de $\frac{1}{2}$ libra: 48, paquetes de $\frac{1}{3}$ libra: 72 *(8-1, 8-2)* **40.** 6 por 8 m *(8-3)* **41.** 40 g de la mezcla A, 60 g de la mezcla B, 30 g de la mezcla C *(8-2)*

42. (A) 22 monedas de 5 centavos y ocho de 10 centavos (B) $22 + 3t$, monedas de 5 centavos, $8 - 4t$ monedas de 10 centavos y t de 25 centavos, $t = 0, 1, 2$ *(8-1, 8-2)*

43. (A) La utilidad máxima es $P = \$7\,800$ cuando se producen 80 botes regulares y 30 de competición.
(B) La ganancia máxima aumenta a \$8 750 cuando se produce 70 botes de competición y no se produce ninguno de tipo regular.
(C) La ganancia máxima disminuye a \$7 200 cuando no se produce ningún bote de competición y se producen 120 botes regulares. *(8-5)*

44. (A) El costo mínimo es $C = \$13$ cuando se usan 100 g de la mezcla A y 150 g de la mezcla B.
(B) El costo mínimo disminuye a \$9 cuando se usan 50 g de la mezcla A y 275 g de la mezcla B.
(C) El costo mínimo aumenta a \$28.75 cuando se usan 250 g de la mezcla A y 75 g de la mezcla B. *(8-5)*

CAPÍTULO 9

Ejercicio 9-1

1. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -4 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **5.** No está definido **7.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 5 & -5 & 7 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 20 & -10 & 30 \\ 0 & -40 & 50 \end{bmatrix}$ **11.** $[10]$ **13.** $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ **19.** $[-14]$ **21.** $\begin{bmatrix} -20 & 10 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$ **23.** $[11]$ **25.** $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 6 & -4 & -8 \\ -9 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ **27.** No está definido

29. $\begin{bmatrix} -6 & 7 & -11 \\ 4 & 18 & -4 \end{bmatrix}$ **31.** $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 8 \\ -18 & 12 & 10 \\ 4 & 6 & 24 \end{bmatrix}$ **33.** $\begin{bmatrix} 5 & -11 & 15 \\ 4 & -7 & 3 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}$ **35.** $\begin{bmatrix} -0.2 & 1.2 \\ 2.6 & -0.6 \\ -0.2 & 2.2 \end{bmatrix}$ **37.** $\begin{bmatrix} -31 & 16 \\ 61 & -25 \\ -3 & 77 \end{bmatrix}$

39. No está definido **41.** $\begin{bmatrix} -2 & 25 & -15 \\ 26 & -25 & 45 \\ -2 & 45 & -25 \end{bmatrix}$ **43.** $\begin{bmatrix} -26 & -15 & -25 \\ -4 & -18 & 4 \\ 2 & 43 & -19 \end{bmatrix}$ **45.** $a = -1, b = 1, c = 3, d = -5$ **47.** $x = 1, y = 2$

49. $x = -5, y = 4$ **51.** $a = 3, b = 1, c = 1, d = -2$ **53.** Todos son verdaderos. **55.**

	Guitarra	Banjo
Materiales	\$33	\$26
Mano de obra	\$57	\$77

57. Alza de precios

	Carro base	Aire	Radio AM/FM	Control de crucero
Modelo *A*	\$3 330	\$77	\$42	\$27
Modelo *B*	\$2 125	\$93	\$95	\$50
Modelo *C*	\$1 270	\$113	\$121	\$52

59. (A) \$11.80 (B) \$30.30 (C) MN da los costos de mano de obra por bote en cada planta
(D)

$MN =$

	Planta I	Planta II
Bote de una persona	\$11.80	\$13.80
Bote de dos personas	\$18.50	\$21.60
Bote de cuatro personas	\$26.00	\$30.30

61. (A) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; Hay una manera de viajar de Baltimore a Atlanta con una conexión intermedia; hay dos maneras de viajar de Atlanta a Chicago con una conexión intermedia. En general, los elementos en A^2 indican el número de diferentes maneras de viajar de la i ésima ciudad a la j ésima ciudad con una conexión intermedia.

(B) $A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; Hay una manera de viajar de Denver a Baltimore con dos conexiones intermedias; hay dos maneras de viajar de Atlanta a El Paso con dos conexiones intermedias. En general, los elementos en A^3 indican el número de diferentes maneras de viajar de la i ésima ciudad a la j ésima ciudad con dos conexiones intermedias.

(C) $A + A^2 + A^3 + A^4 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; Es posible viajar desde cualquier origen a cualquier destino con a lo más tres conexiones intermedias.

63. (A) \$3 550 (B) \$6 000 (C) NM da el costo total por ciudad
(D)

$NM =$

	Costo por ciudad
Berkeley	\$3 550
Oakland	\$6 000

(E) $[1 \quad 1]N = [3\,000 \quad 1\,300 \quad 13\,000]$ (Llamada telefónica, Llamadas a domicilio, Carta)

(F) $N\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$

	Total de contactos
Berkeley	6 500
Oakland	10 800

Ejercicio 9-2

1. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **25.** No existe **27.** $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

31. No existe **33.** $\begin{bmatrix} -9 & -15 & 10 \\ 4 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **37.** M^{-1} existe si y sólo si todos los elementos de la diagonal principal son diferentes de cero.

39. $\begin{bmatrix} 0.5 & -0.3 & 0.85 & -0.25 \\ 0 & 0.1 & 0.05 & -0.25 \\ -1 & 0.9 & -1.55 & 0.75 \\ -0.5 & 0.4 & -1.3 & 0.5 \end{bmatrix}$ **41.** $\begin{bmatrix} 1.75 & 5.25 & 8.75 & -1 & -18.75 \\ 1.25 & 3.75 & 6.25 & -1 & -13.25 \\ -4.75 & -13.25 & -22.75 & 3 & 48.75 \\ -1.375 & -4.625 & -7.875 & 1 & 16.375 \\ 3.25 & 8.75 & 15.25 & -2 & -32.25 \end{bmatrix}$

43. 14 5 195 74 97 37 181 67 49 18 121 43 103 41 **45.** GREEN EGGS AND HAM

47. 21 56 55 25 58 46 97 94 48 75 45 58 63 45 59 48 64 80 44 69 68 104 123 72 127

49. LYNDON BAINES JOHNSON

Ejercicio 9-3

1. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 &= -2 \end{aligned}$ **3.** $\begin{aligned} -2x_1 \quad + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -4 \\ x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$ **5.** $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

9. $x_1 = -8, x_2 = 2$ **11.** $x_1 = 0, x_2 = 4$ **13.** (A) $x_1 = -3, x_2 = 2$ (B) $x_1 = -1, x_2 = 2$ (C) $x_1 = -8, x_2 = 3$

15. (A) $x_1 = 17, x_2 = -5$ (B) $x_1 = 7, x_2 = -2$ (C) $x_1 = 24, x_2 = -7$

17. (A) $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$ (B) $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$ (C) $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = -3$

19. (A) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4$ (B) $x_1 = -2, x_2 = 2, x_3 = 0$ (C) $x_1 = 6, x_2 = -2, x_3 = -6$

21. $X = (A - B)^{-1}C$ **23.** $X = (A + I)^{-1}C$ **25.** $X = (A - B)^{-1}(C + D)$

27. (A) $x_1 = 1, x_2 = 0$ (B) $x_1 = -2\,000, x_2 = 1\,000$ (C) $x_1 = 2\,001, x_2 = -1\,000$

29. $x_1 = 18.2, x_2 = 27.9, x_3 = -15.2$ **31.** $x_1 = 24, x_2 = 5, x_3 = -2, x_4 = 15$

33. Concierto 1: 6 000 boletos de $4 y 4 000 boletos de $8; Concierto 2: 5 000 boletos de $4 y 5 000 boletos de $8; Concierto 3: 3 000 boletos de $4 y 7 000 boletos de $8

35. (A) $I_1 = 4, I_2 = 6, I_3 = 2$ (B) $I_1 = 3, I_2 = 7, I_3 = 4$ (C) $I_1 = 7, I_2 = 8, I_3 = 1$

37. (A) $a = 1, b = 0, c = -3$ (B) $a = -2, b = 5, c = 1$ (C) $a = 11, b = -46, c = 43$

39. Dieta 1: 60 onzas de la mezcla *A* y 80 onzas de la mezcla *B*; Dieta 2: 20 onzas de la mezcla *A* y 60 onzas de la mezcla *B*; Dieta 3: 0 onzas de la mezcla *A* y 100 onzas de la mezcla *B*.

Ejercicio 9-4

1. 8 **3.** −20 **5.** −0.88 **7.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}$ **9.** $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$ **11.** $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} = 0$ **13.** $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -4$

15. 10 **17.** −21 **19.** −40 **21.** $(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ **23.** $(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix}$ **25.** 22 **27.** −12 **29.** 0

31. 6 **33.** 60 **35.** 114

37. (A) $a_{11}a_{22}, a_{11}a_{22}a_{33}$ (B) En cada caso, el determinante es el producto de los términos de la diagonal principal

39. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$; intercambiando las filas de este determinante cambia el signo.

41. $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; multiplicando una columna de esta determinante por un número *k* se multiplica el valor de la determinante por *k*.

43. $\begin{vmatrix} kc + a & kd + b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; sumando un múltiplo de una fila a otra fila no cambia el valor de la determinante.

47. $49 = (-7)(-7)$ **49.** $f(x) = x^2 - 4x + 3$; 1, 3 **51.** $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$; −4, 0, 2

Ejercicio 9-5

1. Teorema 1 **3.** Teorema 1 **5.** Teorema 2 **7.** Teorema 3 **9.** Teorema 5 **11.** $x = 0$ **13.** $x = 5$ **15.** -10
17. 10 **19.** -10 **21.** 25 **23.** -12 **25.** Teorema 1 **27.** Teorema 2 **29.** Teorema 5 **31.** $x = 5, y = 0$
33. $x = -3, y = 10$ **35.** -28 **37.** 106 **39.** 0 **41.** 6 **43.** 14
45. Desarrolle el lado izquierdo de la ecuación usando menores. **47.** Desarrolle ambos lados de la ecuación y compare.
49. Esto se deduce del teorema 4.
51. Desarrolle el determinante de la primera fila para obtener $(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0$. Después demuestre que los dos puntos satisfacen esta ecuación lineal.
53. Si el determinante es 0, entonces el área del triángulo formado por los tres puntos es 0. La única manera de que esto suceda es que los tres puntos estén en la misma recta, esto es, que los puntos sean colineales.

Ejercicio 9-6

1. $x = 5, y = -2$ **3.** $x = 1, y = -1$ **5.** $x = -\frac{6}{5}, y = \frac{3}{5}$ **7.** $x = \frac{2}{17}, y = -\frac{20}{17}$ **9.** $x = 6\,400, y = 6\,600$
11. $x = 760, y = 760$ **13.** $x = 2, y = -2, z = -1$ **15.** $x = \frac{4}{3}, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{2}{3}$ **17.** $x = -9, y = -\frac{7}{3}, z = 6$
19. $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{7}{6}, z = \frac{2}{3}$ **21.** $x = 4$ **23.** $y = 2$ **25.** $z = \frac{5}{2}$
27. Ya que $D = 0$, el sistema no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones. Puesto que $x = 0, y = 0, z = 0$ es una solución, el segundo caso debe ser válido.
31. (A) $R = 200p + 300q - 6p^2 + 6pq - 3q^2$
(B) $p = -0.3x - 0.4y + 180, q = -0.2x - 0.6y + 220, R = 180x + 220y - 0.3x^2 - 0.6xy - 0.6y^2$

Ejercicio de repaso del capítulo 9

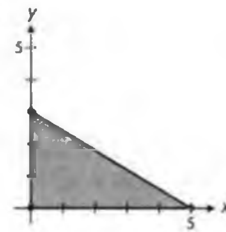
1. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ *(9-1)* **2.** No está definido *(9-1)* **3.** $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *(9-1)* **4.** $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ *(9-1)* **5.** No está definido *(9-1)*
6. $\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ *(9-1)* **7.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ *(9-1)* **8.** [8] *(9-1)* **9.** No está definido *(9-1)* **10.** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ *(9-2)*
11. (A) $x_1 = -1, x_2 = 3$ (B) $x_1 = 1, x_2 = 2$ (C) $x_1 = 8, x_2 = -10$ *(9-3)* **12.** -17 *(9-4)* **13.** 0 *(9-4, 9-5)*
14. $x = 2, y = -1$ *(9-6)* **15.** (A) -2 (B) 6 (C) 2 *(9-5)* **16.** No está definido *(9-1)* **17.** $\begin{bmatrix} 10 & -8 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ *(9-1)*
18. $\begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ *(9-1)* **19.** No está definido *(9-1)* **20.** [9] *(9-1)* **21.** $\begin{bmatrix} 10 & -5 & 1 \\ -1 & -4 & -5 \\ 1 & -7 & -2 \end{bmatrix}$ *(9-1)*
22. $\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ o $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *(9-2)*
23. (A) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$ (B) $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 1$ (C) $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = -2$ *(9-3)*
24. $-\frac{11}{12}$ *(9-4)* **25.** 35 *(9-4, 9-5)* **26.** $y = \frac{10}{5} = 2$ *(9-6)*
27. (A) Una solución única (B) O no hay solución o hay un número infinito de soluciones. *(9-3)*
28. No. *(9-3)* **29.** $X = (A - C)^{-1}B$ *(9-3)* **30.** $\begin{bmatrix} -\frac{11}{12} & -\frac{1}{12} & 5 \\ \frac{10}{12} & \frac{2}{12} & -4 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & 0 \end{bmatrix}$ o $\frac{1}{12}\begin{bmatrix} -11 & -1 & 60 \\ 10 & 2 & -48 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *(9-2)*
31. $x_1 = 1\,000, x_2 = 4\,000, x_1 = 2\,000$ *(9-3)* **32.** 42 *(9-5)*
33. $\begin{vmatrix} u + kv & v \\ w + kx & x \end{vmatrix} = (u + kv)x - (w + kx)v = ux + kvx - wv - kvx = ux - wv = \begin{vmatrix} u & v \\ w & x \end{vmatrix}$ *(9-5)*
34. El teorema 4 de la sección 9-5 implica que ambos puntos satisfacen la ecuación. Todos los otros puntos sobre la recta que pasan por los puntos dados también satisfacen la ecuación. *(9-5)*
35. (A) 60 ton en Big Bend, 20 ton en Saw Pit. (B) 30 toneladas en Big Bend, 50 ton en Saw Pit.
(C) 40 ton en Big Bend, 40 ton en Saw Pit. *(9-3)*
36. (A) \$27 (B) Los elementos en LH dan un costo de fabricación total de cada producto en cada planta.
(C) *(9-1)*

	Carolina del Norte	Carolina del Sur	
$LH =$	\$46.35	\$41.00	Escritorios
	\$30.45	\$27.00	Estantes

37. (A) $\begin{bmatrix} 1\,600 & 1{,}730 \\ 890 & 720 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 200 & 160 \\ 80 & 40 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 3\,150 \\ 1\,550 \end{bmatrix}$ Escritorios / Estantes *(9-1)*
Producción total de cada artículo en enero
38. DISPOSITIVO DE GRAFICACIÓN *(9-2)*

Ejercicio de repaso acumulativo de los capítulos 8 y 9

1. $x = 2, y = -1$ *(8-1)* **2.** $(-1, 2)$ *(8-1)* **3.** $(-\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}), (1, 1)$ *(8-3)* **4.** *(8-4)*



5. Máximo: 33; Mínimo: 10 *(8-5)*

6. (A) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ (B) No está definido (C) $[3]$ (D) $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ (E) $[-1, 8]$ (F) No está definido *(9-1)*

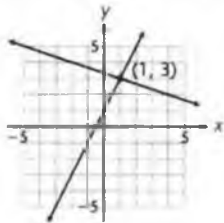
7. -10 *(9-4)* **8.** (A) $x_1 = 3, x_2 = -4$ (B) $x_1 = 2t + 3, x_2 = t$, t cualquier número real (C) No hay solución *(8-1)*

9. (A) $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{array}\right]$ (B) $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$ (C) $x_1 = -1, x_2 = 4$ *(8-1, 8-2)*

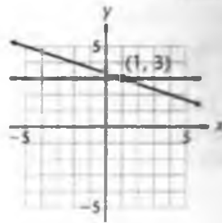
10. (A) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}$ (B) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (C) $x_1 = 13, x_2 = 5$ (D) $x_1 = -11, x_2 = -4$ *(9-3)*

11. (A) 2 (B) $x = \frac{1}{2}, y = 0$ *(9-6)*

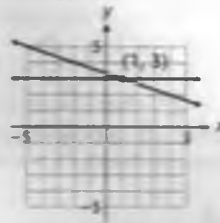
12. $x_1 = 1, x_2 = 3$; cada par de rectas tiene el mismo punto de intersección. *(8-1)*



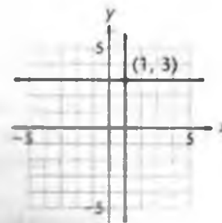
$x_1 + 3x_2 = 10$
$2x_1 - x_2 = -1$



$x_1 + 3x_2 = 10$
$-7x_2 = -21$



$x_1 + 3x_2 = 10$
$x_2 = 3$



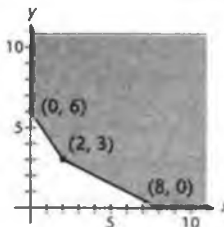
$x_1 = 1$
$x_2 = 3$

13. $(1.53, 3.35)$ *(8-1)* **14.** $(1, 0, -2)$ *(8-2)* **15.** No hay solución *(8-2)* **16.** $(t - 3, t - 2, t)$ t cualquier número real *(8-2)*

17. $(1, 1), (-1, -1), (\sqrt{3}, \sqrt{3}/3), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}/3)$ *(8-3)* **18.** $(0, 0), (0, -1), (1, 1), (-1, -1)$ *(8-3)*

19. (A) $[-3]$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ *(9-1)* **20.** (A) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (B) No está definido *(9-1)*

21. *(8-4)* **22.** 63 *(8-5)*



23. (A) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$ (B) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ (C) $(7, -5, 6)$ (D) $(-6, 3, -2)$ *(9-3)*

24. (A) $D = 1$ (B) $z = 32$ *(9-5, 9-6)* **25.** $(-1.35, 0.28), (-0.87, -1.60), (0.87, 1.60), (1.35, -0.28)$ *(8-3)*

26. (A) Número infinito de soluciones (B) No hay solución (C) Solución única *(8-2)*

27. $A = I$, la identidad $n \times n$ *(9-3)* **28.** L, M y P *(8-2)* **32.** $8 000 al 8% y $4 000 al 14% *(8-1, 8-2)*

33. 60 g de la mezcla A, 50 g de la mezcla B, 40 g de la mezcla C *(8-2)*

34. Un camión del modelo A, seis camiones del modelo B, 5 camiones del modelo C; o tres camiones del modelo A, tres camiones del modelo B, seis camiones del modelo C; o cinco camiones del modelo A y siete camiones del modelo C. *(8-2)*

35. 8 por 4 m *(8-3)*

36. (A) Fabricando diariamente 400 paquetes estándar y 200 de lujo se produce una ganancia máxima semanal de $5 600.
(B) La máxima ganancia semanal aumenta a $6 000 cuando no se producen paquetes estándar y se producen 400 paquetes de lujo.
(C) La máxima ganancia semanal aumenta a $6 600 cuando se producen diariamente 600 paquetes estándar y ninguno de lujo. *(8-5)*

37. (A) $M\begin{bmatrix}0.25\\0.25\\0.25\\0.25\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}82.25\\83\\92\\83.75\\82\end{bmatrix}$ Ana, Roberto, Carolina, Daniel, Ernesto (B) $M\begin{bmatrix}0.2\\0.2\\0.2\\0.4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}83\\84.8\\91.8\\85.2\\80.8\end{bmatrix}$ Ana, Roberto, Carolina, Daniel, Ernesto

(C) Promedios de la clase

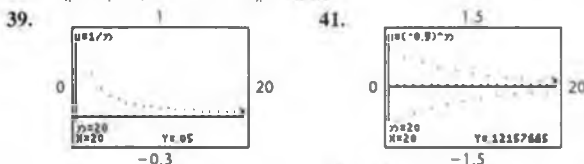
	Examen 1	Examen 2	Examen 3	Examen 4
$[0.2 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.2]M =$	[84.4	81.8	85	87.2]

(9-1)

CAPÍTULO 10

Ejercicio 10-1

1. $-1, 0, 1, 2$ **3.** $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$ **5.** $4, -8, 16, -32$ **7.** 6 **9.** $\frac{99}{101}$ **11.** $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ **13.** $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1.000}$
15. $-1 + 1 - 1 + 1$ **17.** $1, -4, 9, -16, 25$ **19.** 0.3, 0.33, 0.333, 0.3333, 0.333 33 **21.** $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$
23. $7, 3, -1, -5, -9$ **25.** $4, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}$ **27.** $a_n = n + 3$ **29.** $a_n = 3n$ **31.** $a_n = n/(n + 1)$ **33.** $a_n = (-1)^{n+1}$
35. $a_n = (-2)^n$ **37.** $a_n = x^n/n$
39. **41.**



43. $\frac{4}{1} - \frac{8}{2} + \frac{16}{3} - \frac{32}{4}$ **45.** $x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}$ **47.** $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ **49.** $\sum_{k=1}^{4} k^2$ **51.** $\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{2^k}$ **53.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ **55.** $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2$
57. (A) 3, 1.83, 1.46, 1.415 (B) $\sqrt{2} \approx 1.4142$ (C) Para $a_1 = 1$: 1, 1.5, 1.417, 1.414
59. Los valores de c_n son aproximadamente 2.236 (es decir, $\sqrt{5}$) para valores grandes de n.
61. Aproximación en serie de $e^{0.2} = 1.221\ 400\ 0$; valor de calculadora $e^{0.2} = 1.221\ 402\ 8$

Ejercicio 10-2

1. Falla en $n = 2$ **3.** Falla en $n = 3$ **5.** P_1: $2 = 2 \cdot 1^2$; P_2: $2 + 6 = 2 \cdot 2^2$; P_3: $2 + 6 + 10 = 2 \cdot 3^2$
7. P_1: $a^5a = a^{5+1}$; P_2: $a^5a^2 = a^5(a^1a) = (a^5a)a = a^6a = a^7 = a^{5+2}$; P_3: $a^5a^3 = a^5(a^2a) = a^5(a^1a)a = [(a^5a)a]a = a^8 = a^{5+3}$
9. P_1: $9^1 - 1 = 8$ es divisible entre 4; P_2: $9^2 - 1 = 80$ es divisible entre 4; P_3: $9^3 - 1 = 728$ es divisible entre 4
11. P_k: $2 + 6 + 10 + \cdots + (4k - 2) = 2k^2$; P_{k+1}: $2 + 6 + 10 + \cdots + (4k - 2) + (4k + 2) = 2(k + 1)^2$
13. P_k: $a^5a^k = a^{5+k}$; P_{k+1}: $a^5a^{k+1} = a^{5+k+1}$ **15.** P_k: $9^k - 1 = 4r$; P_{k+1}: $9^{k+1} - 1 = 4s$; $r, s \in N$
23. $n = 4$, $p(x) = x^4 + 1$ **25.** $n = 23$ **43.** $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$
45. $1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) = n(n - 1)/2$, $n \geq 2$ **51.** $3^4 + 4^4 + 5^4 + 6^4 \neq 7^4$

Ejercicio 10-3

1. (A) Aritmético con $d = -5$; $-26, -31$ (B) Geométrico con $r = -2$; $-16, 32$ (C) Tampoco
(D) Geométrico con $r = \frac{1}{3}$; $\frac{1}{54}, \frac{1}{162}$
3. $a_2 = -1, a_3 = 3, a_4 = 7$ **5.** $a_{15} = 67, S_{11} = 242$ **7.** $S_{21} = 861$ **9.** $a_{15} = -21$ **11.** $a_2 = 3, a_3 = -\frac{3}{2}, a_4 = \frac{3}{4}$
13. $a_{10} = \frac{1}{243}$ **15.** $S_7 = 3\ 279$ **17.** $d = 6, a_{101} = 603$ **19.** $S_{40} = 200$ **21.** $a_{11} = 2, S_{11} = \frac{77}{6}$ **23.** $a_1 = 1$
25. $r = 0.398$ **27.** $S_{10} = -1\ 705$ **29.** $a_2 = 6, a_3 = 4$ **31.** $S_{51} = 4\ 131$ **33.** $S_7 = 547$ **35.** $-1\ 071$ **37.** $\frac{1.023}{1.024}$
39. 4 446 **43.** $x = 2\sqrt{3}$ **45.** $a_n = -3 + (n - 1)3$ **47.** 66 **49.** 133 **51.** $S_\infty = \frac{9}{2}$ **53.** No hay suma. **55.** $S_\infty = \frac{8}{5}$
57. $\frac{7}{9}$ **59.** $\frac{6}{11}$ **61.** $3\frac{8}{37}$ o $\frac{119}{37}$ **65.** $a_n = (-2)(-3)^{n-1}$ **67.** *Sugerencia*: $y = x + d$, $z = x + 2d$ **71.** $x = -1, y = 2$
73. Compañía A: \$501 000; compañía B: \$504 000 **75.** \$4 000 000 **77.** $A = P(1 + r)^n$; aprox 12 yardas **79.** \$700 al año; \$115 500
81. 900 **83.** 1 250 000 **85.** (A) 336 pies (B) 1 936 pies (C) $16t^2$ **87.** $A = A_0 2^{2t}$ **89.** $r = 10^{-0.4} = 0.398$
91. $\$9.223 \times 10^{16}$; $\$1.845 \times 10^{17}$ **93.** 0.0015 psi **95.** 2 **97.** 3,420°

Ejercicio 10-4

1. 720 **3.** 20 **5.** 720 **7.** 15 **9.** 1 **11.** 28 **13.** $9!/8!$ **15.** $8!/5!$ **17.** 126 **19.** 6 **21.** 1
23. 2 380 **27.** $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$ **29.** $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$ **31.** $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$
33. $m^4 + 12m^3n + 54m^2n^2 + 108mn^3 + 81n^4$ **35.** $32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5$
37. $m^6 + 12m^5n + 60m^4n^2 + 160m^3n^3 + 240m^2n^4 + 192mn^5 + 64n^6$ **39.** $5\ 005u^9v^6$ **41.** $264m^2n^{10}$ **43.** $924w^6$
45. $-48{,}384x^3y^5$ **47.** 5 **49.** (A) $a_4 = 0.251$ (B) 1 **51.** 1.1046

Ejercicio 10-5

1. 990 **3.** 10 **5.** 35 **7.** 1 **9.** 60 **11.** 6 497 400 **13.** 10 **15.** 270 725 **17.** $5 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 = 120$
19. $P_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ **21.** $C_{7,3} = 35$ subcomités; $P_{7,3} = 210$ **23.** $C_{10,2} = 45$
25. No se repite $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$; con repeticiones de: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,296$ **27.** No repite $P_{10,5} = 30\,240$; con repeticiones de: $10^5 = 100\,000$
29. $C_{13,5} = 1\,287$ **31.** $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17\,576\,000$ posibles matrículas de licencias; no se repite $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 11\,232\,000$
33. $C_{13,5}\,C_{13,2} = 100\,386$ **35.** $C_{8,3}\,C_{10,4}\,C_{7,2} = 246\,960$
37. (B) $r = 0, 10$ (C) Cada uno es el producto de r enteros consecutivos, el mayor del cual es n para $P_{n,r}$ y r para $r!$
39. $12 \cdot 11 = 132$ **41.** (A) $C_{8,2} = 28$ (B) $C_{8,3} = 56$ (C) $C_{8,4} = 70$
43. Dos personas: $P_{5,2} = 20$; tres personas: $P_{5,3} = 60$; cuatro personas: $P_{5,4} = 120$; cinco personas: $P_{5,5} = 120$
45. (A) $P_{8,5} = 6\,720$ (B) $C_{8,5} = 56$ (C) $2 \cdot C_{6,4} = 30$
47. Ahi hay $C_{4,1} \cdot C_{48,4} = 778\,320$ manos que contienen exactamente un rey, y $C_{39,5} = 575\,757$ manos que no contienen corazones, asi la anterior es más probable.

Ejercicio de repaso del capítulo 10

1. (A) Geométrico (B) Aritmético (C) Aritmético (D) Tampoco (E) Geométrico *(10-1, 10-3)*
2. (A) 5, 7, 9, 11 (B) $a_{10} = 23$ (C) $S_{10} = 140$ *(10-1, 10-3)*
3. (A) 16, 8, 4, 2 (B) $a_{10} = \frac{1}{32}$ (C) $S_{10} = 31\frac{31}{32}$ *(10-1, 10-3)*
4. (A) $-8, -5, -2, 1$ (B) $a_{10} = 19$ (C) $S_{10} = 55$ *(10-1, 10-3)*
5. (A) $-1, 2, -4, 8$ (B) $a_{10} = 512$ (C) $S_{10} = 341$ *(10-1, 10-3)* **6.** $S_\infty = 32$ *(10-3)* **7.** 720 *(10-4)*
8. $20 \cdot 21 \cdot 22 = 9\,240$ *(10-4)* **9.** 21 *(10-4)* **10.** $C_{6,2} = 15$, $P_{6,2} = 30$ *(10-5)*
11. (A) 12 resultados combinados (B) $6 \cdot 2 = 12$ *(10-5)* **12.** $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ *(10-5)* **13.** $P_{6,6} = 6! = 720$ *(10-5)*

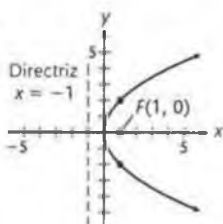


14. P_1: $5 = 1^2 + 4 \cdot 1$; P_2: $5 + 7 = 2^2 + 4 \cdot 2$; P_3: $5 + 7 + 9 = 3^2 + 4 \cdot 3$ *(10-2)*
15. P_1: $2 = 2^{1+1} - 2$; P_2: $2 + 4 = 2^{2+1} - 2$; P_3: $2 + 4 + 8 = 2^{3+1} - 2$ *(10-2)*
16. P_1: $49^1 - 1 = 48$ es divisible entre 6; P_2: $49^2 - 1 = 2\,400$ es divisible entre 6, P_3: $49^3 - 1 = 117\,648$ es divisible entre 6 *(10-2)*
17. P_k: $5 + 7 + 9 + \cdots + (2k + 3) = k^2 + 4k$; P_{k+1}: $5 + 7 + 9 + \cdots + (2k + 3) + (2k + 5) = (k + 1)^2 + 4(k + 1)$ *(10-2)*
18. P_k: $2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 2$; P_{k+1}: $2 + 4 + 8 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 2$ *(10-2)*
19. P_k: $49^k - 1 = 6r$ para algún entero r; P_{k+1}: $49^{k+1} - 1 = 6s$ para algún entero s *(10-2)* **20.** $n = 31$ es un contraejemplo *(10-2)*
21. $S_{10} = -6 - 4 - 2 + 0 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 30$ *(10-3)* **22.** $S_7 = 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 15\frac{7}{8}$ *(10-3)*
23. $S_\infty = \frac{81}{5}$ *(10-3)* **24.** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{3^k}$; $S_\infty = \frac{1}{4}$ *(10-3)* **25.** $C_{6,3} = 20$ *(10-5)* **26.** $d = 3$, $a_5 = 25$ *(10-3)*
27. 336; 512; 392 *(10-5)* **28.** $\frac{8}{11}$ *(10-3)* **29.** (A) $P_{6,3} = 120$ (B) $C_{5,2} = 10$ *(10-5)* **30.** 190 *(10-4)*
31. 1 820 *(10-4)* **32.** 1 *(10-4)* **33.** $x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$ *(10-4)*
34. $-1\,760x^3y^9$ *(10-4)* **38.** 29 *(10-4)* **39.** 26 *(10-1)* **40.** $2^5 = 32$; 6 *(10-5)* **41.** 49 g/2 pies; 625 g/2 pies *(10-3)*
42. 12 *(10-5)* **43.** $x^6 + 6ix^5 - 15x^4 - 20ix^3 + 15x^2 + 6ix - 1$ *(10-4)* **44.** $P_{5,5} = 120$ *(10-5)*

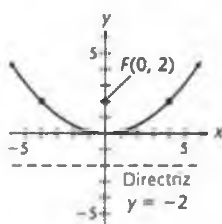
CAPÍTULO 11

Ejercicio 11-1

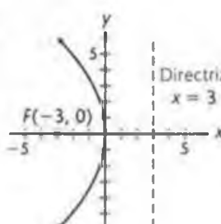
1.



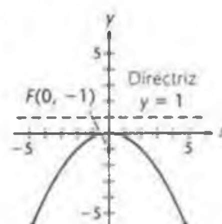
3.



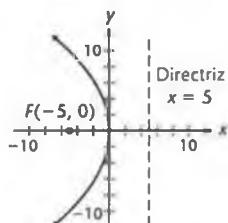
5.



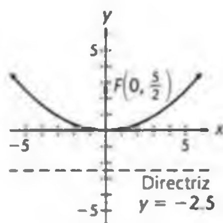
7.



9.



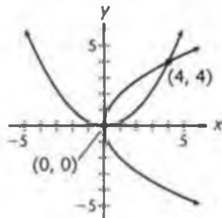
11.



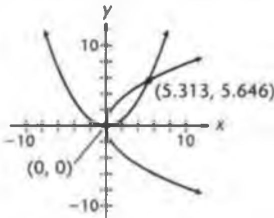
13. (9.75, 0) **15.** (0, −26.25) **17.** (−19.25, 0)

19. $x^2 = 12y$ **21.** $x^2 = -28y$ **23.** $y^2 = -24x$ **25.** $y^2 = 8x$ **27.** $x^2 = 8y$ **29.** $y^2 = -12x$ **31.** $x^2 = -4y$

33.



35.



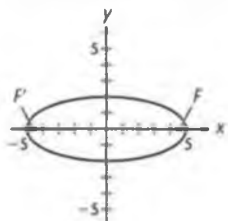
37. (A) 2; $x = 0$ y $y = 0$ (B) (0, 0), $(4am, 4am^2)$

39. $A(-2a, a)$, $B(2a, a)$ **41.** $x^2 - 4x - 12y - 8 = 0$ **43.** $y^2 + 8y - 8x + 48 = 0$ **45.** (−0.78, 0.08), (40.78, 207.92)

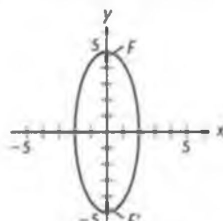
47. (−6.84, −5.85), (0, 0) **49.** $x^2 = -200y$ **51.** (A) $y = 0.0025x^2$, $-100 \leq x \leq 100$ (B) 25 pies

Ejercicio 11-2

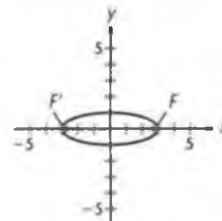
1. Focos: $F'(-\sqrt{21}, 0)$, $F(\sqrt{21}, 0)$
Longitud del eje mayor = 10
Longitud del eje menor = 4



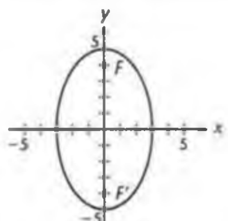
3. Focos: $F'(0, -\sqrt{21})$, $F(0, \sqrt{21})$
Longitud del eje mayor = 10
Longitud del eje menor = 4



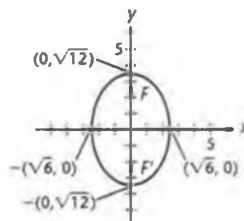
5. Focos: $F'(-\sqrt{8}, 0)$, $F(\sqrt{8}, 0)$
Longitud del eje mayor = 6
Longitud del eje menor = 2



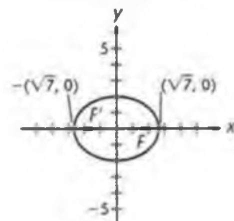
7. Focos: $F'(0, -4)$, $F(0, 4)$
Longitud del eje mayor = 10
Longitud del eje menor = 6



9. Focos: $F'(0, -\sqrt{6})$, $F(0, \sqrt{6})$
Longitud del eje mayor = $2\sqrt{12} \approx 6.93$
Longitud del eje menor = $2\sqrt{6} \approx 4.90$

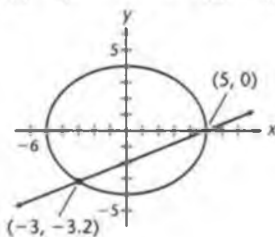


11. Focos: $F'(-\sqrt{3}, 0)$, $F(\sqrt{3}, 0)$
Longitud del eje mayor = $2\sqrt{7} \approx 5.29$
Longitud del eje menor = 4

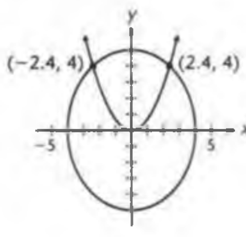


13. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ **15.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{121} = 1$ **17.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$ **19.** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{170} = 1$ **21.** No pasa la prueba de la recta vertical.

23.



25.



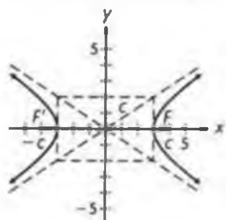
27. (2.201, 4.403)

29. (3.565, 1.589) **31.** $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$; elipse **33.** (−0.46, 2.57), (4.08, −1.06) **35.** (±3.64, ±9.50)

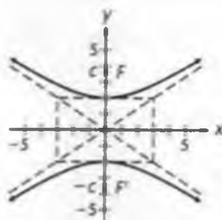
37. $\frac{x^2}{400} + \frac{y^2}{144} = 1$; 7.94 pies **39.** (A) $\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{15.9} = 1$ (B) 5.13 pies

Ejercicio 11-3

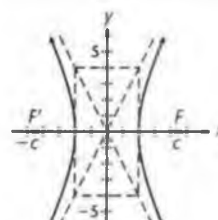
1. Focos: $F'(-\sqrt{13}, 0)$, $F(\sqrt{13}, 0)$
Longitud del eje transversal = 6
Longitud del eje conjugado = 4



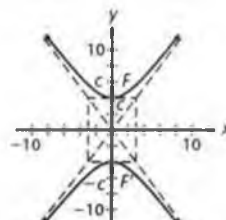
3. Focos: $F'(0, -\sqrt{13})$, $F(0, \sqrt{13})$
Longitud del eje transversal = 4
Longitud del eje conjugado = 6



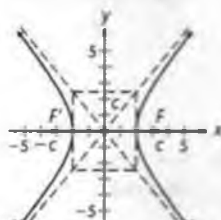
5. Focos: $F'(-\sqrt{20}, 0)$, $F(\sqrt{20}, 0)$
Longitud del eje transversal = 4
Longitud del eje conjugado = 8



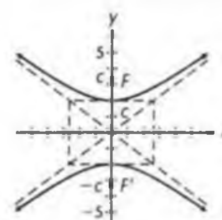
7. Focos: $F'(0, -5)$, $F(0, 5)$
Longitud del eje transversal = 8
Longitud del eje conjugado = 6



9. Focos: $F'(-\sqrt{10}, 0)$, $F(\sqrt{10}, 0)$
Longitud del eje transversal = 4
Longitud del eje conjugado = $2\sqrt{6} \approx 4.90$



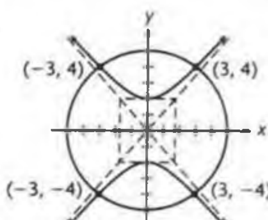
11. Focos: $F'(0, -\sqrt{11})$, $F(0, \sqrt{11})$
Longitud del eje transversal = 4
Longitud del eje conjugado = $2\sqrt{7} \approx 5.29$



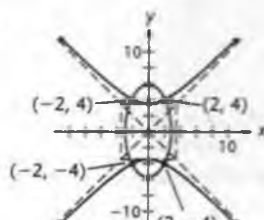
13. $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$ **15.** $\frac{y^2}{144} - \frac{x^2}{81} = 1$ **17.** $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{40} = 1$ **19.** $\frac{y^2}{151} - \frac{x^2}{49} = 1$

21. (A) Un número infinito de: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{1 - a^2} = 1$ $(0 < a < 1)$ (B) Un número infinito de: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$ $(a > 1)$ (C) Uno; $y^2 = 4x$

23.



25.



27. (−1.389, 3.306), (6.722, 7.361)

29. (−3.266, 3.830), (3.266, 3.830) **31.** $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$; hipérbola **33.** (−4.73, 2.88), (3.35, −0.90) **35.** (±1.39, ±2.96)

37. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{8} = 1$; 5.38 pies sobre el vértice **39.** $y = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 + 30^2}$

Ejercicio 11-4

1. (A) $x' = x - 3$, $y' = y - 5$ (B) $x'^2 + y'^2 = 81$ (C) Círculo

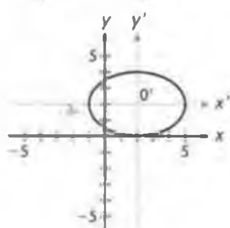
3. (A) $x' = x + 7$, $y' = y - 4$ (B) $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{16} = 1$ (C) Elipse

5. (A) $x' = x - 4$, $y' = y + 9$ (B) $y'^2 = 16x'$ (C) Parábola

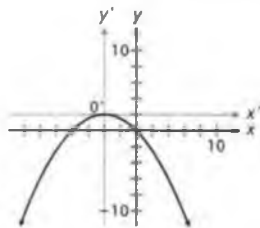
7. (A) $x' = x + 8$, $y' = y + 3$ (B) $\frac{x'^2}{12} + \frac{y'^2}{8} = 1$ (C) Elipse **9.** (A) $\frac{(x - 3)^2}{9} - \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$ (B) Hipérbola

11. (A) $\frac{(x + 5)^2}{5} + \frac{(y + 7)^2}{6} = 1$ (B) Elipse **13.** (A) $(x + 6)^2 = -24(y - 4)$ (B) Parábola

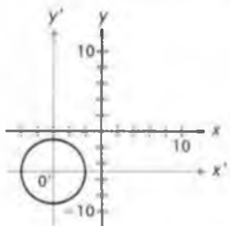
15. $\dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$; elipse



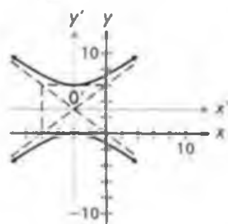
17. $(x+4)^2=-8(y-2)$; parábola



19. $(x+6)^2+(y+5)^2=16$; círculo



21. $\dfrac{(y-3)^2}{9}-\dfrac{(x+4)^2}{16}=1$; hipérbola

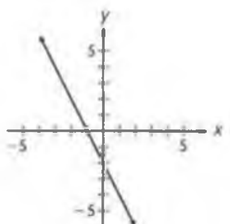


23. $h=\dfrac{-D}{2A}$, $k=\dfrac{D^2-4AF}{4AE}$

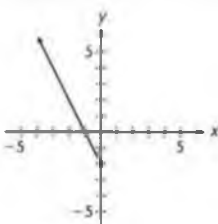
25. $x^2-4x+4y-16=0$ **27.** $x^2+4y^2+4x+24y+24=0$ **29.** $25x^2+9y^2-200x+36y+211=0$
31. $4x^2-y^2-16x+6y+11=0$ **33.** $F'(-\sqrt{5}+2, 2)$, $F(\sqrt{5}+2, 2)$ **35.** $F(-4, 0)$ **37.** $F'(-4, -2)$, $F(-4, 8)$
39. $(1.18, 1.98)$, $(6.85, -6.52)$ **41.** $(-1.72, -1.87)$, $(-0.99, 2.06)$

Ejercicio 11-5

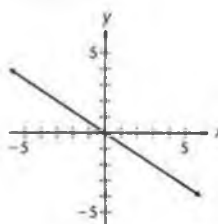
1. $y=-2x-2$;
línea recta



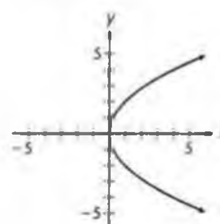
3. $y=-2x-2$, $x\leq 0$;
un rayo (parte de una línea recta)



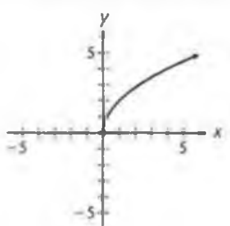
5. $y=-\frac{2}{3}x$;
línea recta



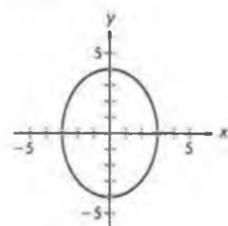
7. $y^2=4x$;
parábola



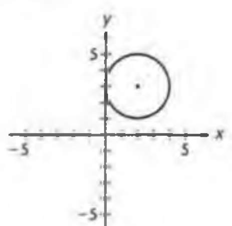
9. $y^2=4x$, $y\geq 0$;
parábola (mitad superior)



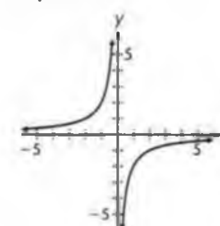
11. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$;
elipse



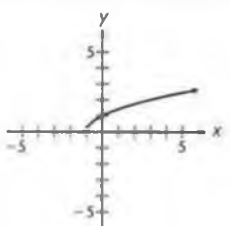
13. $(x-2)^2+(y-3)^2=4$;
círculo



15. $y=-\dfrac{2}{x}$;
hipérbola

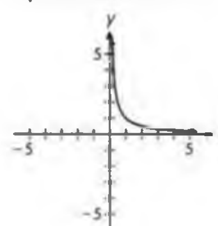


17. $y^2=x+1$, $y\geq 0$, $x\geq -1$;
parábola (mitad superior)

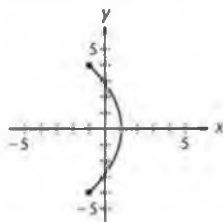


19. $x=t$, $y=\dfrac{At^2+Dt+F}{-E}$, $-\infty<t<\infty$; parábola

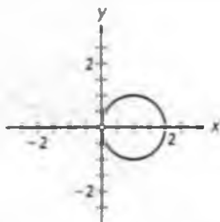
21. $y=1/x$, $x>0$;
hipérbola (una rama)



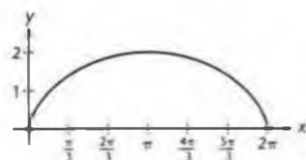
23. $y^2 = -8(x-1)$, $-1 \le x \le 1$; parte de una parábola



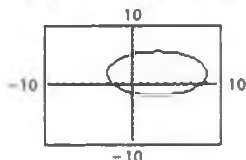
25. $x^2 + y^2 = 2x$, $x \ne 0$ o $(x-1)^2 + y^2 = 1$, $x \ne 0$; circulo (note el orificio en el origen)



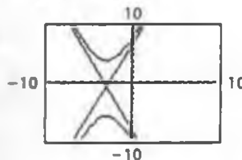
27.



29. $\dfrac{(x-3)^2}{36} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$; elipse con centro $(3, 2)$

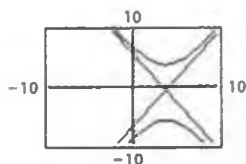


31. $\dfrac{(y+1)^2}{25} - \dfrac{(x+3)^2}{4} = 1$; hipérbola con centro $(-3, -1)$



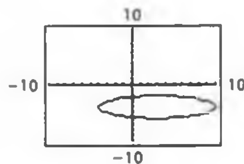
33. $\dfrac{(y+1)^2}{25} - \dfrac{(x-4)^2}{9} = 1$; hipérbola con centro $(4, -1)$;

$x = 4 + 3\tan t$, $y = -1 + 5\sec t$, $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{3\pi}{2}$, $t \ne \dfrac{\pi}{2}$

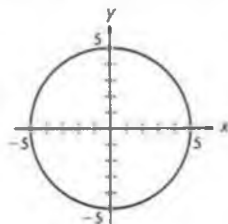


35. $\dfrac{(x-3)^2}{49} + \dfrac{(y+4)^2}{4} = 1$; elipse con centro $(3, -4)$;

$x = 3 + 7\cos t$, $y = -4 + 2\,\text{sen}\, t$, $0 \le t \le 2\pi$



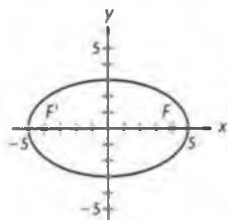
37. (A) $(4.8, -1.5)$
(B) $x^2 + y^2 = 25$; circulo



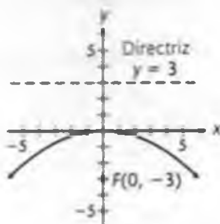
39. (A) 43.292 s (B) 9,183.619 m; 9.184 km (C) 2,295.918 m

Ejercicio de repaso del capítulo 11

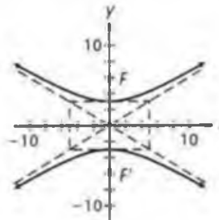
1. Focos: $F'(-4, 0)$, $F(4, 0)$ *(11-2)*
Longitud del eje mayor = 10
Longitud del eje menor = 6



2. *(11-1)*



3. Focos: $F'(0, -\sqrt{34})$, $F(0, \sqrt{34})$ *(11-3)*
Longitud del eje transversal = 6
Longitud del eje conjugado = 10



4. (A) $\dfrac{(y+2)^2}{25} - \dfrac{(x-4)^2}{4} = 1$ (B) Hipérbola *(11-4)*

5. (A) $(x+5)^2 = -12(y+4)$ (B) Parábola *(11-4)*

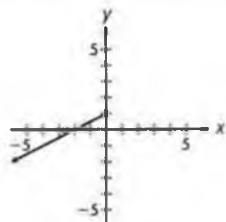
6. (A) $\dfrac{(x-6)^2}{9} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$ (B) Elipse *(11-4)*

7. $y^2 = -x$ *(12-1)*

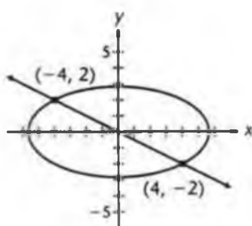
8. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ *(12-2)*

9. $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ *(11-3)*

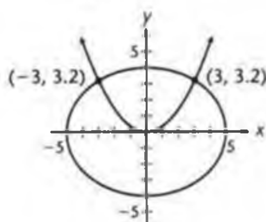
10. $y = \frac{1}{2}x + 1,\ x \le 0$; un rayo (parte de una línea recta) *(11-5)*



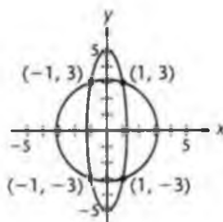
11. *(11-2, 8-3)*



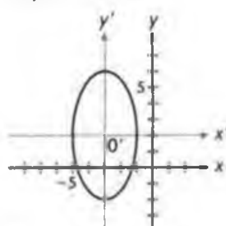
12. *(11-1, 11-2, 8-3)*



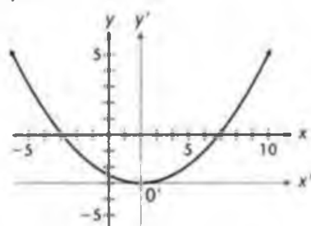
13. *(11-2, 8-3)*



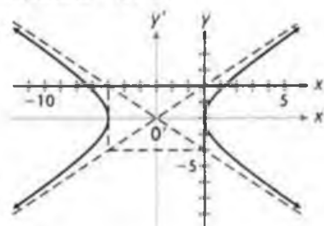
14. $\dfrac{(x+3)^2}{4} + \dfrac{(y-2)^2}{16} = 1$; elipse *(11-4)*



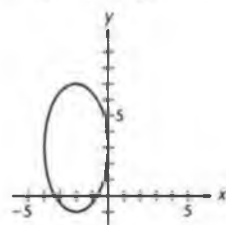
15. $(x-2)^2 = 8(y+3)$; parábola *(11-4)*



16. $\dfrac{(x+3)^2}{9} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$; hipérbola *(11-4)*



17. $\dfrac{(x+2)^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$; elipse *(11-5)*



18. $m = 0.2$; $x^2 = 50y$ es una ampliación por un factor 50 de $x^2 = y$ *(11-1)*

19. $(y-4)^2 = -8(x-4)$, o $y^2 - 8y + 8x - 16 = 0$ *(11-1)*

20. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$; hipérbola *(11-3)*

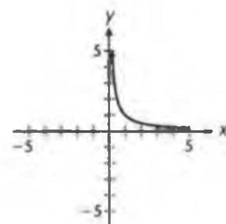
21. $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{20} = 1$; elipse *(11-2)*

22. $F'(-3, -\sqrt{12} + 2)$, $F(-3, \sqrt{12} + 2)$ *(11-4)*

23. $F(2, -1)$ *(11-4)*

24. $F'(-\sqrt{13} - 3, -2)$, $F(\sqrt{13} - 3, -2)$ *(11-4)*

25. $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$; hipérbola (una rama) *(11-5)*



26. (2.09, 2.50), (3.67, −1.92) *(11-4)*

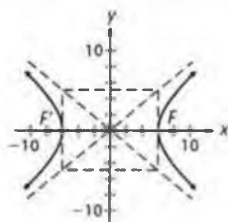
27. 4 pies *(11-1)*

28. $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ *(11-2)*

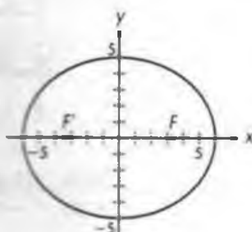
29. 4.72 pies de profundidad *(11-3)*

Ejercicio de repaso acumulativo de los capítulos 10 y 11

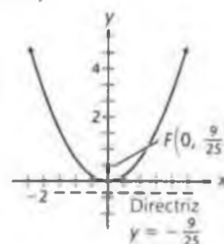
1. (A) Aritmético (B) Geométrico (C) Ninguno (D) Geométrico (E) Aritmético *(10-3)*
2. (A) 10, 50, 250, 1 250 (B) $a_8 = 781\,250$ (C) $S_8 = 976\,560$ *(10-3)*
3. (A) 2, 5, 8, 11 (B) $a_8 = 23$ (C) $S_8 = 100$ *(10-3)*
4. (A) 100, 94, 88, 82 (B) $a_8 = 58$ (C) $S_8 = 632$ *(10-3)*
5. (A) 40 320 (B) 992 (C) 84 *(10-4)*
6. (A) 21 (B) 21 (C) 42 *(10-4, 10-5)*
7. Focos: $F'(-\sqrt{61}, 0)$, $F(\sqrt{61}, 0)$ *(11-3)*
   Longitud de los ejes transversales = 12
   Longitud de los ejes conjugados = 10



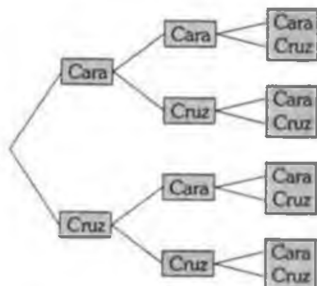
8. Focos: $F'(-\sqrt{11}, 0)$, $F(\sqrt{11}, 0)$ *(11-2)*
   Longitud del eje mayor = 12
   Longitud del eje menor = 10



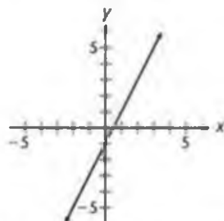
9. *(11-1)*



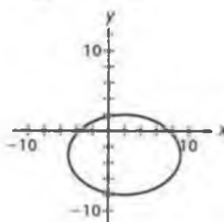
10. Ocho resultados combinados: (B) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ *(10-5)*



11. (A) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (B) $P_{4,4} = 4! = 24$ *(10-5)*
12. $y = 2x - 1$; línea recta *(11-5)*



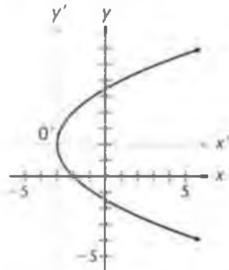
13. P_1: $1 = 1(1)$; P_2: $1 + 5 = 2(3)$
    P_3: $1 + 5 + 9 = 3(5)$ *(10-2)*
14. P_1: $1^2 + 1 + 2 = 4$ es divisible entre 2
    P_2: $2^2 + 2 + 2 = 8$ es divisible entre 2
    P_3: $3^2 + 3 + 2 = 14$ es divisible entre 2 *(10-2)*
15. P_k: $1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) = k(2k - 1)$
    P_{k+1}: $1 + 5 + 9 + \cdots + (4k - 3) + (4k + 1) = (k + 1)(2k + 1)$ *(10-2)*
16. P_k: $k^2 + k + 2 = 2r$ para algún entero r
    P_{k+1}: $(k + 1)^2 + (k + 1) + 2 = 2s$ para algún entero s *(10-2)*
17. $y = -2x^2$ *(11-1)*
18. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ *(11-2)*
19. $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{25} = 1$ *(11-3)*
20. $1 + 4 + 27 + 256 + 3\,125 = 3\,413$ *(10-1)*
21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} \frac{(-1)^{k+1}2^k}{(k+1)!}$ *(10-1)*
22. 81 *(11-3)*
23. 360; 1 296; 750 *(10-5)*
24. $n = 22$ *(10-3)*
25. $\dfrac{(x - 2)^2}{49} + \dfrac{(y + 3)^2}{25} = 1$; elipse *(11-5)*



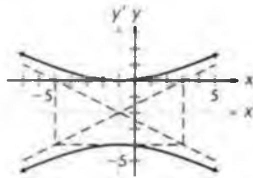
26. (A) 6 375 600 (B) 53 130 (C) 53 130 *(10-4, 10-5)*

27. $a^6 + 3a^5b + \frac{15}{4}a^4b^2 + \frac{5}{2}a^3b^3 + \frac{15}{16}a^2b^4 + \frac{3}{16}ab^5 + \frac{1}{64}b^6$ *(10-4)* **28.** $153\,090x^6y^4$; $-3\,240x^3y^7$ *(10-4)* **31.** 61 875 *(10-3)*
32. $\frac{27}{11}$ *(11-3)* **33.** $a_{22} = 0.236$; 8 términos *(10-4)*

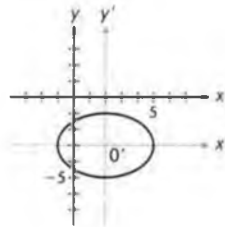
34. $(y - 2)^2 = 4(x + 3)$; parábola *(11-1)*



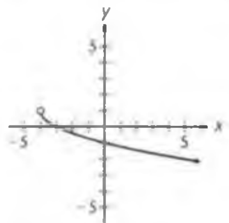
35. $\frac{(y + 2)^2}{4} - \frac{(x + 1)^2}{16} = 1$; hipérbola *(11-3)*



36. $\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$; elipse *(11-2)*



37. $10^9 = 1\,000\,000\,000$; 3 628 800 *(10-5)* **38.** $(-2.26, -4.72)$, $(1.85, 3.09)$ *(11-4)*
40. $x^6 - 12ix^5 - 60x^4 + 160ix^3 + 240x^2 - 192ix - 64$ *(10-4)* **41.** $(x - 6)^2 = -4(y - 2)$ o $x^2 - 12x + 4y + 28 = 0$ *(11-1)*
42. $\pm 2\sqrt{3}$ *(11-2)* **43.** 8 *(11-3)* **44.** $C_{7,3} = 35$ *(10-5)*
45. $x + 4 = (y - 1)^2$, $y < 1$; mitad inferior de una parábola (excluyendo al vértice) *(11-5)*



48. $x^2 - 8y^2 - 2x - 8y + 17 = 0$; hipérbola *(11-3)* **49.** \$6 000 000 *(10-3)* **50.** 4 pulg *(11-1)* **51.** 32 pies, 14.4 pies *(11-2)*

APÉNDICE A

Ejercicio A-1

1. V **3.** F **5.** F **7.** V **9.** $7 + x$ **11.** $(xy)z$ **13.** $9m$ **15.** Conmutativa (·) **17.** Distributiva
19. Inversa (·) **21.** Inversa (+) **23.** Identidad (+) **25.** Negativos **27.** $\{-2, 0, 2, 4\}$ **29.** {a, s, t, u} **31.** ∅
33. Conmutativa (+) **35.** Asociativa (+) **37.** Distributiva **39.** Cero **41.** Sí **43.** (A) V (B) F (C) V
45. $\frac{3}{5}$ y -1.43 son dos ejemplos de un número infinito **47.** (A) *Z, Q, R* (B) *Q, R* (C) *R* (D) *Q, R*
49. (A) 0.888 888 88 · · · (B) 0.272 727 27 · · · (C) 2.236 067 97 · · · (D) 1.375 000 00 · · ·
51. (B) es falso, ya que, por ejemplo, $5 - 3 \neq 3 - 5$ (D) es falso, ya que, por ejemplo, $9 \div 3 \neq 3 \div 9$
53. (A) {1, 2, 3, 4, 6} (B) {2, 4} **55.** $\frac{1}{11}$ **57.**

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 12 \\ \hline 46 \\ 230 \\ \hline 276 \end{array} \qquad \begin{aligned} 23 \cdot 12 &= 23(2 + 10) \\ &= 23 \cdot 2 + 23 \cdot 10 \\ &= 46 + 230 \\ &= 276 \end{aligned}$$

Ejercicio A-2

1. 3 **3.** $2x^3 - x^2 + 2x + 4$ **5.** $2x^3 - 5x^2 + 6$ **7.** $6x^4 - 13x^3 + 9x^2 + 13x - 10$ **9.** $4x - 6$ **11.** $6y^2 - 16y$
13. $m^2 - n^2$ **15.** $4t^2 - 11t + 6$ **17.** $3x^2 - 7xy - 6y^2$ **19.** $4m^2 - 49$ **21.** $30x^2 - 2xy - 12y^2$ **23.** $9x^2 - 4y^2$
25. $16x^2 - 8xy + y^2$ **27.** $a^3 + b^3$ **29.** $-x + 27$ **31.** $32a - 34$ **33.** $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 11x - 10$
35. $h^4 + h^2k^2 + k^4$ **37.** $-5x^2 - 4x + 5$ **39.** $2m^2 + 15mn$ **41.** $8m^3 - 12m^2n + 6mn^2 - n^3$ **43.** $5h$
45. $6hx + 2h + 3h^2$ **47.** $-4xh - 3h - 2h^2$ **49.** $3x^2h + 3xh^2 + h^3$ **51.** $m^3 - 3m^2 - 5$ **53.** $2x^3 - 13x^2 + 25x - 18$
55. $9x^3 - 9x^2 - 18x$ **57.** $(1 + 1)^2 \neq 1^2 + 1^2$; cualquier *a* o *b* debe ser cero **59.** m **61.** Ahora el grado es menor que o igual a *m*.
63. Perímetro $= 2x + 2(x - 5) = 4x - 10$ **65.** Valor $= 5x + 10(x - 5) + 25(x - 3) = 40x - 125$
67. Volumen $= \frac{4}{3}\pi(x + 0.3)^3 - \frac{4}{3}\pi x^3 = 1.2\pi x^2 + 0.36\pi x + 0.036\pi$

Ejercicio A-3

1. $2x^2(3x^2 - 4x - 1)$ **3.** $5xy(2x^2 + 4xy - 3y^2)$ **5.** $(5x - 3)(x + 1)$ **7.** $(2w - x)(y - 2z)$ **9.** $(x + 3)(x - 2)$
11. $(2m - 1)(3m + 5)$ **13.** $(2x - 3y)(x - 2y)$ **15.** $(4a - 3b)(2c - d)$ **17.** $(2x - 1)(x + 3)$ **19.** $(x - 6y)(x + 2y)$
21. Primo **23.** $(5m - 4n)(5m + 4n)$ **25.** $(x + 5y)^2$ **27.** Primo **29.** $6(x + 2)(x + 6)$ **31.** $2y(y - 3)(y - 8)$
33. $y(4x - 1)^2$ **35.** $(3s - t)(2s + 3t)$ **37.** $xy(x - 3y)(x + 3y)$ **39.** $3m(m^2 - 2m + 5)$ **41.** $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$

43. $(c-1)(c^2+c+1)$ **45.** $2(3x-5)(2x-3)(12x-19)$ **47.** $9x^4(9-x)^3(5-x)$ **49.** $2(x+1)(x^2-5)(3x+5)(x-1)$
51. $[(a-b)-2(c-d)][(a-b)+2(c-d)]$ **53.** $(2m-3n)(a+b)$ **55.** Primo **57.** $(x+3)(x-3)^2$
59. $(a-2)(a+1)(a-1)$ **61.** $[4(A+B)+3][(A+B)-2]$ **63.** $(m-n)(m+n)(m^2+n^2)$ **65.** $st(st-2)(s^2t^2+2st+4)$
67. $(m+n)(m+n-1)$ **69.** $2a[3a-2(x+4)][3a+2(x+4)]$ **71.** $(x^2-x+1)(x^2+x+1)$
73. (A) $4(10-x)(10+x) = 400-4x^2$ (B) $4x(10-x)^2 = 400x - 80x^2 + 4x^3$

Ejercicio A-4

1. $\frac{a^2}{2}$ **3.** $\frac{22y+9}{252}$ **5.** $\frac{x^2+8}{8x^3}$ **7.** $\frac{1}{2x-1}$ **9.** $\frac{1}{m}$ **11.** $\frac{2a}{(a+b)^2(a-b)}$ **13.** $\frac{m^2-6m+7}{m-2}$ **15.** $\frac{7}{x-3}$
17. $\frac{3}{y+3}$ **19.** $\frac{x+y}{x}$ **21.** $\frac{4(x+1)(x-1)(x^2+2)^2}{x^3}$ **23.** $\frac{x(2+3x)}{(1-3x)^4}$ **25.** $\frac{(x+1)(x-9)}{(x+4)^4}$ **27.** $\frac{y+3}{(y-2)(y+7)}$ **29.** -1
31. $\frac{7y-9x}{xy(a-b)}$ **33.** $\frac{x^2-x+1}{2(x-9)}$ **35.** $\frac{(x-y)^2}{y^2(x+y)}$ **37.** $\frac{1}{x-4}$ **39.** $\frac{x-3}{x-1}$ **41.** $\frac{-1}{x(x+h)}$ **43.** $\frac{x^2+xh+4x+2h}{(x+h+2)(x+2)}$
45. (A) Incorrecto (B) $x+1$ **47.** (A) Incorrecto (B) $2x+h$ **49.** (A) Incorrecto (B) $\frac{x^2-2}{x+1}$ **51.** (A) Correcto
53. $\frac{-x(x+y)}{y}$ **55.** $\frac{a-2}{a}$

Ejercicio A-5

1. 1 **3.** $6x^9$ **5.** $9x^6/y^4$ **7.** $a^4b^{12}/(c^8d^4)$ **9.** 10^{6} **11.** $2x/y^2$ **13.** w^2 **15.** 4×10^8 **17.** 3.225×10^7
19. 8.5×10^{-3} **21.** 7.29×10^{-8} **23.** 0.005 **25.** 26 900 000 **27.** 0.000 000 000 59 **29.** $3y^4/2$ **31.** x^{12}/y^8
33. $4x^8/y^6$ **35.** $w^{12}/(u^{20}v^4)$ **37.** $1/(x+y)^2$ **39.** $x(x-1)$ **41.** $-1/(xy)$ **43.** $-9x^2/(x^3+3)^4$ **45.** 64
49. $2x-6x^{-1}$ **51.** $\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}x^{-2}$ **53.** $x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}x^{-1}$ **55.** 8.65×10^{-17} **57.** 1.54×10^{12} **59.** 1.0295×10^{11}
61. -4.3647×10^{-18} **63.** 9.4697×10^{20} **65.** $2(a+2b)^2$ **67.** $(x^2-xy+y^2)/(xy)$ **69.** $(y-x)/y$ **71.** 1.3×10^{25} lb
73. 10^{10} o 10 miles de millones; 6×10^{11} o 600 miles de millones **75.** 1.44×10^3 dólares por persona; \$1 440 por persona

Ejercicio A-6

1. 4 **3.** 64 **5.** -6 **7.** No es un número real **9.** $\frac{1}{125}$ **11.** $\frac{1}{27}$ **13.** $y^{3/5}$ **15.** $d^{1/3}$ **17.** $1/y^{1/3}$ **19.** $2x/y^2$
21. $1/(a^{1/4}b^{1/3})$ **23.** $xy^2/2$ **25.** $2b^2/(3a^2)$ **27.** $2/(3x^{7/12})$ **29.** $a^{1/2}/b^2$ **31.** $6m-2m^{19/3}$ **33.** $a-a^{1/2}b^{1/2}-6b$
35. $4x-9y$ **37.** $x+4x^{1/2}y^{1/2}+4y$ **39.** 29.52 **41.** 0.030 93 **43.** 5.421 **45.** 107.6
47. $x=y=1$ es una de muchas opciones **49.** $x=y=1$ es una de muchas opciones **51.** $3-\frac{1}{4}x^{-1/2}$ **53.** $\frac{3}{5}x^{-1/3}+\frac{1}{5}x^{-1/2}$
55. $\frac{1}{2}x^{5/3}-2x^{1/6}$ **57.** $a^{1/n}b^{1/m}$ **59.** $1/(x^{3m}y^{4n})$ **61.** (A) $x=-2$, por ejemplo (B) $x=2$, por ejemplo (C) No es posible
63. No **65.** $(x-3)/(2x-1)^{3/2}$ **67.** $(4x-3)/(3x-1)^{4/3}$ **69.** 1.920 unidades **71.** 428 pies

Ejercicio A-7

1. $\sqrt[5]{m^2}$ o $(\sqrt[5]{m})^2$ (primer preferido) **3.** $6\sqrt[5]{x^3}$ (no $\sqrt[5]{6x^3}$) **5.** $\sqrt[5]{(4xy^3)^2}$ **7.** $\sqrt{x+y}$ **9.** $b^{1/5}$ **11.** $5x^{3/4}$ **13.** $(2x^2y)^{3/5}$
15. $x^{1/3}+y^{1/3}$ **17.** -2 **19.** $3x^4y^2$ **21.** $2mn^2$ **23.** $2ab^2\sqrt{2ab}$ **25.** $2xy^2\sqrt[3]{2xy}$ **27.** $\sqrt{m}$ **29.** $\sqrt[15]{xy}$
31. $3x\sqrt[3]{3}$ **33.** $\sqrt{5}/5$ **35.** $2\sqrt{3x}$ **37.** $2\sqrt{2}+2$ **39.** $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **41.** $3x^2y^2\sqrt[3]{3x^2y}$ **43.** $n\sqrt[4]{2m^3n}$
45. $\sqrt[3]{a^2(b-a)}$ **47.** $\sqrt[4]{a^3b}$ **49.** $x^2y\sqrt[3]{6xy^2}$ **51.** En forma simplificada **53.** $\sqrt{2}/2$ o $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ **55.** $2a^2b\sqrt[3]{4a^2b}$
57. $\sqrt[4]{12xy^3}/2x$ o $[1/(2x)]\sqrt[4]{12xy^3}$ **59.** $(6y+9\sqrt{y})/(4y-9)$ **61.** $(38+11\sqrt{10})/117$ **63.** $\sqrt{x^2+9}+3$ **65.** $1/(\sqrt{t}+\sqrt{x})$
67. $1/(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})$ **69.** 0.2222 **71.** 1.934 **73.** 0.069 79 **75.** 2.073 **77.** Ambos son 1.059. **79.** Ambos son 0.6300.
81. $x \le 0$ **83.** Todos los números reales **85.** (A) y (E), (B) y (F), (C) y (D). **87.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$
89. $\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{z})[(x+y-z)+2\sqrt{xy}]}{(x+y-z)^2-4xy}$ **91.** $\frac{1}{\sqrt[3]{(x+h)^2}+\sqrt[3]{x(x+h)}+\sqrt[3]{x^2}}$
93. $\sqrt[kn]{x^{km}} = (x^{km})^{1/kn} = x^{km/kn} = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$

Ejercicio de repaso del apéndice A

1. (A) V (B) V (C) F (D) V (E) F (F) F *(A-1)* **2.** (A) $(y+z)x$ (B) $(2+x)+y$ (C) $2x+3x$ *(A-1)*
3. x^3+3x^2+5x-2 *(A-2)* **4.** $x^3-3x^2-3x+22$ *(A-2)* **5.** $3x^5+x^4-8x^3+24x^2+8x-64$ *(A-2)* **6.** 3 *(A-2)*
7. 1 *(A-2)* **8.** $14x^2-30x$ *(A-2)* **9.** $9m^2-25n^2$ *(A-2)* **10.** $6x^2-5xy-4y^2$ *(A-2)* **11.** $4a^2-12ab+9b^2$ *(A-2)*
12. $(3x-2)^2$ *(A-3)* **13.** Primo *(A-3)* **14.** $3n(2n-5)(n+1)$ *(A-3)* **15.** $(12a^3b-40b^2-5a)/(30a^3b^2)$ *(A-4)*
16. $(7x-4)/[6x(x-4)]$ *(A-4)* **17.** $(y+2)/[y(y-2)]$ *(A-4)* **18.** u *(A-4)* **19.** $6x^5y^{15}$ *(A-5)* **20.** $3u^4/v^2$ *(A-5)*
21. 6×10^2 *(A-5)* **22.** x^6/y^4 *(A-5)* **23.** $u^{7/3}$ *(A-6)* **24.** $3a^2/b$ *(A-6)* **25.** $3\sqrt[5]{x^2}$ *(A-7)* **26.** $-3(xy)^{2/3}$ *(A-7)*

27. $3x^2y\sqrt[3]{x^2y}$ *(A-7)* **28.** $6x^2y^3\sqrt{xy}$ *(A-7)* **29.** $2b\sqrt{3a}$ *(A-7)* **30.** $(3\sqrt{5} + 5)/4$ *(A-7)* **31.** $\sqrt[4]{y^3}$ *(A-7)*
32. $\{-3, -1, 1\}$ *(A-1)* **33.** Sustracción *(A-1)* **34.** Conmutativa (+) *(A-1)* **35.** Distributiva *(A-1)*
36. Asociativa (·) *(A-1)* **37.** Negativos *(A-1)* **38.** Identidad (+) *(A-1)* **39.** (A) V (B) F *(A-1)*
40. 0 y −3 son dos ejemplos de un número infinito. *(A-1)* **41.** (A) (a) y (d) (B) Ninguno *(A-2)* **42.** $4xy - 2y^2$ *(A-2)*
43. $m^4 - 6m^2n^2 + n^4$ *(A-2)* **44.** $10xh + 5h^2 - 7h$ *(A-2)* **45.** $2x^3 - 4x^2 + 12x$ *(A-2)* **46.** $x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3$ *(A-2)*
47. $(x - y)(7x - y)$ *(A-3)* **48.** Primo *(A-3)* **49.** $3xy(2x^2 + 4xy - 5y^2)$ *(A-3)* **50.** $(y - b)(y - b - 1)$ *(A-3)*
51. $3(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)$ *(A-3)* **52.** $(y - 2)(y + 2)^2$ *(A-3)* **53.** $x(x - 4)^2(5x - 8)$ *(A-3)* **54.** $\dfrac{(x - 4)(x + 2)^2}{x^3}$ *(A-4)*
55. $2m/[(m + 2)(m - 2)^2]$ *(A-4)* **56.** y^2/x *(A-4)* **57.** $(x - y)/(x + y)$ *(A-4)* **58.** $-ab/(a^2 + ab + b^2)$ *(A-4)*
59. Incorrecto, la forma correcta final es $(x^2 + 2x - 2)/(x - 1)$ *(A-4)* **60.** $\frac{1}{4}$ *(A-5)* **61.** $\frac{5}{9}$ *(A-5)* **62.** $3x^2/(2y^2)$ *(A-6)*
63. $27a^{1/6}/b^{1/2}$ *(A-6)* **64.** $x + 2x^{1/2}y^{1/2} + y$ *(A-6)* **65.** $6x + 7x^{1/2}y^{1/2} - 3y$ *(A-6)* **66.** 2×10^{-7} *(A-5)*
67. 3.213×10^6 *(A-5)* **68.** 4.434×10^{-5} *(A-5)* **69.** -4.541×10^{-6} *(A-5)* **70.** 128 800 *(A-6)* **71.** 0.01507 *(A-6)*
72. 0.3664 *(A-7)* **73.** 1.640 *(A-7)* **74.** 0.08726 *(A-6)* **75.** $-6x^2y^2\sqrt[5]{3x^2y}$ *(A-7)* **76.** $x\sqrt[3]{2x^2}$ *(A-7)*
77. $\sqrt[3]{12x^2y^2}/(2x)$ *(A-7)* **78.** $y\sqrt[3]{2x^2y}$ *(A-7)* **79.** $\sqrt[3]{2x^2}$ *(A-7)* **80.** $2x - 3\sqrt{xy} - 5y$ *(A-7)*
81. $(6x + 3\sqrt{xy})/(4x - y)$ *(A-7)* **82.** $(4u - 12\sqrt{uv} + 9v)/(4u - 9v)$ *(A-7)* **83.** $\sqrt{y^2 + 4} + 2$ *(A-7)*
84. $1/(\sqrt{t} + \sqrt{5})$ *(A-7)* **85.** $2 - \frac{3}{2}x^{-1/2}$ *(A-7)* **86.** $\frac{6}{11}$; racional *(A-1)*
87. (A) $\{-4, -3, 0, 2\}$ (B) $\{-3, 2\}$ *(A-1)* **88.** 0 *(A-7)* **89.** $x^3 + 8x^2 - 6x + 1$ *(A-2)*
90. $x(2a + 3x - 4)(2a - 3x - 4)$ *(A-3)* **91.** Los tres tienen el mismo valor. *(A-7)*
92. $\frac{2}{3}(x - 2)(x + 3)^4$ *(A-5)* **93.** $a^2b^2/(a^3 + b^3)$ *(A-5)* **94.** $x - y$ *(A-6)* **95.** x^{m-1} *(A-6)*
96. $(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})/(1 - x)$ *(A-7)* **97.** $1/(\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{5t} + \sqrt[3]{25})$ *(A-7)* **98.** x^{n+1} *(A-7)*
99. Volumen $= 3\pi(x + 2)^2 - 3\pi x^2 = 12\pi x + 12\pi$ pies^3 *(A-2)* **100.** $9.60 \times 10^3 =$ 9 600 kg/persona *(A-5)*
101. (A) 24 000 unidades (B) La producción se duplica a 48 000 unidades
(C) En cualquier nivel de producción, se duplican las unidades de capital y las horas de mano de obra duplican la producción. *(A-6)*
102. $R = \dfrac{R_1R_2R_3}{R_2R_3 + R_1R_3 + R_1R_2}$ *(A-4)*
103. (A) $A = 480 - 6x^2 = 6(80 - x^2)$ (B) $V = x(16 - 2x)(15 - 1.5x) = 240x - 54x^2 + 3x^3$ *(A-3)*

ÍNDICE DE APLICACIONES

ÍNDICE ANALÍTICO

Elipse (11-2)

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ $a > b > 0$
Focos: $F'(-c, 0), F(c, 0); c^2 = a^2 - b^2$

$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1,$ $a > b > 0$
Focos: $F'(0, -c), F(0, c); c^2 = a^2 - b^2$

Hipérbola (11-3)

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ Focos: $F'(-c, 0), F(c, 0); c^2 = a^2 + b^2$

$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ Focos: $F'(0, -c), F(0, c); c^2 = a^2 + b^2$

Fórmulas de traslación (11-4)

$x = x' + h, y = y' + k;$ $x' = x - h, y' = y - k$
Nuevo origen (h, k)

Ecuaciones paramétricas (11-5)

$x = f(t),$ $y = g(t),$ $t \in I$, donde I es un intervalo en la recta real

Identidades trigonométricas (5-5, 6-1 a 6-4)

Identidades recíprocas (5-2, 6-1)

$\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Identidades de cociente (5-2, 6-1)

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Ide[illegible] negativos (5-2, 6-1)

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ $\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$

Identidades pitagóricas (5-2, 6-1)

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$
$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Identidades de suma (6-2)

$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
$\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

Identidades de diferencia (6-2)

$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$
$\tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

Identidades de cofunción (6-2)

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \cos y$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \cot y$
$\operatorname{sen}(90° - \theta) = \cos\theta$ $\tan(90° - \theta) = \cot\theta$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \operatorname{sen} y$
$\cos(90° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$

Identidades de doble ángulo (6-3)

$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$$\cos 2x = \begin{cases} \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2\cot x}{\cot^2 x - 1} = \frac{2}{\cot x - \tan x}$$

Identidades de mitad de ángulo (6-3)

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

Los signos se determinan por el cuadrante en el que se encuentre $x/2$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Identidades producto-suma (6-4)

$$\operatorname{sen} x \cos y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)]$$

$$\cos x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y)]$$

$$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \tfrac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$$

$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

Identidades suma-producto (6-4)

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

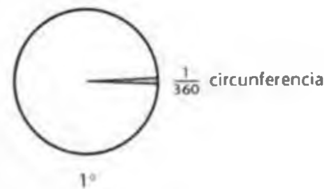
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

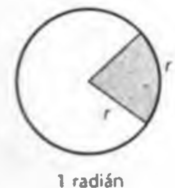
Grados y radianes (5-3)

$$\frac{\theta_D}{180°} = \frac{\theta_R}{\pi}$$

θ_D se mide en grados;
θ_R se mide en radianes

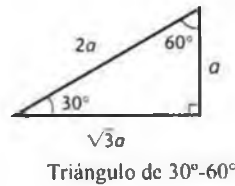


1°

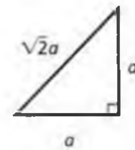


1 radián

Triángulos especiales (5-4)



Triángulo de 30°-60°



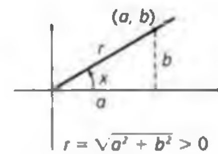
Triángulo de 45°

Funciones trigonométricas (5-2, 5-4)

$$\operatorname{sen} x = \frac{b}{r} \qquad \csc x = \frac{r}{b}$$

$$\cos x = \frac{a}{r} \qquad \sec x = \frac{r}{a}$$

$$\tan x = \frac{b}{a} \qquad \cot x = \frac{a}{b}$$

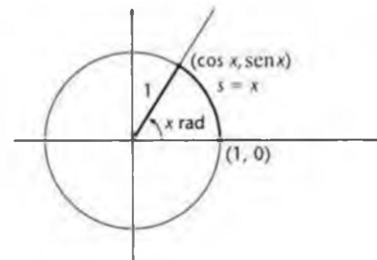


(x está en grados o radianes)

Para cualquier número real x y cualquier función trigonométrica T:

$T(x) = T(x \text{ radianes})$

Para un circulo unitario:



Funciones trigonométricas inversas (5-9)

$y = \operatorname{sen}^{-1} x$ significa $x = \operatorname{sen} y$, donde $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ y $-1 \le x \le 1$

$y = \cos^{-1} x$ significa $x = \cos y$, donde $0 \le y \le \pi$ y $-1 \le x \le 1$

$y = \tan^{-1} x$ significa $x = \tan y$, donde $-\pi/2 < y < \pi/2$ y x es cualquier número real